Auxiliar 3

Profesores: Federico Olmedo - Alejandro Hevia
Auxiliares: Ismael Correa - Javier Oliva - Fernanda Sanchirico - Lucas Torrealba
Nahuel Gomez - Nelson Marambio
Ayudantes: Daniel Báez - Félix Melo

P1.-

Demuestre que si m y n son enteros y mn es par, entonces m es par o n es par.

Solución

Si nos fijamos, no hay una forma muy directa de transformar nuestra hipótesis en lo que nos piden, probablemente intentarlo nos lleve a un punto muerto o peor. Pero lo que si podemos hacer con facilidad es quizá partir desde la conclusión y transformarla en la premisa, pero a priori eso no es muy legal. Lo que si es legal es usar el súper poder de la lógica para demostrar lo que queremos. Recordemos que demostrar $p \implies q$ es equivalente a demostrar $\neg q \implies \neg p$, usar este recurso se llama demostrar por contrapositiva. Así que veamos como sale.

Si queremos ser concretos, nos piden demostrar que dado el hecho de que m y n enteros, donde mn entonces necesariamente m o n, son pares. Si queremos proceder por contra reciproca, tenemos que a partir de nuestra conclusión negada, llegar a la negación de nuestra hipótesis original, de forma más elegante, esto se vería así:

Definiendo que $q_1 = m \textit{ es par}$ y $q_2 = n \textit{ es par}$, la negación de la conclusión original resulta ser $\neg(q_1 \vee q_2) = \neg q_1 \wedge \neg q_2$, es decir m y n no son pares, es decir $m = 2k_m + 1$ y $n = 2k_n + 1$, para algún k_m y k_n enteros, entonces:

$$\begin{aligned} mn &= (2k_m + 1)(2k_n + 1) \\ &= 4k_m k_n + 2k_m + 2k_n + 1 \\ &= 2(2k_m k_n + k_m + k_n) + 1 \\ &= 2k_{mn} + 1 \end{aligned}$$

De esta forma, queda demostrado que mn es impar, y junto con ello nuestra proposición original. :D

P2.-

Demuestra que si escoges 3 calcetines de un cajón que solo contiene calcetines de perritos y calcetines de gatitos, entonces debes obtener un par de calcetines de perrito o un par de calcetines de gatito.

Solución

En esta situación, puede llegar a sonar curioso el porqué sucede lo que nos piden demostrar, por qué un par? Bueno, si le damos una vuelta nos damos cuenta que tiene sentido, uno podría tentarse a optar por una demostración directa, pero podríamos llegar a un punto muerto, por ello tomaremos la ruta de la contradicción.

Definiendo que p = *Sacar 3 calcetines de un cajón que solo contiene calcetines de perritos y gatitos*, q_1 = *Se obtiene un par de calcetines de perrito* y q_2 = *Se obtiene un par de calcetines de gatito*, nos piden demostrar $p \implies (q_1 \vee q_2)$. Por contradicción, diremos $\neg(q_1 \vee q_2)$, es decir $(\neg q_1 \wedge \neg q_2)$, en español, supongamos que sacamos 3 calcetines y de esos no obtenemos un par de calcetines de perritos ni de gatitos. Eso quiere decir, por ejemplo, que de nuestros 3 calcetines, solo 1 será de perrito, dejando 2 calcetines disponibles para el otro tipo, pero eso es una contradicción con lo que acabamos de aseverar, pues esta obligado a haber un par de calcetines de gatito y viceversa.

P3.-

Demuestre que el $min(a, min(b, c)) = min(min(a, b), c)$

Solución

Si crees que hay que try hardearla, pues tienes toda la razón. Vamos a realizar un análisis por casos para demostrar lo que nos piden. Notemos que para ello tenemos que evaluar todas las permutaciones sobre los ordenes entre a, b y c, lo que son 6 casos:

Caso (i) : Tenemos $a \leq b \leq c$, si tomamos el mínimo entre b y c, obtenemos b y si lo comparamos con a, nos quedaremos con a. Ahora, si tomamos el mínimo entre a y b, obtenemos a, y si tomamos mínimo contra c, volvemos a tener a.

Caso (ii) : Tenemos $a \leq c \leq b$.

$$min(a, min(b, c)) = min(a, c) = a$$
$$min(min(a, b), c) = min(a, c) = a$$

Caso (iii) : Tenemos $b \leq a \leq c$.

$$min(a, min(b, c)) = min(a, b) = b$$
$$min(min(a, b), c) = min(b, c) = b$$

Caso (iv) : Tenemos $b \leq c \leq a$.

$$min(a, min(b, c)) = min(a, b) = b$$
$$min(min(a, b), c) = min(b, c) = b$$

Caso (iv) : Tenemos $c \leq b \leq a$.

$$min(a, min(b, c)) = min(a, c) = c$$
$$min(min(a, b), c) = min(b, c) = c$$

Caso (iv) : Tenemos $c \leq a \leq b$.

$$min(a, min(b, c)) = min(a, c) = c$$
$$min(min(a, b), c) = min(a, c) = c$$

Y Listo :D De todas formas, puede suceder que hasta este punto ya le identificamos la ruta, donde pueden existir muchos más casos e ilustrarlos todos es un cacho en verdad, para quienes nos da flojera ilustrar todos los casos posibles, existe un argumento que uno llama demostración por casos sin perdida de generalidad, cuál es su magia? Si eres capaz de identificar similitud entre los casos, basta con demostrar uno de ellos y el resto se obtiene por una ruta análoga.

P4.-

Definiendo la propiedad P(n) := Si $n > 1$, entonces $n^2 > n$, demuestre que P(0) es cierto.

Solución

Si reemplazamos n, obtenemos que nuestra premisa pasa a ser que $0 > 1$, lo cual es falso, de esta forma, automáticamente la propiedad se hace cierta. Recordemos que una hipótesis falsa garantiza que una implicancia se haga cierta.

P5.-

Todo entero positivo es la suma de los cuadrados de dos enteros distintos.

Solución

Este ejemplo, aparte de ejercitar una técnica de demostración, será ver como negamos cuantificadores. De forma elegante, lo que nos dicen es ∀ a, ∃b y c, enteros positivos distintos, tal que $a = b^2 + c^2$. Nosotros demostraremos que eso no se puede obtener, negaremos la aseveración y demostraremos su veracidad por medio de un caso. Si hacemos entrar la negación, eso se lee como ∃ a, donde ∀ b y c, enteros, no podemos obtener a de la forma $b^2 + c^2$, y ese a es, por ejemplo, 3, este numero podemos escribirlo solo como la suma de $1 + 2$, según las restricciones, donde ninguno de los dos sumandos es el cuadrado de otro entero. De esta forma, entregamos un contra ejemplo ante la aseveración pedida, demostrando así que es falsa.