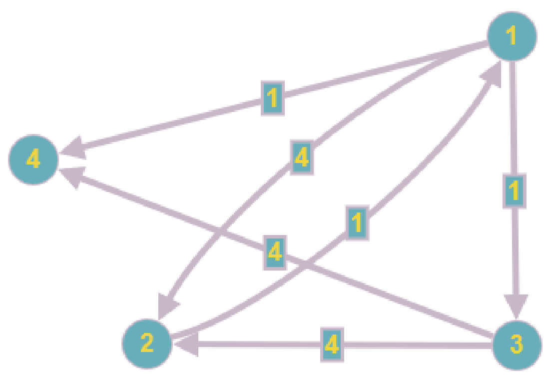
Auxiliar 7

Profesores: Federico Olmedo - Alejandro Hevia
Auxiliares: Ismael Correa - Javier Oliva - Fernanda Sanchirico - Lucas Torrealba
Nahuel Gomez - Nelson Marambio
Ayudantes: Daniel Báez - Félix Melo

P1.-



Represente el siguiente grafo dirigido con:

1. Lista de adyacencia.
2. Matriz de adyacencia.
3. Matriz de incidencia.

Si alguna de las opciones no se puede usar directamente, explique cómo adaptar la estructura.

Solución:
La intención de esta pregunta es entender que las representaciones de grafos, como estructuras de datos, están al servicio de nuestras necesidades. No todas las representaciones son directamente utilizables en gran de los tipos de grafos, pero podemos hacer arreglos al respecto.

Primero, notemos que el grafo entregado corresponde a un multigrafo dirigido, al cual llamaremos G.

1. Lista de adyacencia: No podemos llegar y usar esta representación, pues tenemos pesos, sin

embargo, basta con extender a que el elemento de una lista será el par (arista, peso):

$$\begin{aligned} l_1 = &\quad \{(4,1),(2,4),(3,1)\} \\ l_2 = &\quad \{(1,1)\} \\ l_3 = &\quad \{(2,4),(4,4)\} \\ l_4 = &\quad \{\} \end{aligned}$$

Sin embargo, cuando programemos algoritmos que recorran el grafo en base a estas listas, deben tener en consideración que G es dirigido, por consiguiente no podemos asumir que si 1 se conecta con 4 entonces 4 estará conectado con 1.

2. Matriz de Adyacencia: Nuevamente, esta representación hay que hacerle un leve cambio, pues tenemos pesos, por lo que representar la arista que une 3 y 2 no basta con hacer $M[3][2] = 1$, mas de forma análoga a la anterior, esto se resuelve cambiando el contenido de la celda con el peso de la arista. ¿Qué pasaría si entre los vértices 1 y 2 hubiese otra arista más? ¿Cómo extendería la representación?.

3. Matriz de Incidencia: Esta es una de las representaciones más amigables para multigrafos dirigidos, en general todas lo son, pero como las columnas corresponden a aristas, extenderlo es trivial (No necesariamente óptimo, ¿Cómo compromete esta estructura el crecimiento en términos de espacio?). Lo que si hay que destacar, es que aparte de la matriz, tenemos que decidir donde guardamos los pesos de las aristas, tenemos dos opciones, guardar una lista que contiene los pesos de cada arista o bien en la matriz, cuando declaremos la incidencia, usar el peso en vez de un 1.

P2.- Sea G un grafo con exactamente dos vértices de grado impar que no son vecinos entre sí. Sea G' el grafo que se obtiene desde G agregando una arista entre aquellos vértices de grado impar. Demuestre que G' es conexo, si y sólo si G es conexo.

Solución:

Suponga que G es conexo entonces claramente G' es conexo, pues G' se obtiene de agregar una arista a G, y al agregar aristas, no se puede desconectar el grafo.

Para demostrar la otra dirección, se demostrará primero que ambos nodos de grado impar de G se encuentran en la misma componente conexa. Sean u y v los únicos vértices de grado impar de G y suponga que ellos se encuentran en componentes conexas distintas. Considere el grafo H compuesto solamente por la componente conexa que contiene a u. Note que H es un grafo conexo con exactamente un vértice de grado impar. Esto es una contradicción, puesto que todo grafo tiene una cantidad par de vértices de grado impar.

Junto a lo anterior y con el fin de demostrar que G'conexo implica G conexo, procedemos por contra recíproco. Suponga ahora que G no es conexo. Por la propiedad anterior, ambos vértices de grado impar pertenecen a la misma componente conexa que G, digamos C. Luego la arista agregada para formar G' es una arista que es interna a C y por lo tanto la cantidad de componentes conexas en G' es la misma que la cantidad de componentes conexas de G lo que implica que G' no es conexo.

Sigue que G es conexo si y sólo si G' es conexo.

$\boxed{\textbf{P3.-}}$ Notemos que un vértice estabilizador de conjunto es aquel vértice que si lo removemos de un grafo G, aumenta en al menos 1 la cantidad de componentes conexas. Demuestre que en un grafo simple con al menos dos vértices tiene al menos dos vértices que no son vértices estabilizadores de conjunto.

Solución:
Notemos que si cada componente de G es un único vértice, entonces ninguno de ellos es vértice estabilizador de conjunto, en particular, eliminar uno de ellos incluso reduce la cantidad de componentes. De esta forma, asumimos que toda componente de G tiene al menos dos vértices, y con ello nos podemos concentrar en esa componente en particular, de tal forma que esa componente, G, estará conectada.

Ahora, definamos la distancia entre dos vértices a y b como $d(a, b)$, que nos entrega el largo del camino más corto entre los vértices. Escojamos un par de vértices u y v tal que la distancia entre estos sea la máxima dentro de G, en particular.

Ahora vamos a demostrar que ni u ni v son vértices estabilizadores. Para ello, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos, sin pérdida de la generalidad, que u es estabilizador, donde al eliminarlo, pueden suceder dos cosas:

1. Si G solo contenía a u y v, entonces no redujimos la cantidad de componentes conexas, generándose así una contradicción.
2. Si en G existen más nodos, entonces podemos observar a un tercer vértice w, el cual estará en la componente conexa donde no quedó v. Dado lo que hemos definido, todo camino que conectaba a v y w debió pasar por u, por consiguiente, la distancia entre v y w debió ser estrictamente mayor a la de u y v, lo que es una contradicción.