Auxiliar 4:

Inducción y Relaciones

Profesores: Alejando Hevia, Federico Olmedo
Auxiliares: Ismael Correa, Nahuel Gómez, Nelson Marambio,
Javier Oliva, Fernanda Sanchirico, Lucas Torrealba,
Ayudantes: Felix Avilés, Daniel Báez

Definición 1 (Conjunto de palabras sobre un alfabeto Σ) *El conjunto Σ^* de palabras sobre el alfabeto finito Σ, se define inductivamente como sigue:*

- ***Caso Base:*** *$\epsilon \in \Sigma^*$ (con ϵ la palabra vacía).*
- ***Caso Inductivo:*** *Dado un símbolo $x \in \Sigma$, y una palabra $w \in \Sigma^*$, luego $wx \in \Sigma^*$.*

P1.-

1.

De una definición recursiva del operador potencia sobre strings, donde dada una palabra $w \in \Sigma^*$, se denota como w^i a la concatenación i veces del string w.

Solución:

Dado un alfabeto finito Σ, y una palabra arbitraria $w \in \Sigma^*$, definimos el operador potencia de strings recursivamente como sigue:

- **Regla Base:** $w^0 = \epsilon$ (donde ϵ es la palabra vacía).
- **Regla Recursiva:** Para $i > 0$, se define $w^i = w \cdot w^{i-1}$ (donde $\cdot$ es el operador de concatenación de strings).

2.

Dada una palabra $w \in \Sigma^*$, denotamos como $l(w)$ al largo del string w. De una definición recursiva para el largo de strings.

Solución:

Dado un alfabeto finito Σ, definimos el operador largo de strings recursivamente como sigue:

- **Regla Base:** $l(\epsilon) = 0$ (con ϵ la palabra vacía)
- **Regla Recursiva:** Dada $w \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$, $l(wx) = 1 + l(w)$

3.

Muestre por inducción estructural que, $\forall w_1, w_2 \in \Sigma^*$, $l(w_1 \cdot w_2) = l(w_1) + l(w_2)$.

Solución:

- **Caso Base:** Sea $w \in \Sigma^*$, $l(\epsilon \cdot w) = l(w) = 0 + l(w) = l(\epsilon) + l(w)$
- **Caso Inductivo:** Sean $w_1, v \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$ tales que $vx = w_2$ y $l(wv) = l(w) + l(v)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} l(w_1 \cdot w_2) &= l(w_1 \cdot vx) = l((w_1 v) \cdot x) \\ &= l(w_1 v) + 1 = l(w_1) + l(v) + 1 \\ &= l(w_1) + l(vx) = l(w_1) + l(w_2) \end{aligned}$$

4.

Muestre por inducción matemática que, $\forall i \in \mathbb{N}$ y $\forall w \in \Sigma^*$, $l(w^i) = i \cdot l(w)$.

Solución:

- **Caso Base:** Sea $w \in \Sigma^*$, $l(w^0) = l(\epsilon) = 0 = 0 \cdot l(w)$
- **Caso Inductivo:** Suponiendo que $l(w^i) = i \cdot l(w)$, mostremos que $l(w^{i+1}) = (i+1) \cdot l(w)$:

$$\begin{aligned} l(w^{i+1}) &= l(w \cdot w^i) = l(w) + l(w^i) \\ &= l(w) + i \cdot l(w) = l(w) \cdot (1 + i) \\ &= (i+1) \cdot l(w) \end{aligned}$$

Definición 2 (Relación Euclidiana) *Una relación R sobre un conjunto A se dice euclidiana si satisface que:*

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in A, \ \ \alpha R \beta \wedge \alpha R \gamma \Rightarrow \beta R \gamma$$

$\boxed{\textbf{P2.-}}$

Demuestre que R es relación de equivalencia si y solo si R es reflexiva y euclidiana.

Solución:

$\boxed{\Rightarrow}$

Si R es relación de equivalencia tenemos por definición que es reflexiva, mostremos así que es euclidiana.

Tomando $(\alpha, \beta) \in R$ y $(\alpha, \gamma) \in R$, tendremos por simetría de R (nuevamente, R es de equivalencia por premisa) que si $(\alpha, \beta) \in R \ \ \Rightarrow \ \ (\beta, \alpha) \in R$, luego:

$$\begin{array}{rl} & (\alpha, \beta) \in R \wedge (\alpha, \gamma) \in R \\ \Rightarrow & (\beta, \alpha) \in R \wedge (\alpha, \gamma) \in R \\ \Rightarrow & (\beta, \gamma) \in R \end{array}$$

Donde la última implicancia sigue por transitividad de R. de esta manera tenemos que $(\alpha, \beta) \in R \wedge (\alpha, \gamma) \in R \ \ \Rightarrow \ \ (\beta, \gamma) \in R$, con lo cual podemos concluir que si R es relación de equivalencia, luego será reflexiva y euclidiana.

$\boxed{\Leftarrow}$

Para mostrar que R es de equivalencia es necesario que sea simétrica, reflexiva y transitiva. Puesto que la reflexividad de R es premisa de la demostración, procedemos a mostrar que también debe ser simétrica y transitiva:

Simetría: Sea $\alpha \in A$, por reflexividad de R tenemos que $\alpha R \alpha$. Además, puesto que R es euclidiana, reemplazando en la definición tendremos que para todo $\beta \in A$, $\alpha R \beta \wedge \alpha R \alpha \Rightarrow \beta R \alpha$, con lo cual tenemos la simetría.

Transitividad: Sean $\alpha, \beta, \gamma \in A$ tales que $\alpha R \beta$ y $\alpha R \gamma$. Como ya demostramos que R es simétrica podemos usar aquello, más la definición de relación euclidiana, para concluir que:

$$
\begin{aligned}
& \alpha R\beta \wedge \alpha R\gamma \Rightarrow \beta R\gamma \\
\Rightarrow \qquad & \beta R\alpha \wedge \alpha R\gamma \Rightarrow \beta R\gamma
\end{aligned}
$$

Lo cual no es nada más que la definición de transitividad.

Tenemos así que si R es reflexiva y euclidiana, luego tiene que ser de equivalencia, con lo cual concluimos la demostración hacia la izquierda.

Podemos concluir así, teniendo ambas implicancias, que R es relación de equivalencia si y solo si R es reflexiva y euclidiana.