TD 2 - Équations et inéquations (solutions)

Résolutions d'équations

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x = -1$, $S = \{-1\}$,
b) $x = \dfrac{1}{2}$, $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$,
c) $x = 1$, $S = \{1\}$,
d) $x = \dfrac{1}{3}$, $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$,
e) $x = -2$, $S = \{-2\}$,
f) $x = 1$, $S = \{1\}$,
g) $x = -2$, $S = \{-2\}$,
h) pas de solution, $S = \emptyset$,
i) $x = 0$, $S = \{0\}$,
j) infinité de solution, $S = \mathbb{R}$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x(x-1) = 0$, $S = \{0\} \cup \{1\}$,
b) $x^2 = 0$, $S = \{0\}$,
c) $x^2 - 1 = 0$, $S = \{-1\} \cup \{1\}$,
d) $x^2 = 4$, $S = \{-2\} \cup \{2\}$,
e) $(x-3)(x+2) = 0$, $S = \{-2\} \cup \{3\}$,
f) $2(x-1)(x-2) = 0$, $S = \{1\} \cup \{2\}$,
g) $x(2x-2) = 0$, $S = \{0\} \cup \{1\}$,
h) $(-3x+2)(4x+5) = 0$, $S = \left\{-\dfrac{5}{4}\right\} \cup \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

Résolutions d'inéquations

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inégalités suivantes :

a) $x + 1 \geq 4$, $S = [3, +\infty[$,
b) $2x \leq 8$, $S =]-\infty, 4]$,
c) $-x \leq -1$, $S = [1, +\infty[$,
d) $-2x > 6$, $S =]-\infty, -3[$,
e) $-x + 8 \geq 0$, $S =]-\infty, 8]$,
f) $5x + 3 < 13$, $S =]-\infty, 2[$,
g) $7x + 9 \leqslant 8x - 1$, $S = [10, +\infty[$,
h) $4x^2 + 1 \leqslant 0$, $S = \emptyset$.

Exercice 4 (*). Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inégalités suivantes :

a) $\frac{1}{x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow x - 1 \geqslant 0$ et $x \neq 1$, $S =]1, +\infty[$,

b) $\frac{1+x}{1-x} \geqslant 1$: On multiplie l'inégalité par $1 - x$.
Si $1 - x > 0$ (soit $x < 1$), l'inégalité n'est pas inversée et il faut résoudre $1 + x \geqslant 1 - x$, ce qui donne $x \geqslant 0$. Donc $S_1 = [0, 1[$ $(0 \leqslant x < 1)$.
Et si $1 - x < 0$ (soit $x > 1$), l'inégalité est inversée et il faut résoudre $1 + x \leqslant 1 - x$. Donc $S_2 = \emptyset$ $(x > 1$ et $x \leqslant 0)$.
Donc $S = [0, 1[(= S_1 \cup S_2)$,

c) $x(x-1) > 0$: Pour qu'un produit soit positif, il faut que les deux termes soient de même signe, donc ($x > 0$ et $x - 1 > 0$) ou bien ($x < 0$ et $x - 1 < 0$).
Dans le premier cas, on obtient $x > 0$ et $x > 1$, donc $x > 1$.
Dans le deuxième cas, $x < 0$ et $x < 1$, donc $x < 0$.
Finalement, $S =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

d) $(-x-2)(2x+1) < 0$: Les termes $-x-2$ et $2x+1$ doivent être cette fois-ci de signes opposés. Donc ($-x - 2 > 0$ et $2x + 1 < 0$) ou ($-x - 2 < 0$ et $2x + 1 > 0$).
Dans le premier cas, on a $x < -2$ et $x < -\frac{1}{2}$, d'où $x < -2$.
Dans le deuxième cas, on obtient $x > -2$ et $x > -\frac{1}{2}$, donc $x > -\frac{1}{2}$.
Finalement, $S =]-\infty, -2[\cup] - \frac{1}{2}, +\infty[$.

Résolutions de systèmes linéaires

Exercice 5. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$
$S=(1,1)$,

b) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$
$S=\emptyset$,

c) $\begin{cases} -x-2y=3 \\ 7x+14y=-21 \end{cases}$
$S=\left\{\left(x,-\frac{1}{2}(x+3)\right) \mid x\in\mathbb{R}\right\}$,

d) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+5y=2 \end{cases}$
$S=(-21,13)$,

e) $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ -2x+6y+z=-2 \\ x-2y+2z=-1 \end{cases}$
$S=(-5,-2,0)$,

f) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$
$S=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)$.

Modélisation

Exercice 6. Dans une boulangerie, Alice a acheté deux croissants et un pain au chocolat. Elle a payé 3,40 euros. Dans la même boulangerie, Bob a acheté un croissant et trois pains au chocolat. Il a payé 4,70 euros.
Quel est le prix d'un croissant et d'un pain au chocolat dans cette boulangerie ?
Solution : On note x et y les prix d'un croissant et d'un pain au chocolat. Le système d'équations correspondant aux données de l'énoncé est

$$\begin{cases} 2x+y=3,4 \\ x+3y=4,7 \end{cases}.$$

On obtient $x=1,1$ et $y=1,2$.

Exercice 7. Encore dans une boulangerie, on sait que 5 pains aux graînes avec 8 baguettes et 2 pains au maïs coûtent 18,80 euros, 2 pains aux graînes avec 4 baguettes coûtent 7,20 euros et 3 pains aux graînes avec 1 baguette et 4 pain au maïs coûtent 11,40 euros. Quel(s) type(s) de pain peut-on acheter avec 1,50 euros ? **Solution :** On note x, y et z les prix d'un pain aux graînes, d'une baguette et d'un pain au maïs. Le système d'équations correspondant aux données de l'énoncé est

$$\begin{cases} 5x+8y+2z=18{,}8 \\ 2x+4y=7{,}2 \\ 3x+y+4z=11{,}4 \end{cases}.$$

On obtient $x=1{,}6$, $y=1$ et $z=1{,}4$. On peut donc acheter une baguette ou un pain au maïs avec 1,50 euros.

Exercice 8 (*)**.** Une entrprise fabrique trois produits A, B et C, en utilisant trois matières premières P, Q et R. La fabrication d'une unité de A requiert 6 unités de P et 3 de Q. Celle d'une unité de B requiert 3 unités de P, 4 de Q et 6 de R. Enfin, la fabrication d'une unité de C requiert 4 unités de P, 3 de Q, et 5 de R. L'entrprise dispose de 98 unités de P, 148 de Q et 118 de R. Existe-t-il un programme de fabrication qui utilise entièrement le stock de matières premières ?
Solution : On note
- x le nombre d'unités du produit A fabriqué ;
- y le nombre d'unités du produit B fabriqué ;
- z le nombre d'unités du produit C fabriqué.

D'après l'énoncé,
- la quantité de P pour fabriquer x unités de A, y unités de B et z unités de C est
$$6x+3y+4z\ ;$$
- la quantité de Q pour fabriquer x unités de A, y unités de B et z unités de C est
$$3x+4y+3z\ ;$$
- la quantité de R pour fabriquer x unités de A, y unités de B et z unités de C est
$$0x+6y+5z.$$

Trouver un programme de fabrication qui utilise entièrement le stock de matières premières revient à résoudre le système

$$\begin{cases} 6x+3y+4z=98 \\ 3x+4y+3z=148 \\ 6y+5z=118 \end{cases}.$$

En résolvant, on obtient $x=18$, $y=58$ et $z=-46$. Le système d'équations admet bien une solution, cependant l'une des valeurs obtenue est négative, or les quantités de produits fabriqués sont nécessairement positives. On conclut qu'il n'existe pas de programme de fabrication utilisant toutes les ressources.