

# Matemática Discreta

## Clase 19: Conceptos básicos sobre grafos

---

Federico Olmedo y Alejandro Hevia

Departamento de Ciencias de la Computación

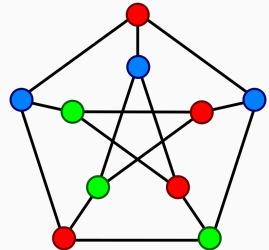
Universidad de Chile

# ¿Por qué estudiar grafos?

Los grafos son estructuras que consisten en **vértices** y de **arcos** que conectan dichos vértices. Se utilizan para *modelar* y *resolver* problemas en un sinfín de disciplinas.

Sirven, por ejemplo, para representar:

- el esquema jerárquico de una empresa;
- una red de computadores;
- un árbol genealógico;
- la interacción entre científicos;
- una red de transporte.



# ¿Qué es un grafo?

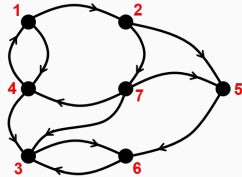
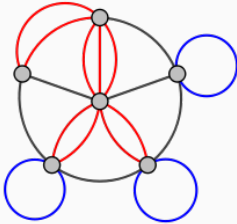
## Definición

Un **grafo**  $G = (V, E)$  está formado por un conjunto no vacío  $V$  de **vértices** o **nodos**, y un conjunto  $E$  de **arcos** o **aristas**. Cada arco  $e \in E$  tiene asociado dos vértices (posiblemente iguales) en  $V$ , llamados los **extremos** del arco.

**Notación:** usaremos  $(v_1, v_2)$  para denotar al arco de extremos  $v_1, v_2 \in V$ .

**Observación:** según la definición anterior  $V$  y  $E$  pueden ser finitos o infinitos. Nosotros nos limitaremos al caso de **grafos finitos**, donde  $V$  y  $E$  son conjuntos finitos.

# Clasificando arcos



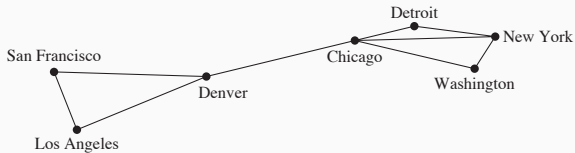
- Un lazo o loop es un arco que conecta un vértice consigo mismo.
- Dos arcos se dicen paralelos si conectan el mismo par de vértices.
- Los arcos de un grafo pueden tener *dirección* o no.

# Clasificando grafos

Nombre	Aristas	¿Permite aristas paralelas?	¿Permite lazos?
Grafo simple	no dirigidas	No	No
Multigrafo	no dirigidas	Si	No
Grafo	no dirigidas	Si	Si
Grafo dirigido simple	dirigidas	No	No
Multigrafo dirigido	dirigidas	Si	No
Grafo dirigido	dirigidas	Si	Si

- **Simple** significa sin lazos ni aristas paralelas.
- **Multigrafo** permite aristas paralelas.
- *Grafo simple* y *multigrafo a secas* se refiere a las versiones **no-dirigidas**. Para referirse a las versiones dirigidas, se le agrega el calificativo al final (grafo simple dirigido y multigrafo dirigido).

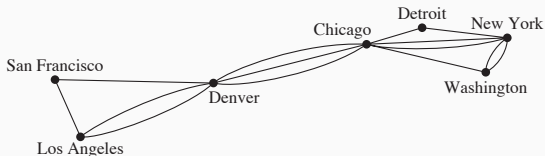
# Modelando una red de computadoras



**FIGURE 1** A Computer Network.

**Pregunta:** ¿A qué tipo de grafos corresponde la figura?

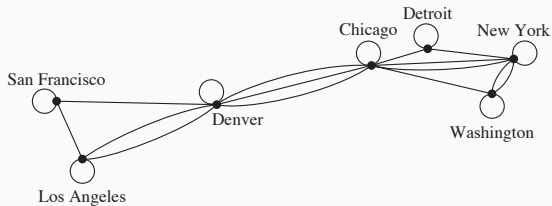
# Modelando una red de computadoras



**FIGURE 2** A Computer Network with Multiple Links between Data Centers.

**Pregunta:** ¿A qué tipo de grafos corresponde la figura?

# Modelando una red de computadoras

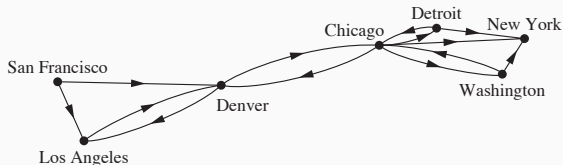


**FIGURE 3** A Computer Network with Diagnostic Links.

**Pregunta:** ¿A qué tipo de grafos corresponde la figura?



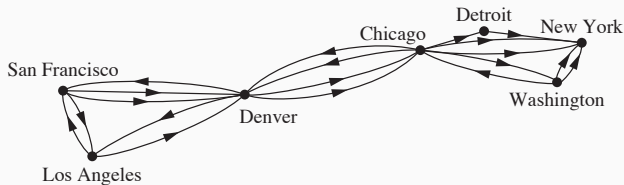
# Modelando una red de computadoras



**FIGURE 4** A Communications Network with One-Way Communications Links.

**Pregunta:** ¿A qué tipo de grafos corresponde la figura?

# Modelando una red de computadoras



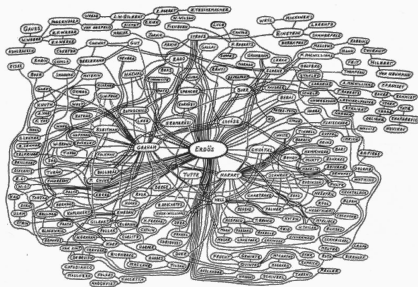
**FIGURE 5** A Computer Network with Multiple One-Way Links.

**Pregunta:** ¿A qué tipo de grafos corresponde la figura?

# Modelando la colaboración científica

## Grafo de Erdős<sup>1</sup>

- Cada autor es representado por un nodo;
- Dos autores están unidos por un arco si tienen una publicación en conjunto.



<sup>1</sup>Paul Erdős fue uno de los matemáticos más relevantes del siglo XX. Es reconocido por sus diversas contribuciones en el área de matemática discreta y por su increíble registro de publicaciones: más de 1500 artículos, con más de 500 coautores distintos.

# Modelando la colaboración científica

El **número de Erdős** de un autor representa su distancia en este grafo a Erdős. Al año 2006, teníamos:

Número de Erdős	Cantidad de científicos
1	504
2	6,593
3	33,605
4	83,642
5	87,760
6	40,014
7	11,591
8	3,146
9	819
10	244

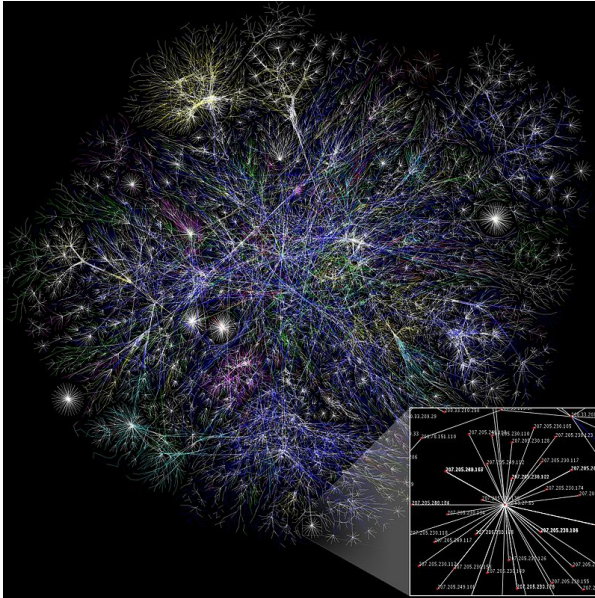
Podemos modelar a la web como un grafo donde

- cada nodo representa una página, y
- un arco  $(a, b)$  representa que la página  $a$  tiene un link a la página  $b$

## Características del grafo

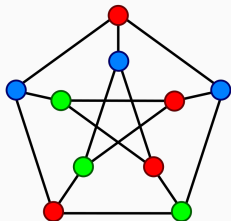
- Tiene una estructura muy dinámica (cambia cada segundo)
- Actualmente tiene más de 3 billones de nodos y 20 billones de arcos
- La distancia entre cualquier par de nodos (grado de separación) suele ser pequeña:  $< 20$ .

# Modelando la web



# Terminología sobre grafos no dirigidos

- Dos nodos se dicen **adyacentes** sii existe un arco que los conecta.
- Un arco se dice **incidente** en un nodo sii el nodo es uno de sus extremos.
- El **grado** de un nodo  $v$ , notado  $\deg(v)$ , es el número de aristas que son incidentes en  $v$ . (Los lazos sobre  $v$  contribuyen en dos unidades.)
- Un nodo  $v$  se dice **aislado** sii  $\deg(v) = 0$ .



# Teorema de los saludos

## Teorema de los saludos

Sea  $G = (V, E)$  un grafo no-dirigido. Se cumple que

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

(El teorema sigue siendo válido si  $G$  es un multigrafo y/o contiene lazos)

### Demostración

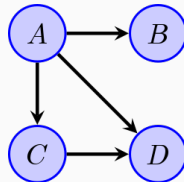
El resultado es inmediato ya que cada arista  $e \in E$  aporta dos unidades a la suma  $\sum_{v \in V} \deg(v)$ . (Puede probarse más formalmente haciendo inducción sobre el número de aristas del grafo.)

**Ejercicio\*:** Demuestre el siguiente corolario del teorema de los saludos: todo grafo no-dirigido tiene un número par de nodos de grado impar.



# Terminología sobre grafos dirigidos

- Dada la arista  $(u, v)$ , decimos que  $u$  es su **nodo inicial** y  $v$  su **nodo terminal**.
- El **grado de entrada** del nodo  $v$ , notado  $deg^{in}(v)$ , es el número de aristas que tienen a  $v$  como nodo terminal.
- El **grado de salida** del nodo  $v$ , notado  $deg^{out}(v)$ , es el número de aristas que tienen a  $v$  como nodo inicial.



## Lemma

Sea  $G = (V, E)$  un grafo dirigido. Se cumple que

$$\sum_{v \in V} deg^{in}(v) = \sum_{v \in V} deg^{out}(v) = |E|$$

# Clases de grafos simples: Cliques

Un **clique** o **grafo completo** es un grafo simple que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices (distintos). Usamos  $K_n$  para denotar al clique de  $n \geq 1$  vértices.



$K_1$



$K_2$



$K_3$



$K_4$



$K_5$



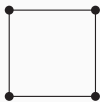
$K_6$

# Clases de grafos simples: Ciclos

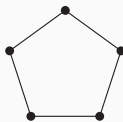
Un **ciclo** de  $n \geq 3$  vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  es aquel grafo simple que contiene las aristas  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$ . Usamos  $C_n$  para denotar al ciclo de  $n$  vértices.



$C_3$



$C_4$



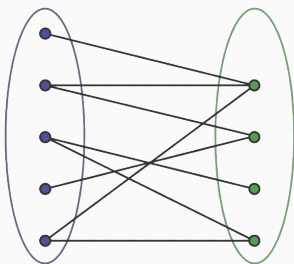
$C_5$



$C_6$

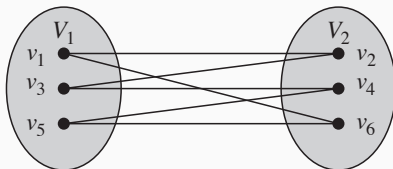
## Clases de grafos simples: Grafos bipartitos

Un grafo  $G = (V, E)$  es **bipartito** si  $V$  puede ser particionado en dos conjuntos  $V_1$  y  $V_2$  tal que cada arco del grafo conecta un nodo de  $V_1$  con uno de  $V_2$ .



# Clases de grafos simples: Grafos bipartitos

**Ejemplo:** El ciclo  $C_6$  es bipartito:



El ciclo  $C_5$  no lo es.

**Ejercicio:** Demostrar que el ciclo  $C_n$  es bipartito si y sólo si  $n$  es par.

**Ejercicio\*:** Demostrar que el clique  $K_n$  no es bipartito para ningún  $n \geq 3$ .

# Clases de grafos simples: Grafos bipartitos

## Teorema

Un grafo simple es bipartito si y sólo si es posible asignar uno de dos colores diferentes a cada vértice del grafo, de tal forma que ningún par  $u, v$  de vértices adyacentes recibe el mismo color.

## Demostración

$\Rightarrow$  Asuma primero que  $G = (V, E)$  es bipartito y que la partición de  $V$  que atestigua esto está dada por  $V_1$  y  $V_2$ . Pinte los vértices en  $V_1$  de azul y los vértices en  $V_2$  de rojo. Entonces ningún par de vértices adyacentes están pintados del mismo color.

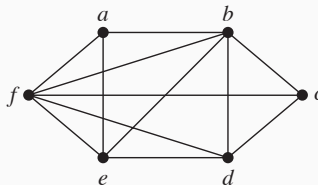
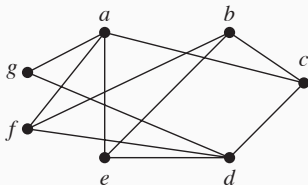
$\Leftarrow$  Asuma que es posible pintar de rojo o azul cada vértice de  $G$  de tal forma que si dos nodos son adyacentes, entonces reciben colores distintos. Defina  $V_1$  como el conjunto de nodos coloreados de azul y  $V_2$  como el conjunto de nodos coloreados de rojo. Es claro que  $V_1$  y  $V_2$  representa una partición de  $V$  que atestigua que  $G$  es bipartito.

# Clases de grafos simples: Grafos bipartitos

## Teorema

Un grafo simple es bipartito si y sólo si es posible asignar uno de dos colores diferentes a cada vértice del grafo, de tal forma que ningún par  $u, v$  de vértices adyacentes recibe el mismo color.

**Ejercicio:** Use el teorema para determinar si los siguientes grafos son bipartitos:

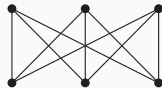


# Clases de grafos simples: Grafos bipartitos completos

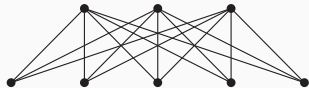
Un grafo bipartito se dice además **completo** si existe un arco entre *cada* par de nodos  $(u, v)$  tal que  $u \in V_1$  y  $v \in V_2$ . Usamos  $K_{|V_1|, |V_2|}$  para denotar a dicho grafo.



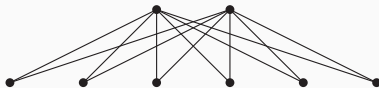
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{3,5}$



$K_{2,6}$



**Ejercicio:** Sea  $G = (V, E)$  un grafo simple. Demuestre que

$$\min \{ \deg(v) \mid v \in V \} \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \max \{ \deg(v) \mid v \in V \}$$

**Ejercicio:** Sea  $G = (V, E)$  un grafo bipartito simple. Demuestre que  $|E| \leq |V|^2/4$ .