TD 5 - Fonctions de référence (solutions)

Fonctions linéaires et affines

Exercice 1. Le graphe de $f(x) = ax + b$ est une droite de pente a et d'ordonnée à l'origine b.

Exercice 2. On considère la famille de fonctions $f(x) = c - x$ pour c parcourant les nombres réels. Quel point commun partagent toutes les fonctions de cette famille ? Tracer les graphes de quelques-unes de ces fonctions.
Solution : Ces droites ont la même pente (-1), elles sont donc toutes parallèles.

Exercice 3 (*)**.** On considère la famille de fonctions $f(x) = 1+m(x+3)$ pour m parcourant les nombres réels. Quel point commun partagent toutes les fonctions de cette famille ? Tracer les graphes de quelques-unes de ces fonctions.
Solution : Ces droites passent toutes par le point de coordonnées $(-3; 1)$. Elles vérifient toutes $f(-3) = 1$.

Exercice 4 (*)**.** Trouver une équation qui définit la famille des fonctions affines de pente 2. Faire de même pour les fonctions affines qui vérifient $f(2) = 1$. Quelle fonction appartient aux deux familles en même temps ?
Solution : Les fonctions affines de pente 2 sont de la forme $f(x) = 2x + b$. Les fonctions affines vérifiant $f(2) = 1$ sont de la forme $f(x) = a(x - 2) + 1 = ax - 2a + 1$. La seule fonction appartenant aux deux familles est la fonction $f(x) = ax - 2a + 1$ de pente 2, c'est-à-dire avec $a = 2$. On obtient $f(x) = 2x - 3$.

Fonctions polynomiales

Exercice 5. Tracer les courbes représentatives de $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^4$. Les fonctions f et g sont-elles paires, impaires ?
Solution : Les deux fonctions sont paires.

Exercice 6. Tracer la courbe représentative de $f(x) = x^3$. La fonction f est-elle paire, impaire ?
Solution : La fonction f est impaire.

Exercice 7. On considère les fonctions $f(x) = x^2 + c$ pour c parcourant les nombres réels. Comment varie la courbe représentative de f quand la valeur de c varie dans $\mathbb{R}$? Même question pour $g(x) = (x - c)^2$.
Solution : Lorsque c varie, la courbe représentative de f est translatée verticalement, et celle de g est translatée horizontalement.

Exercice 8 (*)**.** Soient P et Q les deux fonctions polynomiales définies par $P(x) = 2x^3 + 5x - 1$ et $Q(x) = -x^2 + 3x$. Calculer $(P + Q)(x) = P(x) + Q(x)$, $(PQ)(x) = P(x) \times Q(x)$, $P(x^2)$ et $Q(P(x))$.
Solution : On a $(P+Q)(x) = 2x^3 - x^2 + 8x - 1$, $(PQ)(x) = -2x^5 + 6x^4 - 5x^3 + 17x^2 - 3x$, $P(x^2) = 2x^6 + 5x^2 - 1$ et $Q(P(x)) = -4x^6 - 20x^4 + 10x^3 - 25x^2 + 25x - 4$.

Fonctions exponentielle et logarithme

Exercice 9. Simplifier au mieux les expressions suivantes :

a) $e^1 \times e^2 = e^3$

b) $e^3 \times e^8 = e^{11}$

c) $e^4 \times e^4 = e^8$

d) $\left(e^3\right)^5 = e^{15}$

e) $\dfrac{e^8}{e^2} = e^6$

f) $\dfrac{e^7}{e^2 \times e^5} = 1$

g) $\ln(3) + \ln(5) = \ln(15)$

h) $\ln(9) + \ln(2) = \ln(18)$

i) $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\ln(3)$

j) $\ln\left(\dfrac{7}{5}\right) = \ln(7) - \ln(5)$

k) $\ln(4) - \ln(2) = \ln(2)$

l) $\ln(2^8) = 8\ln(2)$

m) $e^{\ln(3)} = 3$

n) $e^{\ln(10)} = 10$

o) $e^{\ln(x^2)} = x^2$

p) $\ln\left(e^8\right) = 8$

q) $\ln\left(e^{-5}\right) = -5$

r) $\ln\left(e^{-4x}\right) = -4x$

Exercice 10. Écrire les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$:

a) $\ln(4) = 2\ln(2)$

b) $\ln(9) = 2\ln(3)$

c) $\ln(12) = 2\ln(2) + \ln(3)$

d) $\ln\left(\dfrac{1}{6}\right) = -\ln(2) - \ln(3)$

e) $\ln\left(\dfrac{1}{24}\right) = -3\ln(2) - \ln(3)$

f) $\ln(108) = 2\ln(2) + 3\ln(3)$

g) $\ln\left(\dfrac{54}{32}\right) = 3\ln(3) - 4\ln(2)$

h) $\ln(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2}\ln(2)$

i) $\ln(\sqrt{12}) = \ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln(3)$

Exercice 11. Comparer les nombres 2^{33}, 3^{22} et e^{22} ($e = e^1 \simeq 2,72$).
Solution : On a $2^{33} = 8^{11}$, $3^{22} = 9^{11}$ et $e^{22} \simeq 7,4^{11}$, donc $e^{22} < 2^{33} < 3^{22}$.

Exercice 12 (*)**.** Simplifier au mieux les expressions suivantes :

a) $e^{3\ln(2)} = 8$

b) $e^{2\ln(x)} = x^2$

c) $e^{4\ln(2x)-\ln(16)} = \dfrac{(2x)^4}{16} = x^4$

d) $e^{3\ln(2x)} - e^{2\ln(3x)} = 8x^3 - 9x^2$

e) $\ln\left(\ln\left(e^{e^x}\right)\right) = x$

f) $x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}} = \ln(x)$

Exercice 13 (*)**.** Donner l'ensemble de définition des équations suivantes et les résoudre :

a) $\ln(x) = 3$, $x = e^3$

b) $\ln(x+5) = \ln(2-x)$, $x \in]-5, 2[$, $x + 5 = 2 - x \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

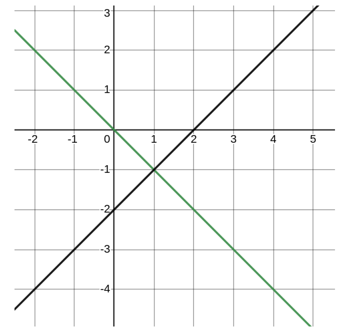
c) $\ln\left(x^2\right) = \ln(x)$, $x > 0$, $x^2 = x \Rightarrow x \in \{0, 1\}$ donc $x = 1$

d) $2^{2^x} = 9$, en posant $y = 2^x$, l'équation devient $2^y = 9$, donc $y = \dfrac{\ln(9)}{\ln(2)}$ et donc $2^x = \dfrac{\ln(9)}{\ln(2)}$, $x = \dfrac{\ln(\ln(9)) - \ln(\ln(2))}{\ln(2)}$

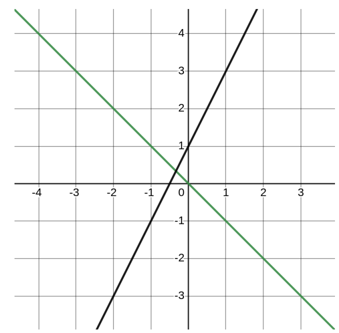
Résolution graphique d'équations

Exercice 14. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

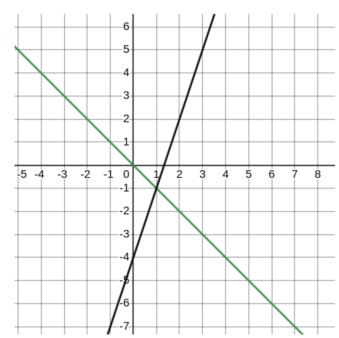
a) $x - 2 = -x$



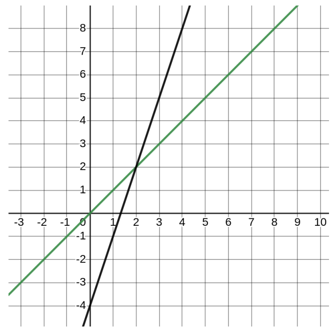
b) $2x + 1 = -x$



c) $3x - 4 \geqslant -x$



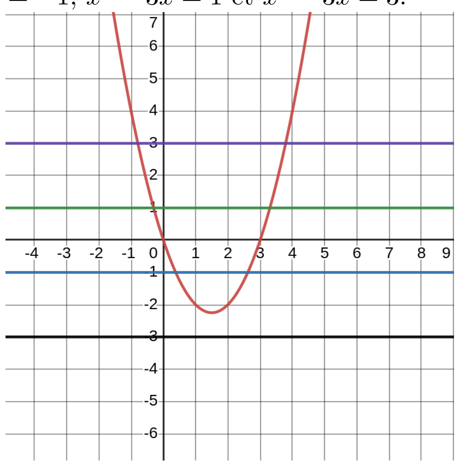
d) $3x - 4 \geqslant x$



Exercice 15. Tracer la courbe représentative de $f(x) = x^2 - 3x$ pour $x \in [-2; 5]$.

a) Tracer la droite perpendiculaire à l'axe des ordonnées passant par les points de coordonnées $(0, -3)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$ et $(0, 3)$.

b) Déterminer graphiquement des solutions approchées des équations $x^2 - 3x = -3$, $x^2 - 3x = -1$, $x^2 - 3x = 1$ et $x^2 - 3x = 3$.



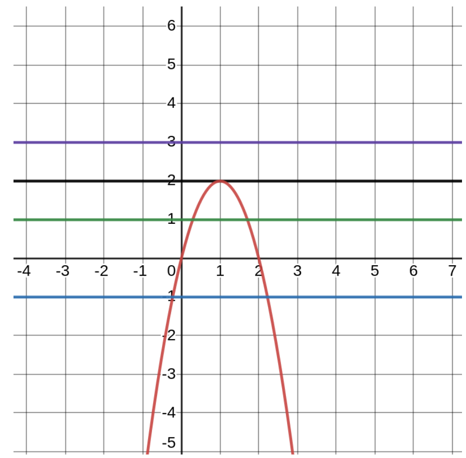
c) Résoudre ces équations par le calcul.
On trouve $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\}$, $S_3 = \{\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\}$ et $S_4 = \{\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\}$.

Exercice 16. Résoudre graphiquement les équations suivantes :

a) $-2x^2 + 4x = 1$ b) $-2x^2 + 4x = -1$

c) $-2x^2 + 4x = 2$ d) $-2x^2 + 4x = 3$

Le graphe de $f(x) = -2x^2 + 4x$ est une parabole. On peut tracer les droite d'équation $y = 1, -1, 2, 3$ comme dans l'exercice précédent et trouver les points d'intersection avec la parabole pour trouver des solutions approchées aux équations.

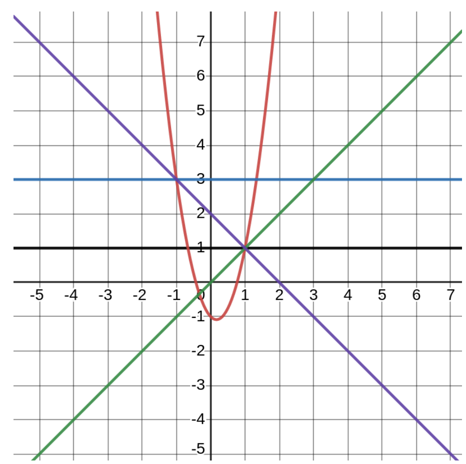


Exercice 17. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

a) $3x^2 - x - 1 = 1$ b) $3x^2 - x - 1 = 3$

c) $3x^2 - x - 1 = x$ d) $3x^2 - x - 1 \geqslant -x + 2$

Le graphe de $f(x) = 3x^2 - x - 1$ est une parabole.



Pour l'inéquation, la parabole est au-dessus de la droite d'équation $y = -x + 2$ pour $x \leqslant -1$ et $x \geqslant 1$ donc $S =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Modélisation

Exercice 18. Pour un certain médicament, la dose recommandée pour un adulte est $D = 200$ (mg). Pour trouver la dose appropriée pour un enfant de moins d'un an, les pharmaciens utilisent l'équation $d(p) = 0,0417(p+1)D$ où p est le poids de l'enfant (en kg).

a) Quelle est la pente du graphe de d ? Que représente-t-elle ?
La pente de la droite est $0,0417 \times D = 8,34$. Pour chaque kg supplémentaire, il faut augmenter la dose de $8,34$ mg.

b) Quel dosage est recommandé pour un enfant de 10 kg ?
$d(10) = 0,0417 \times 11 \times 200 = 91,74$ mg.

Exercice 19. On place 15000 euros dans un nouveau compte d'épargne avec un taux de 5% par an. On souhaite acheter une voiture qui coûte 20000 euros. Combien d'années devra-t-on attendre pour avoir cette somme sur le compte ?
Solution : Le solde sur le compte en fonction de l'année est $f(n) = 15000 \times 1,05^n$. On cherche le plus petit entier n tel que $f(n) = 15000 \times 1,05^n \geqslant 20000$. On veut donc

$$1,05^n \geqslant \frac{20000}{15000} = \frac{4}{3}.$$

En passant au logarithme, $n \geqslant \dfrac{\ln(4/3)}{\ln(1,05)} \simeq 5,896$. La partie entière supérieure est donc 6. Il faut attendre 6 ans.

Exercice 20. On introduit 100 lapins dans une zone protégée. Le nombre de lapins double tous les ans.

a) Exprimer le nombre de lapins $f(n)$ après n années.
On a $f(n) = 100 \times 2^n$.

b) Donner la réciproque de cette fonction ? Comment l'interpréter ?
La fonction réciproque est $g(m) = \dfrac{\ln(m/100)}{\ln(2)}$. Cette fonction calcule le nombre d'années nécessaires pour avoir m lapins.

c) Après combien d'années aura-t-on 50000 lapins ?
On a $g(50000) \simeq 8,97$. Il faut donc 9 ans.

Exercice 21. Un biologiste met 500 bactéries dans une boîte. Le nombre de bactéries double toutes les demi-heures. Combien y a-t-il de bactéries après 30 minutes ? 2 heures ? 4 heures ?
Solution : Le nombre de bactéries en fonction du temps (en demi-heure) est $f(x) = 500 \times 2^x$. On calcule donc $f(1) = 1000$, $f(4) = 8000$, $f(8) = 128000$.

Exercice 22. La formule $C = \dfrac{5}{9}(F - 32)$, où $F \geqslant -459,67$, exprime une température C en degré Celcius en fonction de la température en Fahrenheit F. Donner la formule permettant de convertir des degrés Celcius en degré Fahrenheit et préciser son domaine de définition.
Solution : On trouve la température en Fahrenheit grâcce à la formule $F = \dfrac{9}{5}C + 32$. C'est défini pour $C \geqslant \dfrac{5}{9}(-459,67 - 32) = -273,15$ (c'est le zéro absolu).