## 容斥原理

定理：设是有限集合，是跟集合有关的个性质。设是中具有性质的元素构成的集合， 是中**不具备**性质的元素构成的集合。则

中不具备性质的元素的个数为：

一般化定理：

设是一个有限集合，是上的性质集合。求中**恰好具有**中个性质的元素个数。

设表示中**具有**括号内性质的元素的个数。规定

则

证明：设是集合中的一个元素，则：

1. 若中具有少于个性质，则对的贡献为0；
2. 若中恰好具有个性质，则对的贡献为1，对其它的贡献均为0；
3. 若具有个性质，则它对的贡献为（回想i的范围是从r到m的），从而它对和式的贡献为：

综上，式子右端是中恰好具有个性质的元素的个数。

## 例题

1. 求由四个字符构成的位符号串中，至少出现一次的符号串的数目。

设分别为不出现的位符号串的集合，为四个字符构成的位符号串的集合。则

于是

1. 欧拉函数表示小于且和互质的整数的个数。求。

将分解成质因数的乘积的形式

设为不大于且为的倍数的自然数的集合，则

由于互质，所以的最小公倍数为，所以

等等。

小于并且与互质的自然数是集合中那些不属于任何一个集合的数。由容斥原理知

上面的和式正好是下列乘积的展开式

1. 若图有个顶点，且不含有完全子图，则它的顶点的次数（degree）满足如下不等式。其中，为图的顶点集。

【速查】完全子图：个顶点两两相连。顶点次数：顶点的边数。

证明：用反证法，设。其中，意为remainder，也就是。若题设不等式成立，则对于任意的，均有

在图中任取一个顶点，用表示在图中与相邻的那些顶点构成的集合。再去另一个顶点和相应的集合。由容斥原理得到：

其中的意义是：集合中的每个至少包含个元素，而中至多包含个元素，也就是图的全部顶点。

这样，我们可以归纳出，对于，取中与相邻的顶点集，有

因此，至少有一个顶点，使得构成的一个完全子图，与题设矛盾。故题设不等式成立。

1. 求的10组合数。

令，则的10组合数为

设的10组合的全体为。定义性质集合，其中

：10组合中a的个数不少于4；

：10组合中b的个数不少于5；

：10组合中c的个数不少于6。

将满足性质的10组合全体记为，那么中的元素可以看做是由的6组合再拼上4个a构成的。所以

类似地，有

而a的个数不大于3、b的个数不大于4、c的个数不大于5的10组合全体为

。套用容斥原理，有