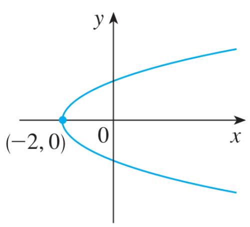
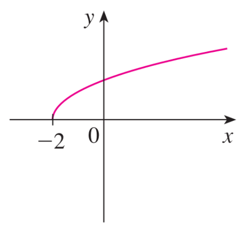
# TD 4 - Fonctions, généralités (solutions)

## Reconnaître une fonction

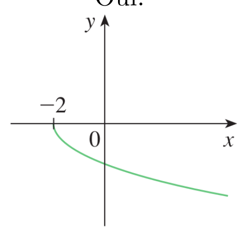
**Exercice 1.** Les images suivantes représentent-elles des graphes de fonctions ?




Non, chaque élément du domaine de définition ne doit avoir qu'une seule image.

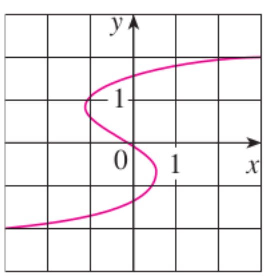



Oui.

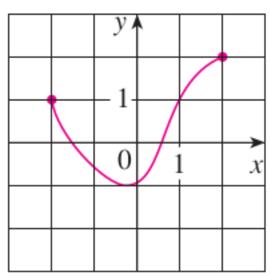



Oui.

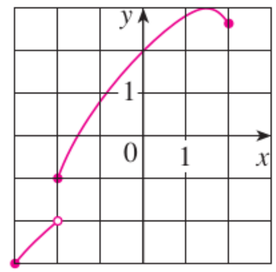
**Exercice 2.** Déterminer si la courbe représente le graphe d'une fonction et si c'est le cas, préciser l'ensemble définition et l'image.

a) 

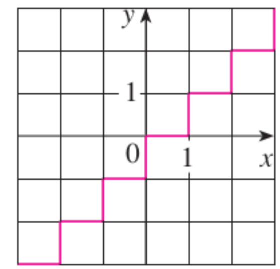

Non.

b) 


Oui. $Domaine = [-2; 2]$, $Image = [-1; 2]$.

c) 


Oui, c'est une fonction non continue. $Domaine = [-3; 2]$, $Image = [-3; -2[\cup[-1; 3]$.

d) 


Non, il y a des segments verticaux.

**Exercice 3.** Les expressions suivantes définissent-elles des fonctions ?

a) $f_1 : x \mapsto 2x$
Oui.

b) $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$
Oui (sur $[0; +\infty[$).

c) $f_3 : x \mapsto \left| \begin{array}{ll} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$
Oui, c'est la fonction valeur absolue. On note $f_3(x) = |x|$.

d) $f_4 : x \mapsto \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \end{array} \right.$
Non, les $x$ entre 0 et 1 auraient deux images.

e) $f_5 : x \mapsto \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x & \text{si } x \geqslant 1 \end{array} \right.$
Non, $f_5(1)$ n'est pas bien défini.

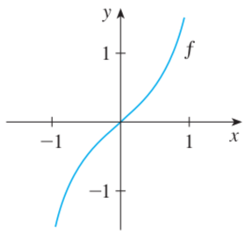
f) $f_6 : x \mapsto \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right.$
Oui, on a $f_6(0) = 0$.

## Tracer l'allure d'une fonction

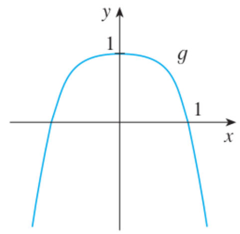
**Exercice 4** (Fonctions paires et impaires)**.** On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est

— **paire** si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ ;
— **impaire** si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

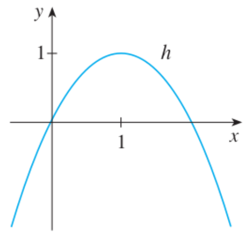
Les fonctions suivantes sont-elles paires ou impaires ?

a) 


Impaire.

b) 


Paire.

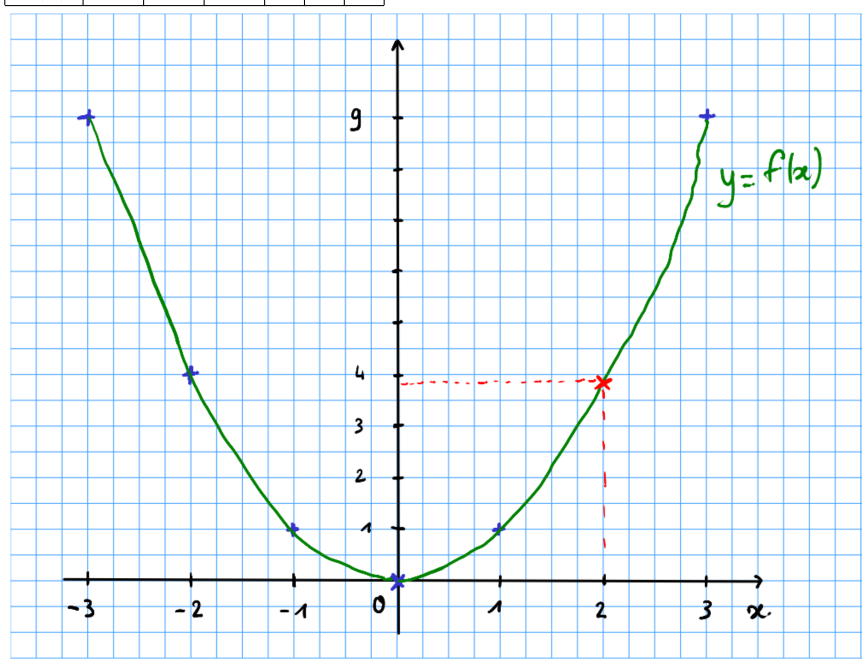
c) 


Ni l'un ni l'autre.

**Exercice 5.** Tracer l'allure des fonctions correspondant aux tableaux de valeurs suivants :

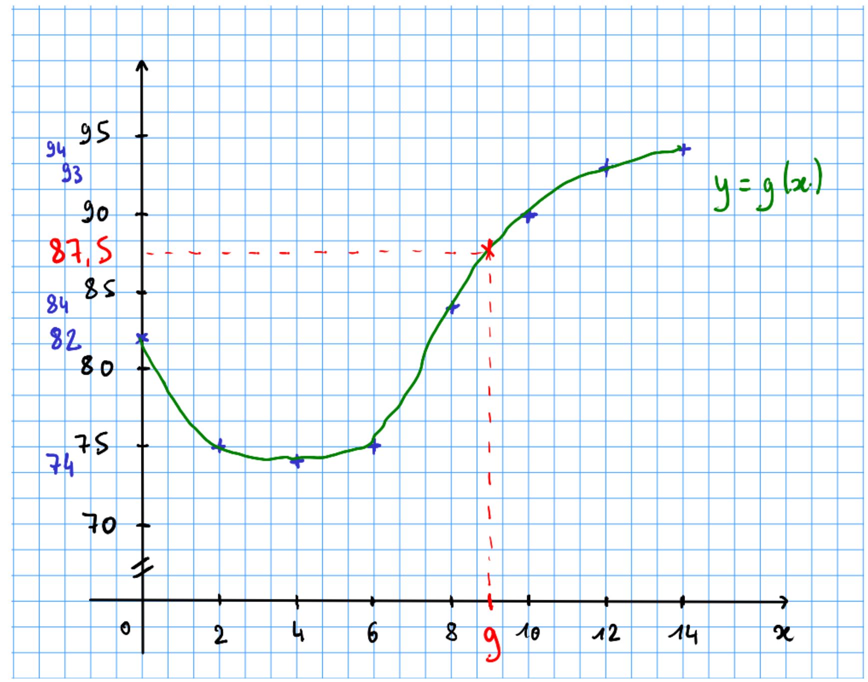
a)

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $9$ | $4$ | $1$ | $0$ | $1$ | $9$ |



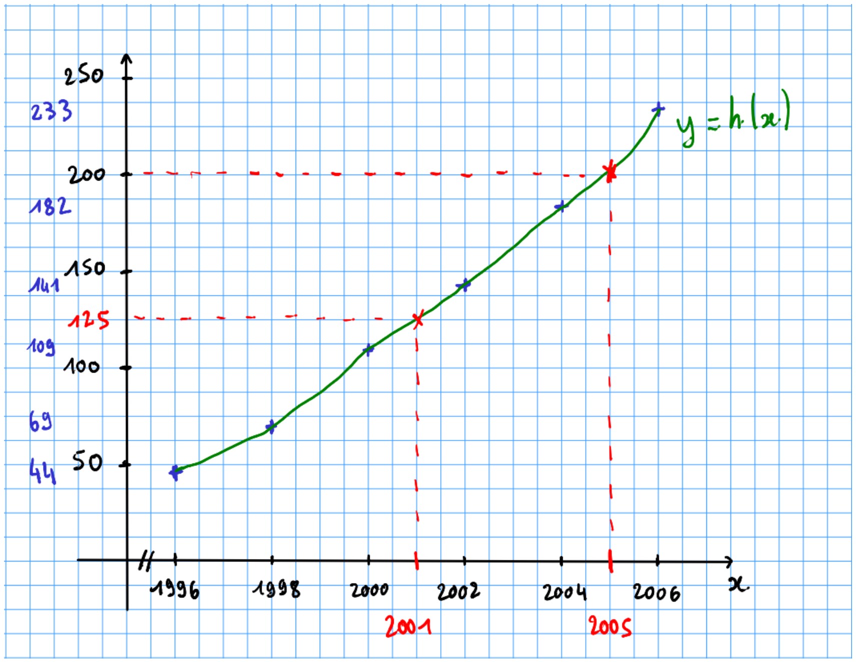

b)

| $x$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ | $8$ | $10$ | $12$ | $14$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $82$ | $75$ | $74$ | $75$ | $84$ | $90$ | $93$ | $94$ |



c)

| $x$ | 1996 | 1998 | 2000 | 2002 | 2004 | 2006 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 44 | 69 | 109 | 141 | 182 | 233 |




Estimer les valeurs de $f(2)$, $g(9)$, $h(2001)$ et $h(2005)$.
On a $f(2) \simeq 4$, $g(9) \simeq 87,5$, $h(2001) \simeq 125$ et $h(2005) \simeq 2005$.

**Exercice 6.** Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $f_1 : x \mapsto -5x + 3$
$D = \mathbb{R}$.

b) $f_2 : x \mapsto 3x^2$
$D = \mathbb{R}$.

c) $f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$
$D = [0; +\infty[$.

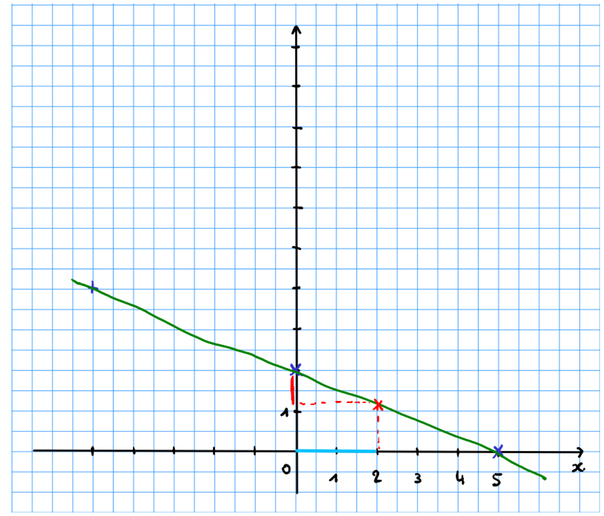
d) $f_4 : x \mapsto \dfrac{x+4}{x^2-9}$
$x^2 - 9 = 0$ si $x = \pm 3$. Donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$.

e) $f_5 : t \mapsto \sqrt{3-t} - \sqrt{2+t}$
$3 - t \geqslant 0$ si $t \leqslant 3$, et $2 + t \geqslant 0$ si $t \geqslant -2$, donc $D = [-2; 3]$.

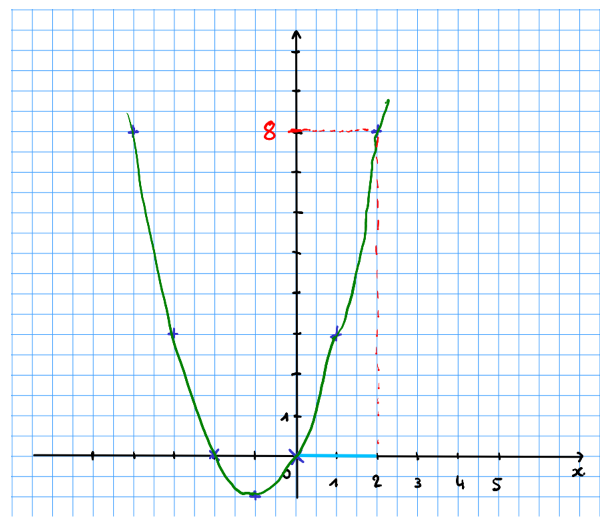
f) $f_6 : t \mapsto \dfrac{t^3-1}{t^2-4t+4}$
$t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$ si $t = 2$, donc $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

**Exercice 7.** Déterminer l'ensemble de définition et tracer l'allure des graphes des fonctions suivantes :

a) $f_1 : x \mapsto 2 - 0,4x$
$D = \mathbb{R}$.

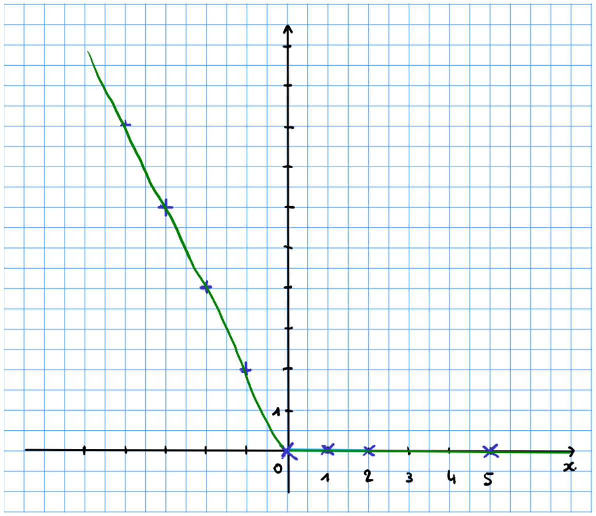



b) $f_2 : t \mapsto 2t + t^2$
$D = \mathbb{R}$.



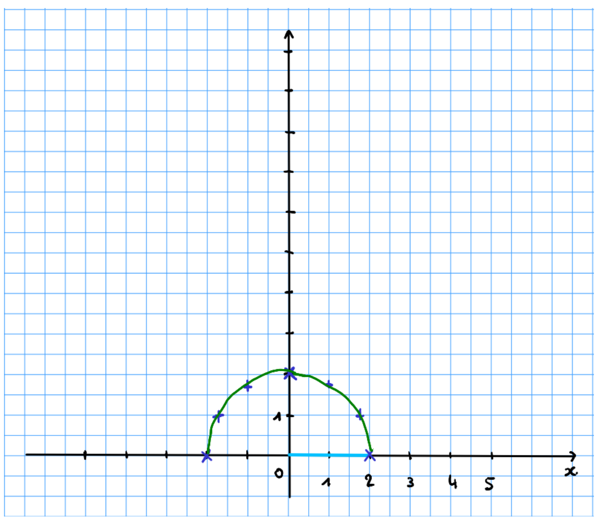
c) $f_3 : x \mapsto |x| - x$

$D = \mathbb{R}$.



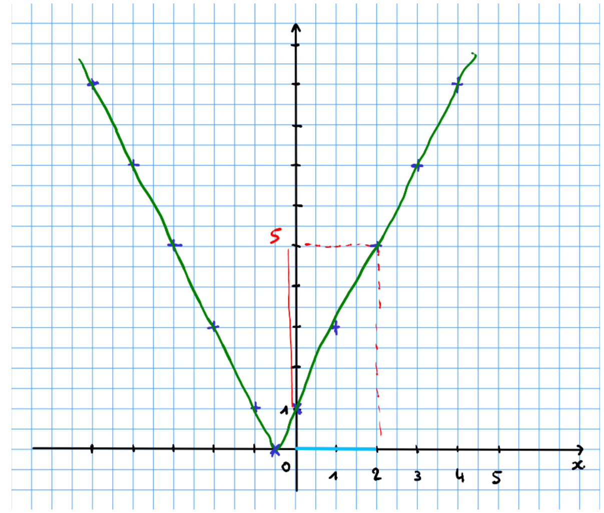

d) $f_4 : x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$

$D = [-2; 2]$.



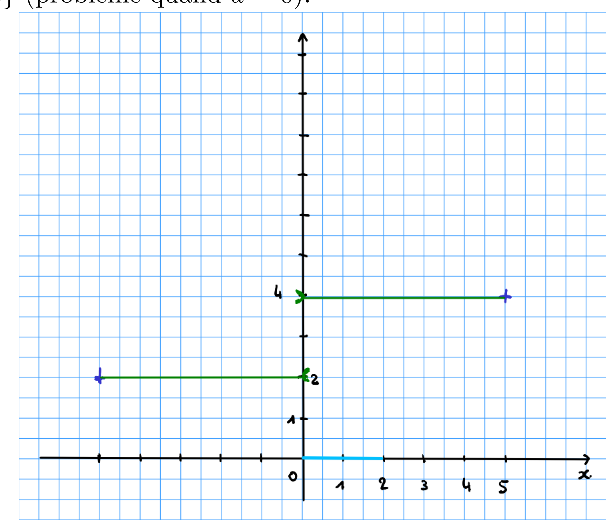

e) $f_5 : p \mapsto |2p + 1|$

$D = \mathbb{R}$.



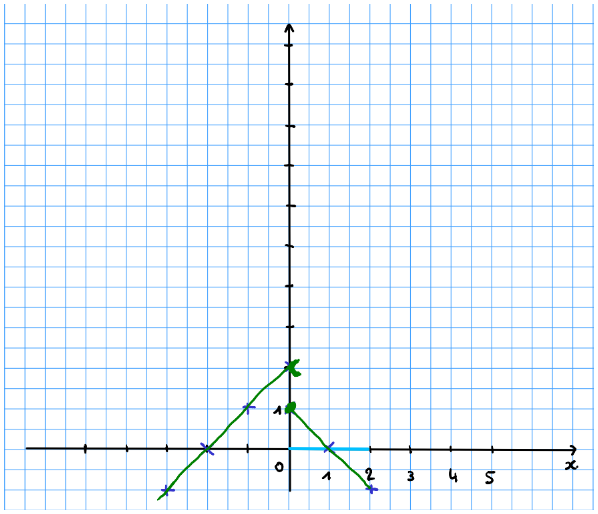

f) $f_6 : a \mapsto \dfrac{3a + |a|}{a}$

Si $a > 0$, alors $f_6(a) = \dfrac{3a + a}{a} = 4$. Si $a < 0$, alors $f_6(a) = \dfrac{3a - a}{a} = 2$. Et $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (problème quand $a = 0$).



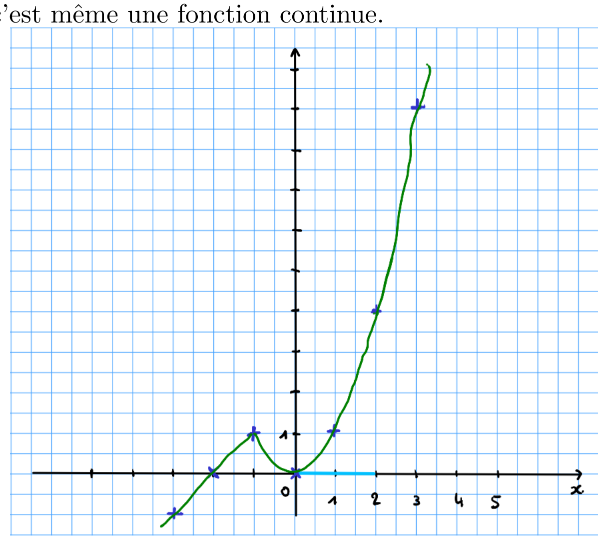
g) $f_7 : x \mapsto \left| \begin{array}{ll} x+2 & \text{si } x<0 \\ 1-x & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right.$

$S = \mathbb{R}$.




h) $f_8 : x \mapsto \left| \begin{array}{ll} x+2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{array} \right.$

$D = \mathbb{R}$ et c'est même une fonction continue.




**Lire des valeurs sur une courbe**

**Exercice 8.** Pour toutes les questions de l'exercice 7, dresser un tableau de signes et de variations. Quels sont les extrema de chacune de ces fonctions sur l'intervalle $[0, 2]$ ?

a) $max = 2$ atteint en 0 et $min = 1$ atteint en 2.

b) $max = 9$ atteint en 2 et $min = 0$ atteint en 0.

c) $max = min = 0$ sur tout l'intervalle.

d) $max = 1$ atteint en 0 et $min = 0$ atteint en 2.

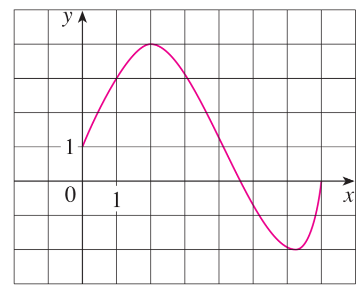
e) $max = 5$ atteint en 2 et $min = 1$ atteint en 0.

f) Fonction pas définie en 0, mais $max = min = 4$ sur tout $]0; 2]$.

g) $max = 1$ atteint en 0 et $min = -1$ atteint en 2.

h) $max = 4$ atteint en 2 et $min = 0$ atteint en 0.

**Exercice 9.** On donne la courbe représentative d'une fonction $f$ :




a) Remplir le tableau de valeurs suivant :

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 3 | 4 | 0 |

b) Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on $f(x) = 3$ ?
Pour $x = 1$ et $x = 3$.

c) Estimer les valeurs de $x$ telles que $f(x) = 0$.
Pour $x = 7$ et $x \simeq 4,6$.

d) Quel est le domaine de définition et l'image de la fonction ?
$D = [0; 7]$, $I = [-2; 4]$.

**Modélisation**

**Exercice 10.** Donner un exemple de fonction qui décrit une situation de la vie réelle. Que peut-on dire de l'ensemble de définition et de l'image de cette fonction ? Si possible, tracer l'allure de la fonction.

**Exercice 11.** Une petite entreprise souhaite louer des locaux pour 3 ans. Le prix moyen de location à Paris est de $30,7$ euros par mois et par $m^2$.

a) Exprimer le prix d'une location de 3 ans en fonction de la surface (en $m^2$).

b) Tracer la courbe représentant le prix de la location de 3 ans en fonction de l'aire en $m^2$ (tracer jusqu'à $200m^2$).

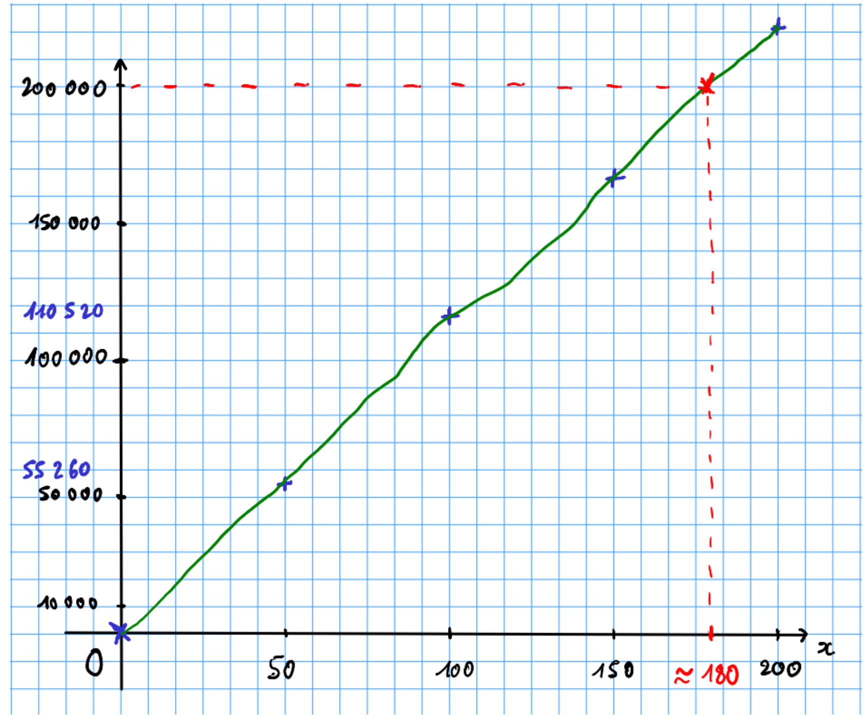
c) L'entreprise dispose de 200000 euros pour la location des locaux sur les 3 ans. Estimer graphiquement puis par le calcul quelle surface maximale elle peut louer avec ce budget.

**Solution :**

a) Le prix pour $1m^2$ est de $30,7$ euros par mois. Pour 3 ans, il est donc de $30,7 \times 12 \times 3 = 1105,2$ euros. On a donc $p(x) = 1105,2x$.

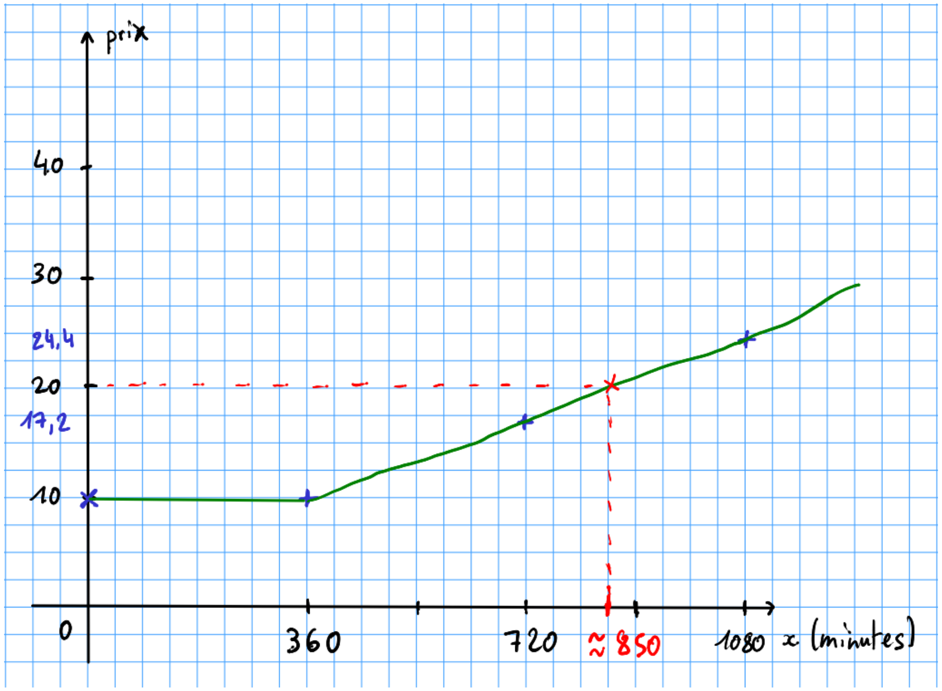
b) On a le tableau de valeurs suivant :

| $x$ | 0 | 50 | 100 | 150 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 0 | 55260 | 110520 | 165780 | 221040 |



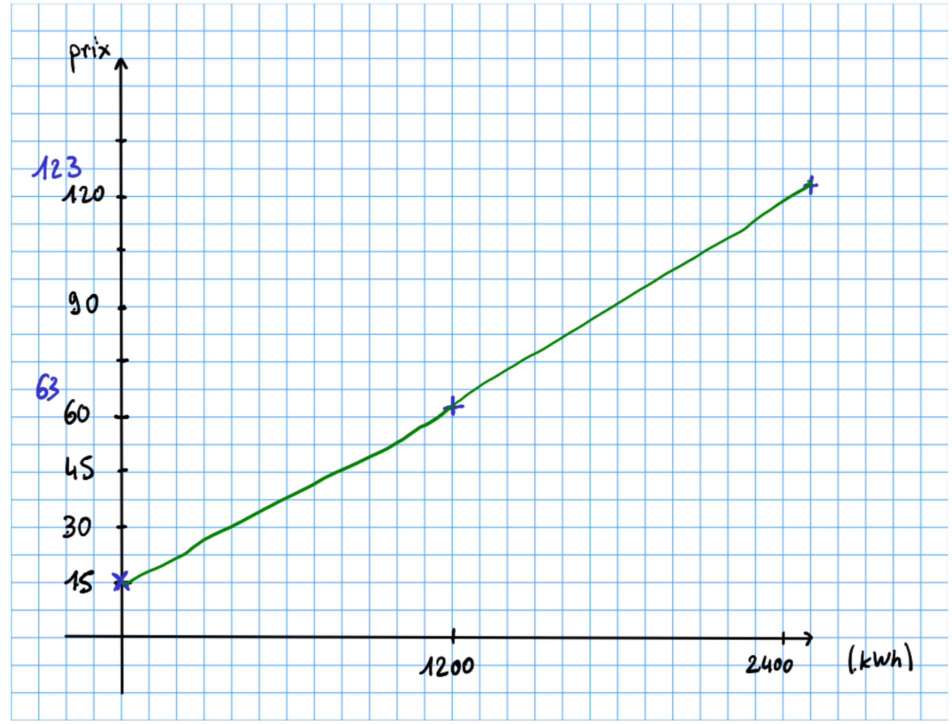

c) On cherche l'antécédent de 200000 par la fonction $p$. Graphiquement, on trouve $x \simeq 180m^2$. Et le calcul donne $x \simeq 180,96m^2$.

**Exercice 12.** Un abonnement téléphonique coûte $9,99$ euros par mois. Cet abonnement comprend $6h$ d'appel (sur tout le mois) et il faut payer 2 centimes de plus pour chaque minute supplémentaire. Tracer l'allure de la courbe représentant le coût mensuel en fonction du temps d'appel (en minutes). Combien de temps peut-on passer au téléphone sans que la facture téléphonique dépasse 20 euros ?
**Solution :** $6h$ représentent $60 \times 6 = 360$ minutes. La fonction est constante entre 0 et 360 puis croît.




D'après le graphique, 20 correspond à environ 850 minutes d'appel, soit environ 14 heures et 10 minutes.

**Exercice 13.** Un fournisseur d'électricité fait payer une base de 15 euros par mois à un client. Le contrat stipule que de plus, chaque kWh coûte 4 centimes pour les 1200 premiers kWh, puis 5 centimes pour chaque kWh au-delà de 1200. Tracer l'allure de la courbe.




**Exercice 14** (*)**.** Un ballon sphérique de rayon $r$ a pour volume $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Écrire une fonction qui représente la quantité d'air requise pour gonfler le ballon de sorte à passer d'un rayon $r$ à un rayon $r+1$.

**Solution :** La fonction cherchée est

$$\begin{aligned}
f(r) &= V(r+1) - V(r)\\
&= \frac{4}{3}\pi(r+1)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3\\
&= \frac{4}{3}\pi(r+1)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3\\
&= \frac{4}{3}\pi((r+1)^3 - r^3)\\
&= \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2 + 3r + 1 - r^3)\\
&= \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3r + 1)
\end{aligned}$$