Matemática Discreta

Clase 12: Conteo básico

Federico Olmedo y Alejandro Hevia

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

Motivación

La combinatoria es una rama de la matemática que intenta responder la pregunta

- **¿De cuántas maneras se puede llevar a cabo un procedimiento dado?**

Motivación

La combinatoria es una rama de la matemática que intenta responder la pregunta

- **¿De cuántas maneras se puede llevar a cabo un procedimiento dado?** o de manera similar
- **¿Cuántas configuraciones distintas admite un patrón o estructura dada?**

Motivación

La combinatoria es una rama de la matemática que intenta responder la pregunta

- **¿De cuántas maneras se puede llevar a cabo un procedimiento dado?** o de manera similar
- **¿Cuántas configuraciones distintas admite un patrón o estructura dada?**

Ejemplo

- ¿Cuántos passwords distintos de hata 16 caracteres existen, si un password debe conter mayúsculas, minúsculas y (al menos) un caracter numérico?
- ¿De cuántas maneras se pueden sentar n alumnos en una sala de m asientos (si $m \geq n$)?

Principios de conteo básico

Los dos principios fundamentales del conteo básico son:

Regla del producto: Se utiliza cuando un procedimiento se puede descomponer en múltiples tareas secuenciales (independientes).

Regla de la suma: Se utiliza cuando las maneras de realizar un procedimiento se pueden agrupar o clasificar en diferentes categorias (mutuamente excluyentes).

Regla del producto

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas permutaciones admite una lista de n elementos distintos?

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas permutaciones admite una lista de n elementos distintos?

Para determinar una permutación,

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas permutaciones admite una lista de n elementos distintos?

Para determinar una permutación,

- Debo elegir cuál va a ser el primer elemento de la permutación.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas permutaciones admite una lista de n elementos distintos?

Para determinar una permutación,

- Debo elegir cuál va a ser el primer elemento de la permutación. Hay n maneras distintas de hacer esto.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas permutaciones admite una lista de n elementos distintos?

Para determinar una permutación,

- Debo elegir cuál va a ser el primer elemento de la permutación. Hay n maneras distintas de hacer esto.
- Luego debo elegir cuál va a ser el segundo elemento de la permutación.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas permutaciones admite una lista de n elementos distintos?

Para determinar una permutación,

- Debo elegir cuál va a ser el primer elemento de la permutación. Hay n maneras distintas de hacer esto.
- Luego debo elegir cuál va a ser el segundo elemento de la permutación. Hay $n - 1$ maneras distintas de hacer esto

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas permutaciones admite una lista de n elementos distintos?

Para determinar una permutación,

- Debo elegir cuál va a ser el primer elemento de la permutación. Hay n maneras distintas de hacer esto.
- Luego debo elegir cuál va a ser el segundo elemento de la permutación. Hay $n - 1$ maneras distintas de hacer esto
- Luego debo elegir cuál va a ser el tercer elemento de la permutación.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas permutaciones admite una lista de n elementos distintos?

Para determinar una permutación,

- Debo elegir cuál va a ser el primer elemento de la permutación. Hay n maneras distintas de hacer esto.
- Luego debo elegir cuál va a ser el segundo elemento de la permutación. Hay $n-1$ maneras distintas de hacer esto
- Luego debo elegir cuál va a ser el tercer elemento de la permutación. Hay $n-2$ maneras distintas de hacer esto

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas permutaciones admite una lista de n elementos distintos?

Para determinar una permutación,

- Debo elegir cuál va a ser el primer elemento de la permutación. Hay n maneras distintas de hacer esto.
- Luego debo elegir cuál va a ser el segundo elemento de la permutación. Hay $n-1$ maneras distintas de hacer esto
- Luego debo elegir cuál va a ser el tercer elemento de la permutación. Hay $n-2$ maneras distintas de hacer esto
- ...
- Finalmente debo elegir cuál va a ser el último elemento de la permutación.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas permutaciones admite una lista de n elementos distintos?

Para determinar una permutación,

- Debo elegir cuál va a ser el primer elemento de la permutación. Hay n maneras distintas de hacer esto.
- Luego debo elegir cuál va a ser el segundo elemento de la permutación. Hay $n - 1$ maneras distintas de hacer esto
- Luego debo elegir cuál va a ser el tercer elemento de la permutación. Hay $n - 2$ maneras distintas de hacer esto
- ...
- Finalmente debo elegir cuál va a ser el último elemento de la permutación. Hay una única manera de hacer esto.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas permutaciones admite una lista de n elementos distintos?

Para determinar una permutación,

- Debo elegir cuál va a ser el primer elemento de la permutación. Hay n maneras distintas de hacer esto.
- Luego debo elegir cuál va a ser el segundo elemento de la permutación. Hay $n-1$ maneras distintas de hacer esto
- Luego debo elegir cuál va a ser el tercer elemento de la permutación. Hay $n-2$ maneras distintas de hacer esto
- ...
- Finalmente debo elegir cuál va a ser el último elemento de la permutación. Hay una única manera de hacer esto.

$\therefore$ Hay $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1$ permutaciones de una lista de n elementos.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f : A \to B$ debo decidir

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f \colon A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f\colon A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f \colon A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.
- cuál va a ser la imagen de a_2.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f\colon A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.
- cuál va a ser la imagen de a_2. Hay m posibles valores para $f(a_2)$.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f\colon A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.
- cuál va a ser la imagen de a_2. Hay m posibles valores para $f(a_2)$.
- cuál va a ser la imagen de a_3.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f \colon A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.
- cuál va a ser la imagen de a_2. Hay m posibles valores para $f(a_2)$.
- cuál va a ser la imagen de a_3. Hay m posibles valores para $f(a_3)$.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f\colon A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.
- cuál va a ser la imagen de a_2. Hay m posibles valores para $f(a_2)$.
- cuál va a ser la imagen de a_3. Hay m posibles valores para $f(a_3)$.
- $\ldots$

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f \colon A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.
- cuál va a ser la imagen de a_2. Hay m posibles valores para $f(a_2)$.
- cuál va a ser la imagen de a_3. Hay m posibles valores para $f(a_3)$.
- ...
- cuál va a ser la imagen de a_n.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f : A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.
- cuál va a ser la imagen de a_2. Hay m posibles valores para $f(a_2)$.
- cuál va a ser la imagen de a_3. Hay m posibles valores para $f(a_3)$.
- $\ldots$
- cuál va a ser la imagen de a_n. Hay m posibles valores para $f(a_n)$.

Intuición detrás de la regla del producto

Pregunta: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f \colon A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.
- cuál va a ser la imagen de a_2. Hay m posibles valores para $f(a_2)$.
- cuál va a ser la imagen de a_3. Hay m posibles valores para $f(a_3)$.
- ...
- cuál va a ser la imagen de a_n. Hay m posibles valores para $f(a_n)$.

$\therefore$ Hay $\overbrace{m \cdot m \cdot \ \cdots \ \cdot m}^{n \text{ veces}}$ funciones de A a B.

Regla del producto

Regla del producto

Asuma que un procedimiento puede ser dividido en una secuencia de m tareas $T_1, \ldots, T_m$.

Regla del producto

Regla del producto

Asuma que un procedimiento puede ser dividido en una secuencia de m tareas $T_1, \ldots, T_m$. Si cada tarea T_i puede ser realizada de n_i maneras, sin importar cómo se han realizado las tareas anteriores,

Regla del producto

Regla del producto

Asuma que un procedimiento puede ser dividido en una secuencia de m tareas $T_1, \ldots, T_m$. Si cada tarea T_i puede ser realizada de n_i maneras, sin importar cómo se han realizado las tareas anteriores, entonces el procedimiento puede ser realizado de $n_1 n_2 \cdots n_m$ maneras.

Aplicaciones de la regla del producto

Ejemplo: Determinar cuántos subconjuntos admite un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de $n \geq 1$ elementos.

Aplicaciones de la regla del producto

Ejemplo: Determinar cuántos subconjuntos admite un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de $n \geq 1$ elementos.

Cada subconjunto queda unívocamente determinado al responder las preguntas:

Aplicaciones de la regla del producto

Ejemplo: Determinar cuántos subconjuntos admite un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de $n \geq 1$ elementos.

Cada subconjunto queda unívocamente determinado al responder las preguntas:

- ¿a_1 está en el subconjunto?,

Aplicaciones de la regla del producto

Ejemplo: Determinar cuántos subconjuntos admite un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de $n \geq 1$ elementos.

Cada subconjunto queda unívocamente determinado al responder las preguntas:

- ¿a_1 está en el subconjunto?,
- ¿a_2 está en el subconjunto?,

Aplicaciones de la regla del producto

Ejemplo: Determinar cuántos subconjuntos admite un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de $n \geq 1$ elementos.

Cada subconjunto queda unívocamente determinado al responder las preguntas:

- ¿a_1 está en el subconjunto?,
- ¿a_2 está en el subconjunto?,
- ...
- ¿a_n está e n el subconjunto?

Aplicaciones de la regla del producto

Ejemplo: Determinar cuántos subconjuntos admite un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de $n \geq 1$ elementos.

Cada subconjunto queda unívocamente determinado al responder las preguntas:

- ¿a_1 está en el subconjunto?,
- ¿a_2 está en el subconjunto?,
- $\ldots$
- ¿a_n está e n el subconjunto?

Cada pregunta tiene una respuesta binaria, independiente de las respuestas anteriores.

Aplicaciones de la regla del producto

Ejemplo: Determinar cuántos subconjuntos admite un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de $n \geq 1$ elementos.

Cada subconjunto queda unívocamente determinado al responder las preguntas:

- ¿a_1 está en el subconjunto?,
- ¿a_2 está en el subconjunto?,
- ...
- ¿a_n está e n el subconjunto?

Cada pregunta tiene una respuesta binaria, independiente de las respuestas anteriores. Por la regla del producto hay 2^n subconjuntos (del conjunto A).

Requisito de la regla del producto

Regla del producto

Asuma que un procedimiento puede ser dividido en una secuencia de m tareas $T_1, \ldots, T_m$. Si cada tarea T_i puede ser realizada de n_i maneras, sin importar cómo se han realizado las tareas anteriores, entonces el procedimiento puede ser realizado de $n_1 n_2 \cdots n_m$ maneras.

Importante: Para que la regla del producto sea válida es indispensable que cada tarea T_i pueda ser realizada de n_i maneras independientemente de cómo se realizaron las tareas anteriores.

Requisito de la regla del producto

Ejemplo: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Requisito de la regla del producto

Ejemplo: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f : A \to B$ debo decidir

Requisito de la regla del producto

Ejemplo: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f : A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.

Requisito de la regla del producto

Ejemplo: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f\colon A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.
- cuál va a ser la imagen de a_2. Hay m posibles valores para $f(a_2)$, independientemente de la elección hecha para el valor de $f(a_1)$

Requisito de la regla del producto

Ejemplo: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f : A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.
- cuál va a ser la imagen de a_2. Hay m posibles valores para $f(a_2)$, independientemente de la elección hecha para el valor de $f(a_1)$
- cuál va a ser la imagen de a_3. Hay m posibles valores para $f(a_3)$, independientemente de la elección hecha para los valores de $f(a_1)$ y $f(a_2)$

Requisito de la regla del producto

Ejemplo: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f\colon A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.
- cuál va a ser la imagen de a_2. Hay m posibles valores para $f(a_2)$, independientemente de la elección hecha para el valor de $f(a_1)$
- cuál va a ser la imagen de a_3. Hay m posibles valores para $f(a_3)$, independientemente de la elección hecha para los valores de $f(a_1)$ y $f(a_2)$
- $\ldots$
- cuál va a ser la imagen de a_n. Hay m posibles valores para $f(a_n)$. independientemente de la elección hecha para los valores de $f(a_1)$, $f(a_2)$, $\ldots$, $f(a_{n-1})$.

Requisito de la regla del producto

Ejemplo: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a un conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$?

Para determinar completamente una función $f\colon A \to B$ debo decidir

- cuál va a ser la imagen de a_1. Hay m posibles valores para $f(a_1)$.
- cuál va a ser la imagen de a_2. Hay m posibles valores para $f(a_2)$, independientemente de la elección hecha para el valor de $f(a_1)$
- cuál va a ser la imagen de a_3. Hay m posibles valores para $f(a_3)$, independientemente de la elección hecha para los valores de $f(a_1)$ y $f(a_2)$
- ...
- cuál va a ser la imagen de a_n. Hay m posibles valores para $f(a_n)$. independientemente de la elección hecha para los valores de $f(a_1)$, $f(a_2)$, ..., $f(a_{n-1})$.

$\therefore$ Por la regla del producto, hay $\overbrace{m \cdot m \cdot \;\cdots\; \cdot m}^{n \text{ veces}}$ funciones de A a B.

Ejercicios

Ejercicio: ¿Cuántos strings de largo 7 sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ existen?

Ejercicio: Una compañía con m trabajadores ha arrendado una casa con n oficinas, siendo $m \leq n$. ¿Cuántas maneras hay de disponer a los trabajadores en diferentes oficinas?

Ejercicio*: ¿Cuántos números enteros de tres dígitos (es decir, entre 100 y 999) son pares?

Ejercicio*: ¿Cuántas funciones inyectivas hay de un conjunto de n elementos en uno de m elementos?

Ejercicios

Ejercicio: Una compañía con m trabajadores ha arrendado una casa con n oficinas, siendo $m \leq n$. ¿Cuántas maneras hay de disponer a los trabajadores en diferentes oficinas?

Ejercicios

Ejercicio*: ¿Cuántas funciones inyectivas hay de un conjunto de n elementos en uno de m elementos?

Forma alternativa de la regla del producto

Dados m conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_m$,

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| \quad = \quad |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ \cdots \ \cdot |A_m|$$

Forma alternativa de la regla del producto

Forma alternativa de la regla del producto

Dados m conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_m$,

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| \quad = \quad |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ \cdots \ \cdot |A_m|$$

Observación: Para conectar esta formulación de la regla del producto con la original, debemos interpretar a A_i como el conjunto de maneras de realizar la tarea T_i.

Regla de la suma

Intuición detras de la regla de la suma

Pregunta: Si en el curso hay 10 estudiantes hinchas del Colo-Colo y 12 estudiantes hinchas de la U de Chile (además de otros tantos de otros equipos), ¿cuántos estudiantes hay que sean hichas del Colo-Colo o de la U de Chile?

Intuición detras de la regla de la suma

Pregunta: Si en el curso hay 10 estudiantes hinchas del Colo-Colo y 12 estudiantes hinchas de la U de Chile (además de otros tantos de otros equipos), ¿cuántos estudiantes hay que sean hichas del Colo-Colo o de la U de Chile?

Hay $10 + 12 = 22$.

Intuición detras de la regla de la suma

Pregunta: Si en el curso hay 10 estudiantes hinchas del Colo-Colo y 12 estudiantes hinchas de la U de Chile (además de otros tantos de otros equipos), ¿cuántos estudiantes hay que sean hichas del Colo-Colo o de la U de Chile?

Hay $10 + 12 = 22$.

Pregunta: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o con 4?

Intuición detras de la regla de la suma

Pregunta: Si en el curso hay 10 estudiantes hinchas del Colo-Colo y 12 estudiantes hinchas de la U de Chile (además de otros tantos de otros equipos), ¿cuántos estudiantes hay que sean hichas del Colo-Colo o de la U de Chile?

Hay $10 + 12 = 22$.

Pregunta: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o con 4?

Por la regla del producto hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3

Intuición detras de la regla de la suma

Pregunta: Si en el curso hay 10 estudiantes hinchas del Colo-Colo y 12 estudiantes hinchas de la U de Chile (además de otros tantos de otros equipos), ¿cuántos estudiantes hay que sean hichas del Colo-Colo o de la U de Chile?

Hay $10 + 12 = 22$.

Pregunta: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o con 4?

Por la regla del producto hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3 y $10 \cdot 10 = 100$ que comienzan con 4.

Intuición detras de la regla de la suma

Pregunta: Si en el curso hay 10 estudiantes hinchas del Colo-Colo y 12 estudiantes hinchas de la U de Chile (además de otros tantos de otros equipos), ¿cuántos estudiantes hay que sean hichas del Colo-Colo o de la U de Chile?

Hay $10 + 12 = 22$.

Pregunta: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o con 4?

Por la regla del producto hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3 y $10 \cdot 10 = 100$ que comienzan con 4. Hay, por lo tanto, $100 + 100 = 200$ números (de tres dígitos) que comiencen con 3 o 4.

Regla de la suma

Regla de la suma

Suponga que una tarea puede realizarse de n_1 o de n_2 . . . o de n_m maneras, donde ninguna de las n_i maneras coincide con alguna de las n_j maneras (para $i \neq j$ en $1 \ldots m$). Entonces la tarea puede realizarse de $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ maneras.

Regla de la suma

Regla de la suma

Suponga que una tarea puede realizarse de n_1 o de n_2 . . . o de n_m maneras, donde ninguna de las n_i maneras coincide con alguna de las n_j maneras (para $i \neq j$ en $1 \ldots m$). Entonces la tarea puede realizarse de $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ maneras.

Forma alternativa de la regla de la suma

Si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ es una colección de conjuntos finitos y disjuntos dos a dos ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| \quad = \quad |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|$$

Requisito de la regla de la suma

Para que la regla de la suma sea válida es indispensable que ninguna manera de realizar la tarea esté contemplada en más de uno de los grupos, o equivalentemente, en la formulación en términos de conjuntos, que los conjuntos sean disjuntos dos a dos.

Requisito de la regla de la suma

Para que la regla de la suma sea válida es indispensable que ninguna manera de realizar la tarea esté contemplada en más de uno de los grupos, o equivalentemente, en la formulación en términos de conjuntos, que los conjuntos sean disjuntos dos a dos.

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o con 4?

Requisito de la regla de la suma

Para que la regla de la suma sea válida es indispensable que ninguna manera de realizar la tarea esté contemplada en más de uno de los grupos, o equivalentemente, en la formulación en términos de conjuntos, que los conjuntos sean disjuntos dos a dos.

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o con 4?

Hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3 y $10 \cdot 10 = 100$ que comienzan con 4.

Requisito de la regla de la suma

Para que la regla de la suma sea válida es indispensable que ninguna manera de realizar la tarea esté contemplada en más de uno de los grupos, o equivalentemente, en la formulación en términos de conjuntos, que los conjuntos sean disjuntos dos a dos.

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o con 4?

Hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3 y $10 \cdot 10 = 100$ que comienzan con 4. Como los conjuntos de números que comienzan con 3 y que comienzan con 4 son disjuntos entre sí,

Requisito de la regla de la suma

Para que la regla de la suma sea válida es indispensable que ninguna manera de realizar la tarea esté contemplada en más de uno de los grupos, o equivalentemente, en la formulación en términos de conjuntos, que los conjuntos sean disjuntos dos a dos.

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o con 4?

Hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3 y $10 \cdot 10 = 100$ que comienzan con 4. Como los conjuntos de números que comienzan con 3 y que comienzan con 4 son disjuntos entre sí, por la regla de la suma hay $100 + 100 = 200$ números (de tres dígitos) que comiencen con 3 o 4.

Requisito de la regla de la suma

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o que acaben con 4?

Requisito de la regla de la suma

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o que acaben con 4?

Hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3

Requisito de la regla de la suma

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o que acaben con 4?

Hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3 y $9 \cdot 10 = 90$ que acaban con 4.

Requisito de la regla de la suma

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o que acaben con 4?

Hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3 y $9 \cdot 10 = 90$ que acaban con 4.

Pregunta: ¿Puedo concluir que hay $100 + 90 = 190$ números que comienzan con 3 o que acaban con 4?

Requisito de la regla de la suma

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o que acaben con 4?

Hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3 y $9 \cdot 10 = 90$ que acaban con 4.

Pregunta: ¿Puedo concluir que hay $100 + 90 = 190$ números que comienzan con 3 o que acaban con 4?

No, porque los conjuntos de números que comienzan con 3 y que acaban con 4 no son disjuntos.

Requisito de la regla de la suma

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o que acaben con 4?

Hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3 y $9 \cdot 10 = 90$ que acaban con 4.

Pregunta: ¿Puedo concluir que hay $100 + 90 = 190$ números que comienzan con 3 o que acaban con 4?

No, porque los conjuntos de números que comienzan con 3 y que acaban con 4 no son disjuntos.

Para estos casos contamos con una generalización de la regla de la suma, llamada principio de inclusión-exclusión.

Principio de inclusión-exclusión

Principio de inclusión-exclusión

Principio de inclusión-exclusión (para el caso de dos conjuntos)

Para todo par de conjuntos finitos A_1 y A_2, tenemos que

$$|A_1 \cup A_2| \quad = \quad |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

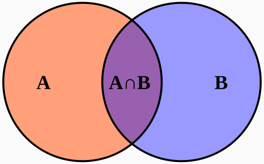
Principio de inclusión-exclusión

Principio de inclusión-exclusión (para el caso de dos conjuntos)

Para todo par de conjuntos finitos A_1 y A_2, tenemos que

$$|A_1 \cup A_2| \quad = \quad |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Intuición: Al sumar $|A| + |B|$ estamos considerando dos veces los elementos en $A \cap B$, por eso debemos restarlo de $|A| + |B|$ para recuperar $|A \cup B|$.



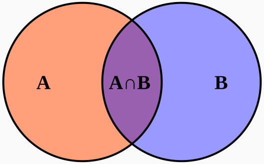
Principio de inclusión-exclusión

Principio de inclusión-exclusión (para el caso de dos conjuntos)

Para todo par de conjuntos finitos A_1 y A_2, tenemos que

$$|A_1 \cup A_2| \quad = \quad |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Intuición: Al sumar $|A| + |B|$ estamos considerando dos veces los elementos en $A \cap B$, por eso debemos restarlo de $|A| + |B|$ para recuperar $|A \cup B|$.



Luego generalizaremos el principio de inclusión-exclusión para más de dos conjuntos.

Aplicaciones del principio de inclusión-exclusión

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o que acaben con 4?

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o que acaben con 4?

- Hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3.

Aplicaciones del principio de inclusión-exclusión

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o que acaben con 4?

- Hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3.
- Hay $9 \cdot 10 = 90$ números que acaban con 4.

Aplicaciones del principio de inclusión-exclusión

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o que acaben con 4?

- Hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3.
- Hay $9 \cdot 10 = 90$ números que acaban con 4.
- Hay 10 números que simultáneamente comienzan con 3 y acaban con 4.

Aplicaciones del principio de inclusión-exclusión

Ejemplo: ¿Cuántos números (decimales) de tres dígitos hay que comiencen con 3 o que acaben con 4?

- Hay $10 \cdot 10 = 100$ números que comienzan con 3.
- Hay $9 \cdot 10 = 90$ números que acaban con 4.
- Hay 10 números que simultáneamente comienzan con 3 y acaban con 4.

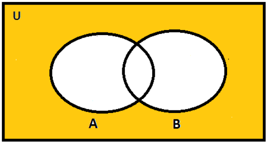
Por el principio de inclusión-exclusión hay $100 + 90 - 10 = 180$ números (de tres dígitos) que comienzan con 3 o acaban con 4.

Aplicaciones del principio de inclusión-exclusión

Ejemplo: ¿Cuántos números hay entre 1 y 100 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

Ejemplo: ¿Cuántos números hay entre 1 y 100 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

$$
\begin{aligned}
U &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100\} \\
A &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100 \text{ y } 3 \mid n\} \\
B &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100 \text{ y } 5 \mid n\}
\end{aligned}
$$

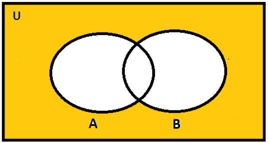


El problema pregunta por la cardinalidad del área amarilla,

Aplicaciones del principio de inclusión-exclusión

Ejemplo: ¿Cuántos números hay entre 1 y 100 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

$$
\begin{aligned}
U &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100\} \\
A &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100 \text{ y } 3 \mid n\} \\
B &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100 \text{ y } 5 \mid n\}
\end{aligned}
$$



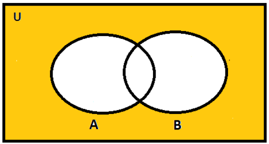
El problema pregunta por la cardinalidad del área amarilla, es decir, por

$$|U \setminus (A \cup B)|$$

Aplicaciones del principio de inclusión-exclusión

Ejemplo: ¿Cuántos números hay entre 1 y 100 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

$$
\begin{aligned}
U &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100\} \\
A &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100 \text{ y } 3 \mid n\} \\
B &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100 \text{ y } 5 \mid n\}
\end{aligned}
$$



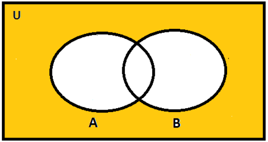
El problema pregunta por la cardinalidad del área amarilla, es decir, por

$$|U \setminus (A \cup B)| = |U| - |A \cup B|$$

Aplicaciones del principio de inclusión-exclusión

Ejemplo: ¿Cuántos números hay entre 1 y 100 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

$$\begin{aligned} U &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100\} \\ A &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100 \text{ y } 3 \,|\, n\} \\ B &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100 \text{ y } 5 \,|\, n\} \end{aligned}$$



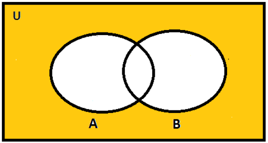
El problema pregunta por la cardinalidad del área amarilla, es decir, por

$$\begin{aligned} |U \setminus (A \cup B)| &= |U| - |A \cup B| \\ &= |U| - |A| - |B| + |A \cap B| \end{aligned}$$

Aplicaciones del principio de inclusión-exclusión

Ejemplo: ¿Cuántos números hay entre 1 y 100 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

$$\begin{aligned} U &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100\} \\ A &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100 \text{ y } 3 \mid n\} \\ B &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100 \text{ y } 5 \mid n\} \end{aligned}$$

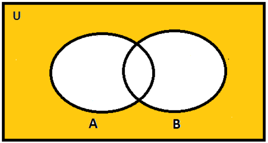


El problema pregunta por la cardinalidad del área amarilla, es decir, por

$$\begin{aligned} |U \setminus (A \cup B)| &= |U| - |A \cup B| \\ &= |U| - |A| - |B| + |A \cap B| \\ &= 100 - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor \end{aligned}$$

Ejemplo: ¿Cuántos números hay entre 1 y 100 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

$$\begin{aligned} U &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100\} \\ A &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100 \text{ y } 3 \mid n\} \\ B &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100 \text{ y } 5 \mid n\} \end{aligned}$$



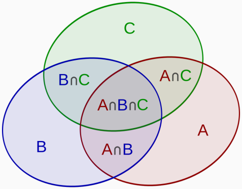
El problema pregunta por la cardinalidad del área amarilla, es decir, por

$$\begin{aligned} |U \setminus (A \cup B)| &= |U| - |A \cup B| \\ &= |U| - |A| - |B| + |A \cap B| \\ &= 100 - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor \\ &= 53 \end{aligned}$$

Aplicaciones del principio de inclusión-exclusión

Ejercicio: Usar el principio de inclusión-exclusión presentado para dos conjuntos para probar la siguiente extensión a tres conjuntos:

$$|A \cup B \cup C| \;=\; |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Aplicaciones del principio de inclusión-exclusión

Ejercicio: Supongamos que existen sólo billetes de \$2, \$3 y \$5. Usar el resultado del ejercicio anterior para determinar cuántas cantidades (entera) de plata entre \$1 y \$100 inclusive se pueden pagar usando sólo un único tipo de billete.

Aplicaciones conjuntas de todas las reglas

Ejercicio*: ¿Cuántos strings de largo 10 sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ contienen 5 consecutivos 0s?

Aplicaciones conjuntas de todas las reglas

Ejercicio*: ¿Cuántos strings de largo 10 sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ contienen 5 consecutivos 0s?

Ejercicio: ¿Cuántos strings de largo 10 sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ contienen 5 consecutivos 0s o 5 consecutivos 1s?

Aplicaciones conjuntas de todas las reglas

Ejercicio: ¿Cuántos strings de largo 8 sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ contienen 3 consecutivos 0s o 4 consecutivos 1s?

Aplicaciones conjuntas de todas las reglas

Ejercicio: ¿Cuántos strings de largo n sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ son palíndromes?