Matemática Discreta

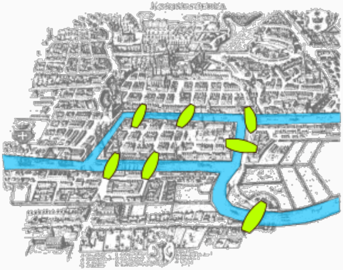
Clase 21: Caminos y circuitos eulerianos

Federico Olmedo y Alejandro Hevia

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

El problema de los puentes de Königsberg

El pueblo de Königsberg, Prusia, está dividido en 4 regiones por el río Pregel. Existen 7 puentes que unen las distintas regiones:

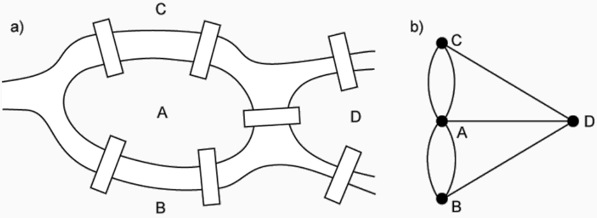


Problema (S. XVIII)

¿Es posible comenzar en una de las 4 regiones, viajar a través de todos los puentes sin cruzar ningún puente dos veces, para luego volver a la misma región inicial?

El problema de los puentes de Königsberg

Podemos modelar el problema a través del grafo de la derecha (cada región de la ciudad está representada por un vértice, y cada puente por un arco):



El problema tiene solución si y sólo si el grafo de la derecha tiene un circuito que atraviesa todos sus arcos una sola vez.

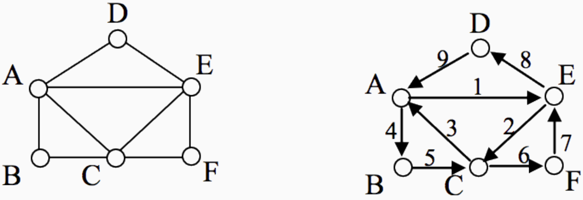
A dicho circuito se lo conoce como un circuito euleriano.

Circuito euleriano

Definición

Sea G un grafo. Un circuito de G se dice que es euleriano si es simple y pasa a través de cada arco de G.

Ejemplo: el grafo de la izquierda admite múltiples circuitos eulerianos:



Dos de ellos, que parten desde A son $ADEACEFCBA$ y $AECABCFEDA$. El segundo se muestra en el grafo de la derecha.

Caracterización de grafos con circuitos eulerianos

Teorema

Sea G un multigrafo conexo con al menos dos vértices. Entonces G tiene un circuito euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

Demostración

$\Rightarrow$ Considere un circuito euleriano de G. Éste contribuye un número par de veces al grado de cada vértice del circuito (ya que cada vez que "pasa" por un vértice debe "entrar" y "salir"). Además, como el circuito pasa por cada arco de G, pasa necesariamente pasa por cada vértice de G (por la conexidad de G). Por lo tanto, todo vértice de G tiene grado par.

Caracterización de grafos con circuitos eulerianos

Teorema

Sea G un multigrafo conexo con al menos dos vértices. G tiene un circuito euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

Demostración

$\Leftarrow$ Asumamos ahora que todo vértice de G tiene grado par. Construiremos un circuito euleriano de la siguiente manera:

- Elegimos un vértice cualquiera v_0 de G y luego un arco (v_0, v_1).
- Continuamos creando un camino simple

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$$

  hasta que no se pueda agregar otro arco. (Esto sucederá en algún momento porque el grafo es finito).

Caracterización de grafos con circuitos eulerianos

Proposición: Siguiendo el procedimiento anterior, $v_0 = v_n$.

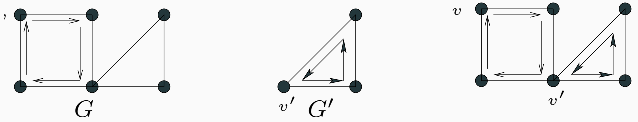
Demostración. Por reducción al absurdo, suponga que $v_0 \neq v_n$. Luego el camino construido ha aportado un número impar al grado de v_n. Como v_n tiene grado par, tiene que haber un arco incidente en v_n que no haya sido ocupado por el camino. Entonces podemos extender el camino añadiendo este arco al final. Absurdo, porque esto daría un camino simple desde v_0 más largo que el original!

Caracterización de grafos con circuitos eulerianos

Por lo tanto tenemos un circuito simple

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_0)$$

Si el circuito contiene todos los arcos, la prueba está terminada. Si no, construimos un subgrafo G' de G borrando todos los arcos del circuito.



Observe que G' y $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ deben tener (al menos) un vértice en común v' (ya que G es conexo) y que todos los vértices de G' tienen grado par (aunque G' puede ser disconexo). Luego a partir de v' construimos en G' un camino simple lo más largo posible. Ahora podemos "componer" el camino original con el recién construido, para obtener un camino simple de G' mayor que el original (figura de más a la derecha).

Caracterización de grafos con circuitos eulerianos

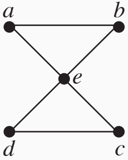
Repitiendo este proceso a partir del circuito extendido, obtenemos un circuito euleriano de G que pasa por todos sus arcos. $\square$

Caracterización de grafos con circuitos eulerianos

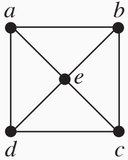
Teorema

Sea G un multigrafo conexo con al menos dos vértices. Entonces G tiene un circuito euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

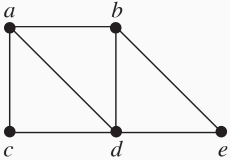
Aplicación: ¿Cuáles de los siguientes grafos admiten un circuito euleriano?



G_1

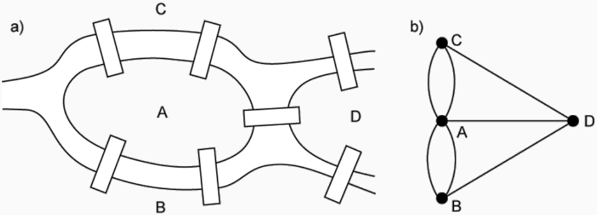


G_2



G_3

Solución al problema de los puentes de Königsberg



En el grafo de la derecha contiene vértices de grado impar, por lo que no contiene ningún circuito euleriano y por lo tanto no es posible comenzar en una de las 4 regiones de Königsberg, atravesar sus 7 puentes una vez cada uno, y regresar a la región de origen.

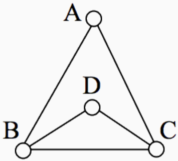
Camino euleriano

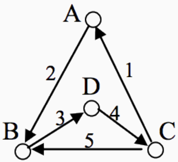
Una generalización de la noción de circuito euleriano es la de camino euleriano.

Definición

Sea G un grafo. Un camino de G se dice que es euleriano si es simple y pasa a través de cada arco de G.

Ejemplo: el grafo de la izquierda admite múltiples caminos eulerianos:





Uno de ellos, representado en el grafo de la derecha, es $CABDCB$. Sin embargo, el grafo no admite ningún circuito euleriano.

Caracterización de grafos con caminos eulerianos

Teorema

Sea G un multigrafo conexo con al menos dos vértices. Entonces G tiene un camino (pero no un circuito) euleriano si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Ejercicio*: Demuestre el teorema.

Caracterización de grafos con caminos eulerianos

Teorema

Sea G un multigrafo conexo con al menos dos vértices. Entonces G tiene un camino (pero no un circuito) euleriano si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Ejercicio*: Demuestre el teorema.

$\Rightarrow$) Sean u y v los extremos del camino euleriano $u, e, \ldots, e', v$ de G. Como el camino contiene todos los arcos de G, contiene también todos sus nodos. Sea t un nodo del grafo, o equivalentemente, del camino. Si t es un nodo interno del camino, su grado tiene que ser par ya que cada vez que se "entra" al nodo, también se "sale". Si t es uno de los extremos del camino, tiene grado impar ya que e y e' aportan *una* unidad al grado de u y v respectivamente, y cada vez que el camino vuelve a atravesarlos, contribuye con *dos* unidades a sus respectivos grados. Por lo tanto, G tiene dos vértices de grado impar y todo el resto de grado par.

Caracterización de grafos con caminos eulerianos

Teorema

Sea G un multigrafo conexo con al menos dos vértices. Entonces G tiene un camino (pero no un circuito) euleriano si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Ejercicio*: Demuestre el teorema.

$\Leftarrow$) Sean u y v los nodos de grado impar. Considerememos ahora el grafo G' que se obtiene a partir de G, añadiendo una arista e entre u y v. G' admite un ciclo euleriano. Quitando de ese ciclo la arista e obtenemos un camino euleriano sobre G.

¿Y los grafos dirigidos?

Teorema

Sea G un multigrafo dirigido sin vértices aislados. Entonces

- G contiene un circuito euleriano si y sólo si es débilmente conexo y el grado de entrada de cada nodo coincide con su grado de salida.
- G contiene un camino (pero no un circuito) euleriano si y sólo si es débilmente conexo y el grado de entrada y el grado de salida es el mismo para todos, excepto dos de los vértices, llamémosles v_1 y v_2, y $deg^{in}(v_1) = 1 + deg^{out}(v_1)$ y $deg^{out}(v_2) = 1 + deg^{in}(v_2)$.