Matemática Discreta

Clase 15: Funciones Generadoras (Parte 1)

Federico Olmedo y Alejandro Hevia

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

Introducción

Motivación

Sea $\langle a_n \rangle_{n \geq 0}$ una secuencia, definida por una recurrencia por ejemplo. ¿Cómo podemos representarla?

- Por “extensión”: $0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$ (al menos parcialmente)
- Por la recurrencia que la define (si es que hay): $h_n = 2h_{n-1} + 1$
- Por la solución en “forma cerrada”: $h_n = 2^n - 1$. (que no siempre existe)

Existe otra manera: asociándole una función completa a toda la secuencia, una función que permita derivar nuevas propiedades: una función generadora o *generatriz*.

$$\langle a_n \rangle_{n \geq 0} \quad \longleftrightarrow \quad A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

Secuencia **Función Generadora**

Definición

Definición

Sea $\langle a_n \rangle_{n \geq 0}$ una secuencia de números. La función generadora* (o función generatriz) asociada a dicha secuencia es la serie

$$A(x) \;=\; \sum_{n \geq 0} a_n x^n \,.$$

donde $A(x)$ debe entenderse como una suma formal: aquí el símbolo x no significa nada, sólo sirve como marcador para el coeficiente de x^n.

El índice de la sumatoria va sobre todos los enteros no negativos: $\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Ejemplo: la función generadora de $a_n = 3$, $\forall n \geq 0$, es $A(x) = \sum_{n \geq 0} 3x^n$.

Ejemplo: Para $a_n = (n+1)$, $\forall n \geq 0$, es $A(x) = \sum_{n \geq 0} (n+1)x^n$.

Ejemplo: Para $a_n = 2^n$, $\forall n \geq 0$, es $A(x) = \sum_{n \geq 0} 2^n x^n$.

$*$: *también llamadas funciones generadoras ordinarias.*

Ejemplos de
Funciones Generadoras

Ejemplos de funciones generadoras

Ejemplo: La secuencia: $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ (o sea $a_n = 1$, $\forall n >= 0$) tiene como función generadora

$$A(x) \;=\; \sum_{n \geq 0} x^n$$

Pero puede escribirse en forma más succinta.
$A(x)$ es una serie geométrica, y en cálculo vimos que si $|x| < 1$ entonces

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \;=\; \frac{1}{1-x}$$

Luego $A(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Ejemplos de funciones generadoras

Ejemplo: $a_n = c^n$, $\forall n \geq 0$, donde c es una constante, tiene como función generadora

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} c^n x^n = \sum_{n \geq 0} (cx)^n = \frac{1}{1 - cx}$$

como un caso particular del ejemplo anterior, reemplazando x por cx.

Ejemplos de funciones generadoras

Ejemplo: Sea m un entero fijo. La secuencia $b_n = \binom{m}{n}$, para $0 \leq n \leq m$, y es $b_n = 0$ si $n > m$, tiene como función generadora

$$B(x) \;=\; \sum_{n \geq 0} \binom{m}{n} x^m$$

Pero si recordamos el teorema del binomio:

$$\sum_{n \geq 0} \binom{m}{n} x^m \quad = \; (1 + x)^m$$

Luego $B(x) = (1 - x)^m$.

Resolviendo Recurrencias con Funciones Generadoras

Utilidad

Ejemplo: Sea $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $\forall n \geq 0$, $a_0 = 0$.
Procederemos a encontrar la solución (forma cerrada) usando funciones generadoras.

- Tomemos la relación para a_{n+1} y multipliquemos a ambos lados por x^n:

$$a_{n+1}x^n = 2a_n x^n + x^n$$

- Sumemos esta ecuación sobre todo n donde sea válida

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n = \sum_{n\geq 0}(2a_n x^n + x^n)$$

En el lado izquierdo tenemos *casi* $A(x)$, excepto por el índice $n+1$ en vez de n. Podemos re-armar $A(x)$ "multiplicando y dividiendo por x":

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n - a_0\right) = \frac{A(x)}{x}$$

Utilidad

En el lado derecho tenemos

$$\sum_{n\geq 0}(2a_nx^n + x^n) \;=\; 2\sum_{n\geq 0} a_nx^n + \sum_{n\geq 0} x^n \;=\; 2A(x) + \sum_{n\geq 0} x^n \;=\; 2A(x) + \frac{1}{1-x}$$

donde volvimos a usar la forma cerrada para la serie geométrica (válida para $|x| < 1$, lo cual supondremos siempre en estas manipulaciones).
Combinando ambos lados, terminamos con:

$$\frac{A(x)}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x}$$

Despejando:

$$A(x) \;=\; \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

¿Cómo seguimos? La Idea Clave

Si podemos transformar $A(x)$ de vuelta en una serie tipo $\sum_{n\geq 0} a_nx^n$, bastaría mirar el coeficiente de a_n para tener la solución explícita para los b_i's.

Utilidad

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

Podemos separar $1/((1-x)(1-2x))$ en dos fracciones del tipo $a/(1-x)$ y $b/(1-2x)$ usando expansión en fracciones contínuas:

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = x\left(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right) = 2x \cdot \frac{1}{1-2x} - x\frac{1}{1-x}$$

Y sabemos las series que representan las dos fracciones de la derecha:

$$\begin{aligned} 2x \cdot \frac{1}{1-2x} - x\frac{1}{1-x} &= 2x\sum_{n\geq 0}(2x)^n - x\sum_{n\geq 0}x^n = \sum_{n\geq 0}(2x)^{n+1} - \sum_{n\geq 0}x^{n+1} \\ &= \sum_{n\geq 1}(2x)^n - \sum_{n\geq 1}x^n = \sum_{n\geq 1}2^n x^n - \sum_{n\geq 1}1\cdot x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(2^n-1)x^n - (2^0-1) = \sum_{n\geq 0}(2^n-1)x^n \end{aligned}$$

Conclusión: $a_n = 2^n - 1$.

Resolviendo recurrencias con Funciones Generadoras

Receta Básica

1. Transformar la relación de recurrencia en una función generadora
   1.1 Asegurarse que los valores del índice para el cual la recurrencia se tiene estén claramente delimitados,
   1.2 Darle un nombre a la función generadora buscada y a sus coeficientes (ej. $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$),
   1.3 Multiplicar por ambos lados de la recurrencia por x^n, y sumar sobre todos los n donde la recurrencia es válida,
   1.4 Expresar ambos lados en términos de la función generadora $A(x)$,
   1.5 Despejar $A(x)$
2. Transformar la función generadora $A(x)$ de vuelta en una serie de potencias (de alguna manera!),
   2.1 Si $A(x)$ es una función racional (cuociente entre dos polinomios), intentar expandirla usando fracciones parciales, y cada término por separado.
3. Las solución es el coeficiente a_n asociado a la potencia x^n.

Datos Útiles sobre Funciones Generadoras

Datos y Convenciones Útiles con funciones generadoras

Notación

Sea $f(x)$ una serie de potencias de x. Entonces, $[x^n]f(x)$ denotará el coeficiente de x^n en la serie $f(x)$.

Ejemplo:

$$[x^n]\,\frac{1}{1-2x} \;=\; [x^n]\sum_{n\geq 0} 2^n x^n \;=\; 2^n$$

Datos y Convenciones Útiles con funciones generadoras

Teorema (Serie de Potencias)

Si $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ y $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$, y ambas convergen*

$$A(x) + B(x) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n$$

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n \qquad \text{(Convolución)}$$

*: siempre supondremos que convergen.

(Demostración omitida)

Usando la convolución

Ejemplo: Sea $A(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ una función generadora. Entregue la expansión como serie de potencias.

Primero, recordemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} x^n$$

Usando el teorema anterior (convolución):

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n \geq 0} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) x^n = \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n$$

Mini-Catálogo de Funciones Generadoras

Secuencia	Fun. Gen.	Fun.Gen. (forma cerrada)
$\langle 1, 0, 0, 0, \ldots \rangle$	$\sum_{n\geq 0} [n = 0]x^n$	1
$\langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$	$\sum_{n\geq 0} x^n$	$\frac{1}{1-x}$
$\langle 1, -1, 1, -1, \ldots \rangle$	$\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$	$\frac{1}{1+x}$
$\langle 1, c, c^2, c^3, \ldots \rangle$	$\sum_{n\geq 0} c^n x^n$	$\frac{1}{1-cx}$
$\langle 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \rangle$	$\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$	$\frac{1}{(1-x)^2}$
$\langle \binom{c}{0}, \binom{c}{1}, \binom{c}{2}, \ldots \rangle$	$\sum_{n\geq 0} \binom{c}{n} x^n$	$(1+x)^c$
$\langle \binom{c-1}{0}, \binom{c}{1}, \binom{c+1}{2}, \binom{c+2}{3}, \ldots \rangle$	$\sum_{n\geq 0} \binom{c+n-1}{n} x^n$	$\frac{1}{(1-x)^c}$
$\langle a_n \rangle_{n\geq 0},\ a_m = 1, a_j = 0, j \neq m$	$\sum_{n\geq 0}[n = m]x^n$	x^m
$\langle a_n \rangle_{n\geq 0},\ a_n = 1$ si $m \mid n; a_n = 0$ si no	$\sum_{n\geq 0}[m \mid n]x^n$	$\frac{1}{1-x^m}$

Ejemplo final (Fibonacci)

Ejemplo: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \geq 1$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$

Sigamos la receta básica. **Paso 1:** Queremos obtener la función generadora $F(x) = \sum_{n\geq 0} F_n x^n$ pues la recurrencia está definida para $n \geq 0$.

Tomando la relación de recurrencia inicial, multiplicando por x^n a ambos lados y sumando (desde 1), obtenemos en el lado izquierdo:

$$\sum_{n\geq 1} F_{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{n\geq 2} F_n x^n = \frac{1}{x}\left(\sum_{n\geq 0} F_n x^n - F_1 x - F_0\right) = \frac{1}{x}(F(x) - x)$$

y en el lado derecho:

$$\sum_{n\geq 1} F_n x^n + \sum_{n\geq 1} F_{n-1}x^n = \left(\sum_{n\geq 0} F_n x^n - F_0\right) + \left(\sum_{n\geq 0} F_n x^{n+1}\right) = F(x) + xF(x)$$

Igualando ambos lados y despejando obtenemos: $F(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$

Ejemplo final (Fibonacci)

Paso 2: Intentemos recuperar una serie de potencias para $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$.

Por ejemplo, usando fracciones parciales. Esto funciona mejor si el denominador sólo tiene factores lineales. ¿Entonces? Factorizamos primero.

$$1 - x - x^2 = (1 - xr_0)(1 - xr_1)$$

donde $r_0 = (1+\sqrt{5})/2$, y $r_1 = (1-\sqrt{5})/2$. Con ello,

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-r_0x)(1-r_1x)} = \frac{1}{r_0 - r_1}\left(\frac{1}{1-r_0x} - \frac{1}{1-r_1x}\right)$$

esto último puede verificarse fácilmente.

Finalmente

$$F(x) = \frac{1}{r_0 - r_1}\left(\frac{1}{1-r_0x} - \frac{1}{1-r_1x}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n\geq 0} r_0^n x^n - \sum_{n\geq 0} r_1^n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{5}}(r_0^n - r_1^n)x^n$$

por lo que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_0^n - r_1^n)$.

Referencias

Libros de referencias:

- "Concrete Mathematics" de R. Graham, D. Knuth, y O. Patashnik, 2da. edición, Addison-Wesley, 1994. En particular, capítulos 1 y 2.
- "Generatingfunctionology", de Herbert S. Wilf. Disponible en `https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html`, 1994.