Matemática Discreta

Clase 4: Lógica proposicional: razonamiento ecuacional, completitud de conectivos y aplicaciones

Federico Olmedo*

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

* Estas diapositivas fueron diseñadas a partir de diapositivas del profesor Alejandro Hevia.

Contenido clase de hoy

1. Equivalencia de fórmulas y razonamiento ecuacional
2. Expresividad de los conectivos
3. Aplicaciones

Equivalencia de fórmulas y razonamiento ecuacional

Equivalencia: Definición

Informalmente, dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$ se dicen equivalentes si tienen la misma tabla de verdad. Formalmente:

Definición (equivalencia)

Dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$ son (semánticamente) equivalentes, notado $\alpha \equiv \beta$, si y sólo si

$$\hat{\sigma}(\alpha) = \hat{\sigma}(\beta)$$

para toda valuación $\sigma \colon P \to \{0, 1\}$.

Ejemplo Probar que $p \equiv \neg(\neg p)$.

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
1	0	1
0	1	0

Equivalencia: Caracterización alternativa

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
1	0	1
0	1	0

Pedir que para todas las filas, p y $\neg(\neg p))$ evalúen al mismo valor de verdad es lo mismo que pedir que, para todas las filas, su bicondicional $p \leftrightarrow \neg(\neg p))$ evalúe a 1, es decir, que su bicondicional sea una tautología.

Lema (caracterización alternativa de $\equiv$)

Dos fórmulas son equivalentes si y sólo si su bicondicional es una tautología. Simbólicamente,

$$\alpha \equiv \beta \qquad \text{si y sólo si} \qquad \models \alpha \leftrightarrow \beta$$

Equivalencia: Caracterización alternativa

En base a la consistencia y completitud de la deducción natural, un corolario fundamental de este resultado es que

$$\alpha \equiv \beta \qquad \text{si y sólo si} \qquad \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

lo que provee un mecanismo deductivo para establecer la equivalencia entre dos fórmulas.

Algunas equivalencias útiles

Asociatividad de $\wedge$ y $\vee$

$$\begin{aligned} p \wedge (q \wedge r) &\equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) &\equiv (p \vee q) \vee r \end{aligned}$$

Conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$

$$\begin{aligned} p \wedge q &\equiv q \wedge p \\ p \vee q &\equiv q \vee p \end{aligned}$$

Algunas equivalencias útiles

Idempotencia de $\wedge$ y $\vee$

$$\begin{aligned} p \wedge p &\equiv p \\ p \vee p &\equiv p \end{aligned}$$

Distributividad de $\wedge$ y $\vee$

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{aligned}$$

Algunas equivalencias útiles

Elemento neutro de $\wedge$ y $\vee$

$$\begin{aligned} p \wedge \mathit{true} &\equiv p \\ p \vee \mathit{false} &\equiv p \end{aligned}$$

Elemento absorvente de $\wedge$ y $\vee$

$$\begin{aligned} p \wedge \mathit{false} &\equiv \mathit{false} \\ p \vee \mathit{true} &\equiv \mathit{true} \end{aligned}$$

Contradicción

$$p \wedge \neg p \equiv \mathit{false}$$

Tercer excluido

$$p \vee \neg p \equiv \mathit{true}$$

Algunas equivalencias útiles

Doble negación

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

Leyes de De Morgan

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q \end{aligned}$$

Algunas equivalencias útiles

Caracterización alternativa de $\rightarrow$

$$p \rightarrow q \quad \equiv \quad \neg p \vee q$$

Caracterización alternativa de $\leftrightarrow$

$$p \leftrightarrow q \quad \equiv \quad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Razonamiento ecuacional

Un enfoque alternativo que podemos utilizar para establecer la equivalencia entre dos fórmulas es el razonamiento ecuacional, reemplazando "equivalentes por equivalentes", como lo hacemos tradicionalmente sobre expresiones numéricas.

Ejemplo Vamos a probar que

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \quad \equiv \quad \neg p \wedge \neg q$$

Para ello vamos a partir del lado izquirdo, y vamos a transformarlo en el lado derecho, aplicando equivalencias ya conocidas.

Razonamiento ecuacional

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \\
\equiv & \{\text{ Ley de De Morgan }\} \\
 & \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) \\
\equiv & \{\text{ Ley de De Morgan }\} \\
 & \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) \\
\equiv & \{\text{ Doble negación }\} \\
 & \neg p \wedge (p \vee \neg q) \\
\equiv & \{\text{ Distrib. del } \wedge \text{ respecto al } \vee \} \\
 & (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
\equiv & \{\text{ Contradicción }\} \\
 & \mathit{false} \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
\equiv & \{\text{ Elem. neutro del } \vee \} \\
 & \neg p \wedge \neg q
\end{array}
$$

Expresividad de los conectivos

Expresividad de la lógica proposicional

Dada una función Booleana $\phi\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, ¿siempre puede representarse a través de una fórmula de la lógica proposicional?

Ejemplo:

p_1	p_2	p_3	$\phi(p_1, p_2, p_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Concentrándonos en las 3 valuaciones que hacen ϕ verdadera, vemos que $\phi(p_1, p_2, p_3)$ puede expresarse como

$$(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p3)$$

Expresividad de la lógica proposicional

Toda tabla de verdad puede expresarse a través de una fórmula de la lógica proposicional.

Caso general:

valuación	p_1	$\ldots$	p_n	valor de verdad
σ_1	0	$\ldots$	0	b_1
σ_2	0	$\ldots$	1	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
σ_{2^n}	1	$\ldots$	1	b_{2^n}

La tabla de verdad puede describirse por la siguiente fórmula de la lógica proposicional[1]:

$$\bigvee_{i\,:\,b_i=1} \left(\left(\bigwedge_{j\,:\,\sigma_i(p_j)=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{k\,:\,\sigma_i(p_k)=0} \neg p_k \right) \right)$$

[1] Si la tabla representa una contradicción, la fórmula de arriba es "vacía", pero la tabla puede igualmente representarse como $p_1 \wedge \neg p_1$.

Completitud de conectivos lógicos

Del resultado anterior se desprende el siguiente corolario

Teorema (completitud de conectivos lógicos)

Los conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ son suficientes para expresar todas las fórmulas de la lógica proposicional. Formalmente decimos que el conjunto de conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$ es funcionalmente completo.

Ejercicio: Demostrar que los conjuntos de conectivos $\{\neg, \wedge\}$ y $\{\neg, \vee\}$ también son funcionalmente completos.

Hint: Pensar cómo se puede reescribir $\alpha \vee \beta$ (resp. $\alpha \wedge \beta$) en términos de $\neg$ y $\wedge$ (resp. $\neg$ y $\vee$) usando las Leyes de De Morgan.

Formas normales

Una fórmula está en forma normal disyuntiva sii es una *disyunción de conjunciones de literales*, donde un literal es una proposición o su negación. Ejemplo:

$$(p_1 \wedge \neg p_2) \ \vee \ (p_2 \wedge p_4) \vee (p_3 \wedge \neg p_3)$$

Teorema (forma normal)

Toda fórmula de la lógica proposicional es equivalente a una fórmula en forma normal disyuntiva.

Demostración

Ya la hicimos 2 diapositivas atrás.

Formas normales

Una fórmula está en forma normal conjuntiva sii es una *conjunción de disyunciones de literales*, por ejemplo

$$(p_1 \vee \neg p_2) \ \wedge \ (p_2 \vee p_4) \wedge (p_3 \vee \neg p_3)$$

.

Teorema (forma normal)

Toda fórmula de la lógica proposicional es equivalente a una fórmula en forma normal conjuntiva.

Demostración

Pensar cómo se puede transformar una fórmula en forma normal disyuntiva en una fórmula equivalente en forma normal conjuntiva.

Aplicaciones

Especificando piezas de hardware/software: Semáforo

Considerando una versión discreta del tiempo $t = 1 \dots n$, definimos el conjunto de proposiciones

$$\{v_t \mid 1 \leq t \leq n\} \;\cup\; \{a_t \mid 1 \leq t \leq n\} \;\cup\; \{r_t \mid 1 \leq t \leq n\}$$

donde v_t, a_t y r_t representa que el semáforo está en verde, amarillo o rojo en el instante t, respectivamente.

La lógica proposicional permite especificar distintos aspectos del funcionamiento del semáforo:

Especificando piezas de hardware/software: Semáforo

- En cada instante de tiempo, el semáforo está en al menos un color:

$$\bigwedge_{1 \leq t \leq n} v_t \vee a_t \vee r_t$$

- En ningún instante de tiempo, el semáforo tiene dos colores:

$$\bigwedge_{1 \leq t \leq n} \neg(v_t \wedge a_t) \wedge \neg(a_t \wedge r_t) \wedge \neg(r_t \wedge a_t)$$

Especificando piezas de hardware/software: Semáforo

- Cada vez que el semáforo está en amarillo, en el siguiente instante de tiempo está en rojo:

$$\bigwedge_{1 \leq t < n} a_t \rightarrow r_{t+1}$$

- Si el semáforo está en rojo, entonces estará en verde en a lo más 5 unidades de tiempo:

$$\bigwedge_{1 \leq t \leq n-5} r_t \rightarrow v_{t+1} \vee v_{t+2} \vee v_{t+3} \vee v_{t+4} \vee v_{t+5}$$

Modelando acertijos: Caballeros y canallas

Una isla tiene dos tipos de habitantes: *caballeros* y *canallas*. Los caballeros siempre dicen la verdad y los canallas siempre mienten. Dos habitantes A y B de la isla se encuentran:

- A dice: "B es un caballero", y
- B dice: "Nosotros dos somos de tipos opuestos"

¿De qué tipo es cada uno (caballero o canalla)?

Modelando acertijos: Caballeros y canallas

Si introducimos las siguientes proposiciones:

$$\begin{array}{ll} p\text{:} & A \text{ es un caballero} \\ q\text{:} & B \text{ es un caballero} \end{array}$$

de tal manera que $\neg p$ (resp. $\neg q$) representa que A (resp. B) es un canalla, podemos modelar los dichos de A y B como sigue:

- A dice: "B es un caballero":

$$p \leftrightarrow q$$

- B dice: "Nosotros dos somos de tipos opuestos":

$$q \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$$

Modelando acertijos: Caballeros y canallas

Para saber qué son A y B debemos "mirar" las valuaciones de p y q que hacen simultáneamente verdaderas las fórmulas

$$p \leftrightarrow q \qquad \text{y} \qquad q \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$
1	1	1	0
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	1

La única valuación que satisface dicho requisito es aquella donde p y q son falsos, por lo que A y B son ambos canallas.

Modelando problemas de restricciones: Diseño de autos

- Muchos productos son altamente customizables
- Por ejemplo, el Mercedes C tiene 650+ opciones:
  - interior de cuero
  - calefacción de asientos
  - aire condicionado confortable
  - batería alta capacidad
  - luz ambiental
  - asistente de puntos ciegos
- Pero existen múltiples restricciones de compatibilidad no triviales:

  El aire acondicionado confortable requiere batería de alta capacidad, excepto cuando se lo combina con motores a bencina de 3.2L de capacidad.

¿Cómo podemos determinar si la selección de opciones de un comprador es viable?

Modelando problemas de restricciones: Diseño de autos

- Introducimos una proposición para cada opción:

p:	aire acondicionado confortable	r:	motor de 3.2L
q:	batería de alta capacidad	s:	interior de cuero

- Codificamos las opciones seleccionadas por el comprador:

$$\alpha \;=\; \neg s \wedge q$$

- Codificamos las restricciones de compatibilidad:

$$\beta \;=\; p \wedge \neg r \to q$$

- Luego, las opciones seleccionadas por el comprador resultan viables sii

$$\alpha \wedge \beta$$

es satisfactible.

Modelando problemas de restricciones

- Muchos problemas de distintos dominios pueden modelarse como un problema de satisfactibilidad de la lógica proposicional (SAT):
  - Dada una fórmula de la lógica proposicional, ¿es ésta satisfactible?
  - En caso afirmativo, devolver una valuación testigo

- Resolver este problema es computacionalmente caro (NP-completo), pero existen diversos algoritmos para resolverlos de mejor manera que usando fuerza bruta.

- En la práctica, se utilizan herramientas específicamente diseñadas para resolver este problema, llamadas SAT Solvers.