BARIS DAN DERET

1. Notasi Sigma

Notasi $\sum_{i=1}^{n} f(i)$
menyatakan penjumlahan semua bilangan yang dihasilkan oleh fungsi dari indeks i = 1 sampai dengan i = n

Fungsi yang menyertai notasi sigma dapat berupa :

- Fungsi dari sebuah peubah berindeks
  Misalnya, $\sum_{i=1}^{5} xi^2$, baca : sigma dari xi dengan i dimulai dari 1 s.d. 5
  $\sum_{i=1}^{5} xi^2$ = $x1^2$ + $x2^2$ + $x3^2$ + $x4^2$ + $x5^2$
- Fungsi konstan
  Misalnya, $\sum_{i=1}^{4} c$, baca : sigma dari c dengan I dimulai dari 1 s.d. 4
  $\sum_{i=1}^{4} c$ = c + c + c + c = 4c
- Fungsi dari indeks notasi sigma
  Misalnya, $\sum_{i=1}^{5}(i^2+1)$, baca : sigma dari (i^2+1) dengan I dimulai dari I s.d. 5
  $\sum_{i=1}^{5}(i^2+1)$ = 1^2+1 + 2^2+1 + 3^2+1 + 4^2+1 + 5^2+1 = 60

Misal $X_1 = 1$, $X_2 = 3$, $X_3 = 4$, $X_4 = 5$, $X_5 = 8$ dan $X_6 = 10$ maka:

a. $$\sum_{i=1}^{5} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$
$$= 1 + 3 + 4 + 5 + 8 + 10 = 31$$

b. $$\sum_{i=1}^{6} 2X_i = 2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 2X_5 + 2X_6$$
$$= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 10$$
$$= 2 + 6 + 8 + 10 + 16 + 20 = 62$$

c. $$\sum_{i=1}^{6} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2$$
$$= 1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 8^2 + 10^2 =$$
$$= 1 + 9 + 16 + 25 + 64 + 100 = 215$$

$$\sum_{i=1}^{4} (5+i)^2 = (5+1)^2 + (5+2)^2 + (5+3)^2 + (5+4)^2$$
$$= 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = 36 + 49 + 64 + 81 = 230$$

Jika c adalah konstanta, X dan Y adalah peubah maka :

- $\sum_{i=1}^{n} c$ = nc
- $\sum_{i=1}^{n} c$Xi = $c \sum_{i=1}^{n} Xi$
- $\sum_{i=1}^{n}(Xi + Y1)$ = $\sum_{i=1}^{n} Xi$ + $\sum_{i=1}^{n} Yi$
- $\sum_{i=1}^{n}(Xi - Y1)$ = $\sum_{i=1}^{n} Xi$ - $\sum_{i=1}^{n} Yi$
- $\sum_{i=1}^{n}(Xi\, Y1)$ = $\sum_{i=1}^{n} Xi\ \ \sum_{i=1}^{n} Yi$
- $\sum_{i=1}^{n} \frac{Xi}{Yi}$ = $\frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{\sum_{i=1}^{n} Yi}$
- $\sum_{i=1}^{n} Xi$ = $\sum_{i=1}^{k} Xi$ + $\sum_{i=k+1}^{n} Xi$, dengan 1 < k < n

Misal $X_1 = 4$, $X_2 = 6$, $X_3 = 7$, $X_4 = 8$, $X_5 = 9$ dan $Y_1 = 1$, $Y_2 = 3$, $Y_3 = 5$, $Y_4 = 7$, $Y_5 = 9$, tentukan $\sum_{i=1}^{5} X_i^2 + \sum_{i=1}^{5} 2X_iY_i + \sum_{i=1}^{5} Y_i^2$

$$\sum_{i=1}^{5} X_i^2 + \sum_{i=1}^{5} 2X_iY_i + \sum_{i=1}^{5} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{5}(X_i^2 + 2X_iY_i + Y_i^2) = \sum_{i=1}^{5}(X_i + Y_i)^2$$

$$= (4+1)^2 + (5+3)^2 + (7+5)^2 + (8+7)^2 + (9+9)^2$$

$$= 25 + 64 + 144 + 225 + 324 = 782.$$

2. Barisan dan Deret Aritmetika

Barisan aritmatika adalah abrisan bilangan yang tiap suku berikutnya diperoleh dari suku sebelumnya dengan menambah atau mengurang dengan sebuah bilangan tetap

- **Suku ke-n**

  Un = a + (n-1)b

  Un = U*k* + (n-k)b

- **Jumlah n suku pertama**

  Sn = $\frac{n}{2}$ { 2a + (n-1)b } = $\frac{n}{2}$ (a + Un)

Suatu deret aritmetika, mempunyai suku ke-2 = 10 dan suku ke-4 = 16. Jika suku ke-n = 34, tentukanlah jumlah n suku pertama deret aritmetika tersebut.

Deret aritmetika : $U_2 = 10$, $U_4 = 16$ dan $U_n = 34$

$U_4 = U_2 + 2b \rightarrow 16 = 10 + 2b \rightarrow b = 3$

$U_2 = a + b \rightarrow 10 = a + 3 \rightarrow a = 7$

$U_n = a + (n - 1)b$

$\rightarrow 34 = 7 + (n - 1)3 \rightarrow 27 = 3(n - 1) \rightarrow n = 10 \rightarrow U_{10} = 34$

$\rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}\{a + U_{10}\} = 5\{7 + 34\} = 5\{41\} = 205$

Tentukan nilai n supaya:. $\dfrac{1+2+3+4+\ldots+n}{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)} = \dfrac{105}{196}$

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$ merupakan deret aritmetika: $S_n = \frac{n}{2}(1 + n)$

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$ merupakan deret aritmetika:

$S_n = \frac{n}{2}\{1 + (2n - 1)\} = \frac{n}{2}(2n)$

$$\frac{1+2+3+4+\ldots+n}{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)} = \frac{105}{196} \rightarrow \frac{\frac{n}{2}(1+n)}{\frac{n}{2}(2n)} = \frac{105}{196}$$

$$\rightarrow \frac{1+n}{2n} = \frac{105}{196} \rightarrow 210n = 196 + 196n \rightarrow 14n = 196 \rightarrow n = 14$$

- **Suku Tengah**

$$\boxed{U_t = \frac{a+Un}{2} = \frac{2a+(n-1)b}{2}}$$

Tentukanlah suku tengah dari barisan aritmetika berikut:
3, 7, 11, 15, ... , 43.

Barisan aritmetika: $a = 3$, $b = 4$, $U_n = 43$

$U_n = a + (n - 1)b \rightarrow 3 + (n - 1)4 = 43 \rightarrow n = 11$

Suku tengah adalah: $U_6 = \dfrac{3+43}{2} = 23$

a= Suku pertama

b = beda = $U_2 - U_1 = U_n - U_{n-1}$

3. Barisan dan Deret Geometri

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang tiap suku berikutnya diperoleh dari suku sebelumnya dengan mengali dengan sebuah bilangan tetap

- **Suku ke-n**

$$U_n = a\, r^{n-1} = S_n - S_{n-1}$$

$$U_n = U_k\, r^{n-k}$$

Tentukanlah suku ke-10 dan suku ke-n dari barisan: $\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \ldots$

Barisan: $\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \ldots$ adalah barisan geometri karena:

$\frac{1}{27} : \frac{1}{81} = \frac{1}{9} : \frac{1}{27} = \frac{1}{3} : \frac{1}{9} = 3$

Barisan geometri tersebut mempunyai: suku pertama $a = \frac{1}{81}$ dan rasio $r = 3$

Dengan demikian maka:

$U_{10} = a\, r^9 = \frac{1}{81} \cdot 3^9 = 3^{-4} \cdot 3^9 = 3^5 = 243$

$U_n = a\, r^{n-1} = \frac{1}{81} \cdot 3^{n-1} = 3^{-4} \cdot 3^{n-1} = 3^{n-5}$

Diketahui barisan geometri mempunyai suku ke-3 sama dengan 24 dan suku ke-6 sama dengan 192. Tentukanlah suku ke-2 barisan tersebut.

Barisan geometri :

$U_3 = 24 \mapsto a\, r^2 = 24$

$U_6 = 192 \mapsto a\, r^5 = 192$

$a\, r^5 = 192 \mapsto a\, r^2 \cdot r^3 = 192 \mapsto 24 \cdot r^3 = 192 \mapsto r^3 = 8 \mapsto r = 2$

$a\, r^2 = 24 \mapsto a \cdot 2^2 = 24 \mapsto a = 6$

$U_2 = a\, r = 6 \cdot 2 = 12$

- **Jumlah n suku pertama**

$$Sn = \frac{a\,(r^n - 1)}{r-1} = \frac{a\,(1 - r^n)}{1-r}$$

Suatu deret geometri dengan suku-suku positif, mempunyai suku kedua = 10 dan suku keempat = 40. Jika suku ke-n sama dengan 160, tentukanlah jumlah n suku pertama deret geometri tersebut.

Deret geometri : $U_2 = 10$, $U_4 = 40$ dan $U_n = 160$

$U_4 = U_2 \cdot r^2 \rightarrow 160 = 40 \cdot r^2 \rightarrow r^2 = 4 \rightarrow r = \pm 2$

Karena suku-suku deret positif maka rasio r = 2

$U_2 = a \cdot r \rightarrow 10 = a \cdot 2 \rightarrow a = 5$

$U_n = a \cdot r^{n-1} \rightarrow 160 = 5 \cdot 2^{n-1} \rightarrow 2^{n-1} = 32 \rightarrow n - 1 = 5 \rightarrow n = 6$

$$\rightarrow S_6 = \frac{a(1-r^6)}{1-r} = \frac{5(1-2^6)}{1-2} = \frac{5(1-64)}{-1} = 315$$

Tentukan nilai n supaya $2 + 6 + 18 + \ldots + 2 \cdot 3^{n-1} = 242$.

Deret geometri: $2 + 6 + 18 + \ldots + 2 \cdot 3^{n-1} = 242$

suku pertama: a = 2, rasio: r = 3 dan $S_n = 242$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \rightarrow 242 = \frac{2(1-3^n)}{1-3} \rightarrow 242 = 3^n - 1$$

$\rightarrow 3^n = 243 \rightarrow n = 5$

- **Suku Tengah**

$$Ut = \sqrt{a.Un}$$

Suatu barisan geometri 2, 6, …, …, .., …, 1458. Berapakah suku tengahnya?

$Ut = \sqrt{2\ .\ 1458} = 54$

- **Sisipan**

  Misal di antara bilangan a dan U disisipkan k bilangan terbentuk barisan geometri dengan rasio r, maka :

$$r = \sqrt[k+1]{\frac{U}{a}}$$

Di antara bilangan 14 dan 224 disisipkan 3 bilangan sehingga terbentuk barisan geometri. Tentukan rasio dan jumlah suku-suku barisan tersebut.

Rasio barisan: $r = \sqrt[3+1]{\frac{224}{14}} = \sqrt[4]{16} = 2.$

Banyak suku barisan = 3+2 = 5. Suku pertama: a = 14.

Jumlah suku-suku barisan adalah:

$$S_6 = \frac{a(1-r^5)}{1-r} = \frac{14(1-2^5)}{1-2} = \frac{14(1-32)}{-1} = 434$$

- **Deret Geometri Tak hingga**

$$Sn = \frac{a}{1-r}$$

Selidiki apakah deret geometri berikut konvergen atau divergen. Jika konvergen tentukan jumlah suku-suku deret tersebut.

a. $3 + 3\sqrt{3} + 9 + 9\sqrt{3} + 27 + \ldots$ b. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

a. Deret geometri tak hingga: $3 + 3\sqrt{3} + 9 + 9\sqrt{3} + 27 + \ldots$
mempunyai rasio $r = \sqrt{3} > 1$ maka deret tersebut divergen.

b. Deret geometri tak hingga: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$
mempunyai rasio $r = \frac{1}{2}$ dan $-1 < \frac{1}{2} < 1$ maka deret tersebut konvergen. Dan jumlah suku-sukunya = $S = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4.$

Tentukan nilai x supaya: $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \ldots = 6.$

Deret geometri tak hingga: $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \ldots = 6$
suku pertama: a = x, rasio: $r = \frac{1}{2}x$ dan jumlah: S = 6.

$S = \frac{a}{1-r} \rightarrow 6 = \frac{x}{1-\frac{1}{2}x} \rightarrow 6(1 - \frac{1}{2}x) = x$

$\rightarrow 6 - 3x = x \rightarrow 4x = 6 \rightarrow x = 1{,}5$

Untuk x = 1,5 maka $r = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 = 0{,}75$
(nilai r = 0,75 memenuhi syarat konvergen)