Ejercicio 8:

Colorabilidad y caminos Eulerianos/Hamiltonianos

Profesores: Alejando Hevia, Federico Olmedo
Auxiliares: Ismael Correa, Nahuel Gómez, Nelson Marambio,
Javier Oliva, Fernanda Sanchirico, Lucas Torrealba,
Ayudantes: Felix Avilés, Daniel Báez

P1.-

Un grafo es agradable si al eliminar cualquiera de sus vértices (y aristas incidentes al vértice), éste reduce su número cromático. Probar que si G es un grafo agradable de número cromático k, entonces G es conexo.

Solución:

Procedemos por contradicción tomando un grafo agradable G de número cromático k, y asumimos que G no es conexo. Veamos que si G no es conexo, éste debe tener mas de una componente conexa, y aún más, si es tal que $\chi(G) = k$, luego alguna de sus componentes conexas debe cumplir con que su número cromático es k. Fijemos una componente conexa de G, digamos $\hat{G}$, que cumple con dicha propiedad (i.e. $\chi(\hat{G}) = k$), y tomemos una componente conexa distinta a ésta H (puede ser que H también sea tal que $\chi(H) = k$, pero para los propósitos de esta demostración no es relevante).

Es inmediato notar que el grafo $G \setminus H$ sigue teniendo número cromático k, esto pues tiene como subgrafo a la componente conexa $\hat{G}$. De ésta manera llegamos a una contradicción con nuestra premisa de que G era agradable pues le quitamos toda una componente conexa y su número cromático sigue siendo k, por lo cual se debe cumplir que si G es un grafo agradable, luego también debe ser conexo.

P2.-

Considere el grafo simple $Q_n = (V, E)$ donde $V = \{0, 1\}^n$ y $(s_1, s_2) \in E$ si y solo si s_1 y s_2 difieren en una sola posición.

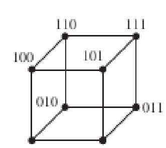

Figura 1: Grafo Q_3.

- ¿Para qué valores de n el grafo Q_n contiene un circuito euleriano? Justifique.
- ¿Existe algun n tal que el grafo Q_n contenga un camino euleriano, pero no un circuito euleriano?

Solución:

- Veamos que, para un n en particular, cada nodo en Q_n estará representado por una de las 2^n posibles palabras binarias de largo n. Sea v uno de estos nodos, luego habrán tantas aristas (v, u) como palabras binarias u existan que difieran en un solo bit con v; es evidente notar que existen n de estas palabras pues v puede diferir en cada uno de sus bits con otras palabras.

  Realizada la observación anterior, es posible afirmar que para un n en concreto, el grafo Q_n es tal que cada uno de sus nodos tiene grado n. De esta manera Q_n tiene un circuito euleriano ssi n es par.

- Debemos encontrar un n tal que el grafo correspondiente Q_n tiene exactamente dos nodos de grado impar. Como notamos en la respuesta a la pregunta anterior, todo grafo Q_n tendrá 2^n nodos, donde cada uno de estos nodos tiene grado n. De esta manera, para el único n donde se tiene que la cantidad de nodos de grado impar es exactamente 2, es 1; esto pues Q_1 tiene $2^1 = 2$ nodos con cada uno de estos de grado 1. Es evidente también la respuesta al construir el grafo Q_1.

$\boxed{\textbf{P3.-}}$

Definición 1 (Circuito Hamiltoniano) *Un circuito simple en un grafo G se dice Hamiltoniano si pasa por cada vértice exactamente una vez; un grafo en el cual existe un circuito de estas características se dice Hamiltoniano.*

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| \geq 2$, Hamiltoniano y que no es ciclo (No es de tipo C_k). Demuestre que G no puede tener a lo más un vértice de grado mayor o igual a 3.

Solución:

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| \geq 2$, Hamiltoniano y que no es ciclo. Al ser G Hamiltoniano, tiene un circuito Hamiltoniano, llamemos a este subgrafo H (al circuito).

Es evidente notar que H es un ciclo $C_{|V|}$, por lo cual cada uno de sus nodos tiene grado 2. Ahora, puesto que el grafo G no es un ciclo, debe existir al menos una arista en G que no está en H, llamemos (u, v) a una de estas aristas (por premisa sabemos que el grafo tiene al menos dos nodos). Es inmediato que de agregar esta arista al grafo H aumentamos en uno el grado tanto de u como de v, por lo cual tenemos dos nodos en este nuevo grafo con grado igual a 3. Ahora, puesto que H tiene todos los nodos en G (al ser Hamiltoniano), de querer reconstruir G solo es necesario agregar las aristas restantes, resultando como ya vimos en por lo menos 2 vertices de grado mayor o igual a 3.