

Ejercicio 4:

Inducción Estructural y Relaciones

Profesores: Alejandro Hevia, Federico Olmedo
Auxiliares: Ismael Correa, Nahuel Gómez, Nelson Marambio,
Javier Oliva, Fernanda Sanchirico, Lucas Torrealba,
Ayudantes: Felix Avilés, Daniel Báez

Definiciones

Definición 1 (Conjunto de palabras sobre un alfabeto Σ) *El conjunto Σ^* de palabras sobre el alfabeto finito Σ , se define inductivamente como sigue:*

- **Regla Base:** $\epsilon \in \Sigma^*$ (con ϵ la palabra vacía).
- **Regla Inductiva:** Dado un símbolo $x \in \Sigma$, y una palabra $w \in \Sigma^*$, luego $wx \in \Sigma^*$.

Definición 2 (Orden Lexicográfico sobre strings) *Dado un alfabeto finito Σ , parcialmente ordenado de acuerdo a la relación de orden $<_{\Sigma}$, entonces un orden lexicográfico \preceq es una relación de orden parcial sobre Σ^* definida recursivamente como sigue:*

- **Regla Base:** $\forall w \in \Sigma^*, \epsilon \preceq w$ (con ϵ la palabra vacía).
- **Regla Recursiva:** $\forall w_1, w_2 \in \Sigma^* \setminus \{\epsilon\}$ tales que $w_1 = x_1x_2\dots x_n$ y $w_2 = z_1z_2\dots z_m$:
 $w_1 \preceq w_2$ ssi $x_1 <_{\Sigma} z_1 \vee (x_1 = z_1 \wedge x_2\dots x_n \preceq z_2\dots z_m)$

Definición 3 (Operador de inversión de palabras) *Dado un alfabeto finito Σ , y una palabra $w \in \Sigma^*$, se define la inversión de w como la palabra w^R construida con los mismos símbolos que w pero en orden inverso.*

Definición 4 (Isomorfismo de strings) *Dadas dos palabras en Σ^* , $w_1 = x_1x_2\dots x_n$ y $w_2 = z_1z_2\dots z_n$, decimos que w_1 es isomorfa con w_2 , denotado por $w_1 \cong w_2$, si existe una biyección $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que $w_2 = f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)$.*

Definición 5 (Relaciones bien fundadas) *Dado un conjunto parcialmente ordenado $(X, <)$, este se dice bien fundado ssi no posee una secuencia de elementos infinitamente descendiente. Esto es, si no existe una secuencia $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{i+1} < x_i \forall i \in \mathbb{N}$.*

Definición 6 (Relaciones densas) *Asimismo, dado un conjunto parcialmente ordenado $(X, <)$, este se dice denso ssi $\forall x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 < x_2$, $\exists y \in X$ tal que $x_1 < y < x_2$.*

P1.-

1. De una definición recursiva del operador de inversión
2. Muestre que $\forall w_1, w_2 \in \Sigma^*$, se tiene que $(w_1 w_2)^R = w_2^R w_1^R$

P2.-

1. Demuestre que la relación de isomorfismo de strings \cong es relación de equivalencia.
2. Demuestre que, para cualquier alfabeto finito Σ con más de un símbolo, el conjunto de palabras Σ^* ordenado según el orden lexicográfico, no es ni bien fundado ni denso.

Asuma que el alfabeto Σ está bien ordenado de acuerdo a una relación de orden $<_{\Sigma}$.