Auxiliar 8:

Colorabilidad y caminos Eulerianos

Profesores: Alejando Hevia, Federico Olmedo
Auxiliares: Ismael Correa, Nahuel Gómez, Nelson Marambio,
Javier Oliva, Fernanda Sanchirico, Lucas Torrealba,
Ayudantes: Felix Avilés, Daniel Báez

P1.-

Sea G un grafo simple. Un conjunto de vértices de G es independiente si ningún par de vértices en el conjunto son adyacentes en el grafo. Denotamos como $I(G)$ al tamaño del mayor conjunto de vértices independientes en G. Demuestre que para todo grafo simple $G = (V, E)$, su número cromático es lo más $|V| - I(G) + 1$.

Solución:

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Tomemos el conjunto de nodos independientes en G de mayor tamaño, y denotémoslo $\mathcal{V}$; evidentemente $|\mathcal{V}| = I(G)$. Ahora, si tomamos un color, digamos c_0, y coloreamos todos los nodos en $\mathcal{V}$ con dicho color, nos quedan $|V| - |\mathcal{V}| = |V| - I(G)$ nodos por colorear. Aquí si coloreamos cada uno de los nodos restantes con un color diferente, podemos notar que se usan $|V| - I(G) + 1$ colores para colorear el grafo en su totalidad. Dado lo anterior es posible concluir que:

$$\chi(G) \leq |V| - I(G) + 1$$

Y por lo tanto el numero cromático de G es a lo más $|V| - I(G) + 1$.

P2.-

Un conjunto de vértices de un grafo es independiente si ningún par de vértices en el conjunto son adyacentes en el grafo. Recuerde, además, que el número cromático $\chi(G)$ de un grafo G es la menor cantidad de colores que se necesitan para colorear el grafo. Demuestre que en todo grafo simple $G = (V, E)$ se tiene que $|V| \leq \chi(G) \cdot I(G)$, donde $I(G)$ es el tamaño del mayor conjunto independiente de vértices en G.

Solución:

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple de número cromático $\chi(G)$, si fijamos una coloración de $\chi(G)$ colores, sabemos que no existen mas de $I(G)$ nodos pintados de un mismo color para cualquier color que se tome; si por contradicción asumimos que existe un color tal que la cantidad de nodos en V que toman dicho color es mayor a $I(G)$, puesto que dichos nodos no son adyacentes luego $I(G)$ no sería el tamaño del mayor conjunto de nodos independientes.

Realizada la observación anterior, si introducimos que $\mathcal{C}$ es un conjunto de colores tal que $|\mathcal{C}| = \chi(G)$, y $v_x \in V$ denota un nodo cuyo color bajo la coloración fijada es x, luego podemos establecer que:

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V} 1 &= \sum_{x \in \mathcal{C}} \sum_{v_x \in V} 1 \\
&\leq \sum_{x \in \mathcal{C}} I(G) \\
&= \chi(G) \cdot I(G)
\end{aligned}$$

Con lo cual es posible concluir que $|V| \leq \chi(G) \cdot I(G)$.

P3.-

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple, conexo y euleriano tal que $|V| \geq 1$, y $v \in V$ un nodo de él. Demuestre que $G - v$, el grafo resultante al eliminar el nodo v junto a todos los arcos incidentes a v, no es euleriano.

Solución:

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple, conexo y euleriano tal que $|V| \geq 1$. Puesto que G posee un circuito euleriano, podemos asegurar que todos los nodos en V son de grado par. Ahora, puesto que el grafo es conexo y posee mas de un nodo, podemos asegurar además que la vecindad de v no es vacía. Tomemos así un nodo $u \in V$ tal que $(u, v) \in E$ (solo existirá una arista de esta forma puesto que el grafo es simple), al quitar v del grafo y todas las aristas incidentes en el, se tendrá que la arista tomada dejará de estar en E, con lo cual el grado de u disminuye en 1. De esta manera, puesto que el grado de u era par antes de quitar v y sus aristas incidentes, luego de aquello su grado es impar, con lo cual es posible concluir que existe al menos un nodo de grado impar en $G - v$, con lo cual éste no sería euleriano.