# Matemática Discreta

## Clase 13: Combinatoria y principio del palomar

Federico Olmedo y Alejandro Hevia

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

# Contenido clase de hoy

1. Combinatoria básica
2. Pruebas combinatoriales
3. Principio del Palomar

# Combinatoria básica

# Motivación

Dado un conjunto de $n$ elementos, muchos problemas de conteo consisten en determinar el número de maneras de agrupar $r$ elementos del conjunto, para un $r \leq n$.

- **En algunas ocasiones el orden de los $r$ elementos importa:**

  *En una competencia de 10 participantes, ¿cuántos "podios" distintos puede haber si se premia al 1º, 2º y 3º puesto?*

- **En otras, el orden no importa:**

  *En una competencia de 10 participantes, ¿cuántos grupos distintos de 3 participantes se pueden armar para una entrevista televisiva?*

# El orden sí importa: Permutaciones

**Ejemplo:** En una competencia de 10 participantes, ¿cuántos "podios" distintos puede haber si se premia al 1º, 2º y 3º puesto?

Por la regla del producto, pueden haber $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ podios distintos.

**Definición (permutación)**

Una $r$-permutación es una *lista ordenada* de $r$ objetos. Denotamos $\mathrm{P}(n, r)$ al número de $r$-permutaciones sobre un conjunto de $n$ elementos distintos.

**Ejemplo:** $\mathrm{P}(10, 3) = 720$.

# El orden sí importa: Permutaciones

**Teorema (número de permutaciones)**

Dados naturales $r$ y $n$ con $0 \leq r \leq n$, el número de $r$-permutaciones sobre un conjunto de $n$ elementos distintos es

$$\mathrm{P}(n, r) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(r-1))}_{r \text{ factores}} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

# Aplicaciones de las permutaciones

**Ejemplo:** ¿Cuántos números enteros entre 100 y 999 inclusive consisten de números impares distintos?

Esto coincide con el número de 3-permutaciones sobre los elementos 1,3,5,7,9. Por lo tanto es $P(5,3) = 5 \cdot 4 \cdot 3$.

**Ejemplo:** ¿Cuántas patentes de auto pueden formarse si cada patente tiene 4 letras, y no se permiten repetir letras?

Esto coincide con el número de 4-permutaciones sobre los elementos a,b,c,...,z. Por lo tanto hay $P(27,4) = 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24$.

# Aplicaciones de las permutaciones

**Ejemplo:** ¿Cuántas permutaciones de las letras A,B,C,D,E,F,G,H contienen la subcadena ABC?

Aquí el truco está en considerar a ABC como un único elemento. Luego el problema se reduce a contar el número de 6-permutaciones sobre los elementos ABC,D,E,F,G,H, que son $P(6,6) = 6!$.

**Ejercicio:** ¿Cuántos números enteros entre 100 y 999 inclusive tienen sus tres dígitos distintos?

# El orden no importa: Combinaciones

**Ejemplo:** En una competencia de 10 participantes, ¿cuántos grupos distintos de 3 participantes se pueden armar para una entrevista televisiva?

Tantos como subconjuntos de 3 elementos admita un conjunto de 10 elementos.

**Definición (combinación)**

Una $r$-combinación es un *conjunto* de $r$ objetos. Denotamos $\mathrm{C}(n, r)$ al número de $r$-combinaciones sobre un conjunto de $n$ elementos distintos.

# El orden no importa: Combinaciones

**Teorema (número de combinaciones)**

Dados naturales $r$ y $n$ con $0 \leq r \leq n$, el número de $r$-combinaciones sobre un conjunto de $n$ elementos distintos es

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

**Demostración**

El conjunto de $r$-permutaciones sobre un conjunto de $n$ elementos distintos puede obtenerse considerando las $r$-combinaciones, y luego ordenando cada $r$-combinación de todas las $r!$ maneras distintas. Por lo tanto,

$$P(n, r) = C(n, r) \cdot r!$$

lo que implica que $C(n, r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$.

# Aplicaciones de las combinaciones

**Ejemplo:** En una competencia de 10 participantes, ¿cuántos grupos distintos de 3 participantes se pueden armar para una entrevista televisiva?

Esto corresponde al número de 3-combinaciones sobre un conjunto de 10 elementos, que son $C(10,3) = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}$.

**Ejemplo:** Sobre un mazo de póker de 52 cartas, ¿cuántas manos (de 5 cartas) distintas pueden obtenerse?

Esto corresponde al número de 5-combinaciones sobre un conjunto de 52 elementos, que son $C(52,5) = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{5!}$.

# Aplicaciones de las combinaciones

**Ejemplo:** ¿Cuántos bitstrings de largo $n$ contienen exactamente $r$ 1s (para $r \leq n$)?

Esto corresponde a contar de cuántas maneras puedo elegir las $r$ posiciones para los 1s, ya que el bitstring queda completamente definido al rellenar las restantes posiciones con 0s. Éstas son $C(n, r)$.

# Ejercicios

**Ejercicio*:** Dadas 12 personas, ¿cuántos grupos de 5 personas se pueden formar si hay dos personas, llamemoslas A y B, que insisten en trabajar juntas? (En otros palabras, un grupo de 5 personas es válido si contiene a ambas o a ninguna).

# Expansión binomial

Al número combinatorio $C(n, r)$ se lo suele notar también $\binom{n}{r}$. A estos números se los conocen también como coeficientes binomiales ya que aparecen como coeficientes de la expansión de las potencias de un binomio.

**Teorema del Binomio**

Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que,

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \\ &= \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{n} x^n y^0\end{aligned}$$

**Ejercicio:** Piense porqué $C(n, i)$ es el coeficiente que acompaña a $x^i y^{n-i}$ en la expansión de $(x+y)^n$.

# Pruebas combinatoriales

# Una identidad combinatoria importante

**Lema**

Para todo par de naturales $r$ y $n$ tales que $0 \leq r \leq n$, se tiene que

$$C(n, r) \ = \ C(n, n - r)$$

**Demostración**

El lema admite dos demostraciones distintas.

- La primer demostración es completamente algebraica y trivial, ya que

  $$C(n, r) \ = \ \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \ = \ \frac{n!}{(n-r)!\,\underbrace{(n-(n-r))!}_{=r}} \ = \ C(n, n-r)$$

  .

- La segunda es combinatorial, y mucho más interesante. Se basa en la observación que el conjunto de $r$-combinaciones está en correspondencia biunívoca con el conjunto de $(n - r)$-combinaciones (formadas por los $n - r$ elementos "desechados" al formar cada $r$-combinación).

# Pruebas combinatoriales

Una prueba combinatorial de una identidad $e_1 = e_2$ usa alguno de los siguientes dos argumentos:

- Cuenta los elementos de dos conjuntos distintos, y prueba que hay una correspondencia uno-a-uno entre esos elementos (es decir, que existe una biyección entre ambos conjuntos), o
- Cuenta los elementos de un mismo conjunto de dos maneras distintas.

**Ejemplo:** Para probar que

$$\mathrm{C}(n, r) \;=\; \mathrm{C}(n, n-r)$$

usamos el primer argumento, explotando el hecho el que el conjunto de $r$-combinaciones (sobre con un conjunto de $n$ elementos) era isomorfo al conjunto de $(n-r)$-combinaciones.

# Ejercicios

**Ejercicio:** Dé una demostración combinatorial y otra algebraica de que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

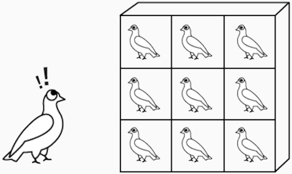
**Ejercicio:** Demuestre combinatorialmente la identidad de Pascal, i.e. que para todo par de naturales $n$ y $k$ tales que $n \geq k$, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

**Ejercicio:** Demuestre combinatorialmente la identidad de Vandermonde, i.e. que para $r \leq \text{mín}\{m, n\}$, se tiene que $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$.

# Principio del Palomar

# Principio del palomar

Asuma que una bandada de 10 palomas vuela hasta un palomar que contiene sólo 9 agujeros. Entonces al menos un agujero contendrá a dos palomas.




**Principio del palomar**

Sea $k \in \mathbb{N}$. Si $k+1$ objetos tienen que colocarse en $k$ cajas, entonces habrá al menos una caja que contenga al menos dos objetos.

**Ejemplo:** En un grupo de 367 personas deben haber dos con el mismo cumpleaños.

**Ejemplo:** Dados 11 números enteros, probar que siempre hay 2 cuya diferencia es múltiplo de 10.

Considere los restos de la division entera de los 11 números por 10. Como sólo hay 10 restos posibles (0,1,...,9), habrá (al menos) dos números que tienen el mismo resto, y su diferencia será múltiplo de 10.

# Aplicaciones del principio del palomar

**Ejemplo:** Probar que en cualquier conjunto de 51 números enteros entre 1 y 100 inclusive, siempre habrá uno que divide a otro.

*Sugerencia:* Recordar que todo natural puede escribirse de la forma $2^k \cdot b$ para algún $k \in \mathbb{N}_0$ y algún impar $b \in \mathbb{N}$.

Como entre 1 y 100 hay sólo 50 números impares, dentro del conjunto de los 51 enteros debe haber (al menos) dos comparten el mismo $b$ en la descomposición arriba descrita. Luego el que tiene asociado el menor $k$ divide al que tiene asociado el mayor $k$.

**Ejercicio*:** Sea $\{(x_i, y_i, z_i) \mid i \in [1, 9]\}$ un conjunto de 9 puntos distintos con coordenadas enteras en el espacio tridimensional. Demuestre que el punto medio de al menos un par de estos puntos tiene coordenadas enteras.

# Principio del palomar generalizado

**Pregunta:** ¿Qué puede decir cuando tengo 5 cajas y 11 palomas?

**Principio del palomar generalizado**

Si $n$ objetos se colocan en $k$ cajas, entonces existe al menos una caja que contiene al menos $\lceil n/k \rceil$ objetos.

# Aplicaciones del principio del palomar generalizado

**Ejemplo:** Entre 100 personas hay al menos $\lceil 100/12 \rceil = 9$ personas que nacieron en el mismo mes.

**Ejercicio:** ¿Cuál es el mínimo número de alumnos que un curso debe tener para asegurarse que al menos 6 alumnos recibirán la misma nota, si hay 5 posibles notas?

**Ejercicio:** ¿Cuál es el mínimo número de cartas que se deben tomar desde un mazo para asegurarse que al menos 3 tienen la misma pinta? Un mazo tiene 13 cartas de 4 pintas distintas.

# Ejercicios finales

**Ejercicio (Ramsey):** Asuma que en un grupo de seis personas, cada par de personas son o amigos o enemigos. Demuestre que existen o tres mutuos amigos o tres mutuos enemigos.

**Ejercicio:** Demuestre que en cualquier fiesta de al menos dos personas, existen dos personas que conocen a la misma cantidad de gente en la fiesta.