Matemática Discreta

Clase 10: Relaciones y funciones

Federico Olmedo y Alejandro Hevia
Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

Relaciones

Definición de relación

Definición (relación binaria)

Una relación entre los conjuntos A y B es un *subconjunto del producto cartesiano* $A \times B$.

Definición de relación

Definición (relación binaria)

Una relación entre los conjuntos A y B es un *subconjunto del producto cartesiano* $A \times B$. En otras palabras, es un conjunto de pares (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$.

Definición de relación

Definición (relación binaria)

Una relación entre los conjuntos A y B es un *subconjunto del producto cartesiano* $A \times B$. En otras palabras, es un conjunto de pares (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$.

Notación: Dada la relación $R \subseteq A \times B$, usamos $a_0 \, R \, b_0$ o $(a_0, b_0) \in R$ para notar que a_0 y b_0 están relacionados por R.

Definición de relación

Definición (relación binaria)

Una relación entre los conjuntos A y B es un *subconjunto del producto cartesiano* $A \times B$. En otras palabras, es un conjunto de pares (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$.

Notación: Dada la relación $R \subseteq A \times B$, usamos $a_0 \, R \, b_0$ o $(a_0, b_0) \in R$ para notar que a_0 y b_0 están relacionados por R. De manera similar, usamos $a_0 \not R \, b_0$ o $(a_0, b_0) \notin R$ para notar que a_0 y b_0 no están relacionados por R.

Definición de relación

Definición (relación binaria)

Una relación entre los conjuntos A y B es un *subconjunto del producto cartesiano* $A \times B$. En otras palabras, es un conjunto de pares (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$.

Notación: Dada la relación $R \subseteq A \times B$, usamos $a_0 \, R \, b_0$ o $(a_0, b_0) \in R$ para notar que a_0 y b_0 están relacionados por R. De manera similar, usamos $a_0 \not R \, b_0$ o $(a_0, b_0) \notin R$ para notar que a_0 y b_0 no están relacionados por R.

Ejemplo: Considere la relación de divisibilidad entre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}_0$:

$$| \quad = \quad \{(a, k \cdot a) \mid a \in \mathbb{N} \text{ y } k \in \mathbb{N}_0\}$$

Definición de relación

Definición (relación binaria)

Una relación entre los conjuntos A y B es un *subconjunto del producto cartesiano* $A \times B$. En otras palabras, es un conjunto de pares (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$.

Notación: Dada la relación $R \subseteq A \times B$, usamos $a_0 \, R \, b_0$ o $(a_0, b_0) \in R$ para notar que a_0 y b_0 están relacionados por R. De manera similar, usamos $a_0 \not R \, b_0$ o $(a_0, b_0) \notin R$ para notar que a_0 y b_0 no están relacionados por R.

Ejemplo: Considere la relación de divisibilidad entre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}_0$:

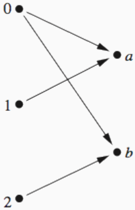
$$\mid \quad = \quad \{(a, k \cdot a) \mid a \in \mathbb{N} \text{ y } k \in \mathbb{N}_0\}$$

Equivalentemente podemos definirla de la siguiente manera:

$$a \mid b \quad \text{si y sólo si} \quad \exists k \in \mathbb{N}_0.\ b = k \cdot a$$

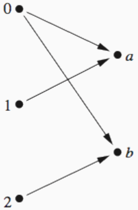
Representación gráfica de relaciones

Cuando A y B son conjuntos finitos, podemos representar una relación entre A y B a través de un grafo, donde una arista (o flecha) de $a \in A$ hacia $b \in B$ representa que $a \, R \, b$.



Representación gráfica de relaciones

Cuando A y B son conjuntos finitos, podemos representar una relación entre A y B a través de un grafo, donde una arista (o flecha) de $a \in A$ hacia $b \in B$ representa que $a \, R \, b$.



Ejercicio: ¿Cuántas relaciones existen entre dos conjuntos finitos A y B?

Relaciones sobre un conjunto

En el caso particular que una relación R relaciona elementos de un conjunto con elementos del mismo conjunto, digamos A, decimos que R es una relación sobre A.

Relaciones sobre un conjunto

En el caso particular que una relación R relaciona elementos de un conjunto con elementos del mismo conjunto, digamos A, decimos que R es una relación sobre A.

Ejemplo: Las siguiente son relaciones sobre $\mathbb{N}$

$$\{(a, b) \mid a \leq b\}, \quad \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$$

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se dice

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se dice

- reflexiva sii $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$;

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se dice

- reflexiva sii $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$;
- simétrica sii $(a, b) \in R$ implica $(b, a) \in R$ para todo $a, b \in A$;

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se dice

- reflexiva sii $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$;
- simétrica sii $(a, b) \in R$ implica $(b, a) \in R$ para todo $a, b \in A$;
- antisimétrica sii $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ implica $a = b$ para todo $a, b \in A$;

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se dice

- reflexiva sii $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$;
- simétrica sii $(a, b) \in R$ implica $(b, a) \in R$ para todo $a, b \in A$;
- antisimétrica sii $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ implica $a = b$ para todo $a, b \in A$;
- transitiva sii $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ implica $(a, c) \in R$ para todo $a, b, c \in A$.

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se dice

- reflexiva sii $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$;
- simétrica sii $(a, b) \in R$ implica $(b, a) \in R$ para todo $a, b \in A$;
- antisimétrica sii $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ implica $a = b$ para todo $a, b \in A$;
- transitiva sii $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ implica $(a, c) \in R$ para todo $a, b, c \in A$.

Ejercicio: Exprese estas propiedades en lógica de predicados.

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se dice

- reflexiva sii $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$;
- simétrica sii $(a, b) \in R$ implica $(b, a) \in R$ para todo $a, b \in A$;
- antisimétrica sii $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ implica $a = b$ para todo $a, b \in A$;
- transitiva sii $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ implica $(a, c) \in R$ para todo $a, b, c \in A$.

Ejercicio: Exprese estas propiedades en lógica de predicados.

Ejercicio: ¿La relación vacía satisface alguna de las propiedades anteriores? ¿Cuáles?

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se dice

- reflexiva sii $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$;

Ejercicio: Dadas las siguientes relaciones sobre $\mathbb{Z}$, ¿qué propiedades satisface cada una?

- $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ o } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se dice

- simétrica sii $(a, b) \in R$ implica $(b, a) \in R$ para todo $a, b \in A$;

Ejercicio: Dadas las siguientes relaciones sobre $\mathbb{Z}$, ¿qué propiedades satisface cada una?

- $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ o } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se dice

- antisimétrica sii $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ implica $a = b$ para todo $a, b \in A$;

Ejercicio: Dadas las siguientes relaciones sobre $\mathbb{Z}$, ¿qué propiedades satisface cada una?

- $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ o } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se dice

- antisimétrica sii $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ implica $a = b$ para todo $a, b \in A$;

Ejercicio: Dadas las siguientes relaciones sobre $\mathbb{Z}$, ¿qué propiedades satisface cada una?

- $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ o } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

¡Por vacuidad, R_2 y R_5 son también antisimétricas!

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se dice

- transitiva sii $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ implica $(a, c) \in R$ para todo $a, b, c \in A$.

Ejercicio: Dadas las siguientes relaciones sobre $\mathbb{Z}$, ¿qué propiedades satisface cada una?

- $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ o } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

Relaciones de órden

Definición (relación de orden)

Relaciones de órden

Definición (relación de orden)

- Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se llama orden parcial cuando es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Relaciones de órden

Definición (relación de orden)

- Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se llama orden parcial cuando es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Ejemplo:

- $\leq$ es un orden parcial sobre $\mathbb{N}$

Relaciones de órden

Definición (relación de orden)

- Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se llama orden parcial cuando es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Ejemplo:

- $\leq$ es un orden parcial sobre $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ es un orden parcial sobre 2^S, para todo conjunto S

Relaciones de órden

Definición (relación de orden)

- Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se llama orden parcial cuando es reflexiva, transitiva y antisimétrica.
- Una relación de orden parcial $R \subseteq A \times A$ es, además, un orden total sii todo par de elementos son comparables, es decir, sii $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$ para todo $a, b \in R$.

Ejemplo:

- $\leq$ es un orden parcial sobre $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ es un orden parcial sobre 2^S, para todo conjunto S

Relaciones de órden

Definición (relación de orden)

- Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se llama orden parcial cuando es reflexiva, transitiva y antisimétrica.
- Una relación de orden parcial $R \subseteq A \times A$ es, además, un orden total sii todo par de elementos son comparables, es decir, sii $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$ para todo $a, b \in R$.

Ejemplo:

- $\leq$ es un orden parcial sobre $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ es un orden parcial sobre 2^S, para todo conjunto S
- $\leq$ es, además, un orden total sobre $\mathbb{N}$

Relaciones de órden

Definición (relación de orden)

- Una relación $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se llama orden parcial cuando es reflexiva, transitiva y antisimétrica.
- Una relación de orden parcial $R \subseteq A \times A$ es, además, un orden total sii todo par de elementos son comparables, es decir, sii $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$ para todo $a, b \in R$.

Ejemplo:

- $\leq$ es un orden parcial sobre $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ es un orden parcial sobre 2^S, para todo conjunto S
- $\leq$ es, además, un orden total sobre $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ no es un orden total sobre 2^S (a menos que $S = \emptyset$)

Relaciones de equivalencia

Definición (relación de equivalencia)

Una relación R sobre A se denomina de equivalencia si es reflexiva, transitiva y simétrica.

Relaciones de equivalencia

Definición (relación de equivalencia)

Una relación R sobre A se denomina de equivalencia si es reflexiva, transitiva y simétrica.

Ejemplo: Para todo $p \geq 2$, la relación de congruencia módulo p, definida como[1]

$$a \equiv_p b \quad \text{si y sólo si} \quad p \mid a - b$$

es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$.

[1] Alternativamente, $a \equiv_p b$ sii a y b tienen el mismo resto en la división entera por p.

Definición (relación de equivalencia)

Una relación R sobre A se denomina de equivalencia si es reflexiva, transitiva y simétrica.

Ejemplo: Para todo $p \geq 2$, la relación de congruencia módulo p, definida como[1]

$$a \equiv_p b \quad \text{si y sólo si} \quad p \mid a - b$$

es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$.

Ejercicio*: Sea R una relación sobre el conjunto A, simétrica y transitiva, tal que para cada $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $(a, b) \in R$. Demuestre que R es de equivalencia.

[1] Alternativamente, $a \equiv_p b$ sii a y b tienen el mismo resto en la división entera por p.

Clases de equivalencia

Definición (clase de equivalencia)

Sea R una relación de equivalencia sobre A. Dado $a \in A$, definimos la clase de equivalencia de a, notada $[a]_R$, como el conjunto de todos los elementos que están relacionados con a (mediante R). Simbólicamente,

$$[a]_R \quad = \quad \{b \mid (a, b) \in R\}$$

Se dice que a es el *representante* de la clase $[\mathrm{a}]_R$.

Clases de equivalencia

Definición (clase de equivalencia)

Sea R una relación de equivalencia sobre A. Dado $a \in A$, definimos la clase de equivalencia de a, notada $[a]_R$, como el conjunto de todos los elementos que están relacionados con a (mediante R). Simbólicamente,

$$[a]_R \quad = \quad \{b \mid (a, b) \in R\}$$

Se dice que a es el *representante* de la clase $[\mathrm{a}]_R$.

Ejemplo: Considere la relación de congruencia módulo 3.

Clases de equivalencia

Definición (clase de equivalencia)

Sea R una relación de equivalencia sobre A. Dado $a \in A$, definimos la clase de equivalencia de a, notada $[a]_R$, como el conjunto de todos los elementos que están relacionados con a (mediante R). Simbólicamente,

$$[a]_R \quad = \quad \{b \mid (a, b) \in R\}$$

Se dice que a es el *representante* de la clase $[a]_R$.

Ejemplo: Considere la relación de congruencia módulo 3.

- $[0]_{\equiv_3} \ = \ \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$

Clases de equivalencia

Definición (clase de equivalencia)

Sea R una relación de equivalencia sobre A. Dado $a \in A$, definimos la clase de equivalencia de a, notada $[a]_R$, como el conjunto de todos los elementos que están relacionados con a (mediante R). Simbólicamente,

$$[a]_R \quad = \quad \{b \mid (a, b) \in R\}$$

Se dice que a es el *representante* de la clase $[\mathrm{a}]_R$.

Ejemplo: Considere la relación de congruencia módulo 3.

- $[0]_{\equiv_3} \; = \; \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
- $[1]_{\equiv_3} \; = \; \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$

Clases de equivalencia

Definición (clase de equivalencia)

Sea R una relación de equivalencia sobre A. Dado $a \in A$, definimos la clase de equivalencia de a, notada $[a]_R$, como el conjunto de todos los elementos que están relacionados con a (mediante R). Simbólicamente,

$$[a]_R \quad = \quad \{b \mid (a, b) \in R\}$$

Se dice que a es el *representante* de la clase $[\mathrm{a}]_R$.

Ejemplo: Considere la relación de congruencia módulo 3.

- $[0]_{\equiv_3} \; = \; \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
- $[1]_{\equiv_3} \; = \; \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
- $[2]_{\equiv_3} \; = \; \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$

Clases de equivalencia

Definición (clase de equivalencia)

Sea R una relación de equivalencia sobre A. Dado $a \in A$, definimos la clase de equivalencia de a, notada $[a]_R$, como el conjunto de todos los elementos que están relacionados con a (mediante R). Simbólicamente,

$$[a]_R \quad = \quad \{b \mid (a, b) \in R\}$$

Se dice que a es el *representante* de la clase $[\mathrm{a}]_R$.

Ejemplo: Considere la relación de congruencia módulo 3.

- $[0]_{\equiv_3} \; = \; \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
- $[1]_{\equiv_3} \; = \; \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
- $[2]_{\equiv_3} \; = \; \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$

Lema: Los siguientes tres enunciados son equivalentes:

- $(a, b) \in R$
- $[a]_R = [b]_R$
- $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$

Relaciones de equivalencia y particiones

Una partición de un conjunto es una colección de subconjuntos (no vacíos) que son disjuntos dos a dos y que cubren todo el conjunto.

Relaciones de equivalencia y particiones

Una partición de un conjunto es una colección de subconjuntos (no vacíos) que son disjuntos dos a dos y que cubren todo el conjunto.

Ejemplo

- $\big\{\{2\},\{1,3,4,5,\ldots\}\big\}$ es una partición de $\mathbb{N}$.
- $\big\{\{2,4,6,\ldots\},\{1,3,,5,\ldots\}\big\}$ es otra partición de $\mathbb{N}$.

Relaciones de equivalencia y particiones

Teorema (partición inducida por relación de equivalencia)

Toda relación de equivalencia sobre un conjunto induce una partición del mismo, a partir de las clases de equivalencia de sus elementos.

Relaciones de equivalencia y particiones

Teorema (partición inducida por relación de equivalencia)

Toda relación de equivalencia sobre un conjunto induce una partición del mismo, a partir de las clases de equivalencia de sus elementos.

Formalmente, si R es una relación de equivalencia sobre A, entonces

$$\left\{[a]_R \mid a \in A\right\}$$

es una partición de A.

Relaciones de equivalencia y particiones

Teorema (partición inducida por relación de equivalencia)

Toda relación de equivalencia sobre un conjunto induce una partición del mismo, a partir de las clases de equivalencia de sus elementos.

Formalmente, si R es una relación de equivalencia sobre A, entonces

$$\left\{[a]_R \mid a \in A\right\}$$

es una partición de A. A dicho conjunto se lo llama conjunto cociente de A con respecto a R, y se lo nota $A/_R$.

Relaciones de equivalencia y particiones

Teorema (partición inducida por relación de equivalencia)

Toda relación de equivalencia sobre un conjunto induce una partición del mismo, a partir de las clases de equivalencia de sus elementos.

Formalmente, si R es una relación de equivalencia sobre A, entonces

$$\{[a]_R \mid a \in A\}$$

es una partición de A. A dicho conjunto se lo llama conjunto cociente de A con respecto a R, y se lo nota $A/_R$.

Ejemplo: La siguiente es una partición de $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}/_{\equiv_3} \quad = \quad \{[a]_{\equiv_3} \mid a \in \mathbb{Z}\} \quad = \quad \{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}$$