Matemática Discreta

Clase 7: Principios de prueba sobre los naturales

Federico Olmedo

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

Contenido clase de hoy

1. Principio de inducción débil y fuerte
2. Principio del buen orden
3. Principio de inducción con múltiples casos bases

Principio de inducción débil y fuerte

Principio de inducción

El principio de inducción sobre los naturales es una *técnica* para probar propiedades sobre los naturales.

Principio de inducción

Una propiedad vale para todos los números naturales si:

Caso base: la propiedad vale para 0

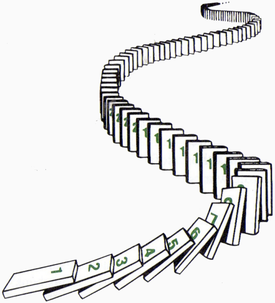
Caso inductivo: cualquiera sea el natural n, la propiedad vale para $n+1$ si vale para n

Simbolicamente,

$$P(0) \wedge \forall n.\ P(n) \to P(n+1) \quad \to \quad \forall n.\ P(n)$$

Nomenclatura: En el caso inductivo $\forall n.\ P(n) \to P(n+1)$, al antecedente $P(n)$ se lo llama hipótesis inductiva.

Intuición detrás del principio de inducción



Si el primer dominó cae, y si cae un dominó entonces cae el siguiente, entonces caen todos los dominos.

Aplicación: Probando identidades numéricas

Pruebe por inducción sobre n que

$$0 + 1 + \ldots + n \quad = \quad \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Caso base: Vale trivialmente ya que $0 \;=\; \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1$.

Caso inductivo: asumiendo la hipótesis inductiva

$$0 + 1 + \ldots + n \;=\; \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

tengo que probar que

$$0 + 1 + \ldots + n + (n+1) \;=\; \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Probémoslo,

$$\begin{aligned} 0 + 1 + \ldots + n + (n+1) \quad &= \quad \tfrac{1}{2}n(n+1) + (n+1) && \text{(por H.I.)} \\ &= \quad \tfrac{1}{2}(n+1) \cdot n + \tfrac{1}{2}(n+1) \cdot 2 \\ &= \quad \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Generalizando el caso base

El principio de inducción se puede generalizar para probar que una propiedad vale a partir de un n_0 dado (distinto de 0).

$$P(n_0) \land \forall n \geq n_0.\ P(n) \to P(n+1) \quad \to \quad \forall n \geq n_0.\ P(n)$$

Aplicación: Tirando tortas

Un número impar de gente, cada uno llevando una torta, se para en un parque de manera que la distancia entre ellos es mutuamente distinta. Cada persona lanza su torta a la cara de la persona que tiene más cerca.

Demuestre usando inducción que siempre existe una persona a la que no le tiran ninguna torta.

Aplicación: Tirando tortas

Usando inducción, demostraremos la siguiente proposición P sobre los naturales mayores o iguales a 1:

$$P(n) \quad = \quad \begin{array}{l}\text{cuando en el parque se paran } 2n+1 \text{ personas,} \\ \text{existe una a la que no le tiran ninguna torta}\end{array}$$

Case base $P(1)$: Entre las tres personas, sean A y B las que están separadas por la menor distancia y C la persona restante, es decir

$$d(A,B) < d(A,C) \qquad \text{y} \qquad d(A,B) < d(B,C)$$

A y B se tiran la torta mutuamente, y por lo tanto C no recibe ninguna torta.

Aplicación: Tirando tortas

Case inductivo: Suponga por hipótesis inductiva que alguien se salva cuando participan $2n+1$ personas. Tenemos que probar que alguien también se salva cuando participan $2n+3$ personas. Sean A y B las personas que están separadas por la menor distancia. A y B se lanzan la torta mutuamente.

Ahora procedemos por análisis de casos, analizando si alguien más le lanza su torta a A o B, o no.

- Si alguien más le lanza su torta a A o a B, entonces el máximo de tortas recibidas entre los restantes $2n+1$ participantes es $2n$, y por tanto, al menos uno de ellos no recibe torta.
- Suponga entonces, que la única torta que recibe A es la de B, y viceversa. El resto del grupo es de $2n+1$ personas, y están a distancias mutuas diferentes. Por hipótesis inductiva alguien no recibe torta en este grupo. ■

Simplificando el caso inductivo

En el caso inductivo, para probar $P(n+1)$ sólo podemos emplear

$$P(n)$$

Sin embargo, muchas pruebas se simplifican significativamente si pudiésemos emplear

$$P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n)$$

Este último argumento de prueba es válido y se conoce como principio de inducción fuerte.

Principio de inducción fuerte

Principio de inducción fuerte

Una propiedad vale para todos los números naturales si:

Caso base: la propiedad vale para 0

Caso inductivo: cualquiera sea el natural n, la propiedad vale para $n+1$ si vale para todos los naturales menores o iguales a n

Simbolicamente,

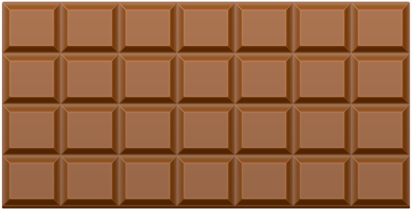
$$P(0) \wedge \forall n.\ P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n) \to P(n+1) \quad \to \quad \forall n.\ P(n)$$

Intuición detrás del principio de inducción fuerte

Ahora para tumbar un dominó necesitamos el peso de todos los dominos anteriores.

Aplicación: Cortando tabletas de chocolate

Una tableta de chocolate consiste en $m \times n$ cuadrados dispuestos en m filas y n columnas.



Uno puede partir la tableta en cuadrados cortándola a lo largo de sus "lineas". Asumiendo que las lineas no se pueden cortar parcialmente, demuestre que $mn - 1$ cortes alcanzan para obtener los mn cuadrados.

Aplicación: Cortando tabletas de chocolate

Haremos la demostración por inducción fuerte sobre el número $k = mn$ de cuadrados de la tableta de chocolate.

Case base: Una tableta de $k = 1$ cuadrado trivialmente puede ser cortada en cuadrados con $1 - 1$ cortes.

Case inductivo: Consideremos una tableta de $k + 1$ cuadrados. Hagamos sobre la tableta un corte arbitrario. Éste divide a la tableta en dos subtabletas de k_1 y k_2 cuadrados respectivamente, donde $k_1 + k_2 = k + 1$.

Por hipótesis de inducción estas dos tabletas pueden ser cortadas con

$$k_1 - 1 \qquad \text{y} \qquad k_2 - 1$$

cortes. Por tanto, la tableta original (de $k + 1$ cuadrados) puede cortarse con

$$\begin{aligned} 1 \,+\, k_1 - 1 \,+\, k_2 - 1 &= k_1 + k_2 - 1 \\ &= k \end{aligned}$$

cortes. ■

Principio del buen orden

Principio del buen orden

Principio del buen orden

Todo conjunto no vacío de números naturales tiene un menor elemento.

$$\forall S \subseteq \mathbb{N}_0.\ S \neq \emptyset \implies \exists m \in S.\ \ (\forall s \in S.\ m \leq s)$$

Aplicación: Ciclos de largo 3 en torneos de tenis

En un torneo de tenis cada jugador juega con cada uno de los jugadores restantes exactamente una vez, y cada juego entrega un ganador y un perdedor.

Decimos que los jugadores $p_1, p_2 \ldots, p_n$ forman un ciclo si p_1 le gana a p_2, p_2 le gana a p_3, ..., p_{n-1} le gana a p_n, y p_n le gana a p_1.

Demuestre que que si en el torneo hay un ciclo de largo mayor o igual a 3, entonces hay un ciclo de largo exactamente 3.

Aplicación: Ciclos de largo 3 en torneos de tenis

Por el principio del buen orden existe un ciclo $p_1, p_2 \ldots, p_m$ de longitud m mínima, donde $m \geq 3$. (Esto corresponde a aplicar el principio del buen orden sobre el conjunto $\{n \geq 3 \mid \text{existe un ciclo de largo } n\}$).

La prueba procede por reducción al absurdo: supongamos que $m > 3$. Ahora hacemos un análisis de casos, analizando quién fue el ganador entre p_1 y p_3.

- Si p_3 le ganó a p_1, tenemos un ciclo de largo 3 (p_1, p_2, p_3). ¡Absurdo (pues supusimos que $m > 3$)!
- Si p_1 le ganó a p_3, tenemos un ciclo de largo $m - 1$ $(p_1, p_3, \ldots, p_m)$. ¡Absurdo (por definición de m)!

En ambos casos llegamos a una contradicción, por lo que debe ser necesariamente $m = 3$. ∎

Ejercicio*: Probar que todo natural $n \geq 2$ admite un divisor primo.

Ejercicio: Probar que todo natural $n \geq 1$ puede expresarse de la forma $n = 2^k \cdot m$ para algún $k \in \mathbb{N}_0$ y algún $m \in \mathbb{N}$ impar.

Hint: Considerar el conjunot $S = \{s \in \mathbb{N}_0 \mid 2^s \nmid n\}$.

Relación con el principio de inducción

Proposición

Los siguientes postulados sobre los naturales son equivalentes:

- Principio del buen orden
- Principio de inducción fuerte
- Principio de inducción (débil)

En otras palabras, todo lo que se puede probar con uno, se puede probar con cualquiera de los otros dos.

Éstos son postulados sobre los naturales. Esto quiere decir que no se pueden derivar (o demostrar a partir de conceptos más primitivos), sino que son parte de la axiomatización que define a los naturales.

Ejercicios

Ejercicio: Derive el principio de inducción estándar a partir del principio del buen orden. *Ayuda:* Proceda por reducción al absurdo.

Principio de inducción con múltiples casos bases

Limitación de los principios de inducción débil y fuerte

Ejercicio: Sea la sucesión $\langle a_n \rangle_{n \geq 0}$ definida por

$$a_0 = 2 \qquad a_1 = 7 \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \quad \forall n \geq 0$$

Probar que para todo $n \geq 0$ resulta $a_n \;=\; 3 \cdot 2^n - (-1)^n$.

Pregunta: ¿Podemos usar—de manera directa— alguno de los dos principios de inducción ya vistos para probar la forma cerrada de a_n?

$$\begin{array}{lclcl} P(0) & \wedge & \big[\forall n.\ P(n) \rightarrow P(n+1)\big] & \rightarrow & \forall n.\ P(n) \\ P(0) & \wedge & \big[\forall n.\ P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)\big] & \rightarrow & \forall n.\ P(n) \end{array}$$

No, porque para probar el caso inductivo necesitamos hacer referencia a la propiedad en los dos naturales anteriores:

$$\big[P(0) \wedge P(1)\big] \;\wedge\; \big[\forall n.\ P(n) \wedge P(n+1) \rightarrow P(n+2)\big] \quad \rightarrow \quad \forall n.\ P(n)$$

Principio de inducción con múltiples casos base

En general, cuando para probar el caso inductivo necesito hacer referencia a la propiedad en los **m** valores anteriores, necesito probar **m** casos base, a partir del valor inicial n_0 en el cual vale la propiedad.

$$\frac{\begin{array}{c} P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \ldots \wedge P(n_0+(m-1)) \\ \forall n \geq n_0.\;\; P(n) \wedge P(n+1) \wedge \ldots \wedge P(n+(m-1)) \quad \rightarrow \quad P(n+m) \end{array}}{\forall n \geq n_0.\;\; P(n)}$$

Observación: cuando $m = 1$ y $n_0 = 0$ recuperamos el principio de inducción (débil), es su formulación clásica.

Aplicación: Cerrando recurrencias

Ejercicio: Sea la sucesión $\langle a_n \rangle_{n \geq 0}$ definida por

$$a_0 = 2 \qquad a_1 = 7 \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \quad \forall n \geq 0$$

Probar que para todo $n \geq 0$ resulta $a_n \;=\; 3 \cdot 2^n - (-1)^n$.

Casos base: Trivial ya que $2 = 3 \cdot 2^0 - (-1)^0$ y $7 = 3 \cdot 2^1 - (-1)^1$.

Caso inductivo:

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= a_{n+1} + 2a_n \\
&= 3 \cdot 2^{n+1} - (-1)^{n+1} + 2 \cdot \left(3 \cdot 2^n - (-1)^n\right) && \text{(H.I)} \\
&= 3 \cdot 2^{n+2} - (-1)^{n+1} - 2 \cdot (-1)^n \\
&= 3 \cdot 2^{n+2} - (-1)^{n+2} && \text{(análisis de paridad)}
\end{aligned}$$

Aplicación: Denominación de billetes

Ejercicio: Demuestre que cualquier cantidad de plata mayor o igual a 12 pesos puede ser pagada usando sólo billetes de 4 y 5 pesos.

Caso base: Vamos a demostrar 4 casos base ya que en el caso inductivo vamos a requerir la propiedad 4 valores hacia atrás:

$$12 = 3 \times 4 \qquad 13 = 2 \times 4 + 1 \times 5 \qquad 14 = 1 \times 4 + 2 \times 5 \qquad 15 = 3 \times 5$$

Caso inductivo: Tenemos que probar que $n + 4$ pesos se pueden pagar con billetes de 4 y 5 pesos, asumiendo que n, $n + 1$, $n + 2$ y $n + 3$ pesos se pueden pagar con billetes de 4 y 5 pesos. Dado que n pesos se pueden pagar con billetes de 4 y 5 pesos, para pagar $n + 4$ pesos basta con agregar un billete de 4 pesos. ■

Ejercicios

Ejercicio*: Probar que toda cantidad de plata mayor o igual a 8 pesos puede ser pagada con billetes de 3 y de 5 pesos.

Material suplementario

Aplicación del principio de inducción fuerte

Pruebe por inducción fuerte que todo natural mayor que 1 puede escribirse como producto (posiblemente unitario) de factores primos.

Caso base: Trivial ya que 2 puede escribirse como el producto unitario 2.

Caso inductivo: considere el natural $n+1$ y asuma por hipótesis inductiva que todo natural en el intervalo $[2, n]$ puede escribirse como producto de factores primos. Ahora analicemos si $n+1$ es primo o compuesto.

- Si $n+1$ es primo la propiedad es trivial.
- Si $n+1$ es compuesto entonces existen naturales j, k en el intervalo $[2, n]$ tales que $n+1 = j \cdot k$. Por hipótesis inductiva j y k pueden escribirse como producto de factores primos, y por lo tanto $n+1 = j \cdot k$ también.

Observación: Para esta prueba usamos la variante del principio de inducción fuerte que establece la propiedad respectiva a partir de 2 (no a partir de 0).

Aplicación del principio del buen orden

Lemma: Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $d \in \mathbb{N}$, existen cociente $q \in \mathbb{N}_0$ y resto $r \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$n \;=\; dq + r \qquad \text{y} \qquad 0 \leq r < d$$

Demostración

El conjunto

$$R \;=\; \{n - dk \mid k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{y} \quad n - dk \geq 0\}$$

es no vacío ya que contiene a $n - d \cdot 0 = n \geq 0$. Por el principio del buen orden, el conjunto admite un menor elemento que llamaremos r^*. Como $r^* \in R$, existe $k^* \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$r^* \;=\; n - dk^* \qquad \text{y} \qquad r^* \geq 0$$

De esto se desprende que

$$n \;=\; dk^* + r^* \qquad \text{y} \qquad 0 \leq r^*$$

Aplicación del principio del buen orden

Falta probar que $r^* < d$. Procedemos por reducción al absurdo: asumimos que $r^* \geq d$. Luego

$$n - d(k^* + 1) \quad = \quad n - dk^* - d \quad = \quad r^* - d \quad \geq \quad 0$$

lo que es absurdo porque $n - d(k^* + 1)$ sería un elemento de R estrictamente menor que r^*. Por lo tanto, deber ser necesariamente $r^* < d$. $\blacksquare$.