Matemática Discreta

Clase 1: Introducción a la lógica proposicional

Federico Olmedo*

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

* Estas diapositivas fueron diseñadas a partir de diapositivas del profesor Alejandro Hevia.

Contenido clase de hoy

1. Introducción a la lógica
2. Sintaxis de la lógica proposicional
3. Introducción a la deducción natural

Introducción a la lógica

¿Qué estudia la lógica?

El objetivo de la lógica es responder cuándo un argumento es válido; se la conoce como la ciencia del razonamiento.

- Un argumento consiste en un conjunto de premisas y una conclusión.
- El argumento es válido (o correcto) cuando la conclusión se deduce de las premisas, o equivalentemente, cuando la conclusión es verdadera cada vez que las premisas son verdaderas.[1]
- La lógica se ocupa de la forma de los argumentos, y no del contenido.

[1] Más adelante veremos que la noción de validez admite dos caracterizaciones distintas, pero equivalentes.

Argumentos: Ejemplo 1

Todos los hombres son mortales
Sócrates es hombre
―――――――――――――――
Por lo tanto, Sócrates es mortal

- ¿Es un argumento válido? Sí
- ¿La validez del argumento cambia si cambiamos "hombres" por "animales"? No
- ¿Y si cambiamos "Sócrates" por "Platón"? Tampoco

Argumentos: Ejemplo 2

Si Pedro estudia en el DCC o en el DIM, entonces tomará CC4102
Pedro estudia en el DCC

Por tanto, Pedro tomará CC4102

Forma del argumento:

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \to r \\ p \\ \hline r \end{array}$$

¿Argumento válido?: Sí

La validez del argumento no depende ni de cómo interpretemos los enunciados individuales (p, q, r), ni de si resultan verdades o falsos, sino de su patrón (o forma) general.

Argumentos: Ejemplo 3

$$\begin{array}{l} \text{Si llueve, baja la temperatura} \\ \text{No llovió} \\ \hline \text{Por lo tanto, no bajó la termperatura} \end{array}$$

Forma del argumento: $\begin{array}{l} p \to q \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array}$

¿Argumento válido?: No

Argumentos: Ejemplo 1

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Todos los hombres son mortales}\\ \text{Sócrates es hombre}\end{array}}{\text{Por lo tanto, Sócrates es mortal}}$$

Forma del argumento:

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x.\ \ \mathit{hombre}(x) \rightarrow \mathit{mortal}(x)\\ \mathit{hombre}(\mathrm{Socrates})\end{array}}{\mathit{mortal}(\mathrm{Socrates})}$$

¿Argumento válido?: Sí

La validez del argumento no depende ni de cuáles sean los predicados "hombre", "mortal" o la constante "Sócrates", ni de si "Socrates" satisface el predicado "hombre". La validez está garantizada por la forma general del argumento.

Expresividad y tipos de lógicas

Distintos tipos de argumentos requieren distintos tipos de lógicas:

- Los argumentos de los Ejemplos 2 y 3 requieren sólo proposiciones (atómicas) y conectivos lógicos.
- El argumento del Ejemplo 1 requiere una lógica más expresiva, que incluya predicados y cuantificaciones sobre variables.

Hoy empezaremos estudiando la lógica más simple (o menos expresiva) de los Ejemplos 2 y 3: la lógica proposicional.

Sintaxis de la lógica proposicional

La noción de proposición

La lógica proposicional está construida alrededor de la noción de proposición. Una proposición es cualquier enunciado que es verdadero o falso (pero no ambas).

- **Las siguientes son proposiciones:** Pedro estudia en el DCC, Santiago es la capital de Chile, $2 > 4$
- **Las siguientes no:** ¿Qué hora es?, $x == 2$

Objetivo de la sintaxis

La sintaxis determina cuándo una secuencia de símbolos es una fórmula bien formada

Fórmulas bien formadas: $p \wedge q, \ \ \neg p \rightarrow p, \ \ q$

Fórmulas no bien formadas: $p \wedge, \ \ q \ p \neg \ p, \ \ \vee$

Conjunto de fórmulas bien formadas

Una fórmula bien formada es o bien una fórmula atómica, formada por una proposición, o bien una fórmula compuesta, formada combinando proposiciones a través de conectivos lógicos.

Definición (sintaxis de la lógica proposicional)

Dado un conjunto $P = \{p, q, r, \ldots\}$ de proposiciones, el conjunto de fórmulas bien formadas sobre P, notado $\mathcal{L}(P)$, se define inductivamente de la siguiente manera:

Caso base: Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}(P)$.
Caso inductivo: Si $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$, entonces $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in \mathcal{L}(P)$.

Supresión de paréntesis

Para evitar el aglutinamiento de paréntesis en las fórmulas nos permitimos omitir el par de paréntesis más externos e introducimos un orden de precedencia sobre los conectivos lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Ejemplo

Fórmula	Forma Abreviada
$((\neg p) \rightarrow q)$	$\neg p \rightarrow q$
$((p \wedge q) \vee r)$	$p \wedge q \vee r$

Introducción a la deducción natural

Estableciendo la validez de un argumento

Existen dos enfoques para probar la validez de un argumento:

1. **Enfoque semántico (teoría de modelos):** verificar que cada valuación de las proposiciones que hace verdadera simultáneamente a todas las premisas, también hace verdadera a la conclusión.

$$\begin{array}{l} p \vee q \to r \\ p \\ \hline r \end{array}$$

p	q	r	$p \vee q \to r$
1	1	**1**	1
1	1	0	0
1	0	**1**	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Estableciendo la validez de un argumento

Existen dos enfoques para probar la validez de un argumento:

2. **Enfoque sintáctico o deductivo (teoría de la demostración):** verificar que el argumento puede construirse combinando razonamientos "básicos" o "elementales".

   A continuación vamos a identificar el conjunto de estos razonamientos elementales a través de un acertijo lógico.

Acertijo: ¿Quién sacó la nota más alta?

Cuatro estudiantes —Ramona, Sofía, Tamara y Úrsula— rindieron 4 controles.

1. No se sabe qué nota sacó cada estudiante, pero se tienen los siguientes registros (cada registro corresponde a una estudiante):

	Control 1	**Control 2**	**Control 3**	**Control 4**
Registro 1	C	C	C	C
Registro 2	C	C	B	D
Registro 3	B	B	D	D
Registro 4	B	B	C	A

2. (Al menos) Una estudiante entre Ramona y Sofía no sacó ninguna C
3. (Al menos) Una estudiante entre Sofía y Tamara no sacó ninguna B
4. Tamara sacó la misma nota que Úrsula en (exactamente) 2 controles
5. Úrsula y Ramona no sacaron la misma nota en ningún control

Pregunta: ¿Qué estudiante sacó la única A?

Resolviendo el acertijo

H_1:

	C1	C2	C3	C4
Reg. 1	C	C	C	C
Reg. 2	C	C	B	D
Reg. 3	B	B	D	D
Reg. 4	B	B	C	A

H_2: (Al menos) Una estudiante entre Ramona y Sofía no sacó ninguna C

H_3: (Al menos) Una estudiante entre Sofía y Tamara no sacó ninguna B

H_4: Tamara sacó la misma nota que Úrsula en (exactamente) 2 controles

H_5: Úrsula y Ramona no sacaron la misma nota en ningún control

1. Analizando H_4 y H_1, Tamara y Úrsula corresponden o bien a los Registros 1 y 2 (en algún orden), o bien a los Registros 3 y 4 (en algún orden). Si corresponden a los Registros 3 y 4, entonces, las otras dos estudiantes —Ramona y Sofía— corresponden a los otros 2 registros —Registros 1 y 2—, lo que es imposible porque contradice H_2. Por lo tanto, Tamara y Úrsula corresponden a los Registros 1 y 2 (en algún orden).

Resolviendo el acertijo

H_1:

	C1	C2	C3	C4
Reg. 1	C	C	C	C
Reg. 2	C	C	B	D
Reg. 3	B	B	D	D
Reg. 4	B	B	C	A

H_2: (Al menos) Una estudiante entre Ramona y Sofía no sacó ninguna C

H_3: (Al menos) Una estudiante entre Sofía y Tamara no sacó ninguna B

H_4: Tamara sacó la misma nota que Úrsula en (exactamente) 2 controles

H_5: Úrsula y Ramona no sacaron la misma nota en ningún control

2. Como Tamara y Úrsula corresponden a los Registros 1 y 2 (en algún orden), Ramona y Sofía corresponden a los Registros 3 y 4 (en algún orden), y por lo tanto sacaron dos B's cada una.

Resolviendo el acertijo

H_1:

	C1	C2	C3	C4
Reg. 1	C	C	C	C
Reg. 2	C	C	B	D
Reg. 3	B	B	D	D
Reg. 4	B	B	C	A

H_2: (Al menos) Una estudiante entre Ramona y Sofía no sacó ninguna C

H_3: (Al menos) Una estudiante entre Sofía y Tamara no sacó ninguna B

H_4: Tamara sacó la misma nota que Úrsula en (exactamente) 2 controles

H_5: Úrsula y Ramona no sacaron la misma nota en ningún control

3. Ahora, analizando H_3 y H_1, el único registro que no tiene ninguna B es el Registro 1. Y como Sofía tiene 2 B's [ver 2], Tamara debe corresponder al Registro 1.

Resolviendo el acertijo

H$_1$:

	C1	C2	C3	C4
Reg. 1 (T)	C	C	C	C
Reg. 2	C	C	B	D
Reg. 3	B	B	D	D
Reg. 4	B	B	C	A

H$_2$: (Al menos) Una estudiante entre Ramona y Sofía no sacó ninguna C

H$_3$: (Al menos) Una estudiante entre Sofía y Tamara no sacó ninguna B

H$_4$: Tamara sacó la misma nota que Úrsula en (exactamente) 2 controles

H$_5$: Úrsula y Ramona no sacaron la misma nota en ningún control

4. Como Tamara y Úrsula corresponden a los Registros 1 y 2 (en algún orden) [ver 1], y Tamara corresponde al Registro 1 [ver 3], entonces Úrsula corresponde al Registro 2.

Resolviendo el acertijo

		C1	C2	C3	C4
H_1:	Reg. 1 (T)	C	C	C	C
	Reg. 2 (U)	C	C	B	D
	Reg. 3	B	B	D	D
	Reg. 4 (R)	B	B	C	A

H_2: (Al menos) Una estudiante entre Ramona y Sofía no sacó ninguna C

H_3: (Al menos) Una estudiante entre Sofía y Tamara no sacó ninguna B

H_4: Tamara sacó la misma nota que Úrsula en (exactamente) 2 controles

H_5: Úrsula y Ramona no sacaron la misma nota en ningún control

5. Combinando esto último con H_5, y viendo en H_1 que el único registro que no tiene ninguna nota en común con el Registro 2 (de Úrsula) es el Registro 4, podemos concluir que Ramona corresponde al Registro 4. Por lo tanto, Ramona fue la estudiante que sacó la unica A. □

Identificando los patrones de razonamiento elementales

si Tamara y Úrsula corresponden a los Registros 3 y 4
..... [razonamiento]
situación que es imposible (porque contradice H2)

Tamara y Úrsula no corresponden a los Registros 3 y 4

Identificando los patrones de razonamiento elementales

si Tamara y Úrsula corresponden a los Registros 3 y 4
..... [razonamiento]
situación que es imposible (porque contradice H2)

Tamara y Úrsula no corresponden a los Registros 3 y 4

$$\cfrac{\begin{array}{c}\alpha \\ \vdots \\ \mathit{false}\end{array}}{\neg\alpha}$$

Para probar la negación de un enunciado, suponemos "temporalmente" que es cierto (razonamiento hipotético), y derivamos una contradicción.

Identificando los patrones de razonamiento elementales

$$\frac{\text{Tamara corresponde al Registro 1} \quad \text{Úrsula corresponde al Registro 2}}{\text{Tamara corresponde al Registro 1 y Úrsula corresponde al Registro 2}}$$

$$\frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

Para probar la conjunción de dos enunciados, hay que probar cada uno de ellos.

Identificando los patrones de razonamiento elementales

$$\frac{\text{Ramona y Sofía sacaron dos B's cada una}}{\text{Ramona sacó dos B's}}$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

De la conjunción de dos enunciados podemos derivar cada uno de ellos individualmente.

Identificando los patrones de razonamiento elementales

$$\frac{\text{Si Ramona corresponde al Registro 4, entonces Ramona sacó la única A} \quad \text{Ramona corresponde al Registro 4}}{\text{Ramona sacó la única A}}$$

$$\frac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}$$

Modus ponens: si tenemos una prueba de un condicional y de su antecedente, podemos derivar su consecuente.

Identificando los patrones de razonamiento elementales

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha\\ \vdots\\ \mathit{false}\end{array}}{\neg\alpha}\ [\neg\mathsf{I}] \qquad\qquad \frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}\ [\wedge\mathsf{I}]$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\ [\wedge\mathsf{E}_L] \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\ [\wedge\mathsf{E}_R] \qquad\qquad \frac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}\ [\to\mathsf{E}]$$

- Cada regla está asociada a un operador particular. Se nombran de acuerdo a la posición que ocupa el operador en la regla.
- Las reglas de la primera línea introducen el operador ($\neg$ y $\wedge$, resp.) en la conclusión de la regla. Se llaman reglas de introducción.
- Las reglas de la segunda línea eliminan el operador ($\wedge$ y $\to$, resp.) que aparece en las premisas. Se llaman reglas de eliminación.