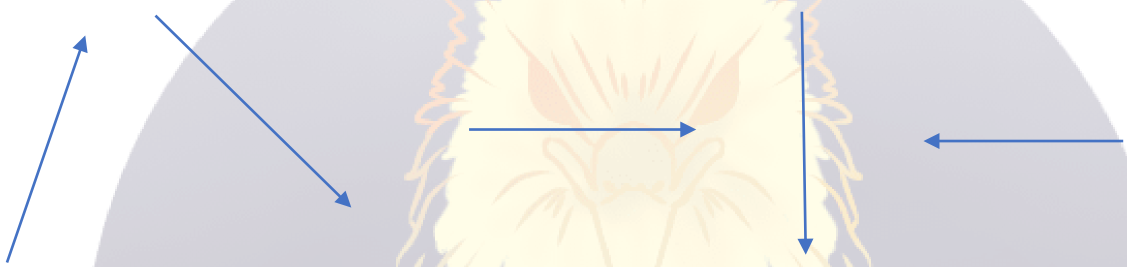
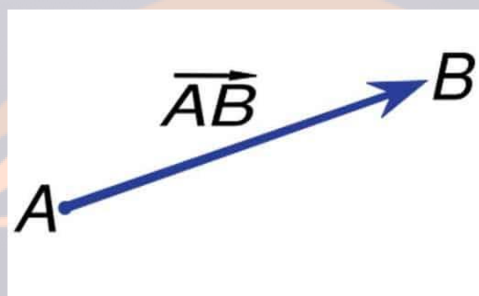
Vektor

Pengertian: Vektor adalah suatu besaran yang memiliki arah. Secara grafik suatu vector dapat digambarkan sebagai suatu segmen garis terarah atau tanda panah. Panjang garis = panjang/besar vector, sedangkan arah panah = arah vector.

Contoh:



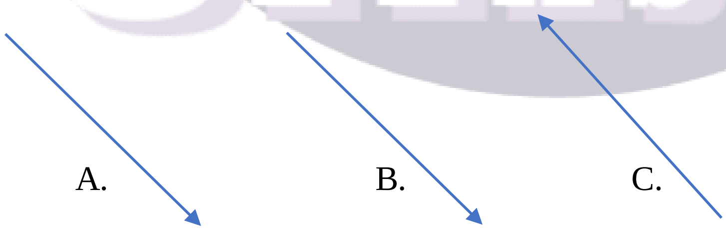
Bila Vektor berawal di A dan berakhir di B:



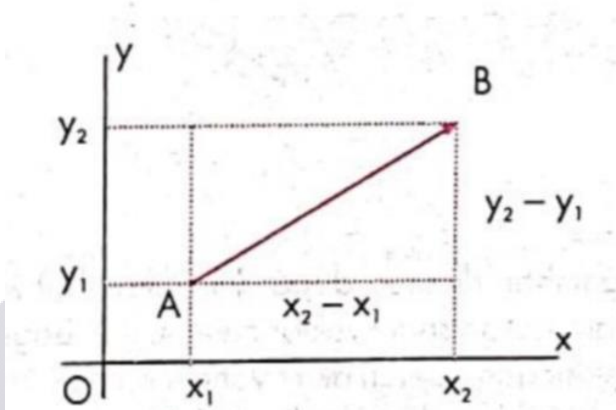
Bila Vektor berlawanan arah bias diberi tanda minus:

A = B

A = -C



Komponen-komponen Vektor di R²:



Komponen-komponen vektor $\bar{v}$ yaitu: $v_1 = x_2 - x_1$ dan $v_2 = y_2 - y_1$ tersebut dapat digunakan untuk menyatakan vektor secara aljabar yaitu:

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \text{ atau } \bar{v} = [v_1, v_2] = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

Soal:

a. Jika A(3, 5) dan B(7, −1) tentukan vektor $\overline{AB}$.

b. Jika $\bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ mempunyai titik awal (3, 1) tentukanlah titik ujungnya.

Jawab:

a. A(3, 5) dan B(7, −1) $\rightarrow \overline{AB} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Vektor $\overline{AB}$ dapat juga dinyatakan dengan $\overline{AB} = [4, -6]$

b. Diketahui vektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dengan titik awal (3, 1).

Misal titik ujungnya adalah (x, y) maka:

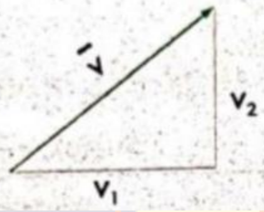
$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-3=4 \rightarrow x=7 \\ y-1=5 \rightarrow y=6 \end{cases}$$

Titik ujung $\bar{v}$ adalah (7, 6)

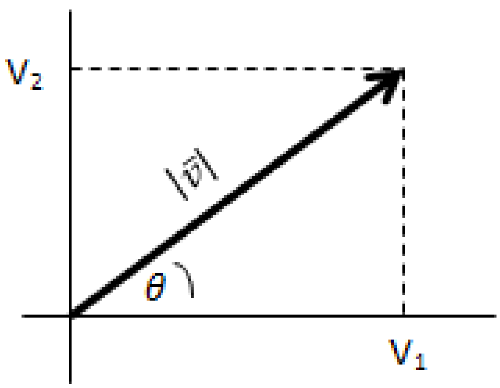
Panjang Vektor di R^2:

Jika vektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ atau $\bar{v} = [v_1, v_2]$ maka:

Panjang vektor $\bar{v}$ adalah $|\bar{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$



$|\bar{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$



$$\cos\theta = \frac{v_1}{|\bar{v}|} \to v_1 = |\bar{v}| \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{v_2}{|\bar{v}|} \to v_2 = |\bar{v}| \text{in}\,\theta$$

$$\tan\theta = \frac{v_2}{v_1} \to \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

a. Diketahui vektor $\bar{v} = [5, -12]$. Tentukan panjang $\bar{v}$.

b. Panjang vektor AB = 17 dengan titik A(2, 3) dan titik B(−6, p). Tentukan nilai p yang memenuhi.

a. Vektor $\bar{v} = [5, -12]$ maka $|\bar{v}| = \sqrt{(5)^2 + (-12)^2} = 13$

b. A(2, 3); B(−6, p) dan $|\overline{AB}| = 17$

$\to \sqrt{(-6-2)^2 + (p-3)^2} = 17 \to \sqrt{8^2 + (p-3)^2} = 17$

$\to 8^2 + (p-3)^2 = 17^2 \to (p-3)^2 = 17^2 - 8^2 = 15^2$

$\to (p-3) = \pm 15 \to p_1 = 3 + 15 = 18; p_1 = 3 - 15 = -12$

Jadi nilai p yang memenuhi adalah −12 atau 18.

Vektor-vektor Khusus:

- Vektor Posisi

  Suatu vektor yang posisi titik awalnya di titik 0 (0,0) dan titik ujungnya di A (a_1, a_2)
- Vektor Nol

  Suatu vektor yang panjangnya nol dan dinotasikan $\bar{0}$. Vektor nol tidak memiliki arah vektor yang jelas.
- Vektor satuan

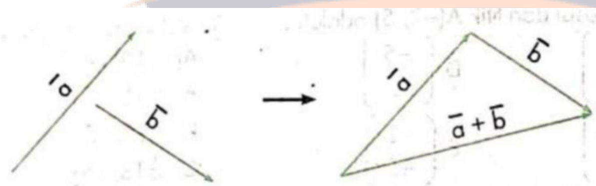
  Suatu vektor yang panjangnya satu satuan. Vektor satuan dari $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ adalah:

  $\bar{U_v} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{1}{|\bar{v}|}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$
- Vektor basis

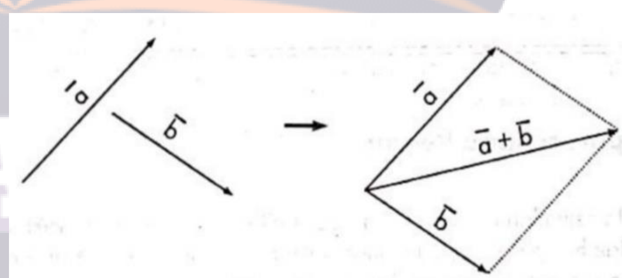
  Vektor basis merupakan vektor satuan yang saling tegak lurus. Dalam vektor ruang dua dimensi (R^2) memiliki dua vektor basis yaitu $\bar{i} = (1, 0)$dan $\bar{j} = (0, 1)$. Sedangkan dalam tiga dimensi (R^3) memiliki tiga vektor basis yaitu $\bar{I} = (1, 0, 0)$, $\bar{J} = (0, 1, 0)$, dan $\bar{K} = (0, 0, 1)$.

Penjumlahan Vektor:

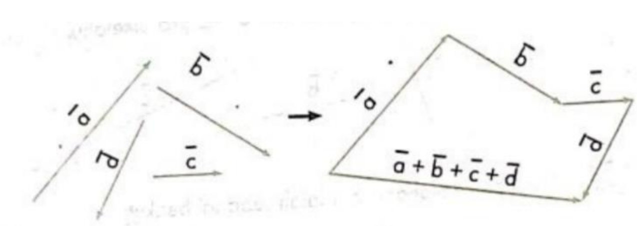
1. Metode Segitiga



2. Metode Jajargenjang



3. Metode Poligon

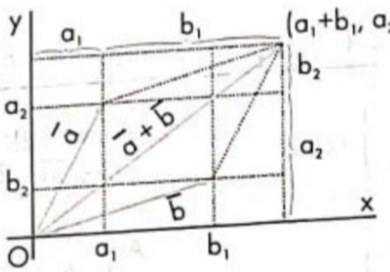


4. Penjumlahan Vektor secara Aljabar

Jika $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ maka $\bar{a} + \bar{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

Jika $\bar{a} = [a_1, a_2]$ dan $\bar{b} = [b_1, b_2]$ maka $\bar{a} + \bar{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$

Untuk pembuktiannya perhatikan gambar berikut.



Perhatikan bahwa pada gambar di atas diperlihatkan bahwa vektor $\bar{a} + \bar{b}$ mempunyai titik awal (0, 0) dan titik ujung $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, dengan demikian maka:

$\bar{a} + \bar{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$ atau $\bar{a} + \bar{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

Rumus Penjumlahan Dua Buah Vektor

$$\vec{a} = x_A i + y_A j$$
$$\vec{b} = x_B i + y_B j$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (x_A + x_B)i + (y_A + y_B)j$$
$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |b|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}$$

Contoh:

Diketahui vektor $\bar{a} = 2i - 3j + k$, $\bar{b} = i - 3j - k$ dan $\bar{c} = 4i + j - k$. Nilai $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \ldots\ldots$

Jawab :

$\bar{a} = (2, -3, 1)$, $\bar{b} = (1, 3, -3)$, $\bar{c} = (4, 1, -1)$

$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} \quad = (2, -3, 1) + (1, 3, -3) + (4, 1, -1)$

$\quad = (7, 1, -3)$

atau $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Sifat-sifat penjumlahan Vektor:

1. **Sifat Komutatif**

   $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2. **Sifat Asosiatif**

   $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

3. **Unsur Identitas** atau **Unsur Satuan** (**Vektor Nol**)

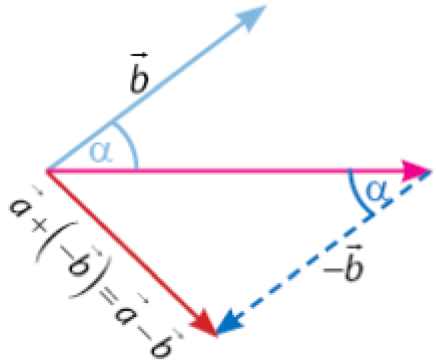
   $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4. **Lawan Suatu vektor**

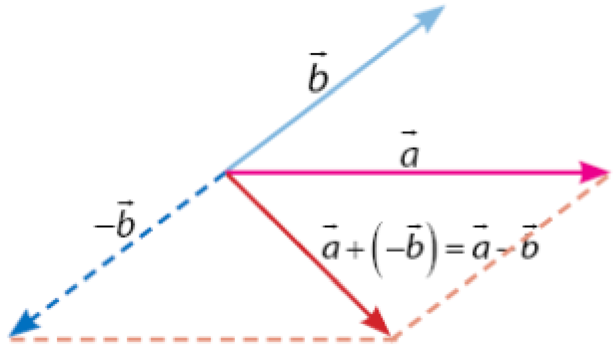
   $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$

Pengurangan Vektor:

1. Metode Segitiga



2. Metode Jajargenjang



Rumus Pengurangan Dua Buah Vektor

$$\vec{a}=x_A i+y_A j$$

$$\vec{b}=x_B i+y_B j$$

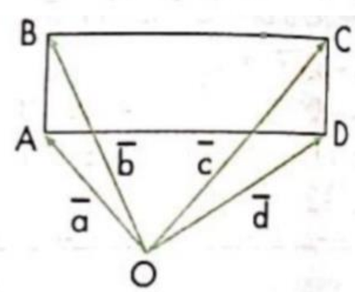
$$\vec{a}-\vec{b}=(x_A-x_B)i+(y_A-y_B)j$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+\left|b\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha}$$

Contoh: a. Jika $\bar{a}=[5, 4]$ dan $\bar{b}=[5, 4]$ maka $\bar{a}-\bar{b}=[5-5, 4-4]=[0, 0]$

b. Jika $\bar{a}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ dan $\bar{b}=\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$ maka $\bar{a}-\bar{b}=\begin{pmatrix}3-7\\6-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$

Diketahui ABCD adalah persegipanjang dengan $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ dan $\bar{d}$ berturut-turut adalah vektor posisi dari titik A, B, C dan D. Lihat gambar di samping. Tunjukkan bahwa:
$\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$

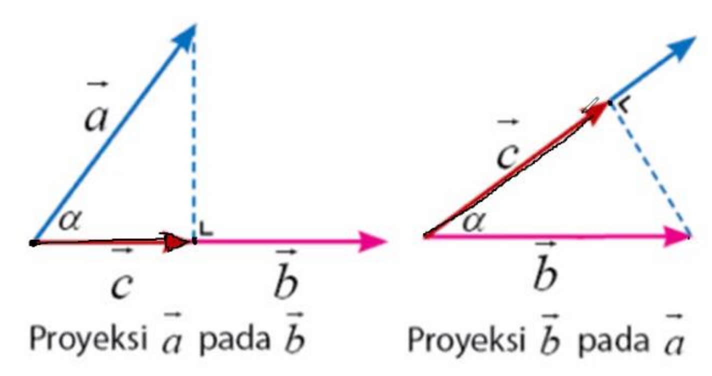


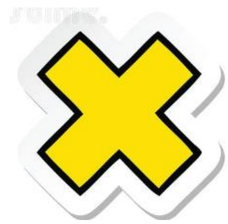
Perhatikan gambar di atas.

$\bar{a}+\overline{AB}=\bar{b} \rightarrow \overline{AB}=\bar{b}-\bar{a}$; $\overline{DC}=\overline{AB} \rightarrow \overline{DC}=\bar{b}-\bar{a}$

$\bar{d}+\overline{DC}=\bar{c} \rightarrow \bar{d}=\bar{c}-\overline{DC}=\bar{c}-(\bar{b}-\bar{a})=\bar{c}-\bar{b}+\bar{a}=\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$

Proyeksi Vektor:





1. Proyeksi skalar ortogonal $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$. / Panjang proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

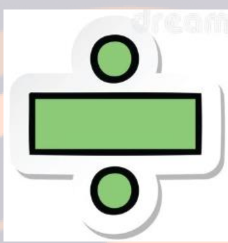
$$||\vec{c}|| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$\vec{u}$ pada $\vec{v}$ = $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$\overrightarrow{AB}$ pada $\overrightarrow{BC}$ = $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}$

2. Proyeksi skalar ortogonal $\vec{b}$ pada arah vektor $\vec{a}$.

$$|\vec{c}| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}$$



$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{a}|\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}, \quad \theta \text{ lancip}$$

$$|\mathbf{p}| = -|\mathbf{a}|\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}, \quad \theta \text{ tumpul}$$

Contoh:

Diketahui **a** = [8, 4] dan **b** = [4, -3]. Tentukan panjang proyeksi vektor **a** pada **b** dan panjang proyeksi vektor **b** pada **a**

Jawab :

Panjang proyeksi vektor **a** pada **b** adalah

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|} = \frac{|8(4)+4(-3)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|20|}{5} = 4$$

Panjang proyeksi vektor **b** pada **a** adalah

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{|8(4)+4(-3)|}{\sqrt{8^2+4^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{80}} = \sqrt{5}$$

Latihan Soal:

Vektor $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + x\vec{k}$ dan $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$. Jika panjang proyeksi $\vec{u}$ pada $\vec{v}$ adalah 6, maka $x = \ldots\ldots$

- $6 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$

$6 = \frac{6 + 12 - 6x}{\sqrt{49}}$

$42 = 18 - 6x$

$6x = -24$

$\boxed{x = -4}$

- $-6 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$

$-6 = \frac{18 - 6x}{7}$

$-42 = 18 - 6x$

$6x = 60$

$\boxed{x = 10}$

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$

$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

$\vec{v} = (2, 3, -6)$

$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{49} = 7$

Diberikan vektor – vektor sebagai berikut : $\vec{a} = (-1, -\sqrt{2}, 1)$, $\vec{b} = (-2, p, 2\sqrt{2})$, dan $\vec{c} = (0, \sqrt{2}, q)$. Jika panjang proyeksi vektor $\vec{b}$ dan $\vec{a}$ adalah 1 dan vektor $\vec{b}$ tegak lurus vektor $\vec{c}$, maka nilai $p + q = \ldots.$

A. -1
B. 0
C. 1
D. 2
E. 3

$1 = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}$

$1 = \frac{2 - \sqrt{2}p + 2\sqrt{2}}{\sqrt{1+2+1}}$

$2 = 2 - \sqrt{2}p + 2\sqrt{2}$

$\sqrt{2}p = 2\sqrt{2}$

$\boxed{p = 2}$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

$0 + \sqrt{2}p + 2\sqrt{2}q = 0$

$2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}q = 0$

$2\sqrt{2}q = -2\sqrt{2}$

$\boxed{q = -1}$

$p + q = 1$

Diketahui vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ membentuk sudut $\propto$. Jika panjang proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ sama dengan lima kali panjang $\vec{b}$, maka perbandingan panjang $\vec{a}$ terhadap panjang $\vec{b}$ adalah....

A. $1 : 5 \cos \propto$
B. $5 : \cos \propto$
C. $5 \cos \propto : 1$
D. $1 : \cos \propto$
E. $\cos \propto : 5$

$5|\vec{b}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$

$5|\vec{b}| = \frac{|\vec{a}| \cdot \cancel{|\vec{b}|} \cdot \cos\alpha}{\cancel{|\vec{b}|}}$

$5|\vec{b}| = |\vec{a}| \cos\alpha$

$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \frac{5}{\cos\alpha}$

Diketahui vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ membentuk sudut sebesar α. Jika panjang proyeksi vektor $\vec{v}$ pada $\vec{u}$ sama dengan $3sin \propto$ dan panjang vektor $\vec{v}$ adalah 1, maka $\tan \alpha = \ldots.$

A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{2}{3}$
C. 1
D. $\frac{4}{3}$
E. $\frac{5}{3}$

$3\sin\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|}$

$3\sin\alpha = \frac{|\vec{v}| \cdot \cancel{|\vec{u}|} \cdot \cos\alpha}{\cancel{|\vec{u}|}}$

$3\sin\alpha = \cos\alpha$

$3 \tan\alpha = 1$

$\boxed{\tan\alpha = \frac{1}{3}}$

Bila panjang proyeksi vektor $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$ pada vektor $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ dengan $x, y > 0$ adalah 1, maka nilai $4x - 3y + 1 = \ldots.$

- $1 = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}$

$1 = \frac{x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]^2 = \left[(x - 2y)\right]^2$

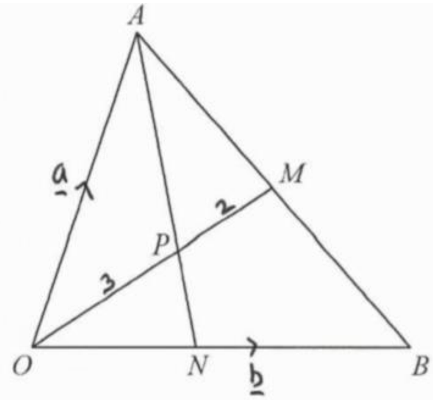
$\cancel{x^2} + y^2 = \cancel{x^2} - 4xy + 4y^2$

$\underbrace{4xy - 3y^2}_{} = 0$

$y(4x - 3y) = 0$

$4x - 3y = 0$

$4x - 3y + 1 = 1$



OAB is a triangle.
OPM and *APN* are straight lines.
M is the midpoint of *AB*.

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ $\quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$

$OP : PM = 3:2$

Work out the ratio $ON : NB$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$
$= -\underline{a} + \underline{b}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB})$
$= \underline{a} + \frac{1}{2}(-\underline{a} + \underline{b}) = \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{OM})$
$= -a + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}(+a + b)$
$= -\underline{a} + \frac{3}{10}\underline{a} + \frac{3}{10}\underline{b}$
$= -\frac{7}{10}\underline{a} + \frac{3}{10}\underline{b} = \frac{7}{10}(\underline{a} + \frac{3}{7}\underline{b})$

$\overrightarrow{AN} = -\underline{a} + k\,\underline{b}$

As APN are on a straight line, $\overrightarrow{AP}$ and $\overrightarrow{AN}$ are Multiples

$\therefore k = \frac{3}{7}$

This gives $\overrightarrow{ON} = \frac{3}{7} \times \overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{ON} : \overrightarrow{NB}$
$3 : 4$

Semoga ilmu yang diberikan bermanfaat dan tetap semangat mempelajari Matmin ☺