Ejercicio 3

Profesores: Federico Olmedo - Alejandro Hevia
Auxiliares: Ismael Correa - Javier Oliva - Fernanda Sanchirico - Lucas Torrealba
Nahuel Gomez - Nelson Marambio
Ayudantes: Daniel Báez - Félix Melo

P1.- Demuestre que $min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$ y $max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$, donde x e y son reales.

Solución:

Se puede demostrar por casos, en particular es ideal que utilicen un argumento sin pérdida de generalidad, basta un caso para cada función. El punto clave es saber la propiedad del valor absoluto y aplicarlo a los casos. El primer caso es cuando $x < y$, para la función mín, debiésemos obtener como resultado x. Revisando al formula, recordemos que al ser x menor que y, $x - y < 0$, entonces obtenemos que:

$$min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - (-(x - y))}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

No necesitamos demostrar el caso $y < x$, pues es análogo al anterior, es solo intercambiar los roles. Para el máximo, tomamos que $x < y$, esperando obtener y. Nuevamente, $x - y < 0$, entonces nos permite decir que:

$$max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + (-(x - y))}{2} = \frac{x + y - x + y}{2} = \frac{2y}{2} = y$$

P2.- Si n es irracional, entonces $n^{\frac{1}{5}}$ es irracional.

Solución:

Procedemos por contra recíproca, es decir, diremos que si $n^{\frac{1}{5}}$ es racional, entonces n es racional. Si $n^{\frac{1}{5}}$ es racional, entonces podemos escribirlo de la forma $\frac{p}{q}$, con p y q enteros y q distinto de 0, entonces podemos decir que $n = \frac{p^5}{q^5}$, como la multiplicación de racionales produce un número racional, en particular, acabamos de ilustrar que n es racional. De esta forma, queda demostrado lo solicitado.

P3.- Si n es un entero, entonces $n^2 + 2$ no es divisible por 4.

Solución:

Demostraremos por contradicción y por casos. Primero tomamos que n es par, entonces podemos representarlo de la forma $n = 2k$, para algún k entero, de esta forma, $n^2 + 2 = 4k^2 + 2$. Si $n^2 + 2$ es divisible por 4, entonces también lo podemos representar de la forma $4k^2 + 2 = 4m$, para algún m entero, si dividimos estas expresiones por dos, obtenemos que $2k^2 + 1 = 2m$, pero esto ilustra que un número impar es igual a uno par, lo que es una contradicción. Para el caso n impar, tenemos que $n^2 + 2 = 4k^2 + 4m + 3$. Como este valor debiese ser divisible por 4, tenemos que $4k^2 + 4m + 3 = 4m$, dividiendo ambos lados por 2 obtenemos $2k^2 + 2m + 1.5 = 2m$, lo que nos dice que un número decimal es igual a un número par, generando nuevamente una contradicción. De esta forma, queda demostrado lo solicitado.