Ejercicio 4:

Inducción Estructural y Relaciones

Profesores: Alejando Hevia, Federico Olmedo
Auxiliares: Ismael Correa, Nahuel Gómez, Nelson Marambio,
Javier Oliva, Fernanda Sanchirico, Lucas Torrealba,
Ayudantes: Felix Avilés, Daniel Báez

Definiciones

Definición 1 (Conjunto de palabras sobre un alfabeto Σ) *El conjunto Σ^* de palabras sobre el alfabeto finito Σ, se define inductivamente como sigue:*

- ***Regla Base:*** $\epsilon \in \Sigma^*$ *(con ϵ la palabra vacía).*
- ***Regla Inductiva:*** *Dado un símbolo $x \in \Sigma$, y una palabra $w \in \Sigma^*$, luego $wx \in \Sigma^*$.*

Definición 2 (Orden Lexicográfico sobre strings) *Dado un alfabeto finito Σ, parcialmente ordenado de acuerdo a la relación de orden $<_\Sigma$, entonces un orden lexicográfico $\preceq$ es una relación de orden parcial sobre Σ^* definida recursivamente como sigue:*

- ***Regla Base:*** $\forall w \in \Sigma^*$, $\epsilon \preceq w$ *(con ϵ la palabra vacía).*
- ***Regla Recursiva:*** $\forall w_1, w_2 \in \Sigma^* \setminus \{\epsilon\}$ *tales que* $w_1 = x_1x_2...x_n$ *y* $w_2 = z_1z_2...z_m$*:*
  $w_1 \preceq w_2$ *ssi* $x_1 <_\Sigma z_1 \;\lor\; (x_1 = z_1 \land x_2...x_n \preceq z_2...z_m)$

Definición 3 (Operador de inversión de palabras) *Dado un alfabeto finito Σ, y una palabra $w \in \Sigma^*$, se define la inversión de w como la palabra w^R construida con los mismos símbolos que w pero en orden inverso.*

Definición 4 (Isomorfismo de strings) *Dadas dos palabras en Σ^*, $w_1 = x_1x_2...x_n$ y $w_2 = z_1z_2...z_n$, decimos que w_1 es isomorfa con w_2, denotado por $w_1 \cong w_2$, si existe una biyección $f : \Sigma \to \Sigma$ tal que $w_2 = f(x_1)f(x_2)...f(x_n)$.*

Definición 5 (Relaciones bien fundadas) *Dado un conjunto parcialmente ordenado $(X, \prec)$, este se dice bien fundado ssi no posee una secuencia de elementos infinitamente descendiente. Esto es, si no existe una secuencia $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{i+1} \preceq x_i \; \forall i \in \mathbb{N}$.*

Definición 6 (Relaciones densas) *Asimismo, dado un conjunto parcialmente ordenado $(X, \prec)$, este se dice denso ssi $\forall x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \prec x_2$, $\exists y \in X$ tal que $x_1 \prec y \prec x_2$.*

P1.-

1.

De una definición recursiva del operador de inversión.

Solución:

Dado un alfabeto finito Σ, definimos el operador de inversión de palabras en Σ^* recursivamente como sigue:

- **Regla Base:** $\epsilon^R = \epsilon$ (con ϵ la palabra vacía).
- **Regla Recursiva:** Sea $w = vx$, con $v \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$, luego:

$$\begin{aligned} w^R &= (vx)^R \\ &= xv^R \end{aligned}$$

2.

Muestre que $\forall w_1, w_2 \in \Sigma^*$, se tiene que $(w_1 w_2)^R = w_2^R w_1^R$

Solución:

Procedemos por inducción estructural:

- **Caso Base:** Sea $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} (\epsilon w)^R &= w^R \\ &= \epsilon w^R \\ &= \epsilon^R w^R && \text{Regla base operador inversión} \end{aligned}$$

- **Caso Recursivo:** Sean $w_1, w_2, v \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma^*$ tales que $w_2 = vx$.
Asumiendo que $(w_1 v)^R = v^R w_1^R$, demostremos que $(w_1 w_2)^R = w_2^R w_1^R$:

$$\begin{aligned} (w_1 w_2)^R &= (w_1 v x)^R && \text{Def. } w_2 \\ &= ((w_1 v) \cdot x)^R && \text{Asociatividad } \cdot \\ &= x(w_1 v)^R && \text{Regla recursiva operador inversión} \\ &= x v^R w_1^R && \text{Hipótesis Inductiva} \\ &= (x v^R) \cdot w_1^R && \text{Asociatividad } \cdot \\ &= w_2^R w_1^R && \text{Def. } w_2 \end{aligned}$$

P2.-

1.

Demuestre que la relación de isomorfismo de strings $\cong$ es relación de equivalencia.
solución:

Sea Σ un alfabeto finito, para mostrar que la relación $\cong$ sobre Σ^* es de equivalencia, debemos mostrar que es reflexiva, simétrica y transitiva; mostremos cada una de estas propiedades por separado.

- **Reflexividad:** Por definición, tenemos que todo string es isomorfo consigo mismo, esto pues la función identidad $id_\Sigma : \Sigma \to \Sigma$ es una función biyectiva tal que, $\forall w \in \Sigma^*$ de la forma $x_1x_2...x_n$, tenemos que $w = id_\Sigma(x_1) \cdot id_\Sigma(x_2) \cdot ... \cdot id_\Sigma(x_n) = x_1x_2...x_n$. Dado lo anterior, tenemos que $\forall w \in \Sigma^*$, $w \cong w$, por lo tanto $\cong$ es reflexiva.

- **Simetría:** Sean $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ tales que $w_1 \cong w_2$; por definición, tendremos que existe una función biyectiva $f : \Sigma \to \Sigma$ tal que, si w_1 es de la forma $x_1x_2...x_n$, luego $w_2 = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot ... \cdot f(x_n)$. A continuación, notamos que por la biyectividad de f, existe una función $f^{-1} : \Sigma \to \Sigma$, también biyectiva, tal que $\forall x \in \Sigma, \quad f^{-1} \circ f = id_\Sigma$. De esta manera, si w_2 es de la forma $z_1z_2...z_n$, aplicando la función f^{-1} carácter a carácter a las palabras a ambos lados de la definición de $w_1 \cong w_2$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(z_1) \cdot f^{-1}(z_n) \cdot ... \cdot f^{-1}(z_n) &= (f^{-1} \circ f)(x_1) \cdot (f^{-1} \circ f)(x_2) \cdot ... \cdot (f^{-1} \circ f)(x_n) \\ &= id_\Sigma(x_1) \cdot id_\Sigma(x_2) \cdot ... \cdot id_\Sigma(x_n) \\ &= x_1x_2...x_n \\ &= w_1 \\ \Rightarrow \qquad & w_2 \cong w_1 \end{aligned}$$

  De esta manera, tenemos que si $w_1 \cong w_2 \;\; \Rightarrow \;\; w_2 \cong w_1$.

- **Transitividad:** Sean $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$ tales que $w_1 \cong w_2$ y $w_2 \cong w_3$; por definición, tendremos que existen funciones biyectiva $f, g : \Sigma \to \Sigma$ tales que, si w_1 es de la forma $x_1x_2...x_n$, w_2 de la forma $z_1z_2...z_n$, y w_3 de la forma $s_1s_2...s_n$, luego $w_2 = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot ... \cdot f(x_n)$ y $w_3 = g(z_1) \cdot g(z_2) \cdot ... \cdot g(z_n)$. Notemos a continuación que la función $g \circ f$ será también biyectiva, y cumplirá que:

$$\begin{aligned} w_3 &= s_1s_2...s_n \\ &= g(z_1) \cdot g(z_2) \cdot ... \cdot g(z_n) \\ &= g(f(x_1)) \cdot g(f(x_2)) \cdot ... \cdot g(f(x_n)) \\ &= (g \circ f)(x_1) \cdot (g \circ f)(x_2) \cdot ... \cdot (g \circ f)(x_n) \\ \Rightarrow \qquad w_1 &\cong w_3 \end{aligned}$$

  De esta manera tenemos que $w_1 \cong w_2 \;\wedge\; w_2 \cong w_3 \;\; \Rightarrow \;\; w_1 \cong w_3$, por lo tanto la relación $\cong$ es transitiva.

Así, teniendo que $\cong$ es reflexiva, simétrica y transitiva, podemos concluir que la relación de isomorfismo de strings es de equivalencia.

2.

Demuestre que, para cualquier alfabeto finito Σ con más de un símbolo, el conjunto de palabras Σ^* ordenado según el orden lexicográfico, no es ni bien fundado ni denso.

Asuma que el alfabeto Σ está bien ordenado de acuerdo a una relación de orden $<_\Sigma$.

Solución:

Sea Σ un alfabeto finito con más de un símbolo, sin perdida de generalidad tomamos $\Sigma = \{x_1, ..., x_n\}$, bien ordenado de acuerdo a un orden total $<_\Sigma$. Tendremos así que $x_1 <_\Sigma x_2 <_\Sigma ... <_\Sigma x_n$, y que todo subconjunto $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tiene un menor elemento.

Mostremos primero que el *poset* $(\Sigma^*, \preceq)$ no es bien fundado:

Procedemos constructivamente tomando la secuencia $(x_1^i \cdot x_2)_{i\in\mathbb{N}}$, y notamos que ésta es, por definición de orden lexicográfico, monótonamente decreciente:

$$x_2 \succeq x_1x_2 \succeq x_1x_1x_2 \succeq x_1x_1x_1x_2 \succeq ...$$

Es decir, aunque existe un menor elemento $\epsilon \in \Sigma^*$, existe una secuencia de elementos en Σ^* infinitamente descendiente, y por lo tanto el *poset* $(\Sigma^*, \preceq)$ no es bien fundado.

Mostremos ahora que $(\Sigma^*, \preceq)$ no es denso:

Acá sencillamente damos un contraejemplo; notemos que la palabra $\epsilon \in \Sigma^*$ es el menor elemento en Σ^* de acuerdo a la regla base del orden lexicográfico. Aún mas, tomando la palabra $x_1 \in \Sigma^*$, tenemos que $\epsilon \preceq x_1$ y no es posible construir una palabra $s \in \Sigma^*$ tal que $\epsilon \preceq s \preceq x_1$, esto pues x_1 es el menor símbolo en el conjunto bien ordenado Σ^* de acuerdo al orden total $<_\Sigma$, y por la regla recursiva de orden lexicográfico, cualquier palabra de un largo mayor a uno, será mayor a x_1.