Pauta Ejercicio 6

Profesores: Federico Olmedo - Alejandro Hevia
Auxiliares: Ismael Correa - Javier Oliva - Fernanda Sanchirico - Lucas Torrealba
Nahuel Gomez - Nelson Marambio
Ayudantes: Daniel Báez - Félix Melo

P1.-

Una Recurrencia Aleatoria

Usando funciones generatrices, encuentre la forma cerrada para la siguiente recurrencia :

$$\begin{aligned} g_0 &= 1 \\ g_1 &= 1 \\ g_n &= g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n \qquad \text{Para } n \geq 2 \end{aligned}$$

Solución:

Llamemos $G(x)$ a la función generadora de la secuencia g_n. Evidentemente, la recurrencia está definida para $n \geq 2$, luego multiplicando por x^n y sumando desde 2, obtenemos en el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 2} g_n x^n &= \sum_{n\geq 0} g_n x^n - g_0 - g_1 x \\ &= G(x) - g_0 - g_1 x \\ &= G(x) - x - 1 \end{aligned}$$

Y al lado derecho:

$$\sum_{n\geq 2} g_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 2} 2g_{n-2}x^n + \sum_{n\geq 2}(-1)^n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 1} g_n x^{n+1} + 2\sum_{n\geq 0} g_n x^{n+2} + \left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n - (-1)^0 - (-1)^1 x\right)$$

$$= x\sum_{n\geq 1} g_n x^n + 2x^2 \sum_{n\geq 0} g_n x^n + \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n - 1 + x$$

$$= \left(x\sum_{n\geq 0} g_n x^n - g_0 x\right) + 2x^2 \sum_{n\geq 0} g_n x^n + \frac{1}{1+x} - 1 + x$$

$$= xG(x) + 2x^2 G(x) + \frac{1}{1+x} - 1$$

Juntando ambos lados tenemos luego:

$$\begin{aligned}
G(x) - x - 1 &= xG(x) + 2x^2G(x) + \frac{1}{1+x} - 1 \\
\Rightarrow \quad G(x)\cdot(1 - x - 2x^2) &= \frac{1}{1+x} + x \\
\Rightarrow \quad G(x)\cdot(1 - x - 2x^2) &= \frac{1+x+x^2}{1+x} \\
\Rightarrow \quad G(x)\cdot(1+x)(1-2x) &= \frac{1+x+x^2}{1+x} \\
\Rightarrow \quad G(x) &= \frac{1+x+x^2}{(1-2x)(1+x)^2} \\
\Rightarrow \quad G(x) &= \frac{1}{3(1+x)^2} - \frac{1}{9(1+x)} + \frac{7}{9(1-2x)} \qquad \text{Fracciones parciales}
\end{aligned}$$

Recuperemos ahora las secuencias de cada término:

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{1}{3(1+x)^2} - \frac{1}{9(1+x)} + \frac{7}{9(1-2x)} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+x)} \cdot \frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{9} \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n + \frac{7}{9} \sum_{n \geq 0} 2^n x^n \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n \right) - \frac{1}{9} \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n + \frac{7}{9} \sum_{n \geq 0} 2^n x^n \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k (-1)^{n-k} \right) x^n - \frac{1}{9} \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n + \frac{7}{9} \sum_{n \geq 0} 2^n x^n \quad \text{Convolución} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^n \right) x^n - \frac{1}{9} \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n + \frac{7}{9} \sum_{n \geq 0} 2^n x^n \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} (n+1) \cdot (-1)^n x^n - \frac{1}{9} \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n + \frac{7}{9} \sum_{n \geq 0} 2^n x^n \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} n \cdot (-1)^n x^n + \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n - \frac{1}{9} \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n + \frac{7}{9} \sum_{n \geq 0} 2^n x^n \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} n \cdot (-1)^n x^n + \frac{2}{9} \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n + \frac{7}{9} \sum_{n \geq 0} 2^n x^n
\end{aligned}$$

Rescatando ahora el n-ésimo coeficiente de la función generadora $G(x)$ obtenemos así la forma cerrada de g_n:

$$\begin{aligned}
[x^n]G(x) &= \frac{1}{3}\, n\, (-1)^n + \frac{2}{9} \cdot (-1)^n + \frac{7}{9} \cdot 2^n \\
&= \left(\frac{1}{3} n + \frac{2}{9} \right) (-1)^n + \frac{7}{9} \cdot 2^n
\end{aligned}$$