Matemática Discreta

Clase 3: Semántica de la lógica proposicional

Federico Olmedo*

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

* Estas diapositivas fueron diseñadas a partir de diapositivas del profesor Alejandro Hevia.

Contenido clase de hoy

1. Interpretación de fórmulas
2. Satisfactibilidad, tautología y consecuencia lógica
3. Conexión entre enfoques deductivo y semántico

Estableciendo la validez de un argumento

Existen dos enfoques para probar la validez de un argumento:

1. **Enfoque sintáctico o deductivo (teoría de la demostración):** a través de un sistema de pruebas formal, donde los argumentos válidos corresponden a los teoremas —fórmulas que son demostrables— del sistema. En nuestro caso, usamos la deducción natural como sistema de prueba.
2. **Enfoque semántico (teoría de modelos):** a partir de la noción de interpretación de una fórmula:
   - La idea es asignarle un valor booleano a cada fórmula, a partir del valor booleano de las proposiciones que aparecen en ella (conocido como la “semántica” o “interpretación” de la fórmula).
   - Caracterizar los argumentos (y fórmulas) válidas a partir de dicha noción de interpretación.

Interpretación de fórmulas

Interpretando las fórmulas

Buscamos asignarle un valor de verdad (verdadero/falso o 1/0) a las fórmulas de la lógica proposicional.

¿De qué depende el valor de verdad de una fórmula? Por ejemplo,

$$p \vee q \rightarrow \neg p$$

- del valor de verdad de las proposiciones que aparecen en la fórmula, y
- del significado de los conectivos lógicos

Vamos a comenzar repasando el significado de los conectivos lógicos, lo que especificamos por medio de tablas de verdad.

Tabla de verdad de la negación ($\neg$)

α	$\neg\alpha$
1	0
0	1

El valor de verdad de $\neg\alpha$ es opuesto al de α.

Tabla de verdad de la conjunción ($\wedge$)

α	β	$\alpha \wedge \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$\alpha \wedge \beta$ **es verdadero si y sólo si** α **y** β **son verdaderos.**

Pregunta: ¿Formaliza esto lo que entendemos por conjunción en el lenguaje natural?

Tabla de verdad de la disyunción ($\vee$)

α	β	$\alpha \vee \beta$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\alpha \vee \beta$ **es verdadero si y sólo si** α **o** β **son verdaderos.**

Pregunta: ¿Formaliza esto lo que entendemos por disyunción en el lenguaje natural?

Tabla de verdad de la implicancia ($\to$)

α	β	$\alpha \to \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$\alpha \to \beta$ es siempre verdadero, excepto cuando α (el antecedente) es verdadero y β (el consecuente) es falso.

Pregunta: ¿Qué fila(s) llama(n) la atención de la tabla de verdad?

Tabla de verdad de la bi-implicancia ($\leftrightarrow$)

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$\alpha \leftrightarrow \beta$ es verdadero si y sólo si α y β tienen el mismo valor de verdad.

Valor de verdad de fórmulas compuestas

Dado el valor de verdad de las proposiciones que aparecen en una fórmula, ahora ya podemos determinar el valor de verdad de la formula. Esto lo hacemos "composicionalmente", determinado el valor de verdad de las diferentes subfórmulas que constituyen la fórmula.

Ejemplo

Determinar el valor de verdad de la fórmula $(p \vee q) \to p \wedge q$ para cada valuación de las proposiciones p, q.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \to p \wedge q$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	0	1

Semántica de la lógica proposicional

Alternativamente, podemos formalizar lo anterior de la siguiente manera:

Definición (semántica de la lógica proposicional)

Sea

$$\sigma \colon P \to \{0, 1\}$$

una valuación de las proposiciones en $P = \{p, q, r, \ldots\}$, es decir una función que le asigna un valor de verdad a las proposiciones en P. La función

$$\hat{\sigma} \colon \mathcal{L}(P) \to \{0, 1\}$$

le asigna un valor de verdad a cada fórmula en $\mathcal{L}(P)$ como sigue:

$$\begin{array}{lcl} \hat{\sigma}(p) & = & \sigma(p) \quad \text{para } p \in P \\ \hat{\sigma}(\neg\alpha) & = & 1 - \hat{\sigma}(\alpha) \\ \hat{\sigma}(\alpha \wedge \beta) & = & \text{mín}\,\{\hat{\sigma}(\alpha), \hat{\sigma}(\beta)\} \\ \hat{\sigma}(\alpha \vee \beta) & = & \text{máx}\,\{\hat{\sigma}(\alpha), \hat{\sigma}(\beta)\} \\ \hat{\sigma}(\alpha \to \beta) & = & \text{máx}\,\{1 - \hat{\sigma}(\alpha), \hat{\sigma}(\beta)\} \\ \hat{\sigma}(\alpha \leftrightarrow \beta) & = & \text{máx}\,\{\text{mín}\{\alpha, \beta\},\ 1 - \text{máx}\{\alpha, \beta\}\} \end{array}$$

Satisfactibilidad, tautología y consecuencia lógica

Satisfactibilidad

Definición (satisfactibilidad)

Un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\} \subseteq \mathcal{L}(P)$ se dice satisfactible sii existe *alguna* valuación que hace a todas sus fórmulas simultáneamente verdaderas, es decir, sii existe $\sigma \colon P \to \{0,1\}$ tal que $\hat{\sigma}(\alpha) = \hat{\sigma}(\beta) = \hat{\sigma}(\gamma) = \ldots = 1$.

En caso contrario se dice que Γ es insatisfactible.

Ejemplo

- $\{p \vee q\}$ satisfactible
- $\{p \wedge q,\ p \wedge \neg q\}$ insatisfactible

Ejercicio ¿Es el conjunto $\Gamma = \emptyset$ satisfactible?

Tautología

Definición (tautología)

Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ es una tautología, notado $\vDash \alpha$, sii es *verdadera* bajo cualquier valuación, es decir, sii $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ para toda valuación $\sigma \colon P \to \{0,1\}$.

Ejemplo

- $p \to p \lor q$ es tautología

p	q	$p \lor q$	$p \to p \lor q$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

- $p \to p \land q$ no es tautología

p	q	$p \land q$	$p \to p \land q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	0	1

Consecuencia lógica: Motivación

En el *enfoque deductivo* (deducción natural), la noción de demostrabilidad caracteriza la validez de un razonamiento:

- $\{p, p \to q\} \vdash q$
- $\vdash p \vee \neg p$

Ahora vamos a estudiar su *contraparte semántica*: la noción de consecuencia lógica, que notamos de manera similar:

- $\{p, p \to q\} \models q$
- $\models p \vee \neg p$

Consecuencia lógica: Intuición

Sea Γ un conjunto de fórmulas (premisas) y α una fórmula (conclusión). Informalmente decimos que α es consecuencia lógica de Γ, notado $\Gamma \models \alpha$, sii cada vez que las fórmulas en Γ son verdaderas, α también es verdadera.

Ejemplos

Modus ponens:	$\{p, p \to q\} \models q$
Modus tollens:	$\{\neg q, p \to q\} \models \neg p$
Transitividad del $\to$:	$\{p \to q, q \to r\} \models p \to r$

Consecuencia lógica: Ejemplos

Modus ponens: $\{p, p \to q\} \models q$

p	q	$p \to q$	q
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

La única valuación donde p y $p \to q$ son verdaderas (primer fila de la tabla), q también es verdadera.

Modus tollens: $\{\neg q, p \to q\} \models \neg p$

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

La única valuación donde $\neg q$ y $p \to q$ son verdaderas (última fila de la tabla), $\neg p$ también es verdadera.

Consecuencia lógica: Definición formal

Consecuencia lógica

Sea Γ un conjunto de fórmulas (premisas) en $\mathcal{L}(P)$ y α una fórmula (conclusión) en $\mathcal{L}(P)$. Decimos que α es consecuencia lógica de Γ, notado $\Gamma \models \alpha$, sii toda valuación $\sigma \colon P \to \{0,1\}$ que hace simultáneamente verdaderas a todas las fórmulas en Γ, hace también verdadera a α.

Formalmente, $\Gamma \models \alpha$ sii para cada valuación $\sigma \colon P \to \{0,1\}$,

$$\underbrace{\hat{\sigma}(\Gamma) = 1}_{\hat{\sigma}(\gamma) = 1 \text{ para cada } \gamma \in \Gamma} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{\sigma}(\alpha) = 1$$

- Para determinar si $\Gamma \models \alpha$, no nos importan aquellas valuaciones que no hacen simultáneamente verdaderas a todas las fórmulas en Γ (el valor de α en esas valuaciones es irrelevante).
- Si $\Gamma = \emptyset$, tenemos que $\emptyset \models \alpha$ sii $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ para todas las valuaciones $\sigma \colon P \to \{0,1\}$, es decir, si α es una tautología.

Conexión entre enfoques deductivo y semántico

Enfoque deductivo vs enfoque semántico

Comparemos los dos enfoques para probar la validez de un razonamiento:

Enfoque deductivo

$$\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$$

$$\cfrac{\cfrac{q \to r \qquad \cfrac{p \to q \qquad \overline{p}^{\,1}}{q}\,[\to E]}{r}\,[\to E]}{p \to r}\;{}^{1}\,[\to I]$$

Enfoque semántico

$$\{p \to q, q \to r\} \vDash p \to r$$

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

¿Serán consistentes los dos enfoques?

Corrección y completitud de la deducción natural

- Si un razonamiento es válido según el enfoque deductivo, ¿será también válido de acuerdo al enfoque semántico? ¡Sí!

Corrección:
$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \alpha &\implies \Gamma \models \alpha \\ \vdash \alpha &\implies \models \alpha \end{aligned}$$

- Si un razonamiento es válido según el enfoque semántico, ¿será también válido de acuerdo a la deducción natural? ¡Sí!

Completitud:
$$\begin{aligned} \Gamma \models \alpha &\implies \Gamma \vdash \alpha \\ \models \alpha &\implies \vdash \alpha \end{aligned}$$

Juntos, estos resultados nos dicen que la noción de demostrabilidad (noción sintáctica) coincide con la de consecuencia lógica/tautología (nociones semánticas).