Matemática Discreta

Clase 11: Relaciones y funciones (cont'd)

Federico Olmedo y Alejandro Hevia

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

Relaciones

Operaciones sobre relaciones

Operaciones estándares sobre conjuntos se pueden utilizar para manipular relaciones.

- Unión: $R \cup R'$
- Intersección: $R \cap R'$
- Diferencia: $R \setminus R'$

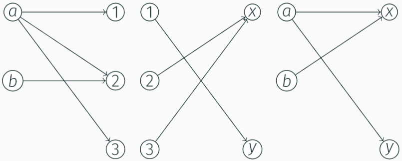
Además tenemos las siguientes operaciones específicas:

- Inversión: $R^{-1} \; = \; \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$
- Composición: $R' \circ R \; = \; \{(a, c) \mid \exists b. \; (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R'\}$
- Potencia: Si R es una relación sobre A definimos

$$R^1 = R \quad \text{y} \quad R^{n+1} = R^n \circ R$$

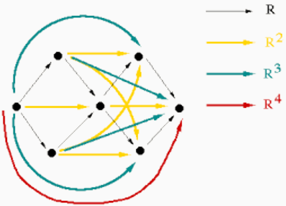
Operaciones sobre relaciones

Composición



R $\quad$ S $\quad$ $S \circ R$

Potencia



Operaciones sobre relaciones

Ejercicio: Demuestre que una relación R sobre A es transitiva si y sólo si $R^n \subseteq R$, para cualquier $n \geq 1$.

Ejercicio: Demuestre que R es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$.

Ejercicio: Sea R simétrica. Demuestre que R^n es simétrica, para todo $n \geq 1$.

Clausuras

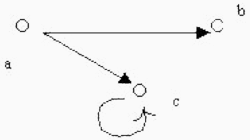
Definición (clausura de una relación)

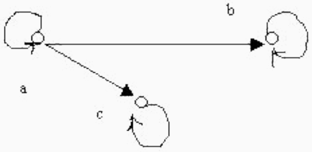
Dada una relación R sobre un conjunto A, su clausura reflexiva/simétrica/transitiva es la menor relación[1] que contiene a R y que es reflexiva/simétrica/transitiva.

[1] "Menor" relación en el sentido de inclusión de conjuntos.

Clausura reflexiva

Intuitivamente, la clausura reflexiva de R se obtiene extendiendo R con todos los pares (a, a) para $a \in A$.



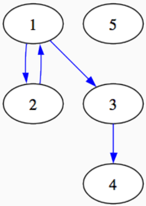


Ejemplo: La clausura reflexiva de la relación $<$ en los números naturales es la relación $\leq$.

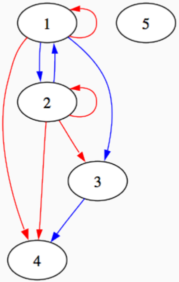
Clausura transitiva

Intuitivamente, (a, b) está en la clausura transitiva de R si y sólo si $(a, b) \in R$ o existen elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que

$$(a, a_1) \in R \ \wedge \ (a_1, a_2) \in R \ \wedge \ \ldots \ \wedge (a_{n-1}, a_n) \in R \ \wedge \ (a_n, b) \in R$$



Relación R



Clausura transitiva de R

Clausura transitiva

Ejemplo: La clausura transitiva de la relación de sucesor en los números naturales es la relación de orden "$>$".

Ejercicio: Sea R una relación sobre A. Demuestre que si A tiene n elementos, entonces la clausura transitiva de R, notada R^+, puede obtenerse como

$$R^+ = \bigcup_{1 \leq i \leq n} R^i$$

.

A la clausura reflexotransitiva de R se la suela notar R^*.

Funciones

Funciones

Definición

Una función de A a B es una relación f entre A y B tal que para todo $a \in A$ *existe un único* $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Escribimos $f : A \to B$ para denotar que f es una función de A a B.

Dado $a \in A$ escribimos $f(a)$ para denotar al único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. En este caso decimos que b es la imagen de a (o que a es una preimagen de b).

El dominio de $f : A \to B$ es A y el rango de f es

$$\mathit{range}(f) \quad = \quad \{b \in B \mid \exists a \in A.\ f(a) = b\}$$

Clasificación de funciones

Definición

Una función $f : A \to B$ es:

- inyectiva o uno-a-uno sii para todo $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ implica $f(a_1) \neq f(a_2)$;
- suryectiva o sobre sii para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$;
- biyectiva sii es inyectiva y suryectiva.

Ejemplo

- La función $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que $f(n) = 2n$ es inyectiva, pero no es suryectiva.
- La función $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que $f(0) = 1$ y $f(n) = n - 1$, para todo $n > 0$, es suryectiva pero no inyectiva.

Operaciones sobre funciones

Las funciones son un tipo especial de relaciones. Por lo tanto admiten inversas y se pueden componer.

Pregunta: ¿Es la composición de dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ otra función?

Pregunta: ¿Es la relación inversa de una función otra función? ¿Bajo qué condiciones?

Ejercicio*: Probar que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son inyectivas (resp. suryectivas), entonces la composición $g \circ f : A \to C$ también es inyectiva (resp. suryectiva).

Pregunta: ¿Qué corolario se tiene del ejercicio anterior?

Algunas funciones importantes

La función techo asigna a cada número real x el valor $\lceil x \rceil$ del menor entero y tal que $x \leq y$.

La función piso asigna a cada número real x el valor $\lfloor x \rfloor$ del mayor entero y tal que $x \geq y$.

La función factorial asigna a cada número natural n el producto $n!$ de los primeros n enteros positivos (asumimos que $0! = 1$).

Ejercicios

Ejercicio: Demuestre que para todo número real x y entero n, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Ejercicio: Demuestre que para todo número real x, $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

Ejercicio: Demuestre que para todo número real $x \geq 0$, $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.