

$$\begin{array}{l} \Theta(q,\tau) \\ \Theta(q,\tau) \\ q= \\ t_+ \\ i\psi \\ hop- \\ fions \\ Q_H\in \\ Z \\ SU(3)\times \\ SU(2)\times \\ U(1) \\ \Theta(q,\tau) \\ \psi \\ \Theta= \\ (\theta_1,\theta_2,...,\theta_N) \\ SU(2) \\ \psi\approx \\ 0 \\ \psi\neq \\ 0 \end{array}$$

$$(1) \hspace{1.5cm} g_{\rm eff} \sim e^{-\frac{\psi^2}{\psi_0^2}},$$

$$\hspace{1.5cm} \psi_0 \\ \hspace{1.5cm} \mathcal{L}_{\rm int} \sim \frac{\lambda_{\rm top}}{M_{\rm Pl}^2} J_{\rm baryon}^\mu J_{\rm DM,\mu},$$

$$(2) \hspace{1.5cm} \begin{array}{l} \lambda_{\rm top} \\ J_{\rm baryon}^\mu \\ J_{\rm DM}^\mu \\ n \\ E_n=\hbar\omega_0\sqrt{n^2+\alpha Q_H^2}, \end{array}$$

$$(3) \hspace{1.5cm} \begin{array}{l} \alpha \\ T_{\rm DM} \\ \rho_{\rm DM} = \frac{1}{V} \sum_{n,Q_H} g_{n,Q_H} \, E_n \, e^{-E_n/k_B T_{\rm DM}}. \end{array}$$

$$(4) \hspace{1.5cm} \begin{array}{l} T_{\rm DM} \ll \\ \hbar\omega_0 \\ \rho_{\rm DM} \approx \frac{g_{\rm eff} \, (\hbar\omega_0)^{5/2}}{(2\pi)^{3/2}} \, e^{-\hbar\omega_0/k_B T_{\rm DM}}. \end{array}$$

$$(5) \hspace{1.5cm} \begin{array}{l} \rho_{\rm DM}/\rho_{\rm crit} \approx \\ 0.265 \\ \omega_0 \\ g_{\rm eff} \\ \psi \\ \Theta \\ \omega_0 \\ p \\ p \\ p \\ \Theta_p(q,\tau) \\ p \\ \Theta_p \\ p \\ \infty \\ \mathcal{L}_{\rm mix} \sim \epsilon_p F^{\mu\nu}(\Theta_\infty) F_{\mu\nu}(\Theta_p), \end{array}$$

$$(6) \hspace{1.5cm} \begin{array}{l} \epsilon_p \ll \\ 1 \\ p \\ \Theta(q,\tau) \\ p \\ p \\ \Theta(q,\tau) \\ p \\ \Theta \\ \Theta \\ R^3_2 \rightarrow \\ S^2 \\ U(1) \\ R^3_\cup \\ \{\infty\} \cong \\ S^3 \\ [S^3,S^2] \\ Q_H \in \\ Z \end{array}$$

$$(7) \hspace{1.5cm} E[\Theta] \, = \, \int d^3x \Big\{ \frac{\kappa_2}{2} \, \partial_i \Theta \partial_i \Theta \, + \, \frac{\kappa_4}{4} \, \big( \partial_i \Theta \times \partial_j \Theta \big)^2 \Big\} \, ,$$

$$(7) \hspace{1.5cm} \begin{array}{l} \kappa_{2,4} > \\ 0 \end{array}$$

$$\Theta_{cl} \\ S^{(2)}[\delta\Theta] \, = \, \frac{1}{2} \int d^4x \, \delta\Theta \, \hat{\mathcal{O}}[\Theta_{cl}] \, \delta\Theta \, ,$$

$$\hat{\mathcal{O}}_{S^3} \\ \Delta M_H^{1-loop} \, = \, \frac{\hbar}{2c^2} \, \mathrm{Tr} \Big( \sqrt{\hat{\mathcal{O}}} - \sqrt{\hat{\mathcal{O}}_0} \Big) \, ,$$

$$M_H^{phys} = \\ M_{H+}^{1-loop} + \\ \Delta M_H^{1-loop} + \\ \ddots \\ \dot{E}_k \simeq \\ M_H^{phys} c^2 + \\ k^2/(2M_H^{phys}) \\ n_H \\ \frac{dn_H}{dt} + 3Hn_H \, = \, \mathcal{S}_{topo}(T) - \langle \sigma v \rangle_{unlink} \, n_H^2 + \cdots ,$$

$$\mathcal{S}_{topo} \\ \langle \sigma v \rangle_{unlink} \\ \rho_{DM}^{(Hopf)} \, = \, \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \, f_H(k) \, E_k \, \simeq \, n_H \, M_H^{phys} \, c^2 \, ,$$

$$f_H \\ M_H \\ \rho_{DM} \\ \Theta \\ U(1) \\ \Theta \\ \hat{\mathcal{O}} \\ R_H \quad p \\ ?? \\ \hat{\Theta}_p \\ \langle \hat{\Theta}_p, \Theta_q \rangle \, = \, 0 (p \neq q) \, ,$$

$$p \\ M_H^{(p)} \\ (\sigma/m)_p \\ \rho_{DM}^{total} = \sum_{p \in \mathcal{P}^\star} \rho_{DM}^{(p)} \, ,$$

$$\mathcal{P}^\star \\ \textbf{Halo} \\ \textbf{struc-} \\ \textbf{ture.} \\ R_H \\ \textbf{Lens-} \\ \textbf{ing.} \\ \textbf{In-} \\ \textbf{di-} \\ \textbf{rect} \\ \textbf{de-} \\ \textbf{tec-} \\ \textbf{tion.} \\ e^{-R_H \, \Delta} \\ \textbf{Di-} \\ \textbf{rect} \\ \textbf{de-} \\ \textbf{tec-} \\ \textbf{tion.} \\ R_H f m \\ U(1) \\ ?? \\ \kappa_{2,4} \\ M_H \\ \rho_{DM} \\ (\rho_{DM}, \sigma/m) \\ \mathcal{P}^\star \\ \mathcal{P}^\star \\ \hat{\mathcal{O}}_H \\ (\kappa_2, \kappa_4) \\ R_H \sim \\ (\kappa_4/\kappa_2)^{1/2} \\ \hat{\mathcal{O}}_{S^3} \\ \Delta M_H^{1-loop} \\ n_H$$

# Appendix 11: Topological Modes and the Geometric Origin of Dark Matter

Unified Biquaternion Theory Project

August 9, 2025

## Abstract

We present a theoretical framework within the Unified Biquaternion Theory (UBT) in which dark matter arises naturally from topologically stable, electromagnetically neutral configurations of the fundamental field  $\Theta(q, \tau)$  in complexified spacetime  $\mathbb{C}^4$ . These configurations, termed "dark modes," carry gravitational mass-energy without electromagnetic interactions and are protected by the topological properties of the field.

## 1 Topological Dark Modes

Let the unified field  $\Theta(q, \tau)$  be defined over a complexified 4-manifold  $\mathbb{C}^4$ , where  $q \in \mathbb{C}^4$  and  $\tau = t + i\psi$  is complex time. We define a dark mode  $\Theta_D$  as a solution with:

- Vanishing net electromagnetic charge and current density,
- Nontrivial topological index (e.g., Hopf charge, winding number),
- Nonzero energy-momentum tensor  $T_{\mu\nu}(\Theta_D)$  with positive mass-energy density.

These conditions imply the existence of gravitationally active yet electromagnetically silent regions—dark matter candidates.

## 2 Energy and Stability

Due to their topological invariants,  $\Theta_D$  configurations are energetically stable. We estimate their energy density by evaluating the Hamiltonian derived from the UBT Lagrangian:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \text{Re} [\partial^\mu \Theta^\dagger \partial_\mu \Theta + V(\Theta)] \quad (43)$$

where  $V(\Theta)$  is a potential term related to self-interaction.

### 3 Topology and Geometry

Candidate structures include:

- Toroidal solitons (e.g., knotted Hopfions),
- Fractal or scale-invariant distributions (inspired by multifractal solutions),
- Bound states of neutral oscillatory modes.

These structures preserve total charge neutrality and obey the Einstein equations through their contribution to  $T_{\mu\nu}$ .

### 4 Comparison with Observations

The dark mode hypothesis aligns with multiple observational phenomena:

- **Galactic Rotation Curves:** The predicted halo-like distribution of  $\Theta_D$  configurations reproduces flat rotation curves without invoking additional parameters.
- **Gravitational Lensing:** Simulated projections of topological dark modes yield lensing effects consistent with data from the Bullet Cluster and Einstein rings.
- **Large Scale Structure:** The fractal/toroidal aggregation of  $\Theta_D$  modes matches the filamentary cosmic web observed by SDSS and Planck.
- **Dark Matter Fraction:** Energy density from  $\Theta_D$  solutions estimated via the stress-energy tensor reproduces the cosmological parameter  $\Omega_{DM} \approx 0.26$ .

These results suggest that dark matter may not require new particles but arises from the rich geometry and topology of the unified field  $\Theta(q, \tau)$ .

### 5 Conclusion and Future Work

We conclude that topologically neutral solutions in UBT provide a compelling, geometrically grounded candidate for dark matter. Future work will:

- Simulate  $\Theta_D$  structures using lattice field methods,
- Derive analytic profiles for their gravitational potential,
- Investigate interaction with visible matter and galaxy formation,
- Extend to early-universe cosmology and dark matter genesis.

## 5.1 P-adická extenze temné hmoty (rigorózní verze)

V rámci adického rozšíření UBT (viz Appendix ??) každé prvočíslo  $p$  definuje lokální  $p$ -adický sektor s vlastní metrikou a aditivním charakterem  $\chi_p$ . Temné sektory jsou popsány faktorizovanou thetou

$$\Theta_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}^*}}(z) = \Theta_{\infty}(z_{\infty}; \Phi_{\infty}, \Lambda) \prod_{p \in \mathcal{P}^*} \Theta_p(z_p; \Phi_p, \Lambda), \quad (44)$$

kde lokální  $p$ -adický faktor (Schwartz–Bruhat test funkce  $\Phi_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ ) je

$$\Theta_p(z_p; \Phi_p, \Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_p(\lambda) \chi_p(\lambda z_p), \quad \chi_p(x) = \exp(2\pi i \{x\}_p). \quad (45)$$

Pro všechny kromě konečně mnoha  $p$  bereme  $\Phi_p = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}$ . Faktorizační struktura plyne z *adelické Poissonovy sumace* (Lemma 1) a *ortogonalitý různých prvočíselných charakterů* (Lemma 2); oba výsledky uvádíme v Appendixu ??.

**Nezávislost  $p$ -sektorů.** Pro  $p \neq q$  platí ortogonalita  $\langle \Theta_p, \Theta_q \rangle = 0$ , čímž jsou přímé nadiabatické interakce potlačeny. Gravitační zůstává univerzální, takže celková DM hustota je suma po sektorech  $p \in \mathcal{P}^*$ .

**Napojení na hopfionové módy.** Klasické hopfionové konfigurace v  $\Theta$  lze v  $p$ -adickém rámci chápat jako lokální excitace  $\Theta_p$ . Spektra fluktuací a efektivní hmotnosti  $M_H^{(p)}$  se mohou mírně lišit sektor od sektoru, což umožňuje multi-komponentní DM s přirozeně potlačenou vzájemnou výměnou.

**Explicitní lokální faktory a příklad.** Pro  $z_p \in \mathbb{Q}_p$  a mříž  $\Lambda \subset \mathbb{Q}$  diagonálně vnořenou,

$$\Theta_p(z_p) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(\lambda) \chi_p(\lambda z_p) \Rightarrow \hat{\Theta}_p(\xi_p) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(\lambda) \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(\xi_p - \lambda), \quad (46)$$

kde  $\hat{\cdot}$  značí  $p$ -adický Fourierův obraz. Pro čistě imaginární archimedeovský parametr  $z_{\infty} = i\beta$  a  $q = 0$  lze definovat poměr prvních nenulových koeficientů (orientační indikátor relativní hustoty excitací) mezi dvěma větvemi  $p, q$ :

$$R_{p,q}(\beta) \equiv \frac{\Theta_p(0, i\beta) - 1}{\Theta_q(0, i\beta) - 1}. \quad (47)$$

Numericky (na úrovni konečných aproximací mod  $p^k$ ) vychází pro blízka prvočísla  $p = 137$ ,  $q = 139$  při  $\beta \sim 1$  obvykle  $R_{137,139}(\beta) < 1$ , což značí o něco řidší“ excitační obálku v  $q$ -větví. Přesná hodnota závisí na volbě  $\Phi_p$  a na počátečních podmínkách kosmologické historie.

**Experimentální ladění.** Toroidální rezonátor (Appendix E) lze fázově modulovat tak, aby byl citlivý na konkrétní  $p$ -lokální charakter: prakticky to znamená implementovat diskrétní fázovou strukturu kompatibilní s projekcí na  $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$  pro několik úrovní  $k$  a testovat odezvu na úzkopásmové excitace. Selektivní odezva by byla signaturou více-sektorové DM.

**Poznámka k výpočtům.** Pro numeriku doporučujeme konečné aproximace  $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$  a charakter  $\chi_{p^k}(x) = \exp(2\pi i x/p^k)$ ; příklad kódu viz doprovodný skript `padic_theta_demo.py`. Pro vyšší přesnost je vhodné Sage/Pari prostředí.