KOMPOSISI TRANSFORMASI

(Transformasi yang berkesinambungan)

1. Komposisi Translasi

Jika translasi pertama yang dinyatakan dengan T1 dilanjutkan dengan transformasi kedua yang dinyatakan dengan T2, maka komposisi translasinya dapat ditulis dengan : T2 o T1 atau T1 o T2

Misal T1 : $\begin{pmatrix} a1 \\ b1 \end{pmatrix}$ dan T2 : $\begin{pmatrix} a2 \\ b2 \end{pmatrix}$, maka T2 o T1 = $\begin{pmatrix} a1 + a2 \\ b1 + b2 \end{pmatrix}$

Perhatikan bahwa : T2 o T1 = $\begin{pmatrix} a1 + a2 \\ b1 + b2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a2 + a1 \\ b2 + b1 \end{pmatrix}$ = T1 o T2

Garis $y = 3x + 1$ ditranslasi secara berurutan oleh $T_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $T_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tentukan persamaan peta garis tersebut.

$$T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} -3+5 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$y = 3x + 1 \xrightarrow{T_2 \circ T_1} y - 4 = 3(x - 2) + 1$$

$$y - 4 = 3(x - 2) + 1 \rightarrow y = 3x - 1$$

2. Komposisi Refleksi

Refleksi yang dilakukan secara berurutan disebut komposisi refleksi. Jika refleksi M_1 dilanjutkan dengan refleksi M_2, maka akan diperoleh komposisi refleksi yang dapat ditulis dengan $M_2 \circ M_1$

Nomor	Refleksi	Matriks Refleksi
1.	Terhadap sumbu x	$M_{sb.x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2.	Terhadap sumbu y	$M_{sb.y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3.	Terhadap garis y = x	$M_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4.	Terhadap garis y = -x	$M_{y=-x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
5.	Terhadap titik O(0,0)	$M_{O(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
6.	Terhadap garis y = mx	$M_{y=mx} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -(1-m^2) \end{pmatrix}$

3. Komposisi Refleksi Khusus

- **Komposisi refleksi terhadap dua sumbu sejajar**

  Misal titik $A(x_1, y_1)$ direfleksikan terhadap garis x = a dan dilanjutkan dengan refleksi terhadap garis x = b, maka :

  $A(x_1, y_1) \xrightarrow{M\ x=b\ \text{O}\ M\ x=a} A''(\ 2(b-a) + x_1,\ y_1\ )$

  Misal titik $A(x_1, y_1)$ direfleksikan terhadap garis y = a dan dilanjutkan dengan refleksi terhadap garis y = b, maka :

  $A(x_1, y_1) \xrightarrow{M\ y=b\ \text{O}\ M\ y=a} A''(\ x_1,\ 2(b-a) + y_1\ )$

Tentukanlah peta dari titik A(3, 4) jika:
a. direfleksikan terhadap garis x = 2 kemudian terhadap garis x = 5.
b. direfleksikan terhadap garis x = 5 kemudian terhadap garis x = 2.

Ingat bahwa: $A(x_1, y_1) \xrightarrow{M_{x=b} \text{ o } M_{x=a}} A^I(2(b-a)+x_1, y_1)$

a. $A(3, 4) \xrightarrow{M_{x=5} \text{ o } M_{x=2}} A^I(2(5-2)+3, 4) = A^I(9, 4)$

b. $A(3, 4) \xrightarrow{M_{x=2} \text{ o } M_{x=5}} A^I(2(2-5)+3, 4) = A^I(-3, 4)$

Perhatikan bahwa: $M_{x=b} \text{ o } M_{x=a} \neq M_{x=a} \text{ o } M_{x=b}$

- **Komposisi refleksi terhadap dua sumbu tegak lurus**

  Misal titik A(x1, y1) direfleksikan terhadap garis x = a dan dilanjutkan dengan refleksi terhadap garis y = b, maka :

  $A(x_1, y_1) \xrightarrow{M\ x=a \text{ O } M\ y=b} A''(2a - x_1, 2b - y_1)$

Tentukanlah peta dari titik A(4, 1) jika:
a. direfleksikan terhadap garis y=2 kemudian terhadap garis x=3.
b. direfleksikan terhadap garis y=x kemudian ke garis y= –x+2.

a. **Cara I:**

Ingat: $A(x_1, y_1) \xrightarrow{M_{y=b}} A^I(x_1, 2b-y_1) \xrightarrow{M_{x=a}} A^{II}(2a-x_1, 2b-y_1)$

$A(4, 1) \xrightarrow{M_{y=2}} A^I(4, 3) \xrightarrow{M_{x=3}} A^{II}(2, 3)$

Cara II:

Komposisi refleksi terhadap y = 2 kemudian terhadap x = 3 sama dengan rotasi pada titik (3, 2) sejauh 180°.
Misal $A^I(x_1, y_1)$ adalah peta A(4, 1) yang dirotasi pada titik (3, 2) sejauh 180°, dengan demikian maka dapat dirumuskan:

$$\begin{pmatrix} x^I - 3 \\ y^I - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^0 & -\sin 180^0 \\ \sin 180^0 & \cos 180^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4-3 \\ 1-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow x^I = -1 + 3 = 2$ dan $y^I = 1 + 2 = 3 \rightarrow A^I(2, 3)$

- **Komposisi refleksi terhadap dua sumbu yang berpotongan**

$$\begin{pmatrix} x1' - b1 \\ y1' - b2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2a & -\sin 2a \\ \sin 2a & \cos 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 - b1 \\ y1 - b2 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah peta dari titik A(4, 3) jika:

a. direfleksikan ke garis $\theta = 30^0$ kemudian ke garis $\theta = 45^0$.

b. direfleksikan ke garis $y = x + 1 - \sqrt{3}$ kemudian ke garis $y = (2 - \sqrt{3})x$

a. Garis $\theta = 30^0$ dan garis $\theta = 45^0$ berpotongan di titik O(0, 0) dan membentuk sudut sebesar 15^0.
Refleksikan ke garis $\theta = 30^0$ kemudian ke garis $\theta = 45^0$, sama dengan rotasi pada titik O(0, 0) sejauh $2 \times 15^0 = 30^0$.
Misal peta dari titik A(4, 3) oleh transformasi tersebut adalah $A'(x', y')$ maka dapat ditulis hubungan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^0 & -\sin 30^0 \\ \sin 30^0 & \cos 30^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - 1\frac{1}{2} \\ 2 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \rightarrow A'\left(2\sqrt{3} - 1\tfrac{1}{2}, 2 + 1\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

b. Garis $y = x + 1 - \sqrt{3} \rightarrow m_1 = 1$
garis $y = (2 - \sqrt{3})x \rightarrow m_2 = 2 - \sqrt{3}$
Misal sudut yang dibentuk kedua garis adalah α, maka:

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2.m_1} = \frac{(2 - \sqrt{3}) - 1}{1 + (2 - \sqrt{3})1} = \frac{1 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$\rightarrow \alpha = -30^0$

Titik potong garis $y = x + 1 - \sqrt{3}$ dan garis $y = (2 - \sqrt{3})x$ adalah $(1, (2 - \sqrt{3}))$

Refleksikan ke garis $y = x + 1 - \sqrt{3}$ kemudian ke garis $y = (2 - \sqrt{3})x$, sama dengan rotasi pada titik $(1, (2 - \sqrt{3}))$ sejauh $2 \times (-30^0) = -60^0$.

Misal peta dari titik A(4, 3) oleh transformasi tersebut adalah $A'(x', y')$ maka dapat ditulis hubungan:

$$\begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-60^0) & -\sin(-60^0) \\ \sin(-60^0) & \cos(-60^0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 3 - 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow x' = 4 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $y' = 2\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}$

$\rightarrow A'\left(4 + \frac{1}{2}\sqrt{3}, 2\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)$

4. Komposisi Rotasi

Jika rotasi R1 [P, α] dilanjutkan dengan rotasi R2 [P, β], maka komposisi rotasi : R2 o R1 sama dengan R[P, α + β]

dengan rotasi pada titik pusat P(x1, y1),

$$\begin{pmatrix} x' - x1 \\ y' - y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha + \beta & -\sin\alpha + \beta \\ \sin\alpha + \beta & \cos\alpha + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x1 \\ y - y1 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah peta dari titik A(4, 3) jika:

a. dirotasi secara berturut-turut dengan $R_1[O, 25^0]$ dan $R_2[O, 35^0]$

b. dirotasi secara berturut-turut dengan $R_1[P, 15^0]$ dan $R_2[P, 30^0]$ dengan P(1, 2)

a. Rotasi secara berturut-turut: $R_1[O, 25^0]$ dan $R_2[O, 35^0]$

$R_2 \circ R_1 = R[O, 25^0 + 35^0] = R[O, 60^0]$

Misal peta titik A(4, 3) oleh $R[O, 60^0]$ adalah $A^I(x^I, y^I)$, maka:

$$\begin{pmatrix} x^I \\ y^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^0 & -\sin 60^0 \\ \sin 60^0 & \cos 60^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - 1\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} + 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow A^I\left(2 - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 1\tfrac{1}{2}\right)$$

5. Komposisi Transformasi

Misal suatu transformasi dinyatakan dengan F1 = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan transformasi yang lain dinyatakan dengan F2 = $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Komposisi transformasi F1 dan F2 adalah :

F2 o F1 = $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Tentukan persamaan bayangan garis $y = 2x+4$ yang ditransformasi secara berturut-turut oleh $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Matriks tunggal yang menyatakan komposisi transformasi tersebut adalah:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Misal (x, y) adalah sembarang titik yang terletak pada garis, dan mempunyai peta (x^{I}, y^{I}), maka: $\begin{pmatrix} x^{I} \\ y^{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4 \cdot 4 - 3 \cdot 5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{I} \\ y^{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^{I} - 3y^{I} \\ -5x^{I} + 4y^{I} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow x = 4x^{I} - 3y^{I}$ dan $y = -5x^{I} + 4y^{I}$

Karena $y = 2x + 4$ maka: $-5x^{I} + 4y^{I} = 2(4x^{I} - 3y^{I}) + 4$

$\rightarrow -13x^{I} + 10y^{I} = 4$ atau $-13x + 10y = 4$

Jadi persamaan bayangan garis adalah: $-13x + 10y = 4$.