Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación
CC3101 - Matemáticas Discretas para la Computación

Pauta Auxiliar 6

Profesores: Federico Olmedo - Alejandro Hevia
Auxiliares: Ismael Correa - Javier Oliva - Fernanda Sanchirico - Lucas Torrealba
Nahuel Gomez - Nelson Marambio
Ayudantes: Daniel Báez - Félix Melo

P1.- Considere la recurrencia $T(n)$ como:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 \cdot T(n/2) + n & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Encuentre la solución cerrada cuando se cumple que $n = 2^k$ para algún $k \in \mathbb{N}_0$, o equivalente a, $k = \log_2(n)$.

Solución: Primero desarrollaremos un poco la recurrencia propuesta

$$\begin{aligned} T(n) &= 2 \cdot T(n/2) + n \\ &= 2(2 \cdot T(n/4) + \frac{n}{2}) + n = 4T(n/4) + 2n \\ &= 4(2 \cdot T(n/8) + \frac{n}{4}) + 2n = 8T(n/4) + 3n... \end{aligned}$$

Proponemos que se satisface $T(n) = 2^k T(n/2^k) + kn$ para algún k positivo. Demostraremos que se cumple por inducción.

$k = 1$

$$T(n) = 2T(n/2) + n = 2^1 T(n/2^1) + 1 \cdot n$$

Claramente se cumple.

Ahora como hipótesis inductiva, asumiremos que se cumple para un $k-1$ y demostraremos que se cumple para k

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^{k-1} T(n/2^{k-1}) + (k-1) \cdot n \\ &= 2^{k-1}(2T(n/2^k) + n/2^{k-1}) + (k-1) \cdot n \\ &= 2^k T(n/2^k) + k \cdot n \end{aligned}$$

Luego para el caso particular donde $k = \log_2(n)$ equivalente a $n = 2^k$, tenemos que la solución cerrada queda de la forma:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^k T(n/2^k) + k \cdot n \\ &= nT(1) + \log_2 n \cdot n \\ &= n + \log_2 n \cdot n \\ &= n(1 + \log_2 n) \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{P2.-}}$

Considere la recurrencia definida para $n >= 0$

$$a_{n+3} = 5a_{n+2} - 7a_{n+1} + 3a_n + 2^n$$

Con $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ y $a_2 = 5$
Utilizando funciones generadoras resuelva la recurrencia.

Solución:
Multiplicamos todo por x^n y sumamos desde $n \geq 0$
Para el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} a_{n+3} \cdot x^n &= \frac{\sum_{n\geq 0} a_{n+3} \cdot x^{n+3}}{x^3} \\
&= \frac{\sum_{n\geq 3} a_n \cdot x^n}{x^3} \\
&= \frac{(\sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n) - a_2 \cdot x^2 - a_1 \cdot x^1 - a_0 \cdot x^0}{x^3} \\
&= \frac{(\sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n) - 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x}{x^3} \\
&= \frac{A(x) - 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x}{x^3}
\end{aligned}$$

Para el lado derecho, evaluaremos término por término:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} 5a_{n+2} \cdot x^n &= \frac{\sum_{n\geq 0} 5a_{n+2} \cdot x^{n+2}}{x^2} \\
&= \frac{5\sum_{n\geq 2} a_n \cdot x^n}{x^2} \\
&= \frac{5(\sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n) - 5 \cdot a_1 \cdot x^1 - 5 \cdot a_0 \cdot x^0}{x^2} \\
&= \frac{5 \cdot A(x) - 10 \cdot x}{x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} -7a_{n+1}\cdot x^n &= \frac{-7\cdot\sum_{n\geq 0} a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{x} \\
&= \frac{-7\cdot\sum_{n\geq 1} a_n\cdot x^n}{x} \\
&= \frac{-7\cdot\sum_{n\geq 0} a_n\cdot x^n - a_0\cdot x^0}{x} \\
&= \frac{-7\cdot\sum_{n\geq 0} a_n\cdot x^n}{x} \\
&= \frac{-7\cdot A(x)}{x}
\end{aligned}$$

$$\sum_{n\geq 0} 3\cdot a_n\cdot x^n = 3\cdot A(x)$$

$$\sum_{n\geq 0} 2^n\cdot x^n = \frac{1}{1-2x}$$

Juntando ambos lados y multiplicando por x^3

$$A(x) - 5\cdot x^2 - 2\cdot x = x\cdot(5\cdot A(x) - 10\cdot x) - x^2\cdot 7\cdot A(x) + x^3\cdot 3\cdot A(x) + x^3\cdot\frac{1}{1-2x}$$

Dejando todos los términos que contienen $A(x)$ al lado izquierdo y el resto al lado derecho nos queda:

$$A(x)(1 - 5\cdot x + 7\cdot x^2 - 3\cdot x^3) = 2\cdot x - 5\cdot x^2 + \frac{x^3}{1-2x}$$

Factorizaremos $(1 - 5\cdot x + 7\cdot x^2 - 3\cdot x^3)$:

$$\begin{aligned}
1 - 5\cdot x + 7\cdot x^2 - 3\cdot x^3 &= (1 - 2x + x^2) + (-3x + 6x^2 - 3x^3) \\
&= (1 - 2x + x^2) - 3x(1 - 2x + x^2) \\
&= (1 - 2x + x^2)(1 - 3x) \\
&= (1 - x)^2(1 - 3x)
\end{aligned}$$

Nos queda:

$$A(x)(1-x)^2(1-3x) = 2\cdot x - 5\cdot x^2 + \frac{x^3}{1-2x}$$

Desarrollando el lado derecho nos queda:

$$A(x)(1-x)^2(1-3x) = \frac{2x(1-2x)-5x^2(1-2x)+x^3}{1-2x}$$
$$A(x)(1-x)^2(1-3x) = \frac{2x-4x^2-5x^2+10x^3+x^3}{1-2x}$$
$$A(x)(1-x)^2(1-3x) = \frac{x(2-9x+11x^2)}{1-2x}$$

Quedando:

$$A(x) = \frac{x(2-9x+11x^2)}{(1-x)^2(1-3x)(1-2x)}$$

Utilizando fracciones parciales en el lado derecho:

$$\frac{x(2-9x+11x^2)}{(1-x)^2(1-3x)(1-2x)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-3x)} + \frac{D}{(1-2x)}$$

Multiplicando por $(1-x)^2(1-3x)(1-2x)$

$$0x^0+2x-9x^2+11x^3 = A(1-x)(1-3x)(1-2x)+B(1-3x)(1-2x)+C(1-x)^2(1-2x)+D(1-x)^2(1-3x) \tag{1}$$

Las raíces del denominador son:

- $(1-x) \implies x_1 = 1$ (para $(x-1)^2$ igual)
- $(1-3x) \implies x_2 = 1/3$
- $(1-2x) \implies x_3 = 1/2$

Luego reemplazando $x_1 = 1$ en (1), obtenemos $B = 2$. Realizamos el mismo procedimiento para $x_2 = 1/3$ en (1) y obtenemos $C = 1/2$. Y para $x_3 = 1/2$ obtenemos $D = -1$.

Para sacar la constante A, reemplazamos en (1) los valores de B, C y D calculados anteriormente. Quedándonos:

$$0x^0+2x-9x^2+11x^3 = A(1-x)(1-3x)(1-2x)+2(1-3x)(1-2x)+\frac{1}{2}(1-x)^2(1-2x)-(1-x)^2(1-3x)$$

Desarrollamos y agrupamos por término

$$0x^0+2x-9x^2+11x^3 = (A+2+\frac{1}{2}-1)x^0+(-6A-7)x+(11A+15/2)x^2+(-6A+1)x^3$$

Si nos enfocamos en los términos que acompañan a x^0, nos queda:

$$0 = A+2+\frac{1}{2}-1$$

Luego $A = -\frac{3}{2}$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-3x)} + \frac{D}{(1-2x)} \\
&= -\frac{3}{2}\frac{1}{(1-x)} + 2\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-3x)} - \frac{1}{(1-2x)} \\
&= -\frac{3}{2}\sum_{n\geq 0} 1^n x^n + 2\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} 3^n x^n - \sum_{n\geq 0} 2^n x^n \\
&= -\frac{3}{2} + 2(n+1) + \frac{1}{2}3^n - 2^n
\end{aligned}$$

$\therefore a_n = -\frac{3}{2} + 2(n+1) + \frac{1}{2}3^n - 2^n \ \forall n \geq 0$