

## TD 5 - Fonctions de référence

### Fonctions linéaires et affines

**Exercice 1.** Tracer le graphe des fonctions suivantes :

- |                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| a) $f_1(x) = 2$      | b) $f_2(x) = -2x$     |
| c) $f_3(x) = x + 2$  | d) $f_4(x) = -x + 2$  |
| e) $f_5(x) = 2x - 1$ | f) $f_6(x) = -3x + 4$ |

**Exercice 2.** On considère la famille de fonctions  $f(x) = c - x$  pour  $c$  parcourant les nombres réels. Quel point commun partagent toutes les fonctions de cette famille? Tracer les graphes de quelques-unes de ces fonctions.

**Exercice 3 (\*)**. On considère la famille de fonctions  $f(x) = 1 + m(x + 3)$  pour  $m$  parcourant les nombres réels. Quel point commun partagent toutes les fonctions de cette famille? Tracer les graphes de quelques-unes de ces fonctions.

**Exercice 4 (\*)**. Trouver une équation qui définit la famille des fonctions affines de pente 2. Faire de même pour les fonctions affines qui vérifient  $f(2) = 1$ . Quelle fonction appartient aux deux familles en même temps?

### Fonctions polynomiales

**Exercice 5.** Tracer les courbes représentatives de  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = x^4$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont-elles paires, impaires?

**Exercice 6.** Tracer la courbe représentative de  $f(x) = x^3$ . La fonction  $f$  est-elle paire, impaire?

**Exercice 7.** On considère les fonctions  $f(x) = x^2 + c$  pour  $c$  parcourant les nombres réels. Comment varie la courbe représentative de  $f$  quand la valeur de  $c$  varie dans  $\mathbb{R}$ ? Même question pour  $g(x) = (x - c)^2$ .

**Exercice 8 (\*)**. Soient  $P$  et  $Q$  les deux fonctions polynomiales définies par  $P(x) = 2x^3 + 5x - 1$  et  $Q(x) = -x^2 + 3x$ . Calculer  $(P + Q)(x) = P(x) + Q(x)$ ,  $(PQ)(x) = P(x) \times Q(x)$ ,  $P(x^2)$  et  $Q(P(x))$ .

### Fonctions exponentielle et logarithme

**Exercice 9.** Simplifier au mieux les expressions suivantes :

- |                                  |                      |                                  |
|----------------------------------|----------------------|----------------------------------|
| a) $e^1 \times e^2$              | b) $e^3 \times e^8$  | c) $e^4 \times e^4$              |
| d) $(e^3)^5$                     | e) $\frac{e^8}{e^2}$ | f) $\frac{e^7}{e^2 \times e^5}$  |
| g) $\ln(3) + \ln(5)$             | h) $\ln(9) + \ln(2)$ | i) $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ |
| j) $\ln\left(\frac{7}{5}\right)$ | k) $\ln(4) - \ln(2)$ | l) $\ln(2^8)$                    |
| m) $e^{\ln(3)}$                  | n) $e^{\ln(10)}$     | o) $e^{\ln(x^2)}$                |
| p) $\ln(e^8)$                    | q) $\ln(e^{-5})$     | r) $\ln(e^{-4x})$                |

**Exercice 10.** Écrire les nombres suivants en fonction de  $\ln(2)$  et  $\ln(3)$  :

- |                                    |                                   |                     |
|------------------------------------|-----------------------------------|---------------------|
| a) $\ln(4)$                        | b) $\ln(9)$                       | c) $\ln(12)$        |
| d) $\ln\left(\frac{1}{6}\right)$   | e) $\ln\left(\frac{1}{24}\right)$ | f) $\ln(108)$       |
| g) $\ln\left(\frac{54}{32}\right)$ | h) $\ln(\sqrt{2})$                | i) $\ln(\sqrt{12})$ |

**Exercice 11.** Comparer les nombres  $2^{33}$ ,  $3^{22}$  et  $e^{22}$  ( $e = e^1 \simeq 2,72$ ).

**Exercice 12 (\*)**. Simplifier au mieux les expressions suivantes :

- |                             |                                     |
|-----------------------------|-------------------------------------|
| a) $e^{3\ln(2)}$            | b) $e^{2\ln(x)}$                    |
| c) $e^{4\ln(2x) - \ln(16)}$ | d) $e^{3\ln(2x)} - e^{2\ln(3x)}$    |
| e) $\ln(\ln(e^{e^x}))$      | f) $x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$ |

**Exercice 13 (\*)**. Donner l'ensemble de définition des équations suivantes et les résoudre :

- |                        |                          |
|------------------------|--------------------------|
| a) $\ln(x) = 3$        | b) $\ln(x+5) = \ln(2-x)$ |
| c) $\ln(x^2) = \ln(x)$ | d) $2^{2^x} = 9$         |

---

**Résolution graphique d'équations**

---

**Exercice 14.** Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

- |                     |                    |
|---------------------|--------------------|
| a) $x - 2 = -x$     | b) $2x + 1 = -x$   |
| c) $3x - 4 \geq -x$ | d) $3x - 4 \geq x$ |

**Exercice 15.** Tracer la courbe représentative de  $f(x) = x^2 - 3x$  pour  $x \in [-2; 5]$ .

- Tracer la droite perpendiculaire à l'axe des ordonnées passant par les points de coordonnées  $(0, -3)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$  et  $(0, 3)$ .
- Déterminer graphiquement des solutions approchées des équations  $x^2 - 3x = -3$ ,  $x^2 - 3x = -1$ ,  $x^2 - 3x = 1$  et  $x^2 - 3x = 3$ .
- Résoudre ces équations par le calcul.

**Exercice 16.** Résoudre graphiquement les équations suivantes :

- |                     |                      |
|---------------------|----------------------|
| a) $-2x^2 + 4x = 1$ | b) $-2x^2 + 4x = -1$ |
| c) $-2x^2 + 4x = 2$ | d) $-2x^2 + 4x = 3$  |

**Exercice 17.** Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

- |                       |                               |
|-----------------------|-------------------------------|
| a) $3x^2 - x - 1 = 1$ | b) $3x^2 - x - 1 = 3$         |
| c) $3x^2 - x - 1 = x$ | d) $3x^2 - x - 1 \geq -x + 2$ |

---

**Modélisation**

---

**Exercice 18.** Pour un certain médicament, la dose recommandée pour un adulte est  $D = 200$  (mg). Pour trouver la dose appropriée pour un enfant de moins d'un an, les pharmaciens utilisent l'équation  $d(p) = 0,0417(p+1)D$  où  $p$  est le poids de l'enfant (en kg).

- Quelle est la pente du graphe de  $d$ ? Que représente-t-elle?
- Quel dosage est recommandé pour un enfant de 10 kg?

**Exercice 19.** On place 15000 euros dans un nouveau compte d'épargne avec un taux de 5% par an. On souhaite acheter une voiture qui coûte 20000 euros. Combien d'années devra-t-on attendre pour avoir cette somme sur le compte?

**Exercice 20.** On introduit 100 lapins dans une zone protégée. Le nombre de lapins double tous les ans.

- Exprimer le nombre de lapins  $f(n)$  après  $n$  années.
- Donner la réciproque de cette fonction? Comment l'interpréter?
- Après combien d'années aura-t-on 50000 lapins?

**Exercice 21.** Un biologiste met 500 bactéries dans une boîte. Le nombre de bactéries double toutes les demi-heures. Combien y a-t-il de bactéries après 30 minutes? 2 heures? 4 heures?

**Exercice 22.** La formule  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ , où  $F \geq -459,67$ , exprime une température  $C$  en degré Celcius en fonction de la température en Fahrenheit  $F$ . Donner la formule permettant de convertir des degrés Celcius en degré Fahrenheit et préciser son domaine de définition.