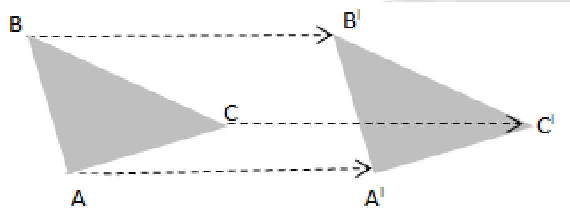
TRANSFORMASI GEOMETRI

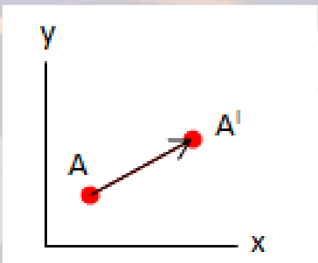
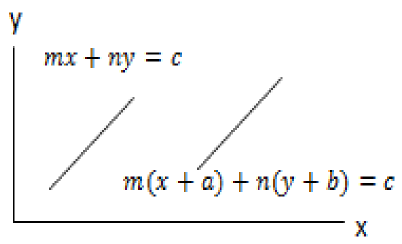
1. Translasi

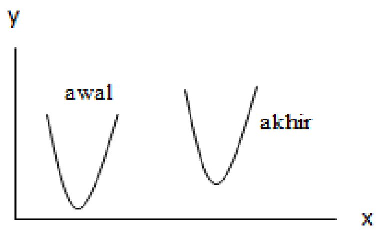
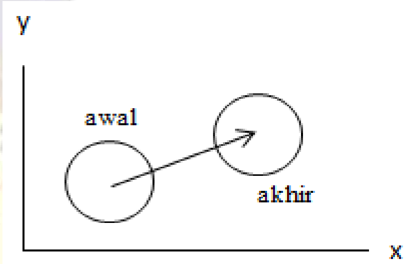
Translasi atau pergeseran merupakan transformasi isometri yang memindahkan semua titik pada sebuah bangun yang ditransformasi sejauh jarak yang sama dan arah yang sama. Segitiga ABC ditranslasi menjadi segitiga A'B'C' seperti berikut :



Suatu translasi dapat ditinjau terhadap sumbu x dan sumbu y. Pergeseran sejauh a sejajar sumbu x (bergeser ke kanan a>0, ke kiri a<0) dan pergeseran sejauh b sejajar sumbu y (bergeser ke atas b>0, ke bawah b<0) dinyatakan sebagai :

$$T\binom{a}{b}$$

Posisi Awal	Posisi Akhir	Pergeseran
	Translasi Titik	
A (x,y)	A'(x+a, y+b) Dengan x dan y adalah koordinat	
	Translasi Garis	
mx + ny = c	m(x-a) + n(y-b) = c Dengan m dan n adalah koefisien dan c adalah konstanta	

Translasi Kurva		
$y = mx^2 + kx + l$	$(y-b) = m(x-a)^2 + k(x-a) + l$ Dengan m dan k adalah koefisien dan l adalah konstanta	
Translasi Lingkaran		
$x^2 + y^2 = c$	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$ Dengan c adalah konstanta	

CONTOH SOAL :

Tentukan peta dari

- Titik A(2,3) ditranslasi oleh $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

  A' (2 + 3, 3 – 2) ⟶ A'(5,1)
- Garis $4x - 5y + 6 = 0$ jika ditranslasi oleh $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

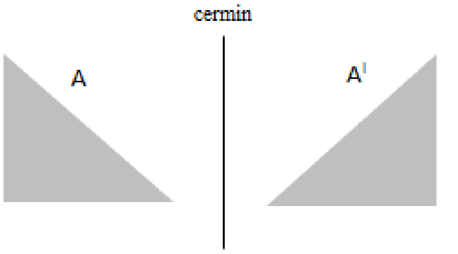
  $4(x - 6) - 5(y - 2) + 6 = 0$ atau $4x - 5y - 8 = 0$
- Parabola $y = x^2 - 2$ jika ditranslasi oleh $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

  $y - 4 = (x + 3)^2 - 2$ atau $y = x^2 + 6x + 11$
- Lingkaran $(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 4$ jika ditranslasi oleh $\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$

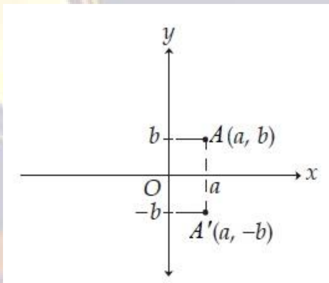
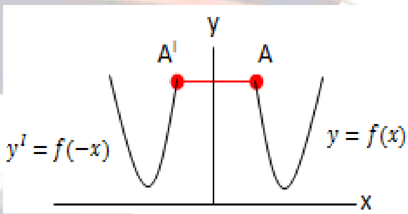
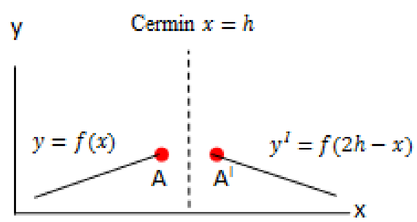
  $((x + 4) - 7)^2 + ((y + 5) - 3)^2 = 4$ atau $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$

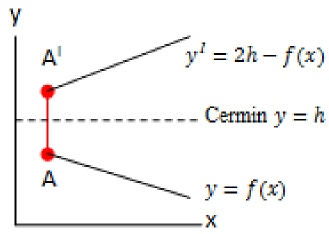
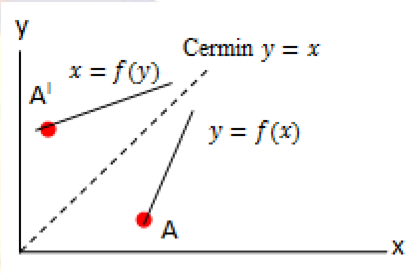
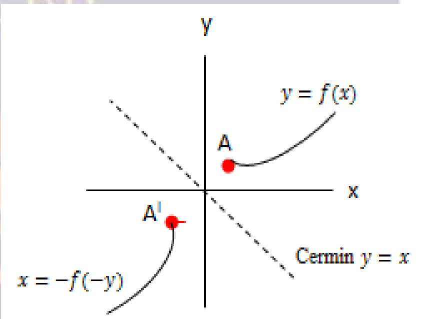
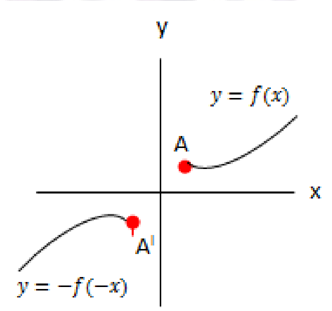
2. Refleksi

Refleksi atau pencerminan merupakan transformasi isometri berhadapan yang memindahkan semua titik pada bangun yang ditransformasi ke arah garis atau cermin sejauh dua kali jarak bangun terhadap garis/cermin. Bangun yang direfleksikan akan berhadapan dengan petanya.



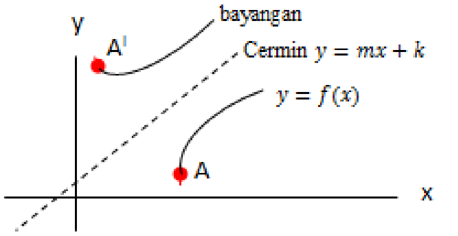
Bentuk refleksi terhadap beberapa garis sebagai berikut :

Titik		Garis/kurva		Gambar Refleksi
Awal	Bayangan	Awal	Bayangan	
Refleksi sumbu x				
A(x,y)	A'(x,-y)	y = f(x)	y = -f(x)	
Refleksi sumbu y				
A(x,y)	A'(-x,y)	y = f(x)	y = f(-x)	
Refleksi sumbu x=h				
A(x,y)	A'(2h-x,y)	y = f(x)	y = f(2h-x)	
Refleksi sumbu y=h				

A(x,y)	A'(x,2h-y)	y = f(x)	y = 2h-f(x)	
Refleksi sumbu y=x				
A(x,y)	A'(y,x)	y = f(x)	x = f(y)	
Refleksi sumbu y=-x				
A(x,y)	A'(-y,-x)	y = f(x)	x = -f(-y)	
Refleksi terhadap titik O(0,0)				
A(x,y)	A'(-x,-y)	y = f(x)	y = -f(-x)	

Selain itu, titik dan kurva juga dapat direfleksikan terhadap suatu garis y = mx+k. Berikut refleksinya :

TITIK	AWAL	$A(x,y)$
	BAYANGAN	$A^I(x^I,y^I) = \left(\frac{(1-m^2)x+2my}{1+m^2}, \frac{1mx-(1-m^2)y}{1+m^2}\right)$
GARIS / KURVA	AWAL	$y = f(x)$
	BAYANGAN	$\frac{2mx^I-(1-m^2)y^I}{1+m^2} = f\left(\frac{(1-m^2)x^I+2my^I}{1+m^2}\right)$



CONTOH SOAL :

- Tentukan peta dari titik A(3,7) jika direfleksikan pada
  a. Garis x = 4

     $(3,7) \xrightarrow{M(x=4)} (2(4) - 3, 7) = (5,7)$

  b. Garis y = x

     $(3,7) \xrightarrow{M(y=x)} (7,3)$

- Tentukan peta kurva 3x + 2y + 4 = 0 jika direfleksikan terhadap garis y = -x

  Ingat $y = f(x) \xrightarrow{M(y=-x)} x = -f(-y)$

  3x + 2y + 4 = 0

  2y = -3x – 4

  $y = -1\frac{1}{2}x - 2 \xrightarrow{M(y=-x)} x = -[-1\frac{1}{2}(-y) - 2]$

  petanya adalah $x = -1\frac{1}{2}y + 2$ atau $y = -\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$

- Tentukanlah peta dari titik A(2,3) jika direfleksikan ke garis y = 3x + 5

  Ingat: Bayangkan titik (a,b) yang direfleksikan ke garis y = mx + k adalah

  $$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m\text{^}2}\left[\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -(1-m^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2km \\ 2k \end{pmatrix}\right]$$

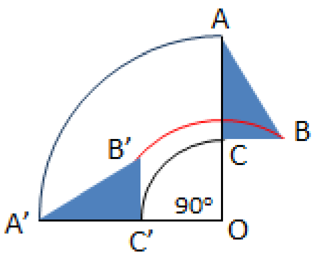
  Bayangan titik (2,3) direfleksikan ke garis y = 3x + 5 adalah

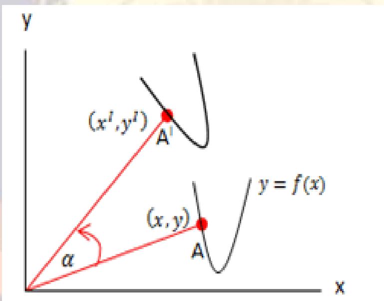
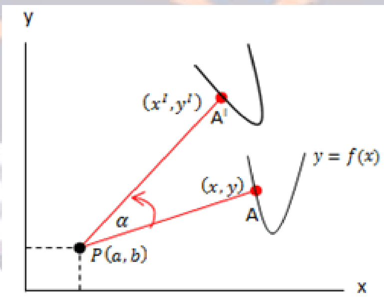
  $$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \frac{1}{1+3\text{^}2}\left[\begin{pmatrix} 1-3^2 & 2(3) \\ 2(3) & -(1-3^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.5.3 \\ 2(5) \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2\frac{4}{5} \\ 4\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

3. Rotasi

Rotasi atau perputaran merupakan transformasi geometri berupa pergeseran atau pemindahan semua titik pada bidang geometri sepanjang busur lingkaran yang memiliki titik pusat lingkaran sebagai titik rotasi.

Rotasi dinyatakan positif jika arahnya berlawanan dengan jarum jam, dan bernilai negatif jika searah jarum jam. Seperti contoh di bawah ini, Titik A berotasi 90° berlawanan arah jarum jam.



Bentuk Rotasi	Gambar Rotasi	Bentuk Persamaan
Rotasi pada titik O(0,0)		$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -sin a \\ \sin a & cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Rotasi pada titik P(a,b)		$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -sin a \\ \sin a & cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$

CONTOH SOAL :

- Tentukan peta dari titik (5,-6) jika dirotasi pada titik A(1,2) sejauh 30°!

$$\begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ -6 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} + 5 \\ 4 - 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

4. Dilatasi

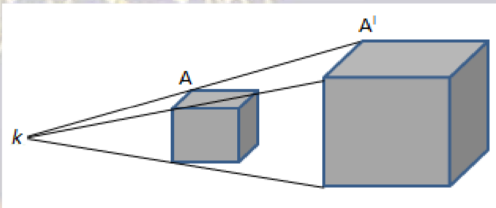
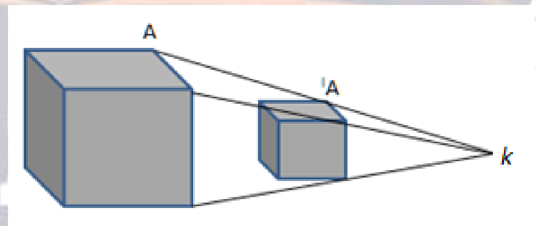
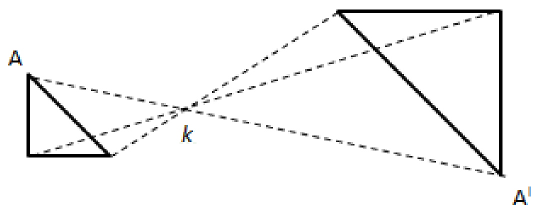
Dilatasi merupakan transformasi geometri berupa perkalian yang memperbesar atau memperkecil suatu bangunan geometri. Dalam konsep dilatasi, ada yang disebut titik dilatasi dan faktor dilatasi.

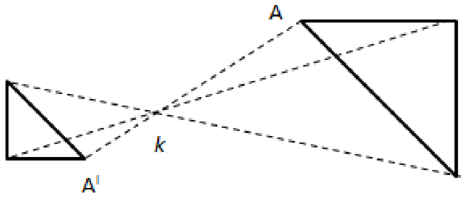
Titik dilatasi merupakan titik yang menentukan posisi suatu dilatasi. Titik dilatasi menjadi titik pertemuan dari semua garis lurus menghubungkan antara titik-titik dalam suatu bangun ketitik-titik hasil dilatasi.

Faktor dilatasi merupakan faktor perkalian suatu bangun geometri yang didilatasikan. Faktor ini menunjukkan seberapa besar hasil dilatasi terhadap bangun geometrinya dan dinotasikan dengan k.

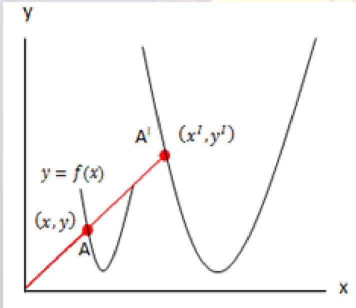
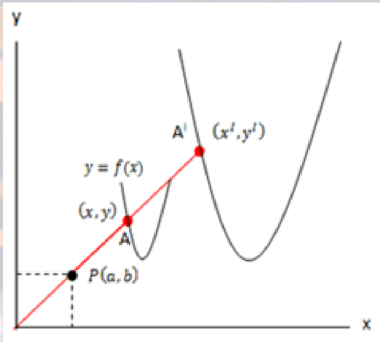
Dilatasi dapat ditulis
(D,k) = (Titik dilatasi, Faktor dilatasi)

Konsep dilatasinya :

Faktor Dilatasi	Bentuk Dilatasi
$k > 1$	
$0 < k < 1$	
$k < -1$	
$-1 < k < 0$	

Dalam diagram cartesius, bentuk-bentuk dilatasi sebagai berikut.

Titik Dilatasi	Gambar Dilatasi	Bentuk Persamaan Dilatasi
Dilatasi *k* pada titik O(0,0)		Titik : $(x,y) \xrightarrow{(O,k)} (x',y') = (kx,ky)$ Persamaan : $f(x) \xrightarrow{(O,k)} k.f\left(\frac{1}{k}x\right)$
Dilatasi *k* pada titik P(*a*,*b*)		Titik : $(x,y) \xrightarrow{(P,k)} (x',y') = (k(x-a), k(y-b))$ Persamaan : $y = f(x)$ $\xrightarrow{(P,k)} b + \frac{1}{k}(y-b) = f\left(a + \frac{1}{k}(x-a)\right)$

CONTOH SOAL :

- Tentukan peta dari kurva y = x^2 jika didilatasi oleh [B(1,2),3]

  Ingat : y = f(x) $\xrightarrow{[P(a,b),k]}$ b + $\frac{1}{k}$ (y - b) = f(a + $\frac{1}{k}$ (x - a)

  y = x^2 $\xrightarrow{[B(1,2),3]}$ 2 + $\frac{1}{3}$ (y - 2) = f(1 + $\frac{1}{3}$ (x - 1)

  2 + $\frac{1}{3}$y - $\frac{2}{3}$ = f(1 + $\frac{1}{3}$x - $\frac{1}{3}$)

  $\frac{1}{3}$y + 1$\frac{1}{3}$ = ($\frac{1}{3}x$ + $\frac{2}{3}$)^2

  $\frac{1}{3}$y + 1$\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{9}$$x^2$ + $\frac{4}{9}x$ + $\frac{4}{9}$

  y = $\frac{1}{3}$$x^2$ + 1$\frac{1}{3}$x

5. Matriks Transformasi

Secara umum, transformasi geometri dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yang memetakan titik (x,y) ke titik (x',y') dengan persamaan :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

atau

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Bentuk-bentuk matriks transformasi sebagai berikut :

Jenis Transformasi	Bentuk Matriks
Refleksi	
Terhadap sumbu x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Terhadap sumbu y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Terhadap garis y=x	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Terhadap titik pusat (0,0)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Rotasi	
Sebesar *a*	$\begin{pmatrix} cosa & -sina \\ sina & cosa \end{pmatrix}$
Dilatasi	
Pusat (0,0) dan faktor *k*	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

CONTOH SOAL :

- Tentukan peta dari y = x^2 + 4 jika ditransformasi $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Misal (x,y) adalah sembarang titik pada y = x^2 + 2 dan (x',y') adalah peta dari titik (x,y), maka $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7.3-5.4} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x' - 5y' \\ -4x' + 7y' \end{pmatrix}$

x = 3x' – 5y'   dan   y = -4x' + 7y'

Substitusi x dan y ke persamaan y = x^2 + 4

-4x' + 7y' = $(3x' – 5y')^2$ + 4   atau   -4x + 7y = $(3x – 5y)^2$ + 4

-4x + 7y = $9x^2$ – 30xy + $25y^2$ + 4

$9x^2$ + $25y^2$ – 30xy + 4x – 7y + 4 = 0

6. Determinan dan Luas

Hasil transformasi bangun geometri memiliki luas yang berbeda dengan bangun awalnya. Untuk mendapatkan luas dari sebuah bangun geometri yang telah ditransformasi dapat dicari dengan determinan matriks transformasi. Yaitu :

$$\text{Luas } A' = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ x Luas } A$$

Dengan $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ = $ad - bc$ dan diketahui luas awalnya

CONTOH SOAL :

ABCD adalah persegipanjang dengan A(1, 1); B(5, 1); C(5, 4) dan D(1, 4).
Tentukanlah peta dan luas hasil transformasi ABCD jika ditransformasi oleh:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Luas ABCD = $4 \cdot 3 = 12$

Transformasi titik A, B, C dan D dapat dikerjakan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A' & B' & C' & D' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 11 & 14 & 6 \\ 2 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\rightarrow$ A' (3, 2); B' (11, 2); C' (14, 8); D' (6, 8)

$$\text{Luas } A'B'C'D' = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right\| \cdot 12 = 4 \cdot 12 = 48$$