Matemática Discreta

Clase 20: Representación, subgrafos, isomorfismos y conectividad de grafos

Federico Olmedo y Alejandro Hevia

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

Representación de grafos

Hay diversas formas de representar los grafos, y la más conveniente depende de la aplicación que tengamos en mente.

- Una de las formas es, para cada nodo, enumerar los nodos que son adyacentes a él. Esta representación se conoce como la de listas de adyacencia.

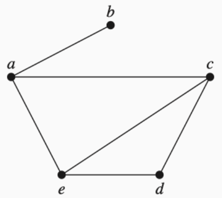


FIGURA 1 **Un grafo simple**

TABLA 1 **Lista de adyacencia para un grafo simple**

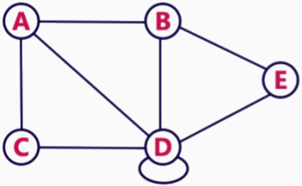
Vértice	*Vértices Adyacentes*
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Representación de grafos

Hay diversas formas de representar los grafos, y la más conveniente depende de la aplicación que tengamos en mente.

- Otra forma es a través de una matriz de adyacencia:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ y } v_j \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{si no lo son} \end{cases}$$



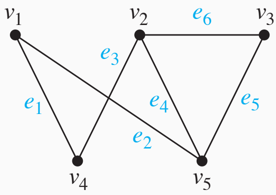
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Representación de grafos

Hay diversas formas de representar los grafos, y la más conveniente depende de la aplicación que tengamos en mente.

- Una última forma que estudiaremos es a través de una matriz de incidencia:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } e_j \text{ es incidente en el nodo } v_i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Subgrafos

Algunas veces sólo nos interesa un fragmento de un grafo para resolver un problema...

Definición

Un subfgrafo de $G = (V, E)$ es un grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Decimos que el subgrafo es propio si $G \neq G'$.

Ejemplo:

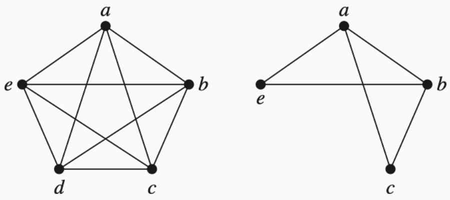
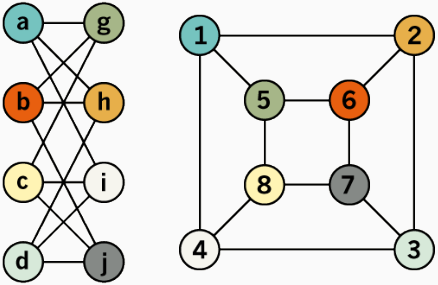


FIGURA **Grafo K_5 y un subgrafo de K_5**

Isomorfismo

Muchas veces dos grafos tienen distinta "apariencia", pero representan esencialmente la misma estructura.



Definición

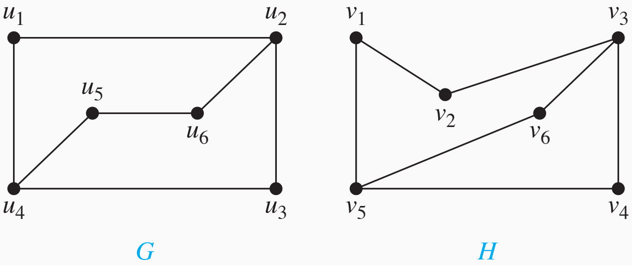
Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos simples. Decimos que G y G' son isomorfos sii existe una biyección $f : V \to V'$ tal que para todo $v_1, v_2 \in V$,

$$(v_1, v_2) \in E \qquad \text{si y sólo si} \qquad \big(f(v_1), f(v_2)\big) \in E'$$

A la función f se llama un isomorfismo entre G y G'.

Demostrando que dos grafos son isomorfos

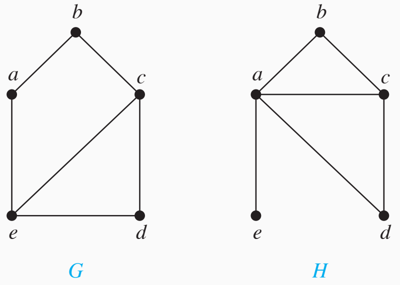
Ejercicio: Demuestre que el siguiente par de grafos son isomorfos:



Demostrar que dos grafos son isomorfos es, en general, computacionalmente caro. (Los mejores algoritmos que se conocen tiene una complejidad exponencial en el número de vértices).

Demostrando que dos grafos no son isomorfos

Ejemplo: ¿Son los siguientes grafos isomorfos?



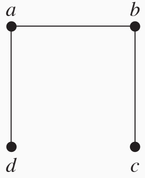
No, porque H tiene un vértice de grado 4 (a), y G ninguno.

Para demostrar que dos grafos no son isomorfos basta con considerar una propiedad que sea preservada por los isomorfismos, (e.g. número de vértices, número de arcos, número de vértices con un grado dado, etc.) y observar que uno de ellos la satisface, mientras que el otro la viola. A tales propiedades se las conoce como invariantes.

Ejercicios

El complemento de un grafo simple $G = (V, E)$ es el grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$, tal que $(v_1, v_2) \in \overline{E} \Leftrightarrow (v_1, v_2) \notin E$. Un grafo simple es auto-complementario si G es isomorfo a $\bar{G}$.

Ejercicio: Demuestre que el siguiente grafo es auto-complementario.



Ejercicio: Encuentre un grafo auto-complementario con 5 vértices.

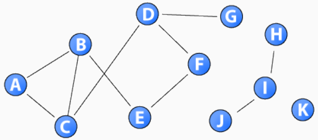
Ejercicio: ¿Para cuáles enteros n, C_n es auto-complementario?

Ejercicio: Demuestre que si G es un grafo auto-complementario simple con n vértices, entonces $n \equiv 0$ o $n \equiv 1$ modulo 4.

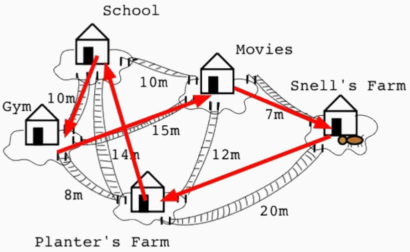
Navegando grafos

Muchos problemas pueden modelarse y resolverse navegando grafos.

- ¿Es posible mandar un mensaje entre dos computadoras usando las conexiones intermedias?



- ¿Cuál es la manera más rápida de salir de Snell's Farm, pasar por todos los establecimientos, y regresar al punto de partida?



Este tipo de problemas se modelan en base a la noción de caminos. Informalmente, un camino es una secuencia de arcos que conectan dos nodos.

Caminos

Definición

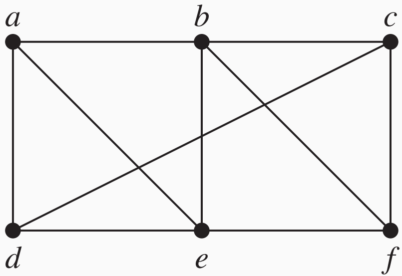
Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido y sea $u, u' \in V$. Un camino (de largo n) entre u y u' es una secuencia de n aristas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tal que existen nodos $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ que satisfacen las siguientes condiciones:

- $v_0 = u$ y $v_n = u'$, y
- la arista e_i tiene extremos v_{i-1} y v_i para cada $1 \leq i \leq n$

Si el camino no tiene aristas repetidas, decimos que es un camino simple. Por último, si $u = u'$ decimos que el camino es un circuito o ciclo.

Notación: Si el grafo no contiene aristas paralelas, podemos denotar el camino simplemente como $u, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, u'$.

Ejemplo: Considere el siguiente grafo:



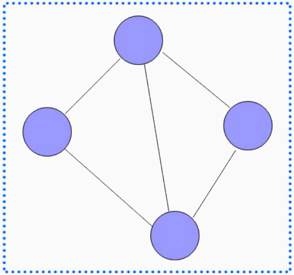
Camino simple: d, e, b, c

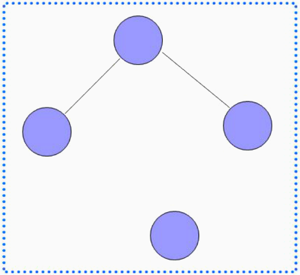
Camino no simple: d, e, b, c, d, e, f

Circuito: d, e, b, a, d

Conectividad de grafos no dirigidos

En algunos grafos siempre es posible ir (i.e. conectar mediante un camino) desde un vértice hasta cualquier otro. En otros no . . .





Definición

Un grafo no dirigido se llama conexo sii existe un camino entre cada par de vértices distintos del grafo.

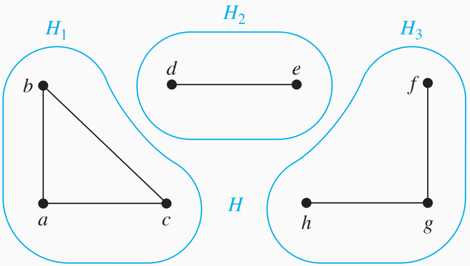
Conectividad de grafos no dirigidos

Ejercicio*: Demostrar que en un grafo conexo siempre existe un camino simple que une cada par de vértices distintos.

Ayuda: Considere un camino de longitud mínima que une los vértices y pruebe que necesariamente tiene que ser simple.

Componentes conexas

Si un grafo es no-conexo, entonces está formado por la unión disjunta de sus componentes conexas.



Definición

Sea G un grafo no dirigido. Una componente conexa de G es un subgrafo G' de G tal que

- G' es conexo, y
- G' no es un subgrafo propio de otro subgrafo conexo de G.

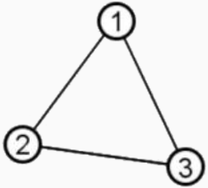
En otras palabras una componente conexa de G es un subgrafo conexo maximal.

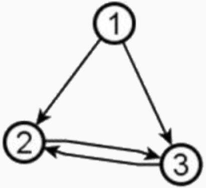
Conectividad de grafos dirigidos

Hay dos variantes de la noción de conectividad sobre grafos dirigidos: una considerando la dirección de los arcos y otra no. Para esta última, necesitamos la noción de grafo no-dirigido subyacente.

Definición

Dado un grafo dirigido $G = (V, E)$, el grafo no-dirigido subyacente G' de G se obtiene a partir de G, computando la clausura simétrica de su conjunto de aristas E.

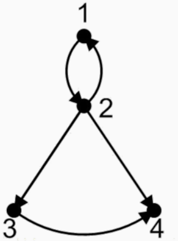




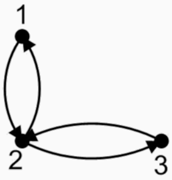
Conectividad de grafos dirigidos

Definición

- Un grafo dirigido es fuertemente conexo, sii para todo par de vértices v, v' existe un camino dirigido de v a v' (y viceversa).
- Un grafo dirigido es débilmente conexo, sii para todo par de vértices v, v' existe un camino entre v y v' en el grafo no dirigido subyacente. (Es decir, sii el grafo no-dirigido subyacente es conexo).



Grafo débilmente conexo



Grafo fuertemente conexo

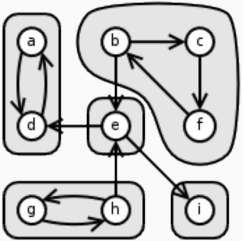
Componentes fuertemente conexas de grafos dirigidos

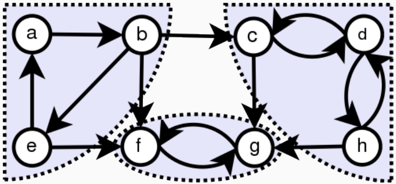
Una componente fuertemente conexa se define de manera análoga al caso de grafos no-dirigidos:

Definición

Sea G un grafo dirigido. Una componente fuertemente conexa de G es un subgrafo dirigido G' de G tal que

- G' es fuertemente conexo, y
- G' no es un subgrafo propio de otro subgrafo fuertemente conexo de G.

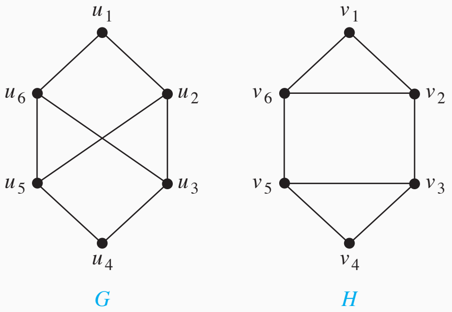




Caminos e isomorfismo

La existencia de ciertos caminos también puede ser utilizado como invariante.

Ejemplo: Utilice un invariante de caminos para demostrar que los siguientes grafos no son isomorfos:



Los grafos tienen la misma cantidad de nodos, de aristas, y de nodos de cierto grado. Sin embargo, H tiene un circuito simple de largo 3 (v_1, v_2, v_6, v_1), mientras que G no tiene ningún circuito (simple) de largo 3.

Ejercicios

Ejercicio: Demuestre que para todo grafo conexo simple, todo nodo de grado impar está unido mediante un camino a algún otro nodo de grado impar.

Ejercicio: Demuestre que todo grafo conexo con n vértices debe tener al menos $n - 1$ arcos.

Ejercicio: Demuestre que un grafo simple G es bipartito si y sólo si no contiene circuitos de largo impar.

Ejercicio: Demuestre que todo grafo simple $G = (V, E)$ tiene un camino que pasa solo por nodos distintos y su largo es al menos $\min \{deg(v) \mid v \in V\}$. Demuestre que tiene un ciclo que solo pasa por nodos distintos y su largo es al menos $\min \{deg(v) \mid v \in V\} + 1$.