Matemática Discreta

Clase 17: Funciones Generadoras, Parte 2: (Teorema del Binomio Extendido y Aplicaciones)

Federico Olmedo y Alejandro Hevia

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

Más sobre funciones generadoras y su uso

Funciones Generadoras y Coeficientes Binomiales

Utilidad de las funciones generadoras: Vimos que las funciones generadoras pueden ser usadas para resolver recurrencias (encontrar una forma cerrada).

También pueden usarse problemas de conteo más sofisticados. Para ello, debemos recordar y extender los coeficientes binomiales.

Recuerdo

Conteo y Coeficientes Binomiales: $C(n, k) = \binom{n}{k}$ es el "*número de maneras de escoger un subconjunto de k elementos desde un conjunto de n elementos*".

Deducción de la Fórmula: Dado un conjunto $\mathcal{C}$ de n elementos, $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$, para escoger un subconjunto S de k elementos, podemos pensar en primero escoger una lista ordenada $(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n})$ de k elementos como sigue:

- Escogemos el 1er elemento: hay n posibles opciones,
- Escogemos el 2do elemento: hay $n-1$ posibles opciones,
- ...
- Escogemos el k-ésimo elemento: hay $n-(k-1)$ posibles opciones.

Por la regla del producto, hay $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ posibles opciones. Pero esta cuenta incluye todas las secuencias: por ejemplo, si $k=2$, incluye (c_8, c_5) y (c_5, c_8).

Recuerdo

Pero contar secuencias requiere orden, contar conjuntos no. Un conjunto de k elementos puede ser representado por cualquier secuencia con los mismos k elementos. Y el número de secuencias con los mismos k elementos es $k! = k(k-1)\cdots 2\cdot 1$, el número de k-permutaciones. Por lo tanto,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

Esto se puede expresar en términos de factoriales, donde n entero y $n \geq k \geq 0$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Notación:

- $n^{\underline{k}} = \overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ factores}}$, *factorial descendente* o *"n elevado a k descendente"*
- n: *parámetro superior*, y k *parámetro inferior*.

Coeficiente Binomial Extendido

Sea r cualquier número real y sea k un entero, entonces el coeficiente binomial extendido $\binom{r}{k}$ es

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \dfrac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} = \dfrac{r^{\underline{k}}}{k!} & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Donde r es un real ahora pero k todavía es entero. Ojo que si $k > r \geq 0$, entonces $\binom{r}{k} = 0$.

Ejemplo 1: $r = -2$, $k = 3$,

$$\binom{-2}{3} = \frac{-2 \cdot -3 \cdot -4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -4\,.$$

Ejemplo 2: $r = 1/2$, $k = 3$,

$$\binom{1/2}{3} = \frac{1/2 \cdot (1/2-1) \cdot (1/2-2)}{3!} = \frac{1/2 \cdot -1/2 \cdot -3/2}{6} = \frac{1}{16}\,.$$

Negar el parámetro superior

Cuando r es negativo, hay una expresión más simple (supondremos que $k \geq 0$):

$$
\begin{aligned}
\binom{-r}{k} &= \frac{-r(-r-1)(-r-2)\cdots(-r-k+1)}{k!} \\
&= \frac{(-1)^k \cdot r(r+1)\cdot(r+2)\cdots(r+k-2)(r+k-1)}{k!} && \text{(factorizando } -1\text{)} \\
&= (-1)^k \frac{(r+k-1)(r+k-2)\cdots r}{k!} && \text{(reordenando factores)} \\
&= (-1)^k \frac{(r+k-1)!}{k!(r-1)!} && \text{(mult. por } (r-1)! \text{ arriba y abajo)} \\
&= (-1)^k \binom{r+k-1}{k}
\end{aligned}
$$

O sea $\binom{-r}{k} = (-1)^k \binom{r+k-1}{k}$.

Datos útiles (1/2)

Dato 1: Si n es un entero positivo, entonces $\binom{n}{n} = 1$. Pero si es entero $n < 0$,

$$\binom{n}{n} = 0$$

pues el parámetro inferior es negativo.

Ejercicio 2: Demuestre que

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1} \qquad \text{si } k \neq 0\,.$$

Datos útiles (2/2)

Dato 3: La identidad de simetría

$$\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k} \qquad \text{sólo se tienen cuando } r \geq 0\,.$$

¿Por qué? Consideremos $r = -1$. Si $k \geq 0$

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k$$

lo cual es 1 o -1. Pero $\binom{-1}{-1-k} = 0$ pues $-1-k < 0$.

Similar con $k = 0$, y $k < 0$ (comprobar!).

Beneficio: La identidad anterior sí funciona para todo valor de k, aún si negativa (pues en ambos lados es 0 si $k < 0$).

Teorema del Binomio Extendido

Teorema del Binomio Extendido

Sea r cualquier número real, y x, e y reales tales que $|x/y| < 1$, entonces

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$$

Notar que si $r > 0$ la sumatoria es finita, pero infinita si $r < 0$. (Convención, por simplicidad, asumiremos $a^0 = 1$, $\forall a$).

La condición $|x/y| < 1$ es para asegurar que la suma converja.

Caso especial: $y = 1$, entonces $(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$.

Vuelta a funciones generadoras

Ejemplo: Calcule como serie de potencias la función generadora $(1+x)^{-n}$.

$$(1+x)^{-n} \;=\; \sum_{k\geq 0} \binom{-n}{k} x^k \;=\; \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k$$

O sea, corresponde a la secuencia $\langle (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \rangle_{k\geq 0}$.

Ejemplo: Lo mismo para $(1-x)^{-n}$.

Reemplazando $-x$ por x,

$$(1-x)^{-n} \;=\; \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-x)^k \;=\; \sum_{k\geq 0} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

O sea, $(1-x)^{-n}$ corresponde a la secuencia $\langle \binom{n+k-1}{k} \rangle_{k\geq 0}$.

Usando funciones generadoras para demostrar identidades

Ejemplo

Ejemplo: Demuestre $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

<u>Dem:</u> Usando el teo. del binomio, el coeficiente de x^n en $(1+x)^{2n}$ es $\binom{2n}{n}$.

Por otro lado,

$$(1+x)^{2n} \; = \; ((1+x)^n)^2 \; = \; \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^n \right)^2$$

La mult. de dos sumatorias es una convolución, luego el coeficiente de x^n en esta expresión es:

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} \; = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

pero $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pues $n \geq k \geq 0$, luego $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} \; = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Si tenemos dos valores para el coeficiente de x^n en la función generadora $(1+x)^{2n}$, estos deben ser iguales, y se tiene el resultado.

Aplicación: Números de Catalan

Contando paréntesis (1/4)

Ejemplo: Resuelva la siguiente recurrencia:

$$C_0 = 1 \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \qquad \forall n \geq 1$$

(Esta recurrencia cuenta el número de paréntesis bien balanceados distintos de tamaño n).

Usemos funciones generadoras. Sea $C(x) = \sum_{n\geq 0} C_n x^n$. Primero re-escribiremos la recurrencia como $C_0 = 1$, $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$, $\forall n \geq 0$.

Aplicando nuestro método (multiplicar por x^n y luego sumar):

$$\sum_{n\geq 0} C_n x^n = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \right) x^n$$

Al lado derecho, obtenemos la convolución resultante de multiplicar $C(x)$ por sí misma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \right) x^n = \left(\sum_{n\geq 0} C_n x^n \right)^2 = C^2(x)$$

Contando paréntesis (2/4)

A la izquierda aparece $(1/x)(C(x) - 1)$. Al juntarlos, obtenemos la relación

$$\frac{1}{x}(C(x) - 1) = C^2(x)$$

esto es, $xC^2(x) - C(x) + 1 = 0$, *una ecuación cuadrada en* $C(x)$.

Resolviéndola, obtenemos $C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$.

pero, ¿cuál raíz es la correcta?

Para eso, usamos el caso base: $C_0 = 1$.Si probamos con $x = 0$ en la función generadora $C(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n$ debiéramos obtener C_0. Sin embargo, la raíz positiva nos da $\frac{2}{0} = \infty$. Sólo la raíz negativa nos da $\frac{0}{0}$, esto es, indeterminado, lo cual indica que la solución va por allá.

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

El problema ahora es dar la serie de potencias de $C(x)$. Se ve imposible! Al rescate el teorema del binomio!

Contando paréntesis (3/4)

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Usando el teorema del binomio extendido, podemos escribir

$$1 - (1-4x)^{1/2} \;=\; 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{0{,}5}{n} (-4)^n x^n$$

donde ahora calculamos

$$\begin{aligned}
\binom{0{,}5}{n}(-4)^n \;&=\; \frac{0{,}5(0{,}5-1)\cdots(0{,}5-n+1)}{n!}\cdot(-4)^n \;=\; \frac{2(2-4)\cdots(2-4n+4)}{n!}(-1)^n \\
&=\; -\frac{2(2)(6)\cdots(4n-6)}{n!} \;=\; -\frac{2^n(1)(3)\cdots(2n-3)}{n!} \\
&=\; -\frac{(n!\cdot 2^n)\cdot(1)(3)\cdots(2n-3)}{n!n!} \;=\; -\frac{(2n)!}{n!n!(2n-1)} \\
&=\; -\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

Contando paréntesis (4/4)

Entonces, la función generadora como serie de potencia es

$$1-(1-4x)^{1/2} \;=\; 1-\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n \;=\; 1-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$$

Con eso obtenemos

$$C(x) \;=\; \frac{1}{2x}(1-(1-4x)^{1/2}) \;=\; \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+2}\binom{2n+2}{n+1}x^n$$

esto es,

$$C_n \;=\; \frac{1}{4n+2}\binom{2n+2}{n+1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

luego de una simplificación directa.