Módulo para preparar el examen de clasificación en matemáticas

Departamento de Matemáticas

Universidad Externado de Colombia

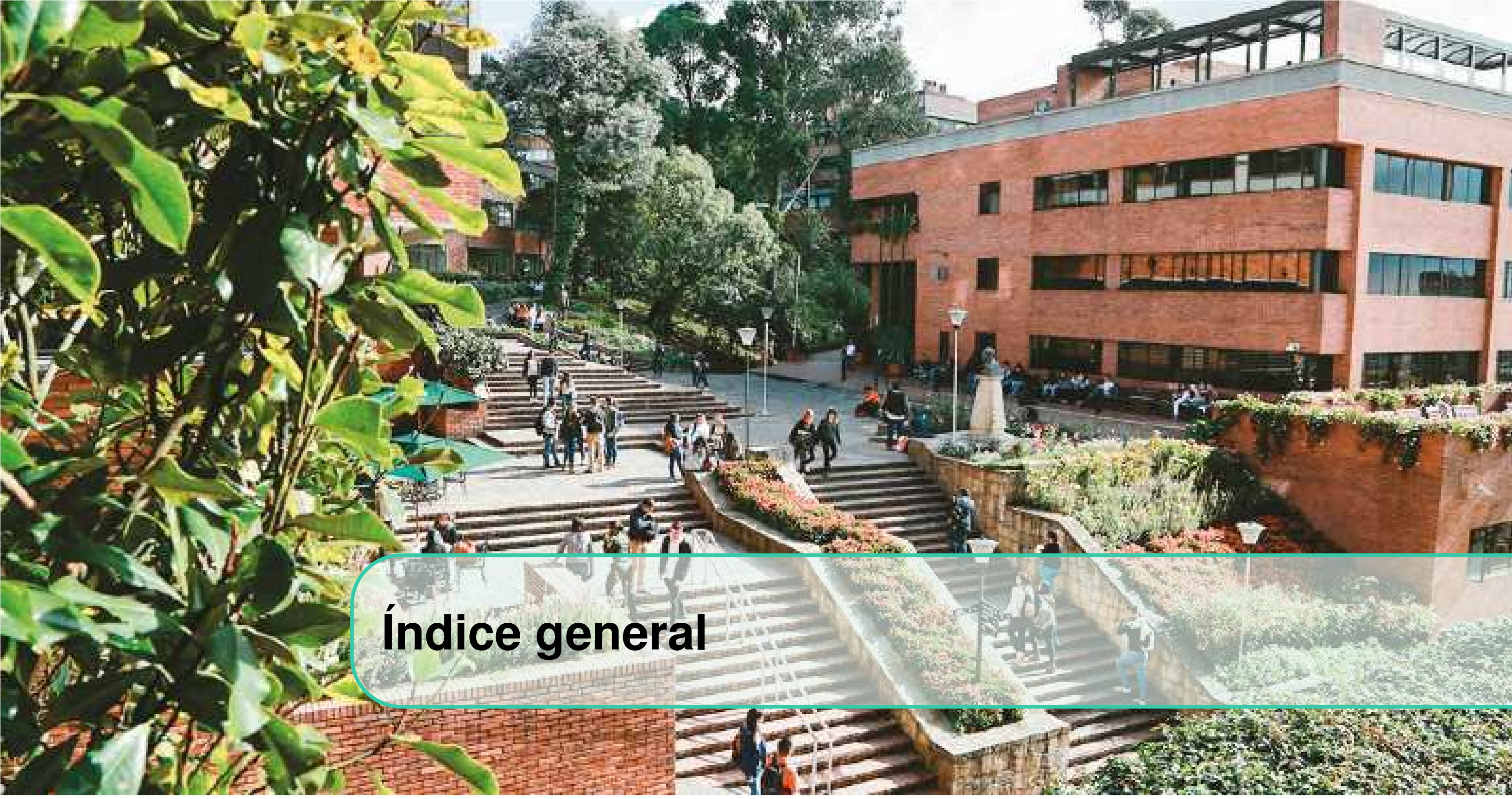
130 Años

UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA

EN CONSTRUCCIÓN... (PÁGINA)

Estas notas se hacen en el marco de la investigación del Departamento de Matemáticas de la Universidad Externado de Colombia con respecto al uso y desarrollo de las tecnologías de la información en la comprensión y enseñanza de la matemática.

Diciembre 2019



Índice general

1. Introducción

1.1 Introducción

En virtud de repasar los elementos de la matemática básica, la Universidad Externado ha dispuesto este módulo semi-virtual que los preparará para los cursos venideros. Si bien es una versión inicial del producto diseñado para un curso de pre-cálculo hay bastantes elementos bien interesantes en él que permitirán al estudiante y al aspirante estudiar los conceptos que generan más dificultades en la matemática pre-universitaria.

Este módulo cuenta con quices virtuales asociados a cada código QR expuesto en las sub-secciones llamadas Actividades de evaluación, no obstante, si se cuenta con una versión digital de este módulo al hacer clic en el título de cada código tendrá acceso al quiz correspondiente. Como una ayuda extra para los temas que presentan una mayor dificultad en la matemática básica, se han realizado vídeos explicativos con el fin de apoyar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

Adicionalmente se preparó un repositorio de los quices en la siguiente presentación:

Repositorio de quices

2. Sistemas numéricos

Los conjuntos más usados por nosotros a lo largo de este curso serán los conjuntos de números, los cuales aparte de contener los números que conocemos desde pequeños, incluyen también operaciones y propiedades que dotan a cada conjunto numérico con una estructura algebraica que nos permite modelar y abstraer diversas situaciones cotidianas en nuestro entorno personal y profesional. Evidentemente, los números son una herramienta fundamental y es necesario conocer muy bien los pormenores que nos han complicado este tema desde que los vimos por primera vez.

En principio, la historia registra que, como especie, empezamos a contar desde hace 37.000 años, pues se han encontrado huesos de animales llenos de marcas que registraban la cantidad de elementos de cierto conjunto. Después de un tiempo, usamos sistemas numéricos, casi siempre basados en 10 o 20, por los dedos en nuestras manos y pies y simbolizamos de manera conveniente cada una de estas cantidades que se iban forjando como nuevas entidades abstractas.

El sistema conocido por nosotros es un sistema decimal, con 10 dígitos, provenientes del sistema de numeración indo-arábigo, la clave es que con esos diez dígitos expresamos cualquier cantidad y magnitud a partir de la posición. Cada una de las posiciones en las que se puede ubicar un número tiene asociada una potencia de diez, llamadas unidades (10^0), decenas (10^1), centenas (10^2), unidades de mil (10^3), unidades de millón (10^6), etcétera. Haciendo uso del sistema decimal se puede representar cualquier número real bien sea 1, 5, 17.3, o $3.141592\cdots$, para representar cantidades como la última se requieren expresar cantidades más pequeñas que la unidad, esto se logra con las décimas (10^{-1}), centésimas (10^{-2}), milésimas (10^{-3}), etcétera. Veremos a continuación una recopilación de todos los conjuntos numéricos contenidos en los números reales y estudiaremos algunas propiedades y hechos importantes sobre las operaciones que podemos definir entre ellos.

2.1 La necesidad de contar - Los números naturales

Como comentamos antes, el primer uso real de números fue para contar, esos valores que permiten abstraer la noción de cantidad los llamamos número naturales y los expresamos con el símbolo $\mathbb{N}$. Expresándolos en el lenguaje de la teoría de conjuntos diríamos:

$$\mathbb{N} = \{n \mid n \text{ expresa una cantidad}\}$$

o

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

Cuando decidimos contar la cantidad de elementos que posee un conjunto, éste debe tener alguna cantidad positiva de elementos o en el peor de los casos el conjunto estará vacío, es decir, la cantidad de elementos que contiene es 0.

En este conjunto definimos dos operaciones importantes: la suma y la multiplicación; y con una prueba mental bastante simple puedes darte cuenta que cada vez que sumamos o multiplicamos dos números naturales obtenemos un número natural. Sin embargo, para la resta esto no ocurre, si bien $8-5=3$, cuando pensamos en $3-8$ tenemos dificultades, ya que el número indicaría una cantidad **negativa**, que de acuerdo con nuestra idea de cantidad, no tiene ningún sentido. Aparecen entonces los números enteros.

R

Abu Abdallah Muammad ibn Ms al-Jwrizm (Abu Yffar), conocido generalmente como al-Juarismi, fue un matemático, astrónomo y geógrafo persa musulmán, que vivió aproximadamente entre 780 y 850.

Debemos a su nombre y al de su obra principal, Hisb al-abr wa'l muqbala, nuestras palabras álgebra, guarismo y algoritmo. De hecho, es considerado como el padre del álgebra y como el introductor de nuestro sistema de numeración denominado arábigo.

Hacia 815 al-Mamun, séptimo califa Abásida, hijo de Harún al-Rashid, fundó en su capital, Bagdad, la Casa de la sabiduría (Bayt al-Hikma), una institución de investigación y traducción que algunos han comparado con la Biblioteca de Alejandría. En ella se tradujeron al árabe obras científicas y filosóficas griegas e hindúes. Contaba también con observatorios astronómicos. En este ambiente científico y multicultural se educó y trabajó al-Juarismi junto con otros científicos como los hermanos Banu Musa, al-Kindi y el famoso traductor Hunayn ibn Ishaq. Dos de sus obras, sus tratados de álgebra y astronomía, están dedicadas al propio califa. [Wik18a][Bal17]

2.2 Las cantidades negativas - Los números enteros

Los números enteros son una extensión de los números naturales, en este conjunto definimos "*las cantidades negativas*" para superar la dificultad que surgió con la resta. Simbolizamos este conjunto con $\mathbb{Z}$ y usando la notación de teoría de conjuntos los enteros se definirían así:

$$\mathbb{Z} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ ó } -n \in \mathbb{N}\}$$

En la primera definición es clave tener en cuenta que $-(-a) = a$.

o

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}.$$

Evidentemente, para cada par de números enteros la resta resulta ser también un entero, hemos superado el problema de la resta, sin embargo, la experiencia con estos nuevos números que incluyen un signo dentro de su naturaleza no es sencilla. La noción de recta numérica nos permitirá efectuar de una manera más mecánica las siguientes operaciones:

Recta numérica

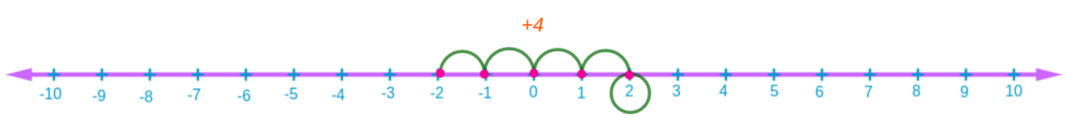
La recta numérica es una representación geométrica de los conjuntos numéricos, si bien en ella se representan todos los números reales, en la siguiente explicación consideraremos que los únicos puntos validos de la recta son los números enteros:

La recta numérica se dibuja de la siguiente forma:

La suma y la resta se puede entender como desplazamientos sobre dicha recta, cuando sumamos vamos hacia la derecha y cuando restamos vamos hacia la izquierda. Por ejemplo, al representar las siguientes operaciones observamos:

$$-2 + 4 = 2$$

(CONSISTE EN UBICARSE EN EL PUNTO -2 Y DESPLAZARSE 4 UNIDADES A LA DERECHA)



Mientras que:

$$5 - 8 = -3$$

(CONSISTE EN UBICARSE EN EL PUNTO 5 Y DESPLAZARSE 8 UNIDADES A LA IZQUIERDA)

Propiedades de las operaciones en números enteros

Veremos a continuación algunas propiedades de la suma y la multiplicación de números enteros. El manejo de signos se puede simplificar con las siguientes propiedades:

Sean a, b y c números enteros

- **Definición formal de la resta:** La resta no es más que la suma del número negativo, es decir:
$$a - b = a + (-b).$$
- **Conmutatividad:** Para cualquier par de números enteros a y b podemos cambiar el orden de los sumandos en una suma:
$$a + b = b + a.$$
Note que al aplicarlo en términos de la resta vemos que "cada número carga con su signo":
$$a - b = a + (-b) = (-b) + a = -b + a.$$
Por ejemplo,
$$3 - 5 = -5 + 3 = -2.$$
- **Asociatividad:** Para más de tres elementos no importa el orden el que se efectúen las sumas, es decir,
$$(a + b) + c = a + (b + c).$$
Gracias a esta propiedad se permite prescindir de los paréntesis en las sumas:
$$(a + b) + c = a + b + c.$$
- **En la resta sí hay que tener cuidado con los paréntesis:** A diferencia de la suma, los paréntesis son muy importantes en la resta, un signo negativo antecediendo a un paréntesis CAMBIA EL SIGNO DE TODOS LOS ELEMENTOS DENTRO DE ÉSTE:
$$-(a + b + c + d) = -a - b - c - d.$$
Por ejemplo,
$$-(5 - 3 - 2 + 4) = -5 + 3 + 2 - 4.$$

- **Ley de los signos para la multiplicación y división:** Aún no hemos hablado de la multiplicación y la división, pero ya podemos enunciar algunas de las propiedades más importantes. La ley de los signos establece el signo obtenido después de multiplicar y/o dividir números enteros, es positivo si ambos tienen el mismo signo, es negativo, si los dos valores tienen signos diferentes:

$$(+)\times(+)=(+) \qquad (+)/(+)=(+)$$
$$(+)\times(-)=(-) \qquad (+)/(-)=(-)$$
$$(-)\times(+)=(-) \qquad (-)/(+)=(-)$$
$$(-)\times(-)=(+) \qquad (-)/(-)=(+)$$

- **Conmutatividad en la multiplicación:** Para cualquier par de números enteros podemos cambiar el orden de los factores en un producto

$$a\times b=b\times a.$$

- **Asociatividad en la multiplicación:** Para tres o más valores no importa el orden en el que se efectúan los productos:

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times d).$$

- **Existencia de neutros** Para cualquier número entero se tiene lo siguiente:

$$a+0=a,$$

  0, el cero, se denomina el neutro aditivo.
  Por otro lado:

$$1\times a=a,$$

  1, el uno, se denomina el neutro multiplicativo.

- **Inversos aditivos:** Para cualquier entero a existe el número $-a$ tal que:

$$a+(-a)=0.$$

  Es decir, para cada número entero es posible hallar otro número entero, su inverso aditivo, de tal modo que al ser sumados dan el neutro de la suma.

  Nótese que esta propiedad no se satisface para la multiplicación, si fuera así tendríamos que considerar números fraccionarios, que no son enteros. El conjunto numérico que satisface esta propiedad se conoce como el conjunto de números racionales.

2.3 Las partes de un todo - Los números racionales

Los números racionales corresponden a los valores numéricos que expresan una división entre números enteros. Aunque de aquí recuperamos cualquier número entero, por ejemplo, $5 = \frac{25}{5}$, también tenemos números no necesariamente enteros como por ejemplo: $\frac{2}{5}$, $-\frac{10}{3}$ y $\frac{7}{8}$. De hecho, haciendo uso de la notación por compresión de la teoría de conjuntos tenemos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}.$$

Un hecho importante de los números racionales es que un número no se expresa con una única fracción, de hecho, tenemos infinitas fracciones para expresar el mismo número racional, veamos algunos ejemplos:

- $-\dfrac{3}{4} = \dfrac{-6}{8} = \dfrac{15}{-20} = -\dfrac{150}{200} = -\dfrac{33}{44}$.
- $4 = \dfrac{16}{4} = \dfrac{20}{5} = \dfrac{4}{1} = \dfrac{-32}{-8}$.
- $\dfrac{32}{6} = \dfrac{16}{3} = \dfrac{-64}{-12} = \dfrac{-32}{-6}$.

Es decir, para $a, c \in \mathbb{Z}$ y $b, d \in \mathbb{Z} - \{0\}$, los fraccionarios $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales siempre que exista un valor entero α tal que:

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha c}{\alpha d},$$

en tal caso, diremos que $\frac{c}{d}$ es una simplificación de $\frac{a}{b}$ o también que $\frac{a}{b}$ es una amplificación de $\frac{c}{d}$.

Es claro que existe una única fracción $\frac{p}{q}$ que representa al número racional tal que p y q no se puede simplificar más, en este caso llamamos a p y q primos relativos (su máximo común divisor a 1), es decir, la fracción no se puede simplificar más.

Operaciones entre números racionales

Veremos las características más importantes en el momento de hacer operaciones entre números racionales o fraccionarios. Aunque para muchas personas este ejercicio trae consigo muchas complicaciones describiremos aquí lo que debemos tener en cuenta a la hora de operar:

- **Suma y resta de fracciones**
  - *Fracciones homogéneas:* Si dos fracciones tienen el mismo denominador entonces el resultado es, la suman de los numeradores y el denominador es el mismo que tenían los sumandos.

Ejemplos:

♣ $\dfrac{2}{5}+\dfrac{20}{5}=\dfrac{22}{5}$.

♣ $\dfrac{-3}{4}-\dfrac{30}{4}=-\dfrac{33}{4}$.

En este ejercicio debes ser muy cuidadoso con los signos. Es más cómodo asociárselos a los numeradores

♣ $-\dfrac{3}{5}+\dfrac{12}{5}=\dfrac{9}{5}$.

♣ $-\dfrac{50}{67}+\dfrac{20}{67}=-\dfrac{30}{67}$.

- *Fracciones heterogéneas:* En este caso, la clave es amplificar las fracciones hasta que tengan el mismo denominador, hay dos métodos conocidos:

Usar el otro denominador: La idea es amplificar cada una de las fracciones por el denominador de la otra

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+cb}{bd},$$

también puede usarse el siguiente esquema para recordarla de una mejor manera

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{3\times 5+2\times 4}{4\times 5}=\frac{15+8}{20}=\frac{23}{20}.$$

Mínimo común múltiplo: Esta idea nos permite hacer la suma de más de tres fracciones simultáneamente. El objetivo es buscar el mínimo común múltiplo de los denominadores y amplificar cada una de las fracciones usando el cociente entre el éste y el denominador correspondiente, por ejemplo

60 es el MCM.

$$\begin{aligned}
\frac{5}{4}+\frac{8}{6}+\frac{3}{10} &= \frac{5\times(\frac{60}{4})}{4\times(\frac{60}{4})}+\frac{8\times(\frac{60}{6})}{6\times(\frac{60}{6})}+\frac{3\times(\frac{60}{10})}{10\times(\frac{60}{10})}\\
&= \frac{5\times 15}{4\times 15}+\frac{8\times 10}{6\times 10}+\frac{3\times 6}{10\times 6}\\
&= \frac{75}{60}+\frac{80}{60}+\frac{18}{60}\\
&= \frac{75+80+18}{60}\\
&= \frac{173}{60}.
\end{aligned}$$

- **Multiplicación de fracciones** La multiplicación se hace directa, el numerador del producto es el resultado de multiplicar los numeradores de cada fracción y el denominador es el resultado de multiplicar los denominadores.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{5}\times\frac{2}{6}=\frac{4\times 2}{5\times 6}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}.$$

- **División de fracciones o ley de extremos y medios** La división se hace como una multiplicación cruzada, debemos multiplicar el numerador con el denominador de la otra fracción y el denominador con el numerador. Ejemplo,

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{6}}=\frac{4\times 6}{5\times 2}=\frac{24}{10}.$$

Una mirada alternativa a la división de fracciones se conoce como la ley de extremos y medios o regla de la oreja:

$$\frac{\frac{\color{red}{4}}{\color{blue}{5}}}{\frac{\color{blue}{2}}{\color{red}{6}}}=\frac{\color{red}{4\times 6}}{\color{blue}{5\times 2}}=\frac{24}{10}.$$

2.4 Jerarquía en las operaciones

Ya que hicimos un recorrido a través de las operaciones aritméticas más importantes, es muy importante tener en cuenta cómo hacer las operaciones, es decir, es fundamental reconocer el orden en las operaciones para evitar ambigüedades en expresiones como:

$$5+3\times 8.$$

Esto se conoce como jerarquía en las operaciones y las reglas que estableceremos para efectuar las operaciones son las siguientes:

- En primer lugar se efectúan las operaciones entre paréntesis, corchetes y llaves.
- Luego, se calculan potencias y raíces.
- Después productos y cocientes.
- Finalmente, se calculan las sumas y restas.

En los siguientes vídeos encontrarás algunos ejercicios en los cuales es fundamental tener clara la jerarquía en las operaciones:

Un primer ejemplo

`https://youtu.be/5W-DFzY6JiY`

Cuando se tienen multiplicaciones y divisiones

`https://youtu.be/R2Gm8Ccwb1c`

Únicamente divisiones

`https://youtu.be/fXgOyRtK2Dw`

Operaciones entre fracciones

`https://youtu.be/UsNVHb-sG9Y`

Con símbolos de agrupación

`https://youtu.be/h3Nr-2YCLzo`

2.5 Expresiones decimales

Para finalizar esta sección estudiaremos las expresiones decimales de los números racionales. Como sabemos, no solo podemos usar fracciones para expresar una parte, conocemos también los números decimales, esta representación resulta a tomar una unidad y partirla en potencias de 10. Entre los valores decimales conocidos tenemos: $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{1}{3} = 0.33333\cdots$, $\frac{2}{2} = 1$, entre otros.

Para pasar de una expresión fraccionaria a una decimal basta dividir la fracción. Podemos usar la calculadora para comprobarlo. Unos ejemplos:

$$\frac{12}{5} = 2.4$$

$$\frac{8}{9} = 0.8888\cdots = 0.\overline{8}$$

La línea sobre el 8 indica que el 8 se repite indefinidamente.

Como vemos hay dos tipos de expresiones decimales para una fracción, finitas o infinitas periódicas, para poder pasar de la expresión decimal a la expresión fraccionaria estudiaremos estos dos casos.

- **Números decimales finitos** El proceso para pasar esto números a fracciones es muy sencillo, solo debemos contar cuantos dígitos hay después de la coma , escribir el número sin coma como numerador y como denominador el valor 10^n, donde n es la cantidad de dígitos después de la coma. Ejemplo:

$$45.32 = \frac{4532}{100} = \frac{1133}{25},$$

$$8.2 = \frac{82}{10} = \frac{41}{5},$$

$$0.325 = \frac{325}{1000} = \frac{65}{200}.$$

- **Números decimales infinitos periódicos** El proceso para pasar esto números a fracciones consiste en simbolizar el número con x y usar una potencia de 10 conveniente para que al hacer una diferencia eliminemos esa parte decimal infinita. Ejemplo:

$$\begin{aligned} 0.88888888\cdots &= x \\ 8.88888888\cdots &= 10x \\ 8.88888888\cdots - 0.88888888\cdots &= 10x - x \\ 8 &= 9x \\ \frac{8}{9} &= x. \end{aligned}$$

Actividad de evaluación

CONCEPTOS

PROBLEMAS

Haz clic sobre la palabra o sigue el código QR para hacer dos pequeños quices.

3. Razones, proporciones y porcentajes

Los números racionales aparecen constantemente en nuestra vida, de hecho, son muy útiles a la hora de expresar una comparación entre dos magnitudes y nos permite establecer equivalencias entre situaciones a partir de la proporcionalidad. Estudiaremos esta noción y resolveremos unos ejemplos cuyo estilo se replicará a través de toda nuestra carrera. Establecer relaciones entre cantidades resulta ser de las actividades mas importantes en todas las aplicaciones de las matemáticas en otras ciencias.

3.1 Razones y proporciones

Denominaremos **razón** a un cociente que representa la relación entre dos cantidades vinculadas. Por ejemplo, “de los cinco intentos logré hacerlo en 4”, una razón que expresa esta situación es $\frac{4}{5}$ y se entiende como la comparación entre la cantidad de éxitos y el total de posibilidades.

Si por ejemplo tenemos un salón con 24 hombres y 18 mujeres, entonces la razón dada por $\frac{24}{18}$ se entiende como la relación entre la cantidad de hombres y mujeres. Al simplificar la fracción obtenemos: $\frac{4}{3}$. Esto se puede leer como ”por cada cuatro hombres hay tres mujeres en el salón”.

Proporciones

Proporciones directas Una **proporción directa** indica una equivalencia entre un par de

razones. En nuestro ejemplo del salón de clases, podemos comparar la razón que tenemos de 4 hombres por cada 3 mujeres , con una equivalente tal como, por cada 8 hombres hay 6 mujeres, $\frac{8}{6}$. Por lo visto en la sección anterior sabemos que ambas fracciones son equivalentes.

Un proceso sencillo que nos permite establecer la igualdad de la proporción es multiplicar cruzados los numeradores con los denominadores. Si obtenemos el mismo resultado en ambas multiplicaciones tenemos una equivalencia. Por ejemplo,

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$$

pues

$$4 \times 6 = 24 = 8 \times 3.$$

Ejercicio 3.1.1. En una fábrica, 6 trabajadores de 100 tiene la posibilidad de comprar carro. Si hay 5500 trabajadores en la fábrica ¿Cuántos trabajadores podrán comprar automóvil?

Solución: En este caso tenemos una incógnita en la equivalencia de fracciones:

$$\frac{6}{100} = \frac{x}{5500}$$

Así que al multiplicar ambos lados de la ecuación por 5500 obtenemos:

$$\frac{6}{100} * 5500 = 330.$$

Esta proporcionalidad tiene una particularidad y es que una de sus razones se expresa con denominador 100, este tipo de razón se conoce como porcentaje y en otra sección la estudiaremos con más detalle.

Proporciones inversas

Una particularidad de los ejemplos anteriores es que si una cantidad aumenta la otra también lo hace, pero si llegamos a cambiar ese hecho, si una aumenta mientras la otra disminuye, la proporcionalidad no se expresa como una igualdad de razones sino que se tiene en cuenta que el producto de estas cantidades siempre es el mismo.

Por ejemplo, si tres obreros demoran diez días en hacer una obra, seis obreros demoraran cinco días y, observando que el producto es el mismo, sabemos que cinco obreros demorarán seis días.

En este caso la relación entre cantidades no es un cociente, sin embargo, podemos expresarla usando el símbolo “:”. Así tenemos 3:10, 6:5; 5:6. Todas las relaciones con la particularidad de que

$$3 \times 10 = 5 \times 6 = 6 \times 5.$$

Ejercicio 3.1.2. En una finca hay 300 pollos que se comen 200 kg de concentrado en 20 días. Si se compran 200 pollos más. ¿En cuánto tiempo comerán la misma cantidad de concentrado?

Solución: En este caso tenemos una incógnita en la equivalencia de productos:

Observe que la cantidad de Kg consumidos no es importante para este ejercicio porque se mantiene constante.

$$300 \times 20 = 500x$$

Al dividir por 500 los dos lados de la igualdad:

$$\frac{300 \times 20}{500} = 12.$$

Los pollos terminan su merienda en 12 días.

Actividad de evaluación

CONCEPTOS PROBLEMAS

Haz clic sobre la palabra o sigue el código QR para hacer dos pequeños quices.

3.2 Porcentajes

Como comentamos arriba hay un tipo de razón especial que representa una cantidad dada como una fracción en 100 partes iguales. Este tipo de razones se conoce como porcentaje y nos indica que de cada cien unidades de una cantidad tomamos el tanto por ciento.

El porcentaje se denota utilizando el símbolo "%", que matemáticamente equivale al factor 0,01. Por ejemplo, el 43 % de 300 consiste en multiplicar 0.43 con 300: Tenemos:

$$\text{El 43\% de 300 es:} 0.43 \times 300 = 129.$$

Es decir, si por cada 100 hay 43 entonces por cada 300 hay 129.

En esencia, el objetivo de expresar razones usando porcentajes es tener un denominador común: 100, para así, poder hacer comparaciones y operaciones más fácil.

Ejercicio 3.2.1. El precio normal de un computador portátil es de \$ 1'600.000. Si el computador tiene un descuento del 25 %, ¿Cuál es el nuevo precio?

Solución: Primero tenemos que calcular el descuento, es decir, el 25 % de 1'600.000.

$$1600000 \times \frac{25}{100} = 400000$$

El nuevo precio es el precio inicial menos el descuento,

$$1600000 - 400000 = 1200000$$

De este modo, el precio del computador después del descuento es $ 1'200.000.

Interés simple

El interés, en las ciencias administrativas, es un índice usado para medir rentabilidad en las inversiones o los costos de un crédito. El interés no es más que un porcentaje para hacer comparaciones relativas y no absolutas. El primer tipo de interés que vemos en nuestra carreras y que seguro ya conocemos es el interés simple.

El interés simple hace referencia a los intereses que produce un capital inicial en un periodo de tiempo el cual no se acumula al capital para producir los intereses del siguiente periodo.

Tenemos:

- Los intereses de cada periodo se calculan siempre sobre el capital inicial.
- El interés simple generado era igual en todos los periodos de la inversión o préstamo mientras la tasa de interés y el plazo no cambien.
- El interés I que produce un capital es directamente proporcional al capital o valor presente VP, al tiempo t, y a la tasa de interés i

$$I = VP \times i \times t$$

- Si aumenta el capital inicial o aumenta la tasa de interés o aumenta el tiempo, el interés también aumenta.
- Interés I es diferente a la tasa de interés i, ya que I es una cantidad de dinero mientras que i es un porcentaje.
- La tasa de interés i debe estar dada en el mismo periodo de tiempo t.

Supongamos que prestamos a un amigo un capital de $2'000.000 de pesos a una tasa de interés simple del 5% mensual durante de 6 meses.

El interés simple se caracteriza porque en cada periodo de tiempo siempre se calculan los intereses únicamente sobre el capital inicial.

Mes	**Capital sobre el cual se calculan los intereses**	**Interés 5%**
1	2'000.000	100.000
2	2'000.000	100.000
3	2'000.000	100.000
4	2'000.000	100.000
5	2'000.000	100.000
6	2'000.000	100.000
	Total de intereses	600.000

Observe que en cada mes los intereses generados son iguales:
2'000.000$\times 0.05 =$100.000 y como son 6 meses en total los intereses generados son de 600.000.

Ejercicio 3.2.2. ¿Cuánto es el interés simple producido por un capital de $500.000 invertido durante 4 años a una tasa del 8 % anual?

Solución:

- El capital inicial $VP = \$500.000$
- La tasa de interés $i = 8\,\%$ que es equivalente a $i = \frac{8}{100} = 0.08$.

Es decir, que en el primer año los intereses generados serán

$$500000 \times 0.08 = 40000$$

En el interés simple, los intereses se calculan siempre sobre el capital inicial, es decir, en cada uno de los 4 años el interés es de 40.000. Por lo tanto el interés simple durante los 4 años es de 40.000×4=160.000.

$$I = 500000 \times 0,08 \times 4 = 160000$$

`https://youtu.be/jv-SxEX2_CM`

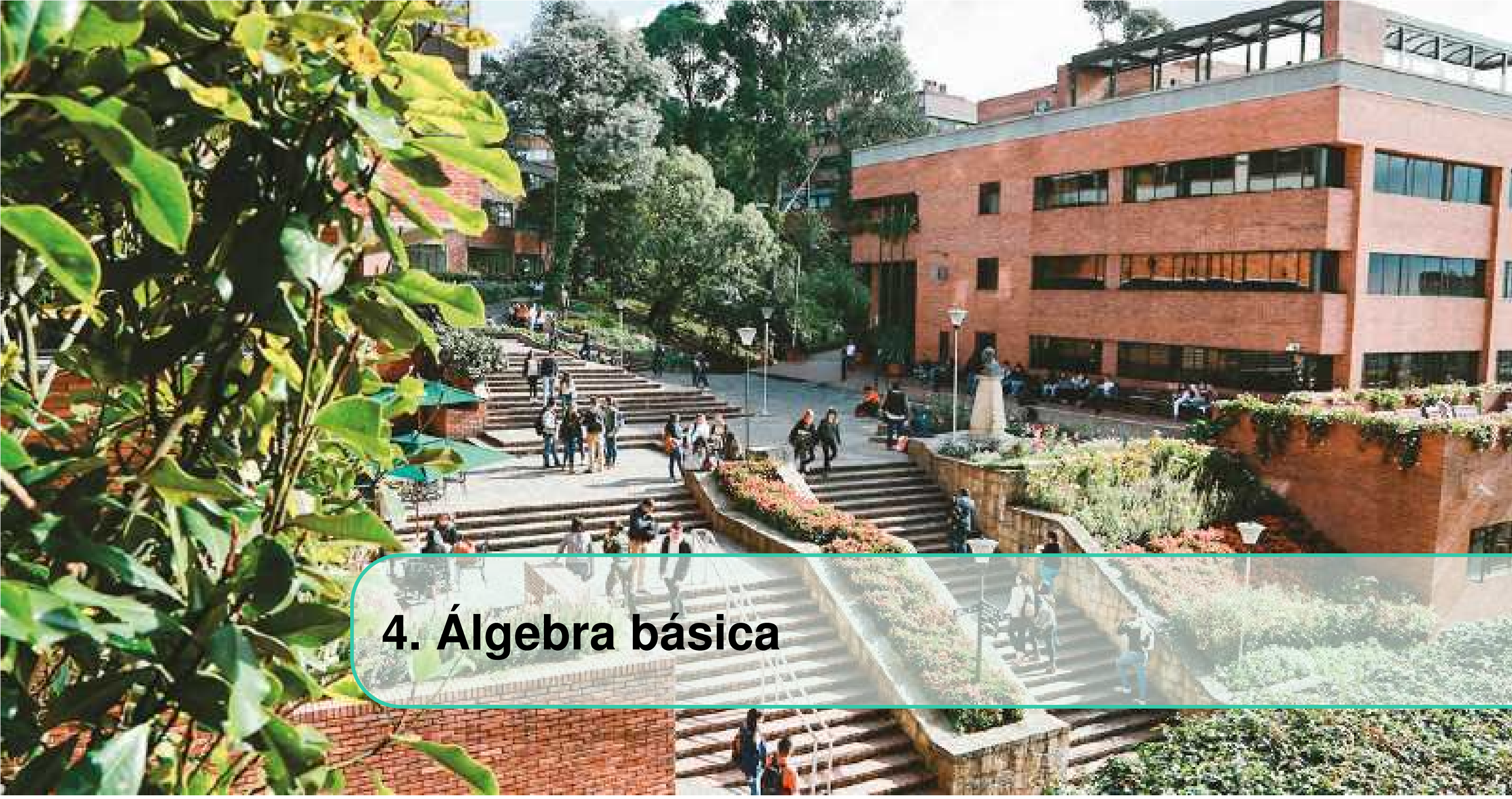
`https://youtu.be/3c-v_04ZCOI`

Actividad de evaluación

CONCEPTOS

PROBLEMAS

Haz clic sobre la palabra o sigue el código QR para hacer dos pequeños quices.



4. Álgebra básica

Un adecuado manejo de técnicas algebraicas básicas nos garantiza un buen entendimiento de casi todos los temas alrededor de las matemáticas y sus aplicaciones. Es fundamental que reconozcamos los siguientes métodos y técnicas algebraicas como también debemos identificar el momento y la forma en que deben ser aplicados.

4.1 Expresiones algebraicas

Quizás este es uno de nuestros primeros pasos hacia la abstracción matemática de situaciones cotidianas. En situaciones tan sencillas como: "¿qué tanto gastaré en la semana en fotocopias?" O "¿cuánto gastaré en buses?" tienen una respuesta común: depende. Ese depende representa esa variable que puede tomar cualquier valor dependiendo de las fotocopias que saques o la cantidad de buses en los que te transportes.

Por ejemplo, si cada fotocopia cuesta $100 y decimos que sacaste x fotocopias, puedes expresar el gasto con

$$100x.$$

Esta es una expresión algebraica.

Una expresión algebraica es un conjunto de cantidades numéricas y literales relacionadas entre sí por los signos de las operaciones aritméticas como sumas, diferencias, multiplicaciones, divisiones y potencias. Por ejemplo:

$$\frac{x-y}{1000}; \qquad \sqrt{x}; \qquad 3x^3+5x-454.$$

Observe que en los anteriores ejemplos hay una expresión algebraica con dos letras x y y, esta letras se conocen como variables de la expresión. En nuestro caso estudiaremos inicialmente expresiones algebraicas de una sola variable.

El tipo de expresiones que estudiaremos en este módulo se conoce como polinomio (de una variable) y no es más que la suma entre productos de números (llamados coeficientes) con potencias no negativas de la variable x. Por ejemplo,

$$3x^4 + 2x^2 + 1 \text{ o } 2x^3 - 5x + 4.$$

El mayor exponente que aparece en el polinomio se conoce como grado del polinomio y el coeficiente que acompaña a esta potencia de la variable se conoce como coeficiente principal. El valor sin variable se conoce como coeficiente constante. En los ejemplos tenemos lo siguiente:

	$3x^4+2x^2+1$	$2x^3-5x+4$
Grado	4	3
Cof. principal	3	2
Cof. constante	1	4

Cada producto entre un coeficiente y una potencia de una variable se conoce como término, la cantidad de términos indica si el polinomio es un monomio (un término), binomio (dos términos), trinomio (tres términos), entre otros.

Estos nuevos elementos se pueden operar de la misma manera que los números, sin embargo, antes de continuar debemos hacer un repaso de las leyes de exponentes que en este caso serán de gran importancia a la hora de efectuar operaciones entre expresiones.

Leyes de exponentes

Dado un valor a y un entero positivo n, sabemos que la potencia n-ésima de a, notada por a^n, no es más que la multiplicación de a consigo misma n veces. Es decir,

$$a^n = \underbrace{a \times a \cdots a}_{n \text{ veces}}.$$

En este caso, denotamos a a como la base de la potencia y a n como el exponente.

De esta operación tenemos alguna propiedades que nos permiten generalizar la noción de potencia a exponentes no necesariamente enteros positivos, podremos definir potencias para exponentes negativos y fracciones.

Propiedades de las potencias

- **Producto de potencias:** Cuando dos potencias de una misma base se multiplican, el resultado es igual a la base elevada a la suma de los dos exponentes. Es decir,

  $$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

  Ejemplo:

  $$5^2 \times 5^3 = 25 \times 125 = 3125 = 5^5.$$

- **División de potencias:** Cuando una potencia se divide entre otra con la misma base, el resultado es igual a la base elevada a un exponente que es la diferencia del exponente que está en el numerador y el exponente del denominador. Es decir,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Ejemplos:

  - $\dfrac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5.$
  - $\dfrac{x^6}{x^2} = x^{6-2} = x^4.$
  - $\dfrac{x^6+3}{x^2} = \dfrac{x^6}{x^2} + \dfrac{3}{x^2} = x^4 + \dfrac{3}{x^2}.$
  - $\dfrac{x^6}{x^2+1}$. **NO se puede simplificar, la operación principal en el denominador es una suma y no un producto.**

Usamos fracciones homogéneas

Un error muy común se da con este tipo de expresiones.

Observación: Esta propiedad nos permite definir las potencias con exponente negativo. Tenemos claro que para todo número $a \neq 0$ se cumple que $a^0 = 1$, luego

$$a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}.$$

Por ejemplo,

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

.

- **Potencia de una potencia:** Una potencia elevada a una potencia es igual a la base elevada al producto de los dos exponentes. Es decir,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Ejemplo:

  - $(8^4)^2 = 8^{4\times 2} = 8^6.$
  - $\dfrac{(x^6)^{-2}}{x^2} = \dfrac{x^{6(-2)}}{x^2} = x^{-12-2} = x^{-14}.$

- **Potencia de un producto:** La m-ésima potencia del producto de dos números es igual al producto de las m-ésimas potencias de los dos números. Es decir,

$$(ab)^m = a^m \times b^m.$$

Ejemplo:

- $(2x^4)^2 = \left(2^2\right)x^8 = 4x^8$.
- $\dfrac{(3x)^{-2}}{x^2} = \dfrac{3^{-2}x^{-2}}{x^2} = \dfrac{1}{9x^2x^2} = \dfrac{1}{9x^4}$.

- **Potencia de una división:** El cociente de dos números elevados a la m-ésima potencia es igual al cociente de las m-ésimas potencias números. Es decir,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Ejemplo:

- $$\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = \frac{x^4}{16}.$$

Con estas leyes en cuenta podemos definir las operaciones entre polinomios. Es importante tener claro que todo lo escrito acá es una generalización de las propiedades que encontramos en los sistemas numéricos y que si remplazamos la variable por cualquier valor las igualdades se siguen satisfaciendo.

4.2 Operaciones Algebraicas

Los elementos que acabamos de definir, los polinomios, admiten la definición de operaciones entre ellos, simplemente debemos generalizar lo que conocemos de las operaciones aritméticas con el cuidado de no generar incongruencias.

Adición y sustracción de polinomios

Aquí solo hay una regla sencilla, en las expresiones algebraicas únicamente se suman los términos cuya parte variable sea exactamente igual salvo el orden. Por ejemplo:

$$(x+y)+(3x-2y) = x+3x+y-2y = 4x-y.$$

Las variables deben ser igual en todo, incluso en su potencia, por ejemplo, el termino x **no se puede sumar** con x^4.

$$(2x^2-5x+10)+(2x^2-3x+1) = 4x^2-8x+11.$$

Finalmente, cuando tenemos una resta previa a un paréntesis todos los términos del paréntesis cambian de signo, por el producto de signos invlucrado al aplicar la ley distributiva:

$$(2x^2-3x+1)-(x^2+2x-1) = 2x^2-3x+1-x^2-2x+1 = x^2-5x+2.$$

https://youtu.be/YzLP1-A72C4

Producto de polinomios

La clave para definir el producto entre polinomios es la propiedad distributiva, es decir, debemos tener claro que:

$$a(x+y) = ax + ay.$$

Lo que decimos aquí es que cada vez que multipicamos un elemento por un paréntesis, dicho elemento se multiplica por todos los elementos dentro del paréntesism, teniendo en cuenta la ley de signos entre ellos.

Ahora asumamos que multiplicamos un paréntesis con otro paréntesis:

$$(a+b)(x+y).$$

Por lo que acabamos de decir tenemos:

$$(a+b)(x+y) = (a+b)x + (a+b)y$$

y aplicando nuevamente lo mismo tenemos:

$$(a+b)x + (a+b)y = ax + bx + ay + by.$$

Es decir,

$$(a+b)(x+y) = ax + bx + ay + by,$$

Cada término del paréntesis de la izquierda se multiplicó con cada término del paréntesis de la derecha.

Luego, cada vez que hagamos un producto entre polinomios debemos multiplicar cada elemento de uno con todos los elementos del otro.

Veamos algunos ejemplos:

$$\begin{aligned}(2x+6)(2x+1) &= (2x)(2x) + (2x)(1) + 6(2x) + 6(1)\\ &= 4x^2 + 2x + 12x + 6\\ &= 4x^2 + 14x + 6\end{aligned}$$

https://youtu.be/nuwU8eaXN1w

4.3 Factorización

Uno de los procesos más importantes del álgebra es la factorización, consiste en reescribir una expresión algebraica como el producto de dos o más factores. Hay varios métodos de factorización que se usan habitualmente con el fin de simplificar las expresiones algebraicas.

Factor común:

En este caso el objetivo es determinar cuál es el elemento común en todos los términos del polinomio. Adicionalmente, debemos reconocer el máximo común divisor entre todos los coeficientes.

Por ejemplo, en el siguiente polinomio,

$$5xy^3 + 20x^2y^2 - 10x^3y^2$$

observamos:

- En todos los términos del polinomio aparecen las variables x y y. Tomamos el menor exponente que aparece en todas los términos y deducimos que la expresión a factorizar es xy^2.
- El máximo común divisor de los coeficientes de la expresión es 5.

Tenemos:

$$5xy^2(y + 4x - 2x^2)$$

https://youtu.be/XcmDdWLnP28

Diferencia de cuadrados:

Para factorizar usando diferencia de cuadrados debemos hacer dos cosas:

- Identificar la diferencia de cuadrados.
- Calcular la raíz de los cuadrados.
- La diferencia de cuadrados es igual a la suma de las raíces por la resta de las mismas.

Por ejemplo, en el siguiente polinomio,

$$4x^2 - 81y^4$$

observamos:

- Efectivamente es una diferencia de cuadrados, ya que:

$$4x^2 = (2x)^2 \text{ y } 81y^4 = (9y^2)^2$$

- La factorización que obtenemos es:

$$4x^2 - 81y^4 = (2x)^2 - (9y^2)^2 = (2x + 9y^2)(2x - 9y^2)$$

https://youtu.be/LJEoUSHMqFU

Trinomios cuadrados:

Para factorizar un trinomio de la forma ax^2+bx+c, con $a \neq 0$, tenemos que considerar dos casos:

- Cuando $a=1$
- Cuando $a \neq 1$

Cuando $a=1$ solo buscamos un par de números que su multiplicación sea igual a c y su suma sea igual a b. Si dichos números son m y n, la factorización del polinomio es:

$$(x+m)(x+n).$$

Por ejemplo, para factorizar el polinomio

$$x^2-5x+6,$$

solo debemos observar que para -3 y -2 se satisface que:

- $(-3)(-2)=6$ y
- $(-3)+(-2)=-5$

La factorización que obtenemos es:

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$

https://youtu.be/irTaQAQ11Vs

https://youtu.be/dp7dMNfVJzg

Para factorizar un polinomio cuando $a \neq 1$, solo debemos buscar un par de números que multiplicados sean iguales a $a \times c$ y sumados den b.Si dichos números son m y n, la factorización del polinomio es:

$$\frac{(ax+m)(ax+n)}{a}.$$

Se debe usar factor común para reducir la factorización lo mejor posible.

Por ejemplo, para factorizar el polinomio

$$2x^2-3x-2,$$

solo debemos observar que para 1 y -4 se satisface que:

- $(1)(-4)=-4=(2)(-2)$ y
- $(1)+(-4)=-3$

La factorización que obtenemos es:

$$2x^2-3x-2=\frac{(2x+1)(2x-4)}{2}=\frac{2(2x+1)(x-2)}{2}=(2x+1)(x-2)$$

`https://youtu.be/vkhWLlOtZJ0`

En estos dos ejemplos se muestran otras alternativas a la hora de factorizar trinomios cuando $a \neq 1$

Por factor común

`https://youtu.be/11UxVkMUJEA`

Por fórmula cuadrática

`https://youtu.be/iCOCRmFYRU0`

División sintética:

Si el objetivo es factorizar un polinomio de grado 3 o uno de grado 4, se podría pensar en hacer uso de las ecuaciones cúbica o cuártica, respectivamente, pero éstas son poco prácticas; así que surge la necesidad de un método un poco más sencillo de utilizar y que sirva para un polinomio de cualquier orden (incluso para los de grado 2), dicho método se conoce como la *división sintética* o *regla de Ruffini*.

Si se desea factorizar el polinomio

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24$$

lo primero que se debe tener en cuenta es que el coeficiente del término de mayor grado es 1, esto hará que el conjunto de candidatos para que la división sea exacta no sea tan extenso. Ahora debemos hallar el conjunto de divisores del término independiente

$$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

los candidatos para que la división sea exacta serán todos estos elementos tanto con signo positivo como con signo negativo, es decir, buscaremos en el conjunto $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$ quien haga la división exacta.

Para esto escribiremos todos los coeficientes del polinomio en orden descendente y *bajaremos* el coeficiente del primer término,

$$\begin{array}{ccccc|l}
x^4 & x^3 & x^2 & x & c & \\
1 & 0 & -15 & -10 & 24 & \underline{} \\
 & & & & & \\
\hline
1 & & & & &
\end{array}$$

En el espacio de la derecha se pondrá alguno de los candidatos, incluyendo signo, y se multiplicará, en este caso. con el 1 y el resultado se escribirá debajo del 0, para luego sumar el 0 y el resultado del producto escribiendo el resultado debajo de la línea, al lado del 1, y se proseguirá el proceso hasta agotar todos los términos del polinomio. Si el último resultado es 0 quiere decir que el la división es exacta y se podrá factorizar el polinomio como el producto de un polinomio de grado 3 por otro de grado 1.

$$\begin{array}{ccccc|c} x^4 & x^3 & x^2 & x & c & \\ 1 & 0 & -15 & -10 & 24 & 1 \\ & 1 & & & & \\ \hline 1 & 1 & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} x^4 & x^3 & x^2 & x & c & \\ 1 & 0 & -15 & -10 & 24 & 1 \\ & 1 & 1 & & & \\ \hline 1 & 1 & -14 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} x^4 & x^3 & x^2 & x & c & \\ 1 & 0 & -15 & -10 & 24 & 1 \\ & 1 & 1 & -14 & & \\ \hline 1 & 1 & -14 & -24 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} x^4 & x^3 & x^2 & x & c & \\ 1 & 0 & -15 & -10 & 24 & 1 \\ & 1 & 1 & -14 & -24 & \\ \hline 1 & 1 & -14 & -24 & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = (x^3 + x^2 - 14x - 24)(x - 1)$$

los coeficientes del polinomio son los resultados de las sumas, es decir, los números que se encuentran debajo de la línea, mientas que el binomio se escribe como x menos el candidato que ha funcionado.

Ahora bien se debe factorizar el polinomio de grado 3 que ha quedado haciendo uso de ésta misma herramienta

$$\begin{array}{cccc|c} x^3 & x^2 & x & c & \\ 1 & 1 & -14 & -24 & -3 \\ & -3 & 6 & 24 & \\ \hline 1 & -2 & -8 & 0 & \end{array}$$

Por lo que al factorizar el polinomio de grado 2 se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} x^4 - 15x^2 - 10x + 24 &= (x^3 + x^2 - 14x - 24)(x - 1) \\ &= (x^2 - 2x - 8)(x + 3)(x - 1) \\ &= (x - 4)(x + 2)(x + 3)(x - 1). \end{aligned}$$

https://youtu.be/C4gav6u7e6c

Nota:

En el caso que el coeficiente principal sea diferente de 1, la única diferencia es que el conjunto de candidatos crece, ya que se deben considerar todas las posibles combinaciones de divisores del término independiente sobre los divisores del coeficiente principal, y se sigue el proceso exactamente igual al descrito anteriormente.

Por ejemplo si se deseara factorizar el polinomio

$$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$$

el conjunto de candidatos sería $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 1/2 \pm 3/2\}$, fíjese que los términos $\pm 2/2$ y $\pm 6/2$ no se incluyen ya que son iguales a ± 1 y ± 3 respectivamente, elementos que ya estaban en el conjunto.

CONCEPTOS

PROBLEMAS

Haz clic sobre la palabra o sigue el código QR para hacer dos pequeños quices.

5. Ecuaciones

En términos generales, una ecuación es una igualdad entre dos expresiones en la que aparecen elementos conocidos llamados constantes y otros desconocidos a los cuales denominaremos incógnitas, los cuales están relacionadas mediante operaciones matemáticas. En este tipo de expresiones lo que se busca es hallar el/los valores que las variables pueden tomar de tal manera que la expresión sea cierta, a dichos valores los llamaremos solución/soluciones de la ecuación.

5.1 Ecuaciones lineales

Tal vez el tipo mas sencillo, pero no por eso menos importante, es el de las ecuaciones lineales, las cuales son aquellas que pueden ser llevadas a la forma

$$ax = b,$$

mediante el uso de operaciones algebraicas válidas. En el caso de ecuaciones lineales con una incógnita la estrategia para solucionarla consiste en pasar los términos que contengan a la variable a un lado de la ecuación mientras que los términos que no la contengan se pasan al otro para de esta forma poder despejar la variable. Por ejemplo consideremos la ecuación

$$4x - (2x+3)(3x-5) = 49 - (6x-1)(x-2)$$

en este caso, tenemos que

$$\begin{aligned} (2x+3)(3x-5) &= 6x^2 - x - 15 \\ (6x-1)(x-2) &= 6x^2 - 13x + 2 \end{aligned}$$

De donde la ecuación anterior se puede reescribir como

$$4x-\left(6x^2-x-15\right)=49-\left(6x^2-13x+2\right)$$

eliminando paréntesis obtenemos

$$4x-6x^2+x+15=49-6x^2+13x-2$$

pasando los términos variables a un lado y los constantes al otro lado de la igualdad llegamos a que

$$4x-6x^2+x+6x^2-13x=49-2-15$$

simplificando resulta que

$$-8x=32$$

de donde, obtenemos finalmente que

$$x=-4$$

https://youtu.be/h5m_K_MaCY8

5.2 Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática es una expresión que puede ser llevada a la forma

$$ax^2+bx+c=0$$

donde a, b, c, son constantes, en algunos casos es fácil resolverlas mediante factorización, pero en general pueden ser resueltas utilizando la fórmula cuadrática

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x(x-1)=2+5(x-2)$$

En este caso tenemos que

$$x(x-1)=x^2-x$$
$$5(x-2)=5x-10,$$

de donde la primera expresión se puede reescribir como

$$x^2 - x = 2 + 5x - 10,$$

en este caso pasamos todos los términos a un mismo lado (el izquierdo) de la igualdad, de donde obtenemos

$$x^2 - x - 5x - 2 + 10 = 0$$

simplificando

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

factorizando la expresión se obtiene

$$(x-4)(x-2) = 0$$

por lo tanto

$$x - 4 = 0, \ \vee \, , x - 2 = 0$$

de donde finalmente obtenemos que la soluciones de la ecuación son

$$x = 4, \ \vee \, , x = 2.$$

Como otro ejemplo, consideremos la ecuación

$$3x^2 + x(x-4) = x + 6$$

En este caso tenemos que

$$x(x-4) = x^2 - 4x$$

por lo tanto la ecuación anterior se transforma en

$$3x^2 + x^2 - 4x = x + 6.$$

Pasando todos los términos al lado izquierdo de la igualdad , obtenemos

$$3x^2 + x^2 - 4x - x - 6 = 0,$$

y simplificando, llegamos a la ecuación

$$4x^2 - 5x - 6 = 0$$

en este caso usaremos la fórmula cuadrática para resolver dicha ecuación, para lo cual tomaremos $a = 4$, $b = -5$, $c = -6$, al sustituir estos valores en dicha ecuación resulta que

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(4)(-6)}}{2(4)}$$

luego

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8}$$

con lo cual,

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8}$$

es decir,

$$x = \frac{5 \pm 11}{8}$$

de lo anterior se sigue que

$$x = \frac{5 + 11}{8}, \ \vee, \ x = \frac{5 - 11}{8}$$

es decir, obtenemos las soluciones

$$x = \frac{16}{8} = 2, \ \vee, \ x = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$$

https://youtu.be/TrFB-y0anjc

CONCEPTOS

PROBLEMAS

Haz clic sobre la palabra o sigue el código QR para hacer dos pequeños quices.

6. Desigualdades

Las desigualdades son básicamente relaciones de orden entre dos expresiones, éstas pueden contener constantes y/o variables relacionadas mediante operaciones matemáticas. Si en al menos una de las dos expresiones involucradas en la desigualdad se tiene una variable, el objetivo será hallar el conjunto de números reales más grande posible, que haga la expresión verdadera.

6.1 Desigualdades lineales

Una desigualdad lineal es una expresión que puede ser llevada a la forma

$$ax \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \\ \geq \\ \leq \end{array} \right. b,$$

para resolverla se deben transponer los terminos que contengan la variable a un lado de la desigualdad y los términos constantes al otro, para finalmente despejar la incógnita y así poder determinar el intevalo de valores que hacen dicha expresión cierta (los cuales llamaremos las soluciones de la desigualdad). En este proceso debemos tener en cuenta que cuando se transpone un número positivo que esta multiplicado (o dividiendo) al otro lado de la desigualdad y queda dividiendo (o multiplicando) ella no cambia, mientras que si es negativo la desigualdad debe invertirse, por ejemplo

$$7x - 3 > 2(x - 2) + 5$$

en este caso aplicando propiedad distributiva se obtiene

$$7x-3>2x-4+5$$

dejando las variables al lado izquierdo de la desigualdad y los términos constantes al otro se sigue que

$$7x-2x>3-4+5$$

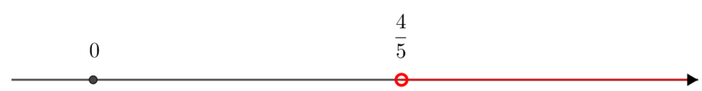
de donde

$$5x>4$$

teniendo en cuenta que 5 es un número positivo, al despejar la variable la desigualdad no cambia, es decir

$$x>\frac{4}{5}$$

con lo cual se obtiene que el intervalo solución de la desigualdad puede verse gráficamente como sigue



y expresado en forma de conjunto la solución queda

$$x\in\left(\frac{4}{5},\infty\right).$$

Nota:
El intervalo tiene paréntesis en ambos extremos ya que la desigualdad es estricta, lo cual indica que el valor $\frac{4}{5}$ no se toma, y en ningún caso el valor ∞ se toma, por ello este extremo también va *abierto*.

Como segundo ejemplo, consideremos la desigualdad

$$3(x-1)+x-4\geq 10x-6$$

en este caso al aplicar la propiedad distributiva al paréntesis del lado izquierdo sigue que

$$3x-3+x-4\geq 10x-6$$

al dejar las variables al aldo izquierdo y términos constantes al otro lado resulta que

$$3x+x-10x\geq 3+4-6$$

al simplificar se obtiene

$$-6x \geq 1$$

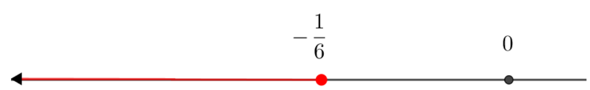
y teniendo en cuenta que el coeficiente de la variable es negativo (-6), al despejarla se obtiene

$$x \leq \frac{1}{-6}$$

o lo que es igual

$$x \leq -\frac{1}{6}$$

por lo tanto la solución de la desigualdad es



de modo que

$$x \in \left(-\infty, \frac{-1}{6}\right].$$

Nota:
El intervalo tiene paréntesis en el extremo izquierdo ya que $-\infty$ nunca se toma, y el extremo derecho tiene corchete debido a la desigualdad, la cual indica que se incluye el valor $-\frac{1}{6}$ en la solución.

Desigualdad lineal

https://youtu.be/RYBEOolp08g

Cambiando el sentido de la desigualdad

https://youtu.be/Qyvv4fQIdLg

CONCEPTOS

PROBLEMAS

Haz clic sobre la palabra o sigue el código QR para hacer dos pequeños quices.

6.2 Desigualdades no lineales

Las desigualdades no lineales se trabajan de la misma manera como las ecuaciones no lineales, es decir, se deben transponer términos para hacer la comparación con cero (0) y luego factorizar, el paso adicional que llevan éstas es que se debe determinar cuando la expresión con variables es positiva o cuando es negativa, según corresponda,para así poder hallar el conjunto solución.

Ejemplo: Hallar el conjunto solución de la siguiente desigualdad:

$$x^2 \geq 16.$$

Como se mencionó anteriormente, lo primero que se debe hacer es operar la expresión de tal forma que en alguno de los lados de la desigualdad sea cero,

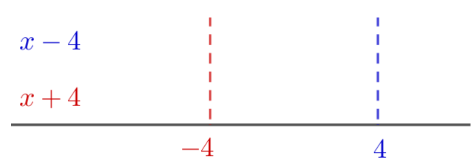
$$\begin{aligned} x^2 &\geq 16 \\ x^2 - 16 &\geq 0 \end{aligned}$$

ahora se debe factorizar la expresión de la izquierda

$$(x-4)(x+4) \geq 0. \tag{6.1}$$

Para determinar cuando la expresión de la izquierda es positiva utilizaremos el siguiente procedimiento:

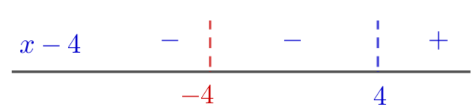
Se ubican todos los factores, uno debajo del otro, y se traza la recta real ubicando los valoren en los cuales cada factor se anula (se hace cero).



Ahora se debe identificar el signo de cada factor en los intervalos que se generaron en la recta real ($(-\infty,-4)$, $(-4,4)$ y $(4,\infty)$), para esto existen dos formas equivalentes:

Valores de prueba

Se debe tomar un valor en el interior de cada uno de los intervalos y remplazarlo en cada factor para así determinar el signo de ellos. Por ejemplo si se toman los valores $x=-5$, $x=0$ y $x=5$ para el factor $x-4$ se tienen los siguientes signos.



Usando el coeficiente de x

Esta es la forma más eficiente para determinar los signos en cada uno de los intervalos, ya que no se hace necesario evaluar valores, se requiere simplemente analizar el coeficiente de x. Por ejemplo para el factor $x+4$ el coeficiente de x es 1, dicho valor es positivo, por lo tanto a la derecha del valor $x=-4$, que es donde se anula el factor, todos los signos deben ser positivos, mientras que a la izquierda serán negativos.

		-4		4	
$x+4$	$-$		$+$		$+$

Nota: Si el signo del coeficiente de la x es negativo, los signos a la derecha del valor en el cual se anula el factor, serán negativos y los de la derecha positivos.

Por último debemos hacer el producto de signos en cada intervalo y así determinar el conjunto solución de la desigualdad

		-4		4	
$x-4$	$-$		$-$		$+$
$x+4$	$-$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

Para escribir el conjunto solución, se debe tener en cuenta la desigualdad (6.1), pues allí se pide hallar los valores de x que hacen que la expresión de la izquierda sea mayor o igual que cero, por lo tanto, el conjunto solución será

$$x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty).$$

Reglas para la escritura de los intervalos

Para poder escribir la respuesta de forma adecuada se deben tener en cuenta las siguientes reglas:

- Si el intervalo inicia en $-\infty$ o termina en ∞, dicho extremo va siempre abierto, es decir, con paréntesis.
- Si la comparación es con un "$>$" o con un "$<$" los extremos siempre van abiertos.
- Si la comparación es con un "$\geq$" o con un "$\leq$" se deben incluir los extremos de los intervalos, es decir, los extremos van cerrados (con corchete), salvo si uno de ellos es $\pm\infty$ o si el extremo anula a un factor que se encuentra en el denominador.

Ejemplo: Resuelva la desigualdad

$$\frac{-3}{x^2+2} \leq \frac{1}{x}.$$

Como antes el primer paso es transponer términos para comparar con cero, algo que es importante tener en claro es que no se puede multiplicar por x la desigualdad para cancelar la que se encuentra en el denominador de la derecha, ya que no se sabe el signo que pueda tomar la x, por lo tanto podría cambiar el sentido de la desigualdad; por ello se hace necesario hacer lo siguiente:

$$\frac{-3}{x^2+2} - \frac{1}{x} \leq 0,$$

al sumar fracciones se obtiene lo siguiente

$$\frac{-x^2-3x-2}{(x^2+2)x} \leq 0,$$

factorizando se llega a que

$$\frac{(-x-2)(x+1)}{(x^2+2)x} \leq 0.$$

Se debe notar que en esta desigualdad se tiene un factor cuadrático irreducible x^2+2, dichos términos cuadráticos que no se pueden factorizar (ni con el uso de la ecuación cuadrática), tienen una particularidad su signo nunca cambia, es decir, o siempre es positivo o siempre es negativo; basta con evaluar en cero para determinar si signo

$$0^2+2=2>0.$$

Con esto en mente hallaremos el conjunto solución de la desigualdad planteada:

$-x-2$	$+$		$-$		$-$		$-$
$x+1$	$-$		$-$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$		$+$
x^2+2	$+$		$+$		$+$		$+$
	$+$	-2	$-$	-1	$+$	0	$-$

Por lo tanto el conjunto solución será

$$x \in [-2,-1] \cup (0,\infty).$$

CONCEPTOS

Desigualdad cuadrática

https://youtu.be/OuF2tvJu7nA

Con fracciones algebráicas

https://youtu.be/NuXV5y06GwY

Haz clic sobre la palabra o sigue el código QR para hacer un pequeño quiz.

Bibliografía

[Bal17] Aurelio Baldor. *Álgebra, 3ed*. Editorial Patria , México, 2017.

[Gob90] Alfonse Gobran. *Algebra elemental.* Iberoamericana, 1990.

[Wik18a] Colaboradores de Wikipedia. *Wikipedia: Al-Juarismi*. Nov. de 2018. URL: `https://es.wikipedia.org/wiki/Al-Juarismi`.

[Wik18b] Colaboradores de Wikipedia. *Wikipedia: Georg Cantor*. Nov. de 2018. URL: `https://es.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor`.

[Wik18c] Colaboradores de Wikipedia. *Wikipedia: Hojas de cálculo*. Nov. de 2018. URL: `https://es.wikipedia.org/wiki/Hoja_de_c%5C%C3%5C%A1lculo`.