# Matemática Discreta

## Clase 14: Relaciones de recurrencia

Federico Olmedo y Alejandro Hevia

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

# Introducción

# Motivación

**Pregunta:** A Laura le dieron un sueldo inicial de \$200,000 y le prometieron un aumento del 10 % cada mes. ¿Cuánto cobrará al cabo de 30 meses?

Sea $a_n$ el salario que Laura cobrará el mes $n$-ésimo. Tenemos que

$$\begin{aligned} a_1 &= 200,000 \\ a_n &= 1{,}1 \cdot a_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \end{aligned} \tag{1}$$

Luego

$$a_{30} = 1{,}1^1 \cdot a_{29} = 1{,}1^2 \cdot a_{28} = 1{,}1^3 \cdot a_{27} = \ldots = 1{,}1^{29} \cdot a_1$$

En general, tenemos que

$$a_n = 1{,}1^{n-1} \cdot 200,000 \quad \forall n \geq 1 \tag{2}$$

O sea, $\$3,172,618$ :-)

Las dos ecuaciones en (1) constituyen una (relación de) recurrencia y la fórmula en (2) es la forma cerrada de la recurrencia.

# Definición de relación de recurrencia

**Definición**

Una relación de recurrencia para una secuencia $\langle a_n \rangle_{n \geq 0}$ es una ecuación que expresa $a_n$ en términos de sus predecesores $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$.

Para determinar univocamente la secuencia debemos dar explicitamente los valores de un número finito de los primeros términos de la secuencia. Éstos se conocen como las condiciones iniciales de la recurrencia.

En otras palabras, una relación de recurrencia no es nada más que una definición recursiva de una secuencia $\langle a_n \rangle_{n \geq 0}$.

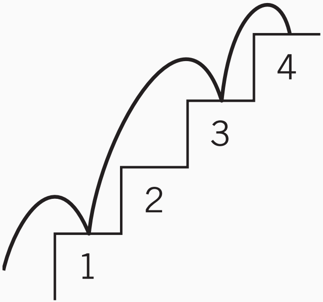
# Ejemplos de relaciones de recurrencia

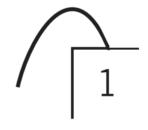
- $$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5 \qquad \forall n \geq 2 \\ a_0 &= 1 \qquad a_1 = 4 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} a_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} \qquad \forall n \geq 1 \\ a_0 &= 2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} a_n &= a_0\, a_{n-1} + a_1\, a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}\, a_0 \qquad \forall n \geq 1 \\ a_0 &= 1 \end{aligned}$$

# Aplicaciones a problemas de conteo

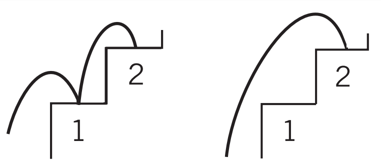
# Subiendo la escalera

**Ejemplo :** Para subir una escalera Juan puede dar pasos de a uno o de a dos escalones. Encuentre una relación de recurrencia para $a_n$, el número de formas diferentes en las que Juan puede subir una escalera de (exactamente) $n$ escalones.



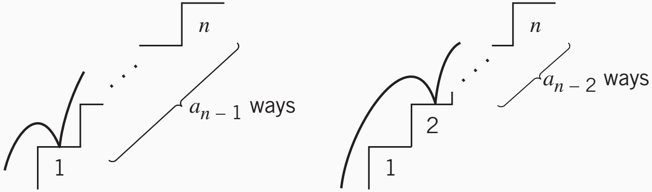




Es fácil ver que hay 1 manera de subir una escalera de un escalón ($a_1 = 1$), y dos maneras de subir una escalera de dos escalones ($a_2 = 2$): dando dos pasos de un escalón o un paso de dos escalones.



## Subiendo la escalera

Para ver de cuántas maneras se puede subir una escalera de $n \geq 3$ escalones hacemos un análisis de casos:




- Si el primer paso que se hace es de un escalón, luego deben subirse los $n-1$ escalones restantes: hay $a_{n-1}$ maneras de hacer esto.
- Si el primer paso que se hace es de dos escalones, luego deben subirse los $n-2$ escalones restantes: hay $a_{n-2}$ maneras de hacer esto.

Por la regla de la suma tenemos que $$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n \geq 3$$

# Subiendo la escalera

Resumiendo, tenemos la siguiente relación de recurrencia para calcular el número de formas $a_n$ en las que Juan puede subir una escalera de $n$ escalones:

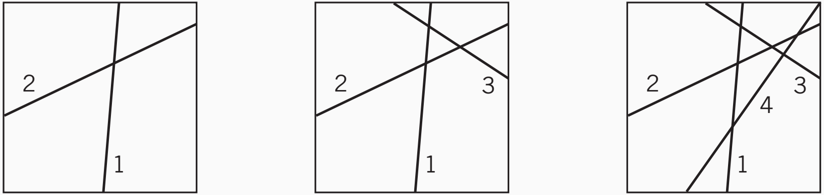
$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n \geq 3 \end{aligned}$$

Esta secuencia se conoce como la sucesión de Fibonacci y tiene muchas aplicaciones en problemas de conteo.[1]

[1] Dependiendo la fuente, algunos autores la definen como $0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$, mientras otros como $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$.

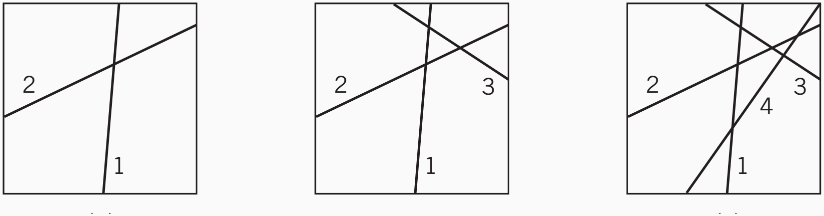
# Regiones en el plano

**Ejemplo:** Supongamos que dibujamos $n$ rectas en una hoja de papel de manera que todo par de líneas se intersecan (pero no hay tres líneas que se intersecan en un único punto). ¿En cuántas regiones queda dividido el plano?




Está claro que una recta divide al plano en dos regiones, por lo que $a_1 = 2$.

# Regiones en el plano




Para determinar el valor de $a_n$ cuando $n \geq 2$, observamos que:

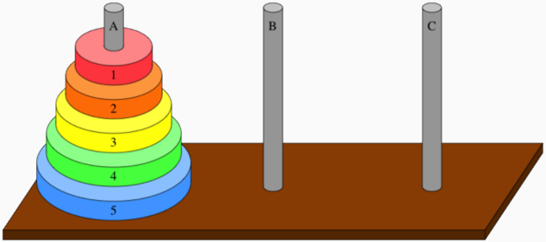
> *Al agregar la n-ésima recta, ésta interseca a n de las regiones anteriores (determinadas por las $n-1$ rectas iniciales), partiendo cada una de éstas en 2.*

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + n \quad \forall n \geq 2 \\ a_1 &= 2 \end{aligned}$$

# Torres de Hanoi

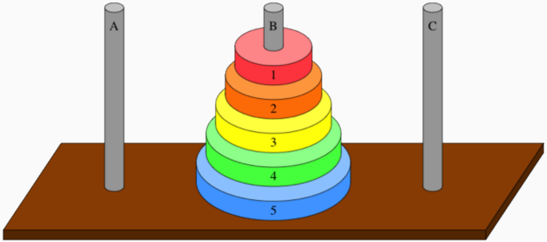
Las Torres de Hanoi son un puzzle que consiste de 3 barras montadas en un tablero y una serie de discos de diferente tamaño. Inicialmente los discos estás dispuestos como se muestran a continuación:



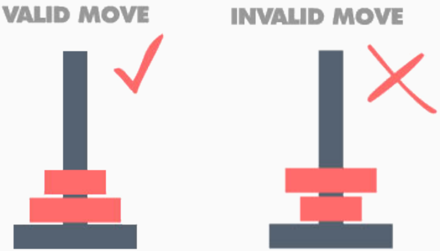
# Torres de Hanoi

El objetivo del puzzle es pasar todos los discos a otra de las barras (como muestra la figura de abajo) con las siguientes restricciones:

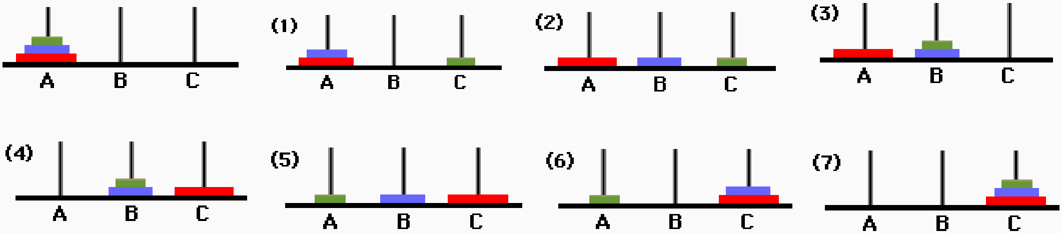
- Los discos deben quedar dispuestos de la misma manera (en orden)
- Los discos se pueden pasar entre las barras, de a uno (por lo que en cada paso se puede mover sólo el disco superior de cada barra)
- Al depositar un disco en otra barra, no puede quedar sobre otro de menor tamaño.



# Torres de Hanoi



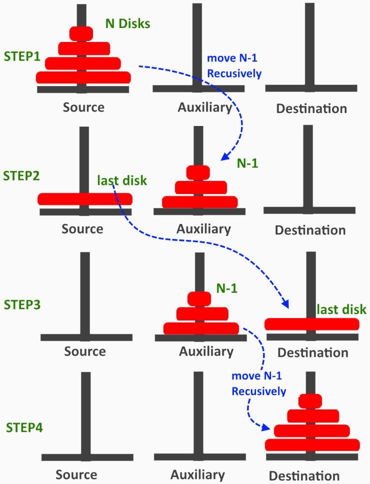

Por ejemplo, podemos resolver el puzzle con 3 discos como sigue:



# Torres de Hanoi

**Pregunta:** ¿Cuál es la menor cantidad de movimientos $h_n$ que debo hacer para resolver el puzzle desde una configuración inicial con $n$ discos?

Supongamos que $n = 4$. La observación clave es que para mover los 4 discos de la barra origen a la barra destino (de manera óptima), necesariamente va a haber que mover primero los 3 discos más pequeños a la barra auxiliar (¿por qué?). Luego va a haber que mover el disco mayor a la barra destino y finalmente mover los 3 discos más pequeños de la barra auxiliar a la barra destino. La manera más eficiente de hacer eso es en $h_3 + 1 + h_3$ pasos.



# Torres de Hanoi

En general tenemos que

$$\begin{aligned} h_n &= 2h_{n-1} + 1 \quad \forall n \geq 2 \\ h_1 &= 1 \end{aligned}$$

Puede verificarse fácilmente que

$$h_n = 2^n - 1$$

es la forma cerrada (o solución) de la recurrencia.

# Ejercicios

**Ejercicio*:** Dé una relación de recurrencia para definir el número de formas $c_n$ en las que se puede asociar un produto de $n$ factores $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$.

Por ejemplo,

- para $n = 2$, hay *una* única manera:

$$(a_1 \cdot a_2)$$

- para $n = 3$, hay *dos* maneras:

$$((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3), \quad (a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3))$$

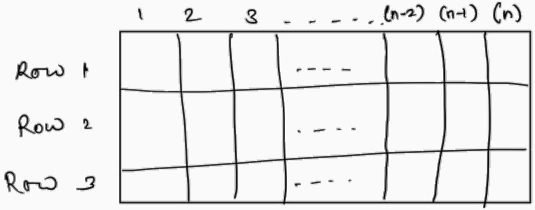
- para $n = 4$, hay *cinco* maneras:

$$\begin{gathered}(a_1 \cdot (a_2 \cdot (a_3 \cdot a_4))), \quad (a_1 \cdot ((a_2 \cdot a_3) \cdot a_4)), \quad ((a_1 \cdot a_2) \cdot (a_3 \cdot a_4)) \\ ((a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)) \cdot a_4), \quad (((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot a_4)\end{gathered}$$

# Sistemas de relaciones de recurrencias

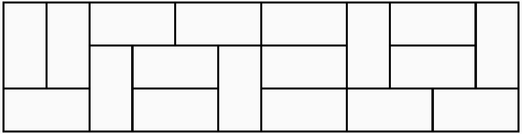
# Piezas de dominó y cuadrículas

**Ejemplo:** ¿De cuántas maneras se puede llenar una cuadrícula de $3 \times n$ con piezas de dominó de $2 \times 1$?



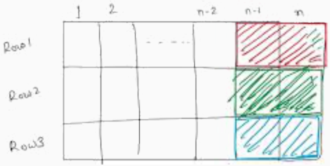

Una posible manera sería

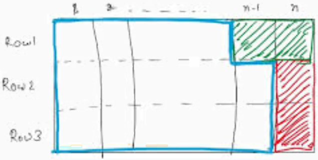
Sea $F_n$ el nro. de maneras.

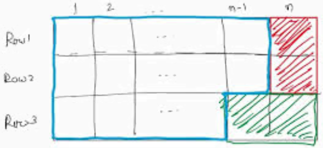


# Piezas de dominó y cuadrículas

Para determinar $F_n$ vamos a analizar cómo puede completarse la última columna de la cuadrícula. Hay tres maneras:



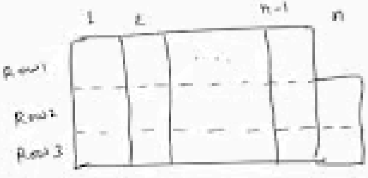



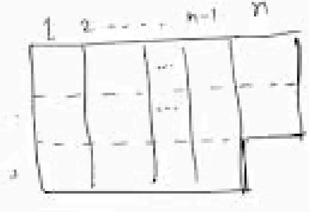

Notar que la cantidad de maneras de llenar la cuadrícula celeste (*que no es un rectángulo!*) en los últimos dos casos es la misma, ya que son simétricas. Llamemos $G_{n-1}$ a ese número. Luego, por la regla de la suma tenemos que

$$F_n = F_{n-2} + 2G_{n-1}$$

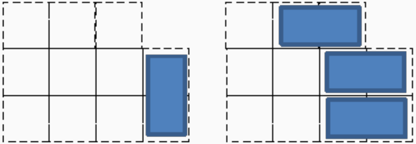
# Piezas de dominó y cuadrículas

Ahora tenemos que determinar $G_n$.





Nuevamente, hacemos análisis de casos sobre cómo puede rellenarse la columna más pequeña. Vemos que hay dos maneras:



y por la regla de la suma resulta que $$G_n = F_{n-1} + G_{n-2}$$

# Piezas de dominó y cuadrículas

Agregando las condiciones iniciales tenemos que

$$\begin{aligned}
F_n &= F_{n-2} + 2G_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \\
F_0 &= 1 \qquad F_1 = 0 \\
G_n &= F_{n-1} + G_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \\
G_0 &= 0 \qquad G_1 = 1
\end{aligned}$$

lo que nos da un sistema de recurrencias para definir $F_n$.