# Outils mathématiques de gestion

## Fonctions (généralités)

# Fonctions (généralités)

1. Définitions
2. Courbe représentative
3. Tableau de signes
4. Tableau de variations
5. Extrema

# Qu'est-ce qu'une fonction ?

Les fonctions apparaîssent dès qu'une quantité dépend d'une autre.

# Qu'est-ce qu'une fonction ?

Les fonctions apparaîssent dès qu'une quantité dépend d'une autre.

Quelques exemples de situations :

# Qu'est-ce qu'une fonction ?

Les fonctions apparaîssent dès qu'une quantité dépend d'une autre.

Quelques exemples de situations :

- Le coût $C$ d'une enveloppe à *La Poste* dépend de son poids $p$. On dira que le coût $C$ est une fonction de $p$.

# Qu'est-ce qu'une fonction ?

Les fonctions apparaîssent dès qu'une quantité dépend d'une autre.

Quelques exemples de situations :

- Le coût $C$ d'une enveloppe à *La Poste* dépend de son poids $p$. On dira que le coût $C$ est une fonction de $p$.

- La température ambiante dans l'amphi, $T$, évolue dans le temps. La température $T$ est donc une fonction du temps $t$.

# Qu'est-ce qu'une fonction ?

Les fonctions apparaîssent dès qu'une quantité dépend d'une autre.

Quelques exemples de situations :

- Le coût $C$ d'une enveloppe à *La Poste* dépend de son poids $p$. On dira que le coût $C$ est une fonction de $p$.
- La température ambiante dans l'amphi, $T$, évolue dans le temps. La température $T$ est donc une fonction du temps $t$.
- Le périmètre $P$ d'un cercle dépend du rayon $r$ de ce cercle. On a $P(r) = 2\pi r$.

# Qu'est-ce qu'une fonction ?

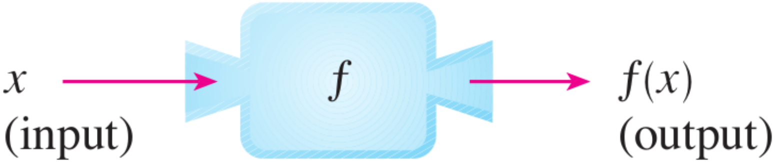
Les fonctions apparaîssent dès qu'une quantité dépend d'une autre.

Quelques exemples de situations :

- Le coût $C$ d'une enveloppe à *La Poste* dépend de son poids $p$. On dira que le coût $C$ est une fonction de $p$.
- La température ambiante dans l'amphi, $T$, évolue dans le temps. La température $T$ est donc une fonction du temps $t$.
- Le périmètre $P$ d'un cercle dépend du rayon $r$ de ce cercle. On a $P(r) = 2\pi r$.
- Le nombre de places $p$ à acheter dans un cinéma dépend du nombre $n$ de personnes qui vont voir le film. Ici, $p(n) = n$.

# Qu'est-ce qu'une fonction ?

Une **fonction** est une « machine » qui prend un nombre réel et le transforme en un autre nombre.



# Qu'est-ce qu'une fonction ?

On écrit en général les fonctions sous la forme $f : x \mapsto f(x)$.

Exemples :

- $f : x \mapsto 3$ est une fonction qui prend n'importe quel nombre $x$ et renvoie 3. C'est une **fonction constante**.
- $f : x \mapsto x$ est une fonction qui prend un nombre $x$ et renvoie ce même nombre. C'est la **fonction identité**.
- $f : x \mapsto x + 1$ est une fonction qui prend un nombre $x$ et lui ajoute 1.
- $f : x \mapsto 3x$ est une fonction qui prend un nombre $x$ et le multiplie par 3.
- $f : x \mapsto \dfrac{5x + \sqrt{27x^5 - 2x^2 + 50}}{25(1 - 3x) - 32^x}$ est encore une fonction.

# Qu'est-ce qu'une fonction ?

## Ensemble de définition et image

- L'ensemble des valeurs que peut prendre la **variable** $x$ est appelé **ensemble de définition** ou **domaine de définition** (ou juste **domaine**) de la fonction $f$.
- Pour $x$ dans le domaine de $f$, $f(x)$ est l'**image de** $x$ par la fonction $f$.
- L'ensemble des valeurs prises par la fonction $f$ est appelé **image** de $f$.

# Qu'est-ce qu'une fonction ?

## Ensemble de définition et image

- L'ensemble des valeurs que peut prendre la **variable** $x$ est appelé **ensemble de définition** ou **domaine de définition** (ou juste **domaine**) de la fonction $f$.
- Pour $x$ dans le domaine de $f$, $f(x)$ est l'**image de** $x$ par la fonction $f$.
- L'ensemble des valeurs prises par la fonction $f$ est appelé **image** de $f$.

Exemple : On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x+1 \end{array}$$

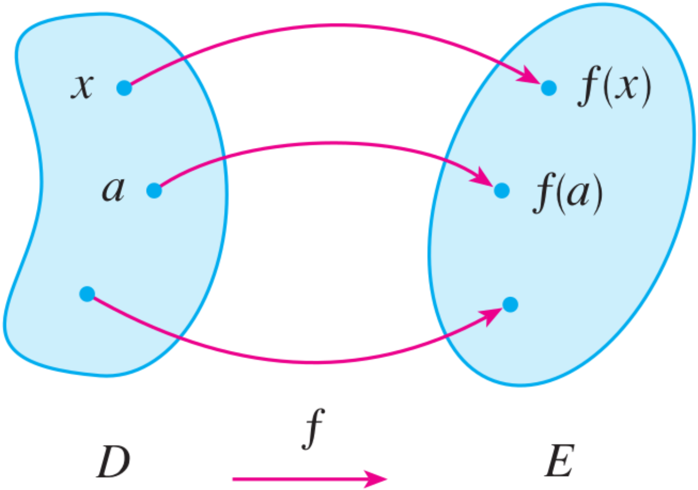
$f(0) = 3 \times 0 + 1 = 1$

$f(1) = 3 \times 1 + 1 = 4$

$f(2) = 3 \times 2 + 1 = 7$

$f(3) = 3 \times 3 + 1 = 10$

# Qu'est-ce qu'une fonction ?



# Qu'est-ce qu'une fonction ?

## Antécédent

Pour $x$ et $y$ deux nombres réels tels que $f(x) = y$, on dit que $x$ est un **antécédent** de $y$ par la fonction $f$.

### Antécédent

Pour $x$ et $y$ deux nombres réels tels que $f(x) = y$, on dit que $x$ est un **antécédent** de $y$ par la fonction $f$.

Exemple : Pour $f : x \mapsto 3x + 1$ comme dans l'exemple précédent, on avait $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, $f(2) = 7$ et $f(3) = 10$, donc

- 0 est un antécédent de 1 par $f$ ;
- 1 est un antécédent de 4 par $f$ ;
- 2 est un antécédent de 7 par $f$ ;
- 3 est un antécédent de 10 par $f$.

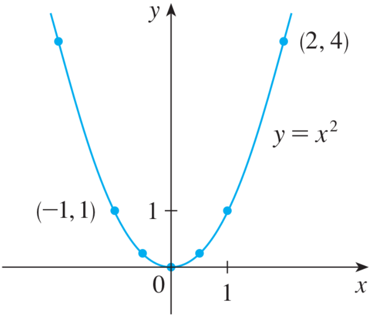
# Qu'est-ce qu'une fonction ?

## Image et antécédents

Pour deux nombres réels $x$ et $y$,

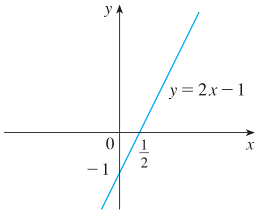
- $x$ a une **unique** image par la fonction $f$ ;
- $y$ admet **aucun**, **un** ou **plusieurs** antécédents par la fonction $f$.

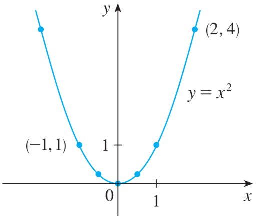
Exemple : Si $f : x \mapsto x^2$, quels sont les antécédents de 0, 1, 4, $-1$ ?

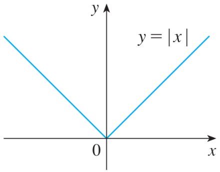


# Courbe représentative

On peut représenter une fonction par son **graphe** ou sa **courbe représentative**.



# Courbe représentative

Comment tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto (x-2)^2 - 1 \text{ ?}$$

# Courbe représentative

Comment tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto (x-2)^2 - 1 \ ?$$

- Remplir un tableau de valeurs.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

# Courbe représentative

Comment tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto (x-2)^2 - 1 \ ?$$

- Remplir un tableau de valeurs.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

- Placer les points de coordonnées $(x, f(x))$ dans un repère orthonormé.

# Courbe représentative

Comment tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction

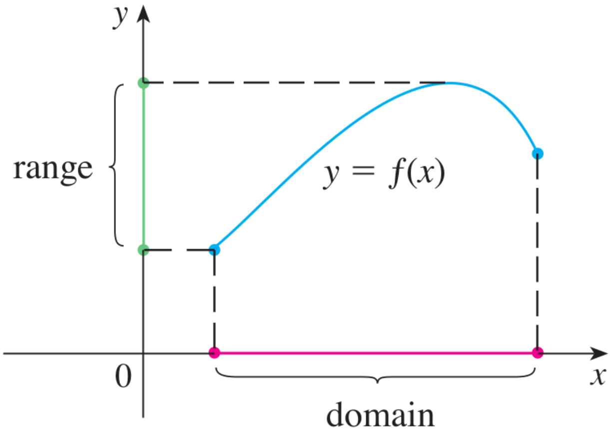
$$f : x \mapsto (x-2)^2 - 1 \text{ ?}$$

- Remplir un tableau de valeurs.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

- Placer les points de coordonnées $(x, f(x))$ dans un repère orthonormé.
- Tracer l'allure de la courbe.

# Courbe représentative



# Courbe représentative

Cela permet de représenter graphiquement la fonction, même si le dessin que l'on obtient n'est pas exact ni très précis.

# Courbe représentative

Cela permet de représenter graphiquement la fonction, même si le dessin que l'on obtient n'est pas exact ni très précis.
Avec l'allure de la courbe, on peut au moins déterminer (approximativement) le **signe** des valeurs $f(x)$ ainsi que les **variations** de la fonction f.

# Tableau de signes

Une fois que l'on a l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}$, on peut dresser un tableau de signes pour la fonction.

# Tableau de signes

Une fois que l'on a l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}$, on peut dresser un tableau de signes pour la fonction.

C'est un tableau de la forme

| $x$ | $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ |
|---|---|
| $f(x)$ | |

# Tableau de signes

Une fois que l'on a l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}$, on peut dresser un tableau de signes pour la fonction.

C'est un tableau de la forme

| $x$ | $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$ |
|---|---|
| $f(x)$ | |

Pour cela, on détermine d'abord les endroits où la courbe $\mathcal{C}$ passe par l'axe des abscisses. Ce sont les **zéros** de la fonction, les points $x$ tels que $f(x) = 0$.

# Tableau de signes

Une fois que l'on a l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}$, on peut dresser un tableau de signes pour la fonction.

C'est un tableau de la forme

| $x$ | $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$ |
|---|---|
| $f(x)$ | |

Pour cela, on détermine d'abord les endroits où la courbe $\mathcal{C}$ passe par l'axe des abscisses. Ce sont les **zéros** de la fonction, les points $x$ tels que $f(x) = 0$.

Entre ces points, si la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, on met un signe $+$ dans le tableau et si elle est en-dessous, on met un signe $-$.

# Tableau de variations

Un tableau de variations est un tableau de la forme

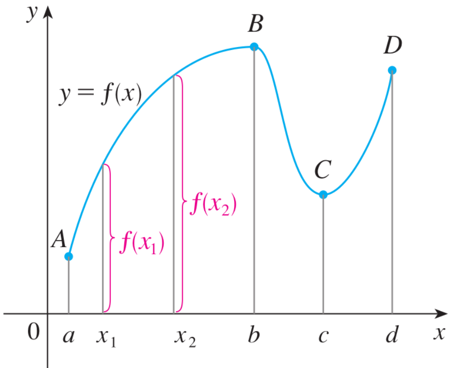
| $x$ | $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ |
| --- | --- |
| $f$ | |

# Tableau de variations

Un tableau de variations est un tableau de la forme

| $x$ | $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ |
|---|---|
| $f$ | |

Pour le remplir, on indique par des flèches montantes, descendantes ou horizontales si la fonction est **strictement croissante**, **strictement décroissante** ou **constante**.



# Extrema

## Extrema

Pour une fonction $f$ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$,

- le **maximum** de $f$ est, **quand il existe**, la plus grande valeur parmi les images de la fonction sur cet intervalle,
- le **minimum** de $f$ est, **quand il existe**, la plus petite valeur parmi les images de la fonction sur cet intervalle,
- les **extrema** (ou **extremums**) de $f$ sont, **quand ils existent**, les maximums ou minimums de $f$.