## 容斥原理

定理：设是有限集合，是跟集合有关的个性质。设是中具有性质的元素构成的集合， 是中**不具备**性质的元素构成的集合。则

中不具备性质的元素的个数为：

一般化定理：

设是一个有限集合，是上的性质集合。求中**恰好具有**中个性质的元素个数。

设表示中**具有**括号内性质的元素的个数。规定

则

证明：设是集合中的一个元素，则：

1. 若中具有少于个性质，则对的贡献为0；
2. 若中恰好具有个性质，则对的贡献为1，对其它的贡献均为0；
3. 若具有个性质，则它对的贡献为（回想i的范围是从r到m的），从而它对和式的贡献为：

综上，式子右端是中恰好具有个性质的元素的个数。

## Mobius Inversion（反演）

### Mobius数论函数

任意大于1的整数一定可以分解为质数的幂的乘积

其中，是个互不相同的质数。

定义Mobius数论函数为

之所以强调数论函数，是因为有另外一个Mobius函数。

性质1 是一个积性函数，也就是说对于任何互质的，有

考虑到只有三种取值，因此用枚举法就能证明这个性质。

性质2 设为的所有质因数的乘积，即。则

证明：

显然的每个因数都是的因数。考虑的某个因数，若不是的因数，由于的质因数也是的质因数，所以一定有某个质因数的次数大于1，从而，对求和的贡献为0。

引理 对任意正整数，有

证明：

若，则是仅有的一个因数。由于，故(2.5)成立。

若，把按公式2.1)分解，并令，则由性质2，求等价于求。

设为的因数，有个质因数，即，则。

这样的有个，从而

### Mobius反演定理

设和是定义在正整数集合上的两个函数，若对于任意正整数，有

则可以将表示为的函数

反之，也可以从(2.6.b)得到(2.6.a)。

教材里的式子(2.6.a)用的是等号不是恒等号。但是我这里改用恒等号，因为的集合和的集合是完全相同的。

证明：

1. 先证明：

对的每个质因数，是正整数，由除法的分配率有

所以

由引理(2.4)知，

把(2.5.d)代入(2.5.c)，发现时，对求和的贡献为0，从而

从而证明。

1. 接下来证明从：

类似地，通过像(2.6.c)那样交换求和顺序，也可以证明。

### 狄利克雷积(Dirichlet Product)

也叫做狄利克雷卷积(Dirichlet Convolution)。

性质：

1. 交换律：
2. 结合律：
3. 分配律：

单位函数满足

从而有

我们还能定义Dirichlet倒数(inverse)。函数的Dirichlet inverse 为满足的函数。

## 例题

### 入门题

求由四个字符构成的位符号串中，至少出现一次的符号串的数目。

设分别为不出现的位符号串的集合，为四个字符构成的位符号串的集合。则

于是

### 欧拉函数的证明

欧拉函数表示小于且和互质的整数的个数。求。

将分解成质因数的乘积的形式

设为不大于且为的倍数的自然数的集合，则

由于互质，所以的最小公倍数为，所以

等等。

小于并且与互质的自然数是集合中那些不属于任何一个集合的数。由容斥原理知

上面的和式正好是下列乘积的展开式

### 图G不含有完全k子图

若图有个顶点，且不含有完全子图，则它的顶点的次数（degree）满足如下不等式。其中，为图的顶点集。

【速查】完全子图：个顶点两两相连。顶点次数：顶点的边数。

证明：用反证法，设。其中，意为remainder，也就是。若题设不等式成立，则对于任意的，均有

在图中任取一个顶点，用表示在图中与相邻的那些顶点构成的集合。再去另一个顶点和相应的集合。由容斥原理得到：

其中的意义是：集合中的每个至少包含个元素，而中至多包含个元素，也就是图的全部顶点。

这样，我们可以归纳出，对于，取中与相邻的顶点集，有

因此，至少有一个顶点，使得构成的一个完全子图，与题设矛盾。故题设不等式成立。

### 有限多重集合的r组合

求的10组合数。

令，则的10组合数为

设的10组合的全体为。定义性质集合，其中

：10组合中a的个数不少于4；

：10组合中b的个数不少于5；

：10组合中c的个数不少于6。

将满足性质的10组合全体记为，那么中的元素可以看做是由的6组合再拼上4个a构成的。所以

类似地，有

而a的个数不大于3、b的个数不大于4、c的个数不大于5的10组合全体为

。套用容斥原理，有

### menage问题

**(menage问题)** 对夫妇参加宴会围桌就坐，要求男女相间并且每对夫妇两人不得相邻。有多少种就座方式？

首先令女士就座，就座方案是一个圆排列问题，有种方案。

对每一种女士就座方案，我们把女士们按照右手顺序编号为，她们的丈夫享有相应的编号。设坐在第名女士右手边的男士编号为，则**下列矩阵的每一列都没有相同的数**。

我们称满足这一性质的序列为的一个二重错排。叫做menage数，记为。

定义性质：矩阵的第列存在相同的数。则由容斥原理，有

一般地，有

但是这里不好计算，我们直接计算。

1. 假定的一个排列中恰有个数分别满足性质，再把这个元素补上，就构成了的一个满足性质的全排列。因而，对于一组能构造出个满足性质的排列。
2. 取这样的序列的相当于从矩阵的前两行取个不同的数，这相当于从序列

的第个括号中取出个互不相同的数。打开（2）中的括号，则从序列（2）中取这样的序列等价于从序列

中按照如下方式取个数：

* 1. 任何两个数都不相邻，以保证所取的任何数都来自（2）的不同的括号；
  2. （3）中的两个1不能同时取。

序列（3）中满足条件a的序列个数就是从个位置中取出个不相邻位置的方法数。满足条件a但不满足条件b的序列就是从序列

中取个不相邻的数，再补取两个1，这样的方案数为。

综合以上分析

综合公式（1）和（4），有

### 欧拉函数和Mobius反演

欧拉函数满足

并由Mobius反演定理可以得到

证明：

1. 先证明式(EX6.1)。

如果，等式显然成立。

如果，设为的所有质因数的乘积，即。设为的因数，有个质因数，即，则。从而

由(EX2.1)，可以发现，上式经过一系列整理就能得到欧拉函数，即

1. 再根据(EX6.1)证明(EX6.2)。

设，把(EX6.1)等式右边的系数放入和式内部，可得到

由Mobius反演定理可以得到

### 可重圆排列问题

求集合的可重圆排列数。

设是一个不可重圆排列，将其分别从个位置断开，即可得到与之相应的个不同的线排列。

然而，一个可重圆排列在个位置断开后形成的个线排列则未必互异。例如，当，由不重复的重复次构成的圆排列，从个位置断开后只能形成个不同的线排列。而且，一个圆排列与一组线排列是一一对应的。（#1）

如果一个圆排列可以由长度为的线排列重复若干次形成，则这样的的最小值称为圆排列的周期。一个圆排列中元素的个数（计重复）称为它的长度。

设由集合中的元素形成的长度与周期都是的圆排列的个数为。结合论据（#1）来考虑，若,则周期为的全部可重圆排列对应的可重线排列的总数为。

对所有可能的周期求和，得

等号右边的代表的可重排列数。对上式应用Mobius反演(2.6.a)可得

设为集合的可重圆排列数，则

可以将化简为