Matemática Discreta

Clase 18: Funciones Generadoras, Parte 3: Aplicaciones a conteo

Federico Olmedo y Alejandro Hevia

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

Problemas de Conteo y Funciones Generadoras

Recuerdo

Problemas de conteo: En clases pasadas vimos problemas que esencialmente pueden traducirse en encontrar el número de soluciones para ecuaciones de la siguiente forma:

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = C$$

donde C es una constante, y e_i, $i = 1, \ldots, n$ son enteros no negativos sujetos a varias restricciones.

Ejemplo: ¿Cuántas soluciones existen de $e_1 + e_2 + e_3 = 14$ donde e_1, e_2, y e_3 son enteros no negativos tales que

- $2 \leq e_1 \leq 5$, $3 \leq e_2 \leq 6$, y $4 \leq e_3 \leq 7$.

Por ejemplo, $e_1 = 4$, $e_2 = 5$, $e_3 = 5$ es una solución, $e_1 = 3$, $e_2 = 4$, $e_3 = 7$ es otra.

Conteo con f.g. (continuación)

Ejemplo: ¿Cuántas soluciones existen de $e_1 + e_2 = 8$ sujeto a $\begin{cases} 2 \leq e_1 \leq 5, \\ 3 \leq e_2 \leq 6 \end{cases}$?

Miremos primero la multiplicación de estos dos polinomios:

$$f_1(x) \;=\; x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \qquad \text{y} \qquad f_2(x) \;=\; x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

¿qué resulta? $f_1(x) \cdot f_2(x)$ es

$$\begin{aligned}
&= \left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)\left(x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right) \\
&= x^2 \cdot (x^3 + x^4 + x^5 + x^6) + x^3 \cdot (x^3 + x^4 + x^5 + x^6) + x^4 \cdot (x^3 + x^4 + x^5 + x^6) + x^5 \cdot (x^3 + x^4 + x^5 + x^6) \\
&= 1x^5 + (x^2x^4 + x^3x^3) + (x^2x^5 + x^3x^4 + x^4x^3) + (x^2x^6 + x^3x^5 + x^4x^4 + x^5x^3) + \ldots + 1x^5x^6 \\
&= 1x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 3x^9 + 2x^{10} + 1x^{11}
\end{aligned}$$

Hay 4 maneras de formar x^8 combinando términos x^2,x^3,x^4,x^5 con x^3,x^4,x^5,x^6, concretamente $2 + 6$, $3 + 5$, $4 + 4$, y $5 + 3$.

Conteo con f.g. (continuación)

Esto lo podemos generalizar!

Ejercicio: ¿Cuántas soluciones existen de $e_1 + e_2 + e_3 = 14$ sujeto a $\begin{cases} 2 \leq e_1 \leq 5, \\ 3 \leq e_2 \leq 6 \\ 4 \leq e_3 \leq 7 \end{cases}$?

El número de soluciones es el coeficiente asociado a x^{14} en la expansión de

$$\left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)\left(x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)\left(x^4 + x^5 + x^6 + x^7\right)$$

¿Por qué?

Al multiplicar los 3 polinomios anteriores, el coeficiente de x^{14} es calculado sumando todos los términos de la forma $x^i x^j x^k$ para todos los $i + j + k = 14$... O sea, el coeficiente es número de maneras de sumar los exponentes en el primer polinomio, con los exponentes del segundo polinomio, y los exponentes del tercer polinomio.

Moraleja: Sea $f(x)$ el polinomio resultante de multiplicar los 3 polinomios de arriba.
Si alguien le da la expansión de $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_i x^n$, basta tomar a_{14} como la respuesta!

Más conteo

Ejercicio: De cuántas maneras se pueden distribuir 8 galletas idénticas entre 3 perritos distintos si cada perrito recibe al menos 2 galletas, y no más de 4 galletas?

Solución: Sea p_i: las galletas que recibe el perrito i-ésimo. Las posibilidades para cada perrito son $2 \leq p_i \leq 4$, o sea p_i puede capturarse en 3 exponentes: $(x^2 + x^3 + x^4)$.

Todas las combinaciones de 3 perritos se capturan con la **función generadora**:

$$G(x) \; = \; (x^2 + x^3 + x^4)^3$$

cuya expansión es:

$$G(x) \; = \; x^{12} + 3x^{11} + 6x^{10} + 7x^9 + 6x^8 + 3x^7 + x^6$$

O sea, la respuesta está en el coeficiente de x^8, esto es, 6.

Propuestos

Ejercicio: Mismo problema, pero con 14 galletas idénticas pero entre 5 perritos, donde cada uno recibe los dos mayores reciben mínimo 2 y máximo 4 galletas, y los 3 menores reciben mínimo 1 y máximo 3.

Ejercicio: Determine el número de maneras de entregar 12 peluches idénticos a 5 niños de manera que todo niño reciba a lo más 3 peluches.

Formas de pagar con monedas

Ejercicio: Supongamos que tenemos monedas de 1 euro, 2 euros, y 5 euros (representadas por ①, ②, y ⑤ respectivamente), y queremos contar todas las maneras de pagar un total de r euros en una máquina.

Considere el caso cuando orden sí importa, y el caso cuando el orden NO importa.

Ejemplo: si $r = 5$,

Orden SÍ importa:

1. $5 \times$ ①: Hay 1 manera:
   ①①①①①
2. $3 \times$ ① $+$ ②: Hay 4 maneras:
   ①①①②, ①①②①, ①②①①, ②①①①
3. ① $+ 2 \times$ ②: Hay 3 maneras:
   ①②②, ②①②, ②②①,
4. ⑤: Hay 1 manera

Total: 9 maneras

Orden NO importa:

1. $5 \times$ ①,
2. $3 \times$ ① $+$ ②,
3. ① $+ 2 \times$ ②,
4. ⑤

Total: 4 maneras

Si el orden no importa

Ejemplo: *Supongamos que tenemos monedas de* 1 *euro,* 2 *euros, y* 5 *euros (representadas por* ①, ②, *y* ⑤ *respectivamente), y queremos contar todas las maneras de pagar un total de* r *euros en una máquina.*

<u>Solución</u>: (Caso **orden NO importa**) Para juntar r euros, podemos tener que combinar potencialmente un número arbitrario de ①, un número arbitrario de ②, y un número arbitrario de ⑤, esto es, el coeficiente de x^r en

$$\begin{aligned} F(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots) \\ &= 1 + \boxed{2}\,x + \boxed{2}\,x^2 + \ldots + \boxed{2}\,x^r + \boxed{2}\,x^{r+1} + \ldots \end{aligned}$$

¿Por qué x^r? Porque el coeficiente de x^r en este producto es la agregación de ("cuenta" a) todas las maneras de combinar exponentes x^i con x^{2j} con x^{5k}.

Si el orden no importa (continuación)

Ejemplo: *Supongamos que tenemos monedas de 1 euro, 2 euros, y 5 euros (representadas por ①, ②, y ⑤ respectivamente), y queremos contar todas las maneras de pagar un total de r euros en una máquina.*

¿Cómo calcumamos el coeficiente de x^r? Descomponiendo en fracciones parciales, haciendo la multiplicación "a mano" o usando una herramienta (por ej. Maple, Matlab o Wolfram Alpha):

$$\begin{aligned}
F(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots) \\
&= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)} \\
&= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 7x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + 11x^{11} + \dots
\end{aligned}$$

Por ej. si nos piden $r = 5$, el resultado es el coeficiente de x^5, esto es 4. Hay 4 maneras de pagar 5 euros.

Si el orden SÍ importa

Solución: (Caso **orden SÍ importa**) Para juntar r euros, el número de maneras de juntar n monedas de manera de producir r euros es el coeficiente de x^r en

$$G(x) \;=\; (x + x^2 + x^5)^n$$

¿Por qué? El coeficiente de x^r nos da todas las maneras de escoger n combinaciones de 1,2 y 5 que sumen r.

Por ejemplo: Si $n = 2$,

$$G(x) \;=\; (x + x^2 + x^5)^2 \;=\; x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^6 + 2x^7 + x^{10}$$

Notemos que el coef. de x^3 es 2 puesto que hay dos maneras de sumar $r = 3$ con $n = 2$ monedas cuando importa el orden: 1,2, y 2,1.

Si el orden SÍ importa (continuación)

Pero queremos *cualquier número de monedas* que juntas den r euros, no sólo n de ellas, por eso debemos considerar más valores de n.

Esto es,

$$\begin{aligned} F(x) &= 1+(x+x^2+x^5)+(x+x^2+x^5)^2+(x+x^2+x^5)^3+(x+x^2+x^5)^4+\dots \\ &= \frac{1}{1-(x+x^2+x^5)} = \frac{1}{1-x-x^2-x^5} \\ &= 1+x+2x^2+3x^3+5x^4+9x^5+15x^6+26x^7+44x^8+75x^9+128x^{10}+218x^{11}+\dots \end{aligned}$$

En este caso, el número de maneras de pagar $r=5$ con monedas ①,②, y ⑤, es el coeficiente de x^5, esto es, 9.

Propuestos

Ejercicio: Cuántas maneras existen de pagar $r = 8$ euros si sólo se disponen de monedas de 1,2,3, y 4 euros, si es que NO importa el orden de las monedas al pagar.

Ejercicio: Cuántas maneras existen de pagar $r = 7$ euros si sólo se disponen de monedas de 1,2,3, y 4 euros, si es que SÍ importa el orden de las monedas al pagar.

Usando Funciones Generadoras para calcular combinaciones

Redescubriendo las combinaciones sobre un conjunto

Ejercicio: Supongamos que ya hemos demostrado el teorema del binomio (por ej. por inducción) y no le hemos dado una explicación combinatorial al los coeficientes binomiales.

Podemos usar funciones generadoras para calcular el número de r-combinaciones sobre un conjunto de n elementos, *razonando directamente sobre la función*.

Solución: Sea $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ la función generadora asociada al producto de

$$f(x) \quad = \quad \underbrace{(1+x)\cdot(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x)}_{n}$$

Claramente, este producto puede verse como escoger 1 o x para c/u de los términos $(1+x)$ de $f(x)$. Luego, el término a_r (asociado a x^r) cuenta todas las maneras de "escoger x" entre n términos $(1+x)$.

$$f(x) \quad = \quad 1 + \boxed{2}\,x + \boxed{2}\,x^2 + \ldots + \boxed{2}\,x^r + \boxed{2}\,x^{r+1} + \ldots$$

Pero esta f.g. la conocemos! Es $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r$ donde $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Luego, $a_r = \binom{n}{r}$.

Número de maneras con repeticiones

Ejercicio: Supongamos que queremos calcular el número de multiconjuntos (conjuntos con repeticiones) de tamaño r formados a partir de n elementos.

Por ej. dado $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dos multiconjuntos de tamaño $r = 7$ son $\{2, 2, 3, 5, 5, 5, 5\}$ y $\{1, 4, 4, 5, 6, 6, 6\}$. ¿Cuántos multiconjuntos así existen?

Para contar los multiconjuntos, notemos que $C = \{2, 2, 3, 5, 5, 5, 5\}$ podemos verlo como

$$\begin{array}{lcl}
1 & \rightarrow & \text{repetido } \ell_1 = 0 \text{ vez} \\
2 & \rightarrow & \text{repetido } \ell_2 = 2 \text{ veces} \\
3 & \rightarrow & \text{repetido } \ell_3 = 1 \text{ vez} \\
4 & \rightarrow & \text{repetido } \ell_4 = 0 \text{ veces} \\
5 & \rightarrow & \text{repetido } \ell_5 = 4 \text{ veces} \\
6 & \rightarrow & \text{repetido } \ell_6 = 0 \text{ veces}
\end{array}$$

La suma de las repeticiones $\sum_{i=1}^{6} \ell_i = r$ es el tamaño del multiconjunto

Contar todas las maneras de escoger cuántas veces se repite el elemento 1, cuántas el 2, . . . , y cuántas el n, sujeto a que las repeticiones sumen r.

O sea, cuántos $\ell_1, \ldots, \ell_n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \ell_i = r$... eso ya lo sabemos hacer!

Número de maneras con repeticiones (continuación)

Sea $G(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ una función generadora como sigue:

$$G(x) = \overbrace{\underbrace{(1 + x + x^2 + \ldots + x^r)}_{\text{cuenta } x^{\ell_1}} \cdot \underbrace{(1 + x + x^2 + \ldots + x^r)}_{\text{cuenta } x^{\ell_2}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(1 + x + x^2 + \ldots + x^r)}_{\text{cuenta } x^{\ell_n}}}^{n \text{ veces}}$$

$$= 1 + \boxed{}\,x + \boxed{}\,x^2 + \ldots + \boxed{}\,x^r + \boxed{}\,x^{r+1} + \ldots$$

así, el coeficiente a_r (cuadrado rojo) será el número de maneras de escoger $\ell_1, \ldots, \ell_n$ tales que $\ell_1 + \ldots + \ell_n = r$.

$\Rightarrow$: exactamente el número de r-combinaciones de un conjunto de n con repeticiones permitidas!

=**Ejemplo:** Para $n = 6$ y $r = 7$, $G(x) = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^7\right)^6$

$$= 1 + 6x + 21x^2 + 56x^3 + 126x^4 + 252x^5 + 462x^6 + 792x^7 + 1281x^8 + 1966x^9 + \ldots$$

el número de 7-combinaciones sobre un conjunto de n valores es 792.

Número de maneras con repeticiones (continuación)

Podemos dar una solución cerrada para el valor del coeficiente de x^r si hacemos la función $G(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ un poco más general:

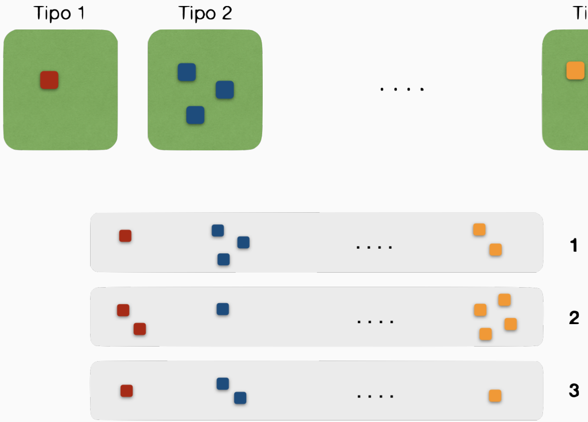
$$
\begin{aligned}
G(x) &= \overbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \cdot \ldots \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)}^{n \text{ veces}} \\
&= \left(\frac{1}{1 - x}\right)^n = (1 - x)^{-n}
\end{aligned}
$$

Y vimos que esta función generadora tiene como coeficiente de x^r el valor $\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

O sea, si $n = 6$ y $r = 7$, $\frac{(6+7-1)!}{7!5!} = 792$.

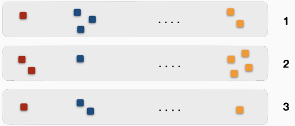
Objetos de distinto tipo, con al menos 1 objeto por tipo

Ejercicio: determinar el número de maneras de escoger k objetos entre objetos de n tipos, suponiendo que al menos 1 objeto por cada tipo es escogido.



Objetos de distinto tipo, con al menos 1 objeto por tipo

Siguiendo el mismo patrón anterior, consideramos



$$G(x) = \overbrace{(x + x^2 + x^3 + \ldots) \cdot \ldots \cdot (x + x^2 + x^3 + \ldots)}^{n \text{ veces}}$$

$$G(x) = (x + x^2 + x^3 + \ldots)^n = x^n \left(1 + x + x^2 + \ldots\right)^n = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

Usando el teo. extendido del binomio:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{x^n}{(1-x)^n} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = x^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-1)^k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^{n+k} = \sum_{t=n}^{\infty} \binom{t-1}{t-n} x^t = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{k-n} x^k \end{aligned}$$

Notemos que los exponentes de x parten en n... *porque debemos tener al menos $k = n$ objetos para tener* 1 *de cada uno de los n tipos.*

Ejemplos: $a_n = \binom{n-1}{0} = 1$, $a_{n+1} = \binom{n}{1} = n$, $a_{n+2} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Referencias

Libros de referencias:

- "Discrete Mathematics and its Applications", Rosen, 7th edition. Capítulo 8.4 (Generating Functions), 2012.
- "Concrete Mathematics" de R. Graham, D. Knuth, y O. Patashnik, 2da. edición, Addison-Wesley, 1994. En particular, capítulos 1 y 2.