## 容斥原理

定理：设是有限集合，是跟集合有关的个性质。设是中具有性质的元素构成的集合， 是中**不具备**性质的元素构成的集合。则

中不具备性质的元素的个数为：

一般化定理：

设是一个有限集合，是上的性质集合。求中**恰好具有**中个性质的元素个数。

设表示中**具有**括号内性质的元素的个数。规定

则

证明：设是集合中的一个元素，则：

1. 若中具有少于个性质，则对的贡献为0；
2. 若中恰好具有个性质，则对的贡献为1，对其它的贡献均为0；
3. 若具有个性质，则它对的贡献为（回想i的范围是从r到m的），从而它对和式的贡献为：

综上，式子右端是中恰好具有个性质的元素的个数。

## 例题

1. 求由四个字符构成的位符号串中，至少出现一次的符号串的数目。

设分别为不出现的位符号串的集合，为四个字符构成的位符号串的集合。则

于是

1. 欧拉函数表示小于且和互质的整数的个数。求。

将分解成质因数的乘积的形式

设为不大于且为的倍数的自然数的集合，则

由于互质，所以的最小公倍数为，所以

等等。

小于并且与互质的自然数是集合中那些不属于任何一个集合的数。由容斥原理知

上面的和式正好是下列乘积的展开式