Matemática Discreta

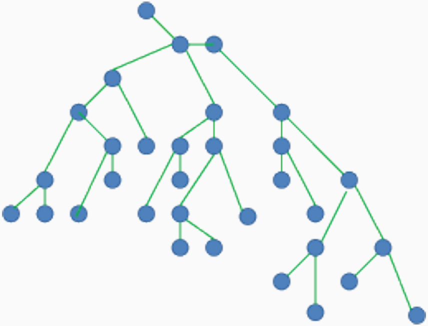
Clase 23: Introducción a árboles

Federico Olmedo y Alejandro Hevia

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

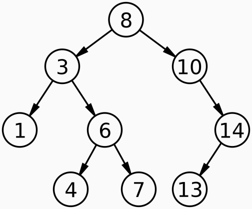
Árboles

Los árboles son una clase particular de grafos que aparecen muy usualmente en computación.



Aplicación: Árboles de búsqueda binaria

Se utilizan para construir algoritmos de búsqueda eficientes.



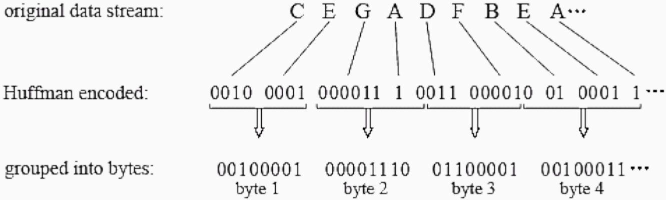
Aplicación: Códigos de Huffman

Se utilizan para construir codificaciones de datos binarias eficientes

FIGURE 27-3
Huffman encoding. The encoding table assigns each of the seven letters used in this example a variable length binary code, based on its probability of occurrence. The original data stream composed of these 7 characters is translated by this table into the Huffman encoded data. Since each of the Huffman codes is a different length, the binary data need to be regrouped into standard 8 bit bytes for storage and transmission.

Example Encoding Table

letter	probability	Huffman code
A	.154	1
B	.110	01
C	.072	0010
D	.063	0011
E	.059	0001
F	.015	000010
G	.011	000011

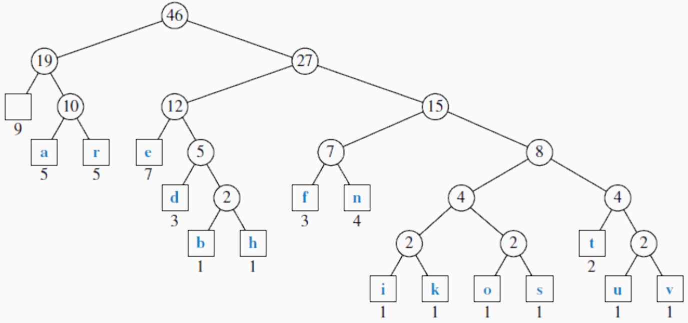


Aplicación: Códigos de Huffman

(a)

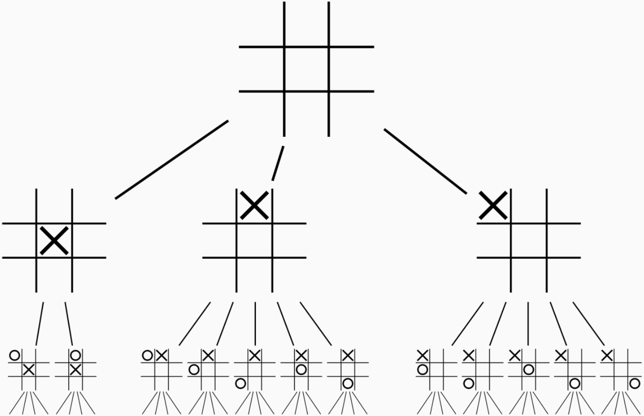
Character		a	b	d	e	f	h	i	k	n	o	r	s	t	u	v
Frequency	9	5	1	3	7	3	1	1	1	4	1	5	1	2	1	1

(b)



Aplicación: Estrategias de juegos

Se utilizan para representar estrategias de juegos

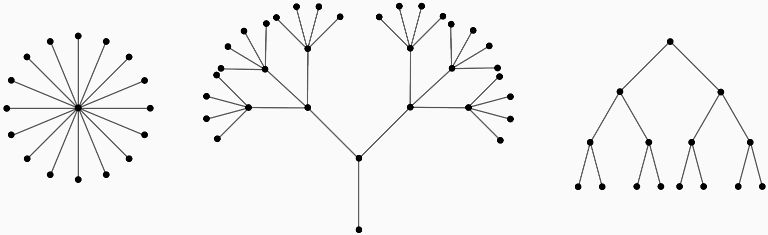


Definición de árbol

Definición

Un grafo no-dirigido se llama árbol si es conexo y no contiene ciclos simples.[1]

Ejemplos



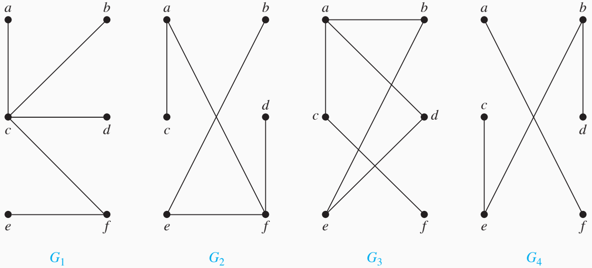
[1] Un ciclo es simple sii no contiene aristas repetidas.

Definición de árbol

Definición

Un grafo no-dirigido se llama árbol si es conexo y no contiene ciclos simples.[1]

Ejercicio: ¿Cuáles de los siguientes grafos son árboles?



[1] Un ciclo es simple sii no contiene aristas repetidas.

Observaciones

Pregunta: ¿Por qué la definición de árboles prohibe la presencia de ciclos simples y no la de cualquier ciclo?

Observación

- Todo árbol debe ser necesariamente un grafo simple (es decir, sin lazos ni aristas paralelas)

Caracterizaciones alternativas

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo no-dirigido. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. G es un árbol;
2. G contiene un único camino simple entre cada par de nodos distintos;
3. G es conexo y $|E| = |V| - 1$;

Demostración

Vamos a demostrar la equivalencia entre 1 y 2, y dejamos como ejercicio el resto de la prueba.

1. G es un árbol;
2. G contiene un único camino simple entre cada par de nodos distintos;

Demostración

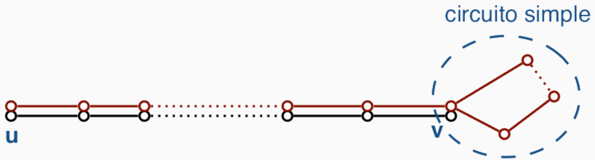
$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Sean u y v dos vertices distintos de G. Como G es un árbol, es conexo y por lo tanto existe un camino simple que conecta u con v.[2] Para probar que dicho camino simple es único, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que hay dos caminos simples C_1 y C_2 entre u y v. Usando dichos caminos vamos a construir un circuito simple en G. La existencia de dicho circuito da la contradicción ya que por hipótesis G es un árbol y no por tanto no contiene circuitos simples.

[2] Ver ejercicio clase 20, dispositiva 14.

Caracterizaciones alternativas

Como C_1 y C_2 son caminos (simples) distintos entre u y v deben eventualmente divergir.

- Si divergen cuando uno de ellos ya se acabó, como muestra la figura

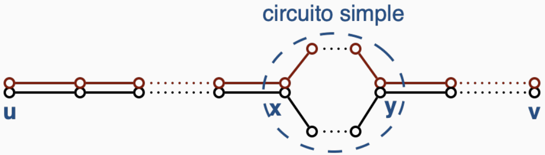


entonces el resto del otro camino es un circuito simple, desde v hasta v (¿por qué?).

Caracterizaciones alternativas

Como C_1 y C_2 son caminos (simples) distintos entre u y v deben eventualmente divergir.

- Si divergen antes de que alguno termine, los caminos tienen a siguiente forma



donde x es el primer vértice donde divergen e y es el primer vértice donde se reencuentran. En este caso, concatenar los fragmentos de los dos caminos que van de x a y genera un circuito simple (¿por qué?).

Caracterizaciones alternativas

1. G es un árbol;
2. G contiene un único camino simple entre cada par de nodos distintos;

Demostración

$\boxed{2. \Rightarrow 1.}$ Tenemos que probar que G es conexo y no contiene ciclos simples.

- Que G es conexo es inmediato de la hipótesis.
- Para probar que G no contiene ciclos simples procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que G contiene un ciclo simple. El ciclo debe contener al menos dos vértices; llamemoles u y v. A partir del ciclo pueden formarse dos caminos simples entre u y v, lo que contradice la hipótesis. $\square$

Ejercicios

Ejercicio*: Sea G un grafo no dirigido. Probar que G es un árbol si y sólo si G es conexo, pero sacarle cualquier arista lo vuelve disconexo.

Ayuda: Para la prueba puede usar cualquiera de las caracterizaciones ya vistas de árbol:

1. G es conexo sin ciclos simples;
2. G contiene un único camino simple entre cada par de nodos distintos;
3. G es conexo y $|E| = |V| - 1$;

Ejercicios

Sea T un árbol y v un nodo del árbol. La excentricidad de v es el largo del mayor camino simple en T que empieza en v. El nodo v es un centro de T si no existe v' con menor excentricidad que v.

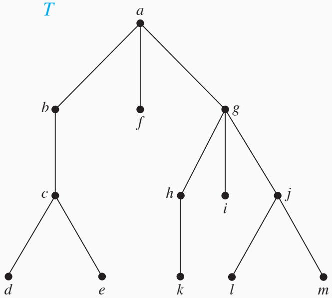
Ejercicio: Demuestre que un árbol tiene un centro, o dos que son adyacentes.

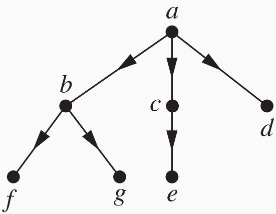
Árboles con raíz

En muchas aplicaciones es necesario distinguir un nodo particular de un árbol, que es designado como la raíz del árbol.

A los árboles con raíz a veces los hacemos dirigidos, haciendo que los arcos se "alejen" de la raíz.

Ejemplo





Árboles con raíz

Sea T un árbol con raíz v.

- El padre de un nodo u con $u \neq v$, es el nodo u' tal que existe un arco dirigido desde u' a u en T. También decimos que u es un hijo de u'.
- Dos nodos son hermanos si tienen el mismo padre.
- Los ancestros de u son todos los nodos $u' \neq u$ en el camino desde u hasta v. Los descendientes de u son todos los vértices que tienen a u como ancestro.
- Una hoja es un nodo sin hijos. Los nodos que no son hojas se llaman internos.
- La altura de T es el máximo largo de los caminos simples que parten de la raíz v de T.

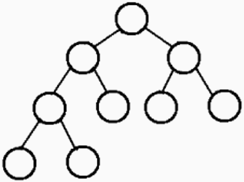
Árboles m-arios

A veces estamos interesados en árboles donde el número de hijos es limitado:

Definición

Un árbol con raíz es m-ario, $m \geq 1$, si cada nodo interno tiene a lo más m hijos. Decimos que el árbol m-ario es completo si cada nodo interno tiene exactamente m hijos.

Ejemplo: El siguiente es un árbol binario completo.



Propiedades de los árboles m-arios

Teorema

- Si T es un árbol m-ario de altura h, entonces tiene a los sumo m^h hojas
- Si T es un árbol m-ario completo de i nodos internos, entonces tiene $m \cdot i + 1$ nodos en total

Ejercicios

Ejercicio*: Sea G un grafo no dirigido. Probar que G es un árbol si y sólo si G es conexo, pero sacarle cualquier arista lo vuelve disconexo.

Ayuda: Para la prueba puede usar cualquiera de las caracterizaciones ya vistas de árbol:

1. G es conexo sin ciclos simples;
2. G contiene un único camino simple entre cada par de nodos distintos;
3. G es conexo y $|E| = |V| - 1$;

Ejercicios

$\boxed{\Rightarrow}$ Asumiendo que $G = (V, E)$ es un árbol tengo que probar que G es conexo, pero quitarle cualquier arista lo desconecta.

- Que G es conexo sigue de que G es un árbol
- Para probar que quitarle cualquier arista lo desconecta, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que G contiene una arista e tal que al removerla obtenemos un grafo $G' = (V, E \setminus \{e\})$ conexo. Es claro que G' no contiene ciclos simples (pues G no contiene ciclos simples), y por lo tanto es un árbol. Luego, usando la caracterización 3 de árboles en G y G' respectivamente obtenemos que

$$|E| = |V| - 1 \qquad \text{y} \qquad |E| - 1 = |V| - 1$$

lo que es absurdo.

Ejercicios

$\boxed{\Leftarrow}$ Asumiendo que $G = (V, E)$ es conexo pero quitarle cualquier arista lo desconecta, tengo que probar que G es un árbol.

- Que G es conexo es hipótesis
- Para probar que G no contiene ciclos simples procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que G contiene un ciclo simple C. Luego puedo quitar una arista cualquiera de C y el grafo resultante va a seguir siendo conexo (absurdo!), ya que cualquiera par de vértices que estaban conectados utlizando dicha arista, pueden reemplazar dicha arista por el resto del ciclo.