Matemática Discreta

Clase 5: Lógica de predicados

Federico Olmedo
Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

Contenido clase de hoy

1. Conceptos básicos
2. Deducción natural
3. Equivalencia

Conceptos básicos

Limitaciones de la lógica proposicional

La lógica proposicional es un buen punto de partida, pero no permite capturar adecuadamente ciertos razonamientos:

> *Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto Sócrates es mortal.*

Para expresar este tipo de razonamiento necesito:

- Describir propiedades de o relaciones entre los elementos del dominio en cuestión:

$$\mathit{hombre}(x), \quad \mathit{mortal}(x)$$

- Cuantificar sobre los elementos del dominio en cuestión

$$\forall x \ldots$$

Lógica de predicados al rescate

Con un lenguaje de dichas características, el razonamiento anterior se puede capturar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \forall x.\ \mathit{hombre}(x) \rightarrow \mathit{mortal}(x) \\ \mathit{hombre}(\text{Sócrates}) \\ \hline \mathit{mortal}(\text{Sócrates}) \end{array}$$

Sintaxis de la lógica de predicados

Las fórmulas de la lógica de predicados se forman a partir de

- Un conjunto de (símbolos de) predicados, cada uno con su respectiva aridad (número de argumentos): $P, Q, R, \ldots$
- Un conjunto de variables: $x, y, z, \ldots$
- Un (símbolo de) predicado binario distinguido que verifica si dos variables hacen referencia al mismo elemento del dominio de discurso: $=$
- El cuantificador universal y el cuantificador existencial: $\forall, \quad \exists$
- Los conectivos de la lógica proposicional: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Ejemplo: Traducción del lenguaje natural

Suponiendo que nuestro dominio de discurso es el conjunto de todas las personas y usando los predicados $\mathit{confia}(\cdot, \cdot)$, $\mathit{estafador}(\cdot)$, $\mathit{loco}(\cdot)$, $\mathit{conoce}(\cdot, \cdot)$, $\mathit{pariente}(\cdot, \cdot)$, $\mathit{rico\text{-}repente}(\cdot)$, traducir las siguientes enunciados:

- Nadie confía en un estafador:

$$\neg\exists x.\, \exists y.\, \mathit{confia}(x, y) \wedge \mathit{estafador}(y)$$

- Cualquiera que confíe en un estafador está loco:

$$\forall x.\, (\exists y.\, \mathit{estafador}(y) \wedge \mathit{confia}(x, y)) \rightarrow \mathit{loco}(x)$$

Ejemplo: Traducción del lenguaje natural

- Todos conocen a alguien que es pariente de un estafador:

$$\forall x.\ \big(\exists y.\ \mathit{conoce}(x, y) \land \exists z.\ \mathit{pariente}(y, z) \land \mathit{estafador}(z)\big)$$

- Cualquiera que se haya vuelto rico de repente o bien es un estafador o bien conoce a un estafador:

$$\forall x.\ \mathit{rico\text{-}repente}(x) \to \big(\mathit{estafador}(x) \lor \exists y.\ \mathit{conoce}(x, y) \land \mathit{estafador}(y)\big)$$

Observaciones

- Los predicados pueden aplicarse sólo sobre variables. Por ejemplo, la siguiente fórmula *no* está bien formada:

$$R(x, S(y))$$

- Los cuantificadores introducen una "zona de influencia" de las variables que introducen, llamada alcance del cuantificador:

$$\forall x.\ \exists y.\ R(x, y, z)$$

$$\forall x.\ \exists y.\ \underbrace{R(x, y, z)}_{\text{alcance del } \exists}$$

$$\forall x.\ \underbrace{\exists y.\ R(x, y, z)}_{\text{alcance del } \forall}$$

Observaciones

- No confundir ocurrencias libres (no capturadas por ningún cuantificador) con ocurrencias ligadas (capturadas por algún cuantificador) de la misma variable:

$$P(x) \wedge \forall x.\, S(x)$$

- Las variables introducidas por un cuantificador son variables mudas: pueden ser renombradas (a cualquier otra variable que no aparezca ya en la fórmula) sin alterar el significado de la fórmula:

$$\forall x.\ \exists y.\ R(x, y, z) \ \equiv\ \forall a.\ \exists b.\ R(a, b, z)$$

Observaciones

- No hay un orden de precedencia estándar de los cuantificadores $\forall, \exists$ respecto a los conectivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, por lo que en caso de ambigüedad se recomienda usar siempre paréntesis:

$$\forall x.\, P(x) \vee R(x) \quad \longmapsto \quad (\forall x.\, P(x)) \vee R(x) \quad \text{o} \quad \forall x.\, (P(x) \vee R(x))$$

Enriqueciendo la lógica con términos

Como fue presentada la lógica de predicados hasta ahora, la única manera de designar elementos del dominio de discurso es a través de las variables.

Sin embargo, resulta conveniente tambien incluir constantes que designan elementos del dominio de discurso, y funciones que manipulan también dichos elementos.

Dominio de discurso:
conjunto de seres vivos

$$\frac{\begin{array}{l} \forall x.\ \mathit{hombre}(x) \rightarrow \mathit{mortal}(x) \\ \mathit{hombre}(\text{Sócrates}) \end{array}}{\mathit{mortal}(\text{Sócrates})}$$

Dominio de discurso:
conjunto de los números enteros

$$\begin{array}{l} \forall x.\ \mathit{primo}(x) \wedge x > 2 \\ \qquad \rightarrow \mathit{compuesto}(\mathit{succ}(x)) \end{array}$$

Enriqueciendo la lógica con términos

Dominio de discurso:
conjunto de seres vivos

$$\begin{array}{l} \forall x.\ \mathit{hombre}(x) \rightarrow \mathit{mortal}(x) \\ \mathit{hombre}(\text{Sócrates}) \\ \hline \mathit{mortal}(\text{Sócrates}) \end{array}$$

Dominio de discurso:
conjunto de los números enteros

$$\begin{array}{l} \forall x.\ \mathit{primo}(x) \land x > 2 \\ \qquad \rightarrow \mathit{compuesto}(\mathit{succ}(x)) \end{array}$$

Bajo esta extensión de la lógica,

- Un término (que designa un elemento del dominio del discurso) puede ser una variable, una constante o la aplicación de una función sobre otros términos.
- Un predicado puede ser aplicado sobre cualquier término (no sólo sobre variables).

Ejemplo: Capturando enunciados matemáticos formalmente

Decimos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ sii para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ cada vez que $0 < |x - a| < \delta$.

Asumiendo que su dominio de discurso es $\mathbb{R}$, escriba una fórmula de la lógica de predicados que capture que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

$$\forall \epsilon.\, \epsilon > 0 \to \big(\exists \delta.\, \delta > 0 \land \forall x.\, 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon\big)$$

Deducción natural

Estableciendo la validez de argumentos

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x.\ P(x) \rightarrow Q(x) \\ P(a)\end{array}}{Q(a)}$$

- Para establecer la validez de un argumento en la lógica de predicados, ya *no podemos* usar el enfoque semántico basado en tablas de verdad porque hay un número infinito de interpretaciones de las fórmulas (filas de la tabla).

- Sin embargo, sí podemos utilizar el enfoque deductivo, extendiendo el conjunto de reglas ya visto con nuevas reglas para manipular los cuantificadores $\forall$ y $\exists$ y el predicado distinguido de $=$.

Reglas de inferencia: La cuantificación universal

Introducción del $\forall$: $$\frac{P(y)}{\forall x.\, P(x)}\ [\forall I]$$

Para probar que un predicado se satisface universalmente, hay que probar que se satisface para un valor arbitrario: durante la demostración de $P(y)$ no podemos hacer ninguna suposición sobre (la variable) y. [1]

[1] Formalmente, y no puede aparecer libre en ninguna premisa no cancelada.

Reglas de inferencia: La cuantificación universal

Eliminación del $\forall$:

$$\frac{\forall x.\, P(x)}{P(t)}\ [\forall E]$$

Si un predicado se satisface universalmente, puedo concluir que vale para un término t cualquiera.

Reglas de inferencia: La cuantificación universal

Eliminación del $\forall$: $$\frac{\forall x.\, P(x)}{P(t)}\ [\forall E]$$

¿Sería válido en la fórmula

$$\forall x.\, \exists y.\, y > x$$

"instanciar" x a $y + 1$? Esto daría

$$\exists y.\, y > y + 1$$

Importante: el término t no debe colisionar con ninguna de las variables ligadas de P.

Reglas de inferencia: La cuantificación existencial

Introducción del $\exists$:

$$\frac{P(t)}{\exists x.\, P(x)}\ [\forall\mathrm{I}]$$

Para probar la cuantificación existencial sobre un predicado, debo exibir un término, llamado testigo, que satisfaga el predicado.

Reglas de inferencia: La cuantificación existencial

Introducción del $\exists$:

$$\frac{P(t)}{\exists x.\, P(x)}\ [\exists\mathrm{I}]$$

Usando esta regla uno podría concluir que

$$\exists x. \forall y.\, y = x$$

tomando como testigo $t := y$, ya que la premisa de la regla sería

$$\forall y.\, y = y$$

la que es trivialmente cierta.

Importante: el término t no debe colisionar con ninguna de las variables ligadas de P.

Reglas de inferencia: La cuantificación existencial

Eliminación del $\exists$:

$$\dfrac{\exists x.\, P(x) \qquad \begin{matrix} \overline{P(y)}^{\,1} \\ \vdots \\ \alpha \end{matrix}}{\alpha}\ 1\ [\exists E]$$

Para probar una conclusión a partir de una cuantificación existencial sobre un predicado, utilizamos un razonamiento hipotético: suponemos temporalmente la existencia de un testigo que satisface el predicado, y a partir de ello establecemos la conclusión. Notar que no podemos hacer ninguna suposición extra sobre el testigo. [2]

[2]Formalmente, y no puede aparecer libre en ninguna premisa no cancelada o en α.

Reglas de inferencia: La igualdad

La igualdad es una relación de equivalencia:

$$\frac{}{t = t} \qquad \frac{s = t}{t = s} \qquad \frac{r = s \quad s = t}{r = t}$$

Se pueden sustituir "iguales por iguales" en términos y fórmulas:

$$\frac{s = t}{r(s) = r(t)} \qquad \frac{s = t \quad P(s)}{P(t)}$$

Demo de pruebas en Lean

Corrección y completitud

No vemos a definir formalmente la *semántica* de la lógica de predicados (y por lo tanto, tampoco la noción de *consecuencia lógica* que captura la validez de argumentos).

Sin embargo, igual vamos a mencionar que la corrección y completitud de la deducción natural también valen para la lógica de predicados:

La noción de consecuencia lógica (noción semántica, notada $\models$) coincide con la noción de demostrabilidad (noción deductiva y sintáctica, notada $\vdash$) también para la lógica de predicados.

Equivalencia

Definición de equivalencia

Explotando la corrección y completitud de la deducción natural para la lógica de predicados, vamos a presentar una caracterización deductiva de la noción de equivalencia:

Definición (equivalencia)

Dos fórmulas de la lógica de predicados α y β se dicen equivalentes, notado $\alpha \equiv \beta$, si y sólo si $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.

Notar que ésta es una extensión consistente de la noción de equivalencia que teníamos para la lógica proposicional.

Algunas equivalencias útiles

Dualidad del $\forall$ y $\exists$

$$\begin{aligned} \forall x.\ P(x) &\equiv \neg\exists x.\ \neg P(x) \\ \exists x.\ P(x) &\equiv \neg\forall x.\ \neg P(x) \end{aligned}$$

Un corolario importante de la dualidad del $\forall$ y $\exists$ es que

$$\neg\forall x.\ P(x) \equiv \exists x.\ \neg P(x) \qquad \text{y} \qquad \neg\exists x.\ P(x) \equiv \forall x.\ \neg P(x)$$

Algunas equivalencias útiles

Distributividad del $\forall$ respecto al $\wedge$

$$\forall x.\ (P(x) \wedge Q(x)) \quad \equiv \quad (\forall x.\ P(x)) \wedge (\forall x.\ Q(x))$$

Distributividad del $\exists$ respecto al $\vee$

$$\exists x.\ (P(x) \vee Q(x)) \quad \equiv \quad (\exists x.\ P(x)) \vee (\exists x.\ Q(x))$$

Ejercicio: ¿Es cierta la siguiente equivalencia?

$$\exists x.\ (P(x) \wedge Q(x)) \quad \equiv \quad (\exists x.\ P(x)) \wedge (\exists x.\ Q(x))$$