Matemática Discreta

Clase 15: Resolviendo relaciones de recurrencia, Métodos Básicos

Federico Olmedo y Alejandro Hevia

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

Introducción

Soluciones a las Relaciones de Recurrencia

Recuerdo: Como hemos visto, las relaciones de recurrencia tienen muchas aplicaciones en computación. Desde problemas de conteo, hasta el tiempo de ejecución de algoritmos. Por lo mismo, dada una recurrencia en n, es muy útil calcular el valor de la recurrencia para ciertos valores de n.

- Por ejemplo, el valor del 8vo elemento de la secuencia de Fibonacci puede representar el número de maneras de organizar un proceso que estamos estudiando.
- Más aún, saber cómo luce la solución en función de n (por ej. asintóticamente) puede ser necesario para un análisis de tiempo de un algoritmo, por ejemplo.

Soluciones a las Relaciones de Recurrencia: Eficiencia

Para un valor de n, una opción es calcular el valor del n-ésimo término de la secuencia usando directamente la relación dada por la recurrencia. Por ejemplo, si queremos calcular el valor del décimo elemento de la secuencia de Fibonacci,

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n \geq 3$$

un algoritmo recursivo simple calcularía

$$\begin{aligned}
a_8 &= a_7 + a_6 \\
&= (a_6 + a_5) + (a_5 + a_4) \\
&= ((a_5 + a_4) + (a_4 + a_3)) + ((a_4 + a_3) + (a_3 + a_2)) \\
&= (((a_4 + a_3) + (a_3 + a_2)) + ((a_3 + a_2) + (a_2 + a_1))) + (((a_3 + a_2) + (a_2 + a_1)) + ((a_2 + a_1) + 2)) \\
&= ((((a_3 + a_2) + (a_2 + a_1)) + ((a_2 + a_1) + 2)) + (((a_2 + a_1) + 2) + (2 + 1))) \\
&\quad +((((a_2 + a_1) + 2) + (2 + 1)) + ((2 + 1) + 2)) \\
&= (((((a_2 + a_1) + 2) + (2 + 1)) + ((2 + 1) + 2)) + (((2 + 1) + 2) + (2 + 1))) + ((((2 + 1) + 2) + (2 + 1)) \\
&\quad +((2 + 1) + 2)) \\
&= (((((2 + 1) + 2) + (2 + 1)) + ((2 + 1) + 2)) + (((2 + 1) + 2) + (2 + 1))) + ((((2 + 1) + 2) + (2 + 1)) \\
&\quad +((2 + 1) + 2)) = 34
\end{aligned}$$

Soluciones a las Relaciones de Recurrencia: Eficiencia

Calcular la recurrencia usando un programa recursivo que emule directamente la definición recursiva es usualmente muy ineficiente.

En nuestro ejemplo, al evaluar la secuencia de Fibonacci en un n arbitrario usando el algoritmo "clásico" recursivo basado en la relación de recurrencia

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

cada cálculo de a_n conlleva 2 llamadas recursivas, independientemente si el valor a_n ya fue previamente calculado por otra llamada previa (en la recursión).

Optimización? Uso de programación dinámica, entre otras técnicas.

Soluciones a las Relaciones de Recurrencia: Forma Cerrada

Encontrar una expresión "simple", una *forma cerrada* para una recurrencia, no sólo nos permite frecuentemente calcularla en forma más eficiente, sino

- entender el comportamiento de la secuencia para n cada vez más grandes, y
- usar la expresión en un cálculo analítico (donde el parámetro n varíe, por ej.).

Soluciones a las Relaciones de Recurrencia: Forma Cerrada

Definición

Una solución de una recurrencia se dice de forma cerrada si podemos calcularla en un número constante de operaciones matemáticas "conocidas", independiente de n.

Por ejemplo: $n(n+1)/2$ es una cerrada, pero $1+2+\ldots+(n-1)+n$ no lo es.

Observación: La definición es informal y deja abierta qué es una operación matemática "conocida" a fin de ajustarnos a la práctica donde ciertas operaciones con el tiempo se han tornado tan usuales que se les ha dado una notación dedicada, aún si su cálculo no es independiente del parámetro. Por ej. $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$.

Estrategias Básicas de Solución

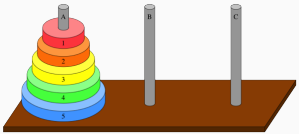
Objetivo: En esta clase iniciaremos la revisión de mecanismos para resolverlas, comenzando con algunas estrategias simples.

Estrategias de Solución:

- Inferencia (o conjetura) y luego demostración por inducción.
- Transformaciones simples. Por ejemplo, traducir a sumatorias y usar écnicas basadas en sumatorias.

Inferencia a partir de valores pequeños

Ejemplo: La secuencia asociada a las Torres de Hanoi tenía la recurrencia:



$$\begin{aligned} h_n &= 2h_{n-1} + 1 \quad \forall n \geq 2 \\ h_1 &= 1 \end{aligned}$$

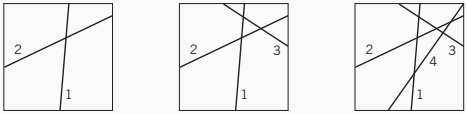
Una estrategia simple es *inferir* la forma cerrada simplemente mirando los valores de la recurrencia para valores pequeños de los parámetros:

n	1	2	3	4	5	6	7
h_n	1	3	7	15	31	63	127

... de esos valores podemos conjeturar $h_n = 2^n - 1$.

Inferencia via desenrollar la recursión

Ejemplo: La clase pasada vimos el problema de determinar en cuántas regiones divide el plano n líneas (donde todo par de líneas se intersecta en un punto distinto):



$$b_n = b_{n-1} + n \quad \forall n \geq 2$$
$$b_1 = 2, \qquad b_0 = 1$$

Una estrategia simple es *inferir* la forma cerrada, por ej. desenrollando la recurrencia

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + n \\ &= b_{n-2} + (n-1) + n \\ &= b_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &\vdots \\ &= b_0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ &= 1 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{n} k \;=\; 1 + n(n+1)/2 \end{aligned}$$

Inferencia: Limitaciones

Limitaciones: ¿Estamos listos? ¿Podemos decir formalmente que ésta es la solución?

Claramente **no** pues la forma cerrada

- obtenida de mirar valores pequeños puede estar correcta para los valores examinados e incorrecta en todos los otros,
- obtenida de desenrollar la recurrencia sean una aproximación miope, y no capture factores o efectos que surgen con valores más grandes.

(O puede que, luego de mirar ambos, no se nos ocurra!)

Solución: demostrarla por inducción.

Inferencia + Inducción

Ejemplo: Demostremos por inducción que la fórmula cerrada para la secuencia asociada a las regiones divididas por n rectas es correcta.

Recurrencia

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + n \quad \forall n \geq 2 \\ b_0 &= 1 \end{aligned}$$

Forma Cerrada

$$b_n = 1 + n(n+1)/2$$

El caso base es $b_0 = 1 + 0(1)/2 = 1$. Supongamos que se tiene para $n-1$, entonces

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + n = 1 + \frac{(n-1)n}{2} + n \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

En general, esto es suficiente para demostrar que la forma cerrada es una solución correcta de la recurrencia.

Motivación

Ejemplo: Consideremos de nuevo la recurrencia de las Torres de Hanoi

$$\begin{aligned} h_n &= 2h_{n-1} + 1 \quad \forall n \geq 1 \\ h_0 &= 0 \end{aligned}$$

(donde la recurrencia la hemos partido de 0 *en vez de* 1*)*

Podemos dividir ambas equaciones por 2^n:

$$\begin{aligned} h_n/2^n &= h_{n-1}/2^{n-1} + 1/2^n \quad \forall n \geq 1 \\ h_0/2^0 &= 0 \end{aligned}$$

Y si llamamos $S_n = h_n/2^n$, entonces podemos re-escribir lo anterior como

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} + 1/2^n \quad \forall n \geq 1 \\ S_0 &= 0 \end{aligned}$$

de hecho, esta recurrencia ahora evalúa la sumatoria $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$.

Si sabemos que $\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 1 - 2^{-n}$, entonces $h_n = S_n \cdot 2^n = (1 - 2^{-n})2^n = 2^n - 1$.

Generalización

Observación:

El “truco” anterior se puede generalizar para transformar una recurrencia en una suma. Basta con dividir la secuencia por el valor “adecuado”.

Generalización

Sea $a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n$ una recurrencia para ciertos valores a_n, b_n, c_n.

Objetivo: transformarla en una suma. La idea es multiplicar por un *factor de suma* s_n:

$$s_n \cdot a_n T_n \;=\; s_n \cdot b_n T_{n-1} + s_n c_n$$

Y si escogemos s_n de tal manera que $s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$ entonces podemos llamar $S_n = s_n a_n T_n$, y reescribir lo anterior como

$$S_n \;=\; S_{n-1} + s_n \cdot c_n$$

Aquí podemos notar que S_n es la relación de recurrencia de una suma! Luego

$$S_n \;=\; s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k \;=\; s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k$$

Y por ende:

$$T_n \;=\; \frac{1}{s_n a_n}\left(s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k \right)$$

por ej. $n = 1$, $T_1 = (s_1 b_1 T_0 + s_1 c_1)/(s_1 a_1) = (b_1 T_0 + c_1)/a_1$.

(Notar que s_1 puede ser cualquier valor no nulo, pues se cancela.)

Generalización

Lo anterior funciona si: podemos escoger un s_n tal que $s_n = s_{n-1}a_{n-1}/b_n$. ¿Cómo lo escogemos?

No es difícil, pues desenrollando el s_n vemos que

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1}{b_n b_{n-1}\dots b_2}$$

o cualquier múltiplo por una constante funciona.

Ejemplo: Para Hanoi, $h_n = 2h_{n-1} + 1$, o sea $a_n = 1$, $b_n = 2$, lo cual calza con nuestro truco de multiplicar por $s_n = 2^{-n}$.

Advertencia: Ojo con dividir por cero! Este método funciona siempre que los a's y b's sean distintos de cero.

Ejemplificando las técnicas

Ejercicio

Encontrar una forma cerrada para la siguiente recurrencia:

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k \quad \forall n > 0$$

$$C_0 = 0$$

Esta recurrencia aparece en el análisis del algoritmo de ordenación Quicksort. Representa el número de comparaciones promedio hechas por el algoritmo cuando es aplicado sobre n elementos en orden aleatorio.

Ideas? Se ve difícil! Ok, démosle.

Técnica 1: Inspeccionar valores pequeños de la recurrencia. $C_1 = 2$, $C_2 = 5$, $C_3 = 26/3$.

No ayuda demasiado :-(.

Antes de continuar: Debemos intentar simplificarla primero:

1. Eliminando la división (el factor $2/n$), y luego
2. Eliminando la sumatoria de la derecha.

Ejercicio

$$C_n \;=\; n+1+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k \quad \forall n>0, \qquad\qquad C_0 \;=\; 0$$

Eliminando la división: Simple, multiplicando por n obtenemos

$$nC_n = n^2+n+2\sum_{k=0}^{n-1} C_k \quad \forall n>0.$$

Eliminando la sumatoria: El truco es obtener otra ecuación con casi la misma sumatoria a la derecha y luego restarlo. Para eso, reemplazamos por $n-1$ en la ecuación anterior, y obtenemos

$$(n-1)C_{n-1} \;=\; (n-1)^2+(n-1)+2\sum_{k=0}^{n-2} C_k \quad \forall n-1>0$$

y restando ambas, se tiene $\quad nC_n-(n-1)C_{n-1} \;=\; 2n+2C_{n-1} \qquad \forall n>1$. Ordenando:

$$C_0 \;=\; 0; \qquad nC_n \;=\; (n+1)C_{n-1}+2n \qquad \forall n>1$$

Ejercicio

$$C_0 = 0; \qquad nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2n \qquad \forall n > 1$$

Esta recurrencia está en la forma que nos permite transformarla usando los factores de suma.
Recordemos la forma general: $a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n$

Comparando, vemos que $a_n = n$, $b_n = n+1$, y $c_n = 2n$. Entonces

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1}{b_n b_{n-1}\dots b_2} = \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot 1}{(n+1)\cdot n\cdot \dots \cdot 3} = \frac{2}{(n+1)n}$$

Con ese factor, la solución aplicando el método es

$$C_n = 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

Lo cual no está en forma cerrada (pero veremos que es medio inevitable).

Ejercicio

La suma de la derecha puede ponerse en términos de una cantidad más estándar: el número harmónico

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1} \frac{1}{k}$$

(Como este valor es muy usado, lo consideraremos como una "operación bien conocida".)

Re-expresando la sumatoria, finalmente obtenemos:

$$C_n \;=\; 2(n+1)H_n - 2n\,.$$

(fin!)

Paréntesis: Sumatorias

Sumatorias y Recurrencias (parte 1)

Recuerdo de Sumatorias: Como veremos, las sumatorias aparecen frecuentemente cuando analizamos recurrencias. Las siguientes propiedades las usaremos para manipular sumatorias.

Propiedades Interesantes

Sea K un conjunto finito de enteros, y sean $\langle a_k \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$, y $\langle b_k \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$, dos secuencias arbitrarias*, y $c \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} c\, a_k &= c \sum_{k \in K} a_k && \text{(Ley distributiva)} \\ \sum_{k \in K} (a_k + b_k) &= \sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K} a_k && \text{(Ley asociativa)} \\ \sum_{k \in K} a_k &= \sum_{\pi(k) \in K} a_{\pi(k)} && \text{(Ley conmutativa)} \end{aligned}$$

donde $\pi()$ es una permutación cualquiera sobre los enteros.

Sumatorias y Recurrencias (parte 2)

Notación: Si P es una propiedad (usualmente sobre los enteros), usaremos la notación $[P]$ para denotar la función que retorna 1 cuando P es verdadera, y 0 cuando es falsa. Con eso, podemos simplificar la suma sobre un conjunto arbitrario. Por ejemplo:

$$[p \text{ primo}] = \begin{cases} 1, & \text{si } p \text{ es un número primo} \\ 0, & \text{si } p \text{ no es un número primo} \end{cases}$$

Entonces,

$$\sum_{p \text{es primo}} p \;=\; \sum_{k} k\,[k \text{ primo}]$$

donde la suma se entiende sobre todos los enteros.

Permite escribir sumatorias sobre propiedades más complejas de manera breve y más clara.

Referencias

Libro de referencia: Se recomienda leer el libro "Concrete Mathematics" de R. Graham, D. Knuth, y O. Patashnik, 2da. edición, Addison-Wesley, 1994. En particular, capítulos 1 y 2.