# Auxiliar 5

**Profesores: Federico Olmedo - Alejandro Hevia**
Auxiliares: Ismael Correa - Javier Oliva - Fernanda Sanchirico - Lucas Torrealba
Nahuel Gomez - Nelson Marambio
Ayudantes: Daniel Báez - Félix Melo

**P1.-**
Sean $p_i \cdots p_k$ primos y $n \in \mathbb{N}$, se pide contar el conjunto de elementos de $[n]$ que no son múltiplos de ningún $p_i$.

**P2.-** Suponga que conocer es una relación simétrica entre personas, es decir, si una persona A conoce a una persona B, entonces B conoce también a A. Pruebe que entonces en toda fiesta hay 2 personas que conocen exactamente a la misma cantidad de gente.

**P3.-** Se tienen los números del 1 al 30, y a cada uno se le debe anteponer un signo, es decir + o -, al final, computamos la suma de todos, con su signo. Por ejemplo, si fuesen solo del 1 al 5, una opción sería +1 -2 +3 +4 - 5, cuya suma es 1.

Pruebe que existe una suma a la cuál es posible llegar de más de 1 millón de maneras diferentes.

Hint: Una manera es una elección para los signos.

## Solución

**P1.-** Definamos $A_i$ como el conjunto de múltiplos de $p_i$ en $[n]$. Así, lo pedido es exactamente:

$$n - |\cup_{i\in[k]} A_k|$$

Notemos que no necesariamente un número en $[n]$ se dividirá exactamente por un único $p_i$, si pensamos la divisibilidad como conjuntos, la situación previamente descrita responde a casos que son intersección de conjuntos, entonces el valor que nos piden podemos obtenerlo usando el Principio de Inclusión-Exclusión Generalizado, teniendo que:

$$n - \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[k]} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i\in I} A_i| = n + \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[k]} (-1)^{|I|} \lfloor \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i} \rfloor$$

Ahora, ¿De donde sale ese piso en la sumatoria? Notemos que cada conjunto $A_i$ recolecta, dado un $p_i$, todos los múltiplos de este, es decir, $p_i, 2p_i \cdots kp_i$, entonces la cardinalidad de $A_i$ viene a ser esos $k$ múltiplos en $[n]$. Notemos que también debemos cubrir aquellos números divisibles por más de un $p_i$, para ello utilizamos la pitatoria.

De esta forma, si queremos contar los elementos en $[10000]$ que no son múltiplos de 2, 3 ni 5, obtendremos que:

$$\begin{aligned}10000 - \lfloor\frac{10000}{2}\rfloor - \lfloor\frac{10000}{3}\rfloor &- \lfloor\frac{10000}{5}\rfloor + \lfloor\frac{10000}{6}\rfloor + \lfloor\frac{10000}{10}\rfloor + \lfloor\frac{10000}{15}\rfloor - \lfloor\frac{10000}{30}\rfloor \\ &= 10000 - 5000 - 3333 - 2000 + 1666 + 1000 + 666 - 333 \\ &= 2666\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{P2.-}}$ Tenemos dos situaciones, cuando en la fiesta existe un colado en el carrete o no. Cuando existe un colado, necesariamente no existe un absolutamente popular, luego todas las las n personas pueden conocer entre 0 y $n-2$ personas (no se pueden conocer a si mismos y tampoco conocer a todo el mundo porque hay un colado), es decir existen n-1 opciones para n personas, entonces por palomar existe al menos un par de personas que conocen a la misma gente.

Ahora, si no existe un colado, entonces todos pueden conocer de 1 a n-1 personas, análogo a lo anterior.

$\boxed{\textbf{P3.-}}$ Desde el 1 hasta el 30 se puede sumar los nros dentro [-465, 465] a todo reventar, lo que son 930 nros. Ahora, tenemos $2^{30}$ formas de escoger + y - para los nros de 1 a 30, donde $2^{30} >>> 930$, entonces por palomar (tomando piso de $2^{30}/930 = 1$ millón y un poco mas) existe un numero donde hay más de un millón de formas diferentes para llegar a él.