Outils mathématiques de gestion

Fonctions de référence

Fonctions de référence

Fonctions linéaires et affines

Fonctions linéaires et affines

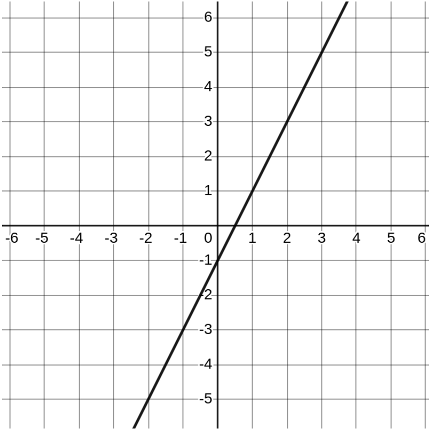
Une fonction **affine** est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto ax + b$$

où a, b sont des nombres réels.

Fonctions linéaires et affines

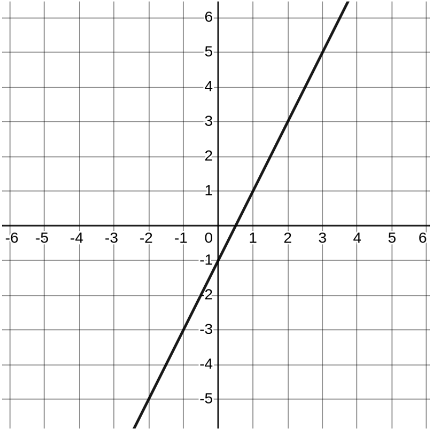
Le graphe de $f : x \mapsto ax + b$ est une **droite**.



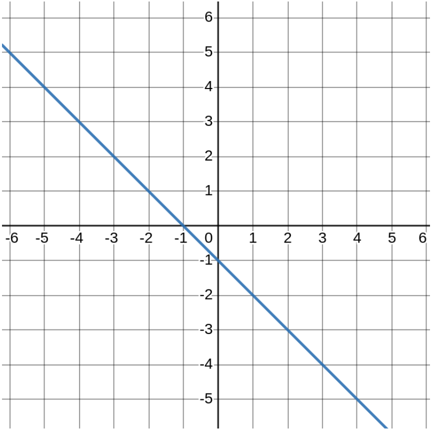
- a est le **coefficient directeur** de la droite ;
- b est l'**ordonnée à l'origine**.

Fonctions linéaires et affines

Si $a > 0$, la fonctions est **croissante**.

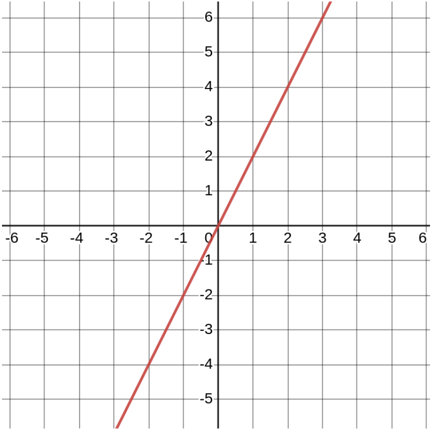


Si $a < 0$, la fonction est **décroissante**.

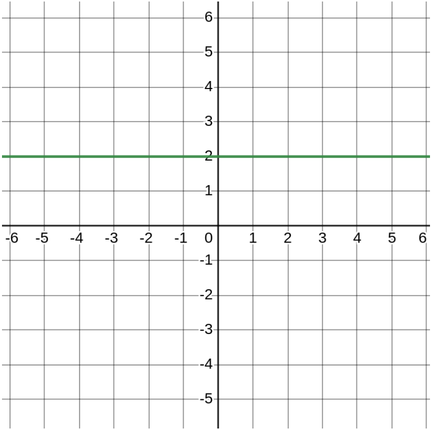


Fonctions linéaires et affines

Si $b = 0$, on dit que la fonction est **linéaire**.



Si $a = 0$, on obtient une fonction **constante**.



Fonctions polynomiales

Fonctions polynomiales

Une fonction **polynomiale** est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où les $a_0, \ldots, a_n$ sont des nombres réels (et $a_n \neq 0$).

Le nombre n est appelé le **degré** de la fonction polynomiale ou du polynôme.

Fonctions polynomiales

Fonctions polynomiales

Une fonction **polynomiale** est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où les $a_0, \ldots, a_n$ sont des nombres réels (et $a_n \neq 0$).

Le nombre n est appelé le **degré** de la fonction polynomiale ou du polynôme.
Exemples : Les fonctions suivantes sont des fonctions polynomiales.

- $f(x) = 6$
- $f(x) = 2x + 1$
- $f(x) = x^2 - 3x + 2$
- $f(x) = x^5 - 6x^3 + x^2 - 5$

Fonctions polynomiales

$$f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Polynômes de degré 0

Les fonctions polynomiales de degré 0 sont les fonctions constantes.

$f(x) = a_0$

Polynômes de degré 1

Les fonctions polynomiales de degré 1 sont les fonctions affines.

$f(x) = a_1 x + a_0$

Fonctions polynomiales

Polynômes de degré 2

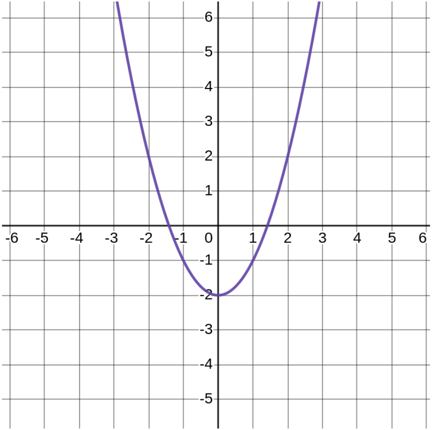
Une fonction polynomiale de degré 2 est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

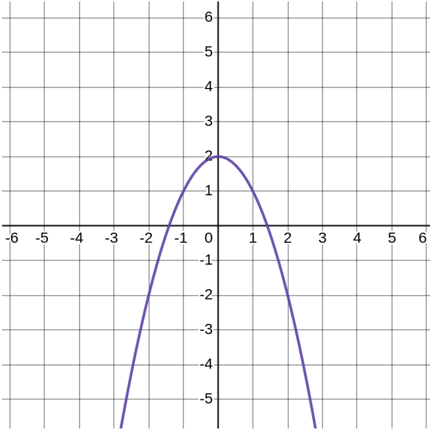
où a, b, c sont des nombres réels (et $a \neq 0$).

Son graphe est une **parabole**.

Si $a > 0$, les branches de la parabole sont tournées **vers le haut**.



Si $a < 0$, les branches de la parabole sont tournées **vers le bas**.



Fonctions polynomiales

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

Discriminant

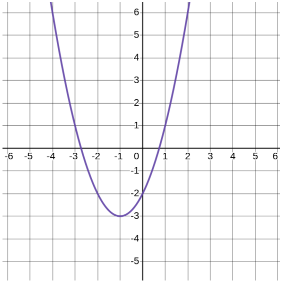
Le **discriminant** du polynôme $ax^2 + bx + c$ est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Racines

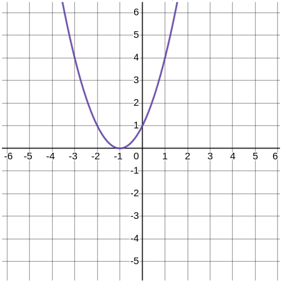
- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme possède deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme possède une unique racine : $x = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme n'a pas de racine.

Fonctions polynomiales

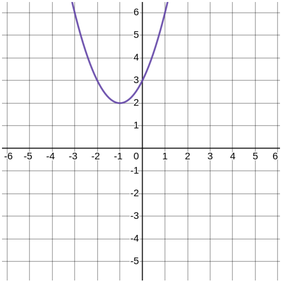
$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$



Fonctions polynomiales

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

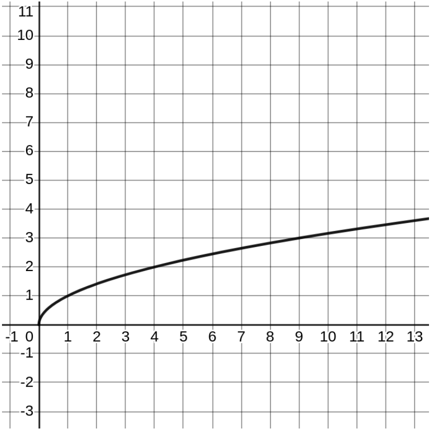
Sommet

Le **sommet** de la parabole a pour abscisse $x = -\dfrac{b}{2a}$ et pour ordonnée $y = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Fontion racine carrée

La fonction **racine carrée** est

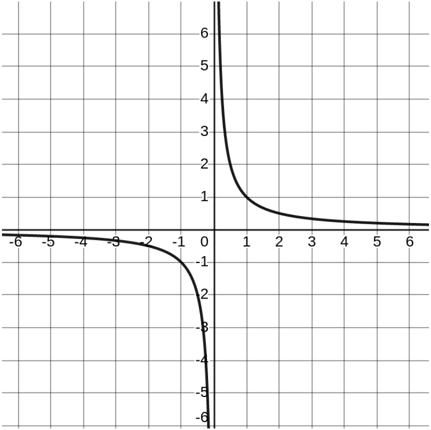
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \end{array}$$



Fonction inverse

La fonction **inverse** est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} = x^{-1} \end{array}$$

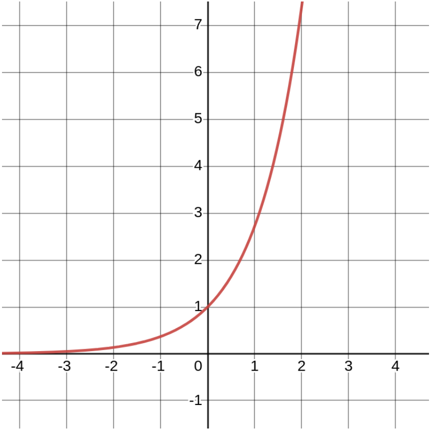


Fontion exponentielle

La fonction **exponentielle** est

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$$

Son graphe est



Fontion exponentielle

Fonction exponentielle

On a les propriétés suivantes :

- $\exp(0) = e^0 = 1$;
- $\exp(1) = e^1 = e \simeq 2,72$.

Et pour tous les réels x et y,

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$;
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$;
- $(e^x)^y = e^{xy}$.

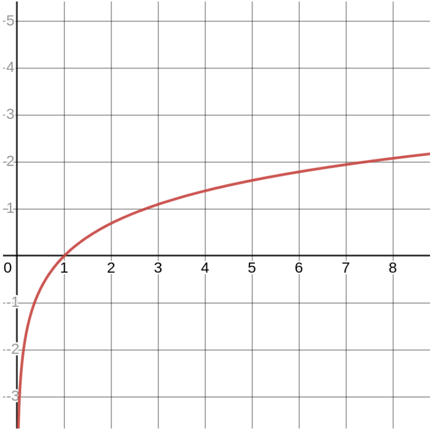
La fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

Fonction logarithme

La fonction **logarithme népérien** est

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

Son graphe est



Fonction logarithme

Fonction logarithme

On a les propriétés suivantes :

- $\ln(1) = 0$;
- $\ln(e) = 1$.

Et pour tous les réels x, y et a,

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$;
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$;
- $\ln(x^a) = a\ln(x)$.

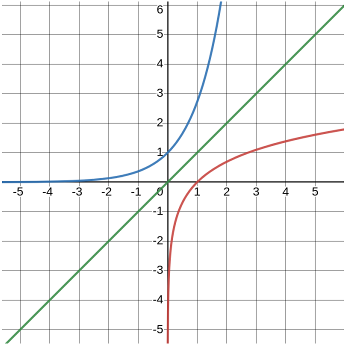
La fonction logarithme transforme les produits en sommes.

Lien entre exponentielle et logarithme

Exponentielle et logarithme

Les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont **inverses** l'une de l'autre.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln(x)} = x$.



Fonctions puissances

Fonctions puissances

Une fonction **puissance** est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}$$

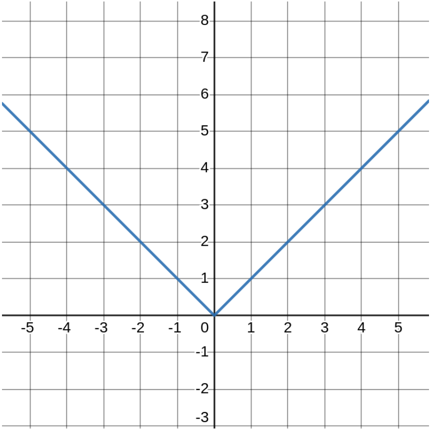
où a est un nombre réel strictement positif.

La fonction exponentielle est une fonction puissance.

Fonction valeur absolue

La fonction **valeur absolue** est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$



Fonction partie entière

La fonction **partie entière** est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$