## 二项式定理

回顾：组合数

1. 当时；
2. 当时。

定理：（二项式定理）设为正整数，则对任意的和，有

证明：从组合意义来证明二项式定理。

将

（等号右边共个因式）展开到没有括号为止。在展开时，每个因式均可以取或，因而共有项。这些项都可以写成的形式，我们可以从个因式中选出，再从另外项中选出。

## 二项式系数的性质

这里讨论的二项式系数都是“正常”的，也就是的

1. 对称性：
2. 递推关系：
3. 单峰性：当时（若n为奇数，则同时取floor和ceil），二项式系数最大。
4. 求和：

性质2的证明：

考虑把n元集合的r元子集分为两类：第一类含有元素e，第二类没有。第一类集合去掉元素e之后，就可以看作A-{e}的r-1元子集；第二类集合就是A-{e}的r元子集。

由性质2可以得到杨辉三角形，可以用来解释很多组合恒等式的组合意义。

性质2的另一个组合意义：

把n换成m+n，r换成m，能得到

是从点到点的非降路径数。这些路径可以分为两类：一类经由到，共条；另一类经由到，共条。

## 组合恒等式

等式1：求和

等式2：

证明：在二项式定理中令，得

等式3：

证明：对二项式定理的等式两边在处求的导数。

等式4：

组合意义：

是元集合的元子集的个数。这些子集可以分成如下类：

第0类：元子集中含有。这相当于的元子集再加上构成的的元子集，共个；

第1类：不含但含有的元子集，共个；

……；

第n类：不含但含有的元子集，共个。

等式5：Vandermonde恒等式

证明：把一个元集合分成元集合和元集合，则的元子集可以分成如下类：从中选取个元素，再从中选取个元素。第类子集的个数为

由加法原理可得等式5。

等式6：

证明：利用对称性和Vandermode恒等式。