Capítulo XXIV

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ELECTROSTATICA

FORMULARIO

$$\boldsymbol{F} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \boldsymbol{r}$$

(UEE)

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$$

(Giorgi)

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9 \times 10^9} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N \cdot m^2}}$$

$$\varepsilon = \varepsilon' \varepsilon_0$$

Problema 1. Calcular la carga que deben tener dos conductores para que colocados en el vacío y a la distancia de 1 m se atraigan o repelan con una fuerza igual a 91,843 t.

Solución

Si las dos cargas son iguales, la expresión de la ley de Coulomb toma la forma:

$$F = K \frac{Q^2}{r^2}$$

y como:

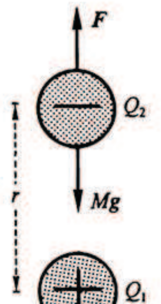
$$\left.\begin{aligned} F &= 91{,}843 \text{ t} = 91\,843 \times 9{,}8 \text{ N} \\ K &= 9 \times 10^9 \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}} \end{aligned}\right| \Rightarrow 91\,843 \times 9{,}8 = 9 \times 10^9 Q^2 \Rightarrow \boxed{Q = 10^{-2} \text{ C}}$$

Problema 2. Dos cuerpos cargados con 1 C se repelen entre sí en el vacío con una fuerza de 102 kp. ¿A qué distancia están uno de otro?

Solución

$$F = K\,\frac{Q^2}{r^2}\;\left|\;\begin{array}{l} F = 102 \times 9{,}8\ \text{N} \\ Q = 1\ \text{C} \\ K = 9 \times 10^9\ \dfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \end{array}\right| \Rightarrow\; 102 \times 9{,}8 = 9 \times 10^9\ \frac{1}{r^2} \;\Rightarrow\; \boxed{r = 3\ 000\ \text{m} = 3\ \text{km}}$$

Problema 3. De uno de los platillos de una balanza se cuelga un cuerpo cargado con 1 000 UEE de carga positiva; en el otro platillo se pone una tara para equilibrar la masa del cuerpo. En estas condiciones se coloca debajo del cuerpo cargado otro también cargado positivamente, de forma que la distancia entre sus centros sea 1 m. Siendo la carga eléctrica de este último 0,0098 C, calcular qué pesa se debe poner en el platillo correspondiente al cuerpo para que la balanza siga en equilibrio. Se supone que la experiencia se realiza en el vacío.



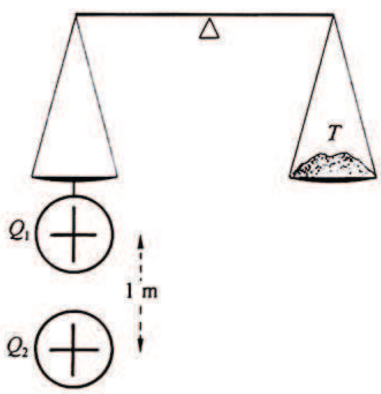
Problema XXIV-3

Solución

$$F = K\,\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\;\left|\;\begin{array}{l} Q_1 = 10^3\ \text{UEE} \\ Q_2 = 98 \times 10^{-4}\ \text{C} = 98 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^9\ \text{UEE} \\ r\ = 10^2\ \text{cm} \\ K\ = 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{F = \frac{10^3 \times 98 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^9}{10^4} = 3 \times 980\ 000\ \text{dyn} = 3\ \text{kp}}$$

Problema 4. Un cuerpo cuyo peso es 100 g está cargado con 9 800 UEE. ¿A qué distancia sobre él debe colocarse otro cuerpo cargado con 100 000 UEE de signo contrario, para que el primero no caiga por la acción de su peso? Se supone que la experiencia se realiza en el vacío.



Problema XXIV-4

Solución

$$\left.\begin{array}{l} F = K\,\dfrac{Q_1 Q_2}{r^2} \\ F = Mg \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{\frac{KQ_1Q_2}{Mg}} = \sqrt{\frac{9\ 800 \times 10^5}{10^2 \times 980}} = 100\ \text{cm} = 1\ \text{m}}$$

Problema 5. Separamos los electrones de los protones de 1 mol de H_2 y los situamos a una distancia de 10^3 km. Determínese la fuerza con que se atraen. (Carga del protón: $1{,}6 \times 10^{-19}$ C. Número de Avogadro: $6{,}02 \times 10^{23}$.)

Solución

Un mol de hidrógeno contiene $6{,}02 \times 10^{23}$ moléculas de H_2 y cada molécula contendrá 2 protones y 2 electrones, con lo que la carga total, una vez separados, será:

$$Q = 2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 6{,}02 \times 10^{23} = 192\,640 \text{ C}$$

La fuerza de atracción es:

$$\boxed{F = K\,\frac{Q^2}{r^2} = 9 \times 10^9\,\frac{192\,640^2}{10^{12}} = 3{,}34 \times 10^8 \text{ N}}$$

Problema 6. Dos partículas alfa están separadas una distancia de 10^{-11} cm. Calcular la fuerza electrostática con que se repelen, la fuerza gravitatoria con que se atraen y comparar ambas entre sí.

$$K = 9 \times 10^9\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}$$

$$e = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C} \qquad G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

Masa de una partícula α:

$$m = 6{,}68 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Solución

La carga de una partícula α es $2e$.

$$F_E = K\,\frac{Q^2}{r^2} = 9 \times 10^9\,\frac{4 \times 1{,}6^2 \times 10^{-38}}{10^{-26}} = 92{,}16 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_G = G\frac{m^2}{r^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{6{,}68^2 \times 10^{-54}}{10^{-26}} = 29{,}76 \times 10^{-40} \text{ N}$$

La fuerza gravitatoria es del orden de 10^{37} veces menor que la electrostática y, por tanto, despreciable frente a ella.

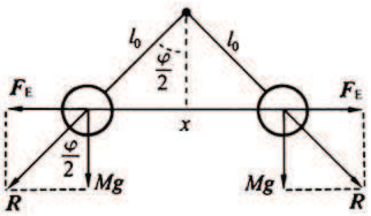
Problema 7. Calcular cuántas veces es menor la atracción gravitatoria que la repulsión electrostática entre dos núcleos de hidrógeno. DATOS: Masa del hidrógeno: $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg. Carga del núcleo de hidrógeno: $1{,}6 \times 10^{-19}$ C. Constante de la gravitación $6{,}67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg². Constante de la ley de Coulomb: 9×10^9 N · m²/C².

Solución

$$\left.\begin{aligned} F_E &= K\,\frac{Q^2}{r^2} \\ F_G &= G\,\frac{m^2}{r^2} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{F_E}{F_G} = \frac{KQ^2}{Gm^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 1{,}6^2 \times 10^{-38}}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}67^2 \times 10^{-54}} = 1{,}24 \times 10^{36}}$$

La fuerza de atracción gravitatoria es del orden de 10^{36} veces menor que la de atracción electrostática y, por tanto, despreciable en comparación con esta última.

Problema 8. Dos esferas iguales de radio 1 cm y masa 9,81 g están suspendidas del mismo punto por medio de sendos hilos de seda de longitud 19 cm. Ambas esferas están cargadas negativamente con la misma carga eléctrica en magnitud. ¿Cuánto vale esta carga si en el equilibrio el ángulo que forman los dos hilos es de 90°? ¿A cuántos electrones equivale la carga contenida en cada esfera? ¿Cuál es la fuerza de gravitación que existe entre las esferas en el equilibrio? Carga del electrón = $1{,}6 \times 10^{-19}$ C. G = constante de gravitación universal = $6{,}67 \times 10^{-11}$ unidades Giorgi.



Problema XXIV-8

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tag} \dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{F_E}{Mg} \\ \\ \dfrac{\varphi}{2} = 45° \end{array}\right| \quad F_E = Mg \quad \Rightarrow \quad K\frac{Q^2}{x^2} = Mg$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2l\operatorname{sen}\dfrac{\varphi}{2} \\ l = l_0 + r \end{array}\right| \quad \frac{KQ^2}{4l^2\operatorname{sen}^2\dfrac{\varphi}{2}} = Mg \quad \Rightarrow \quad Q = 2l\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{Mg}{K}}$$

trabajando en UEE:

$$\boxed{Q = 2 \times 20\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{9{,}81 \times 980} = 2\,773{,}2 \text{ UEE} = 924{,}4 \times 10^{-9} \text{ C}}$$

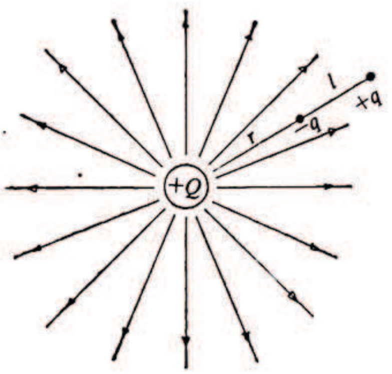
2)

$$\boxed{n = \frac{Q}{e} = \frac{924{,}4 \times 10^{-9}}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 57\,775 \times 10^8 \text{ electrones}}$$

3)

$$\boxed{F = G\frac{M^2}{x^2} = G\frac{M^2}{4l^2\operatorname{sen}^2\dfrac{\varphi}{2}} = 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{9{,}81^2 \times 10^{-6} \times 2}{4 \times 4 \times 10^{-2}} = 0{,}802 \times 10^{-17} \text{ N}}$$

Problema 9. Calcular la fuerza que actúa sobre un dipolo eléctrico de longitud l sumergido en un campo eléctrico radial creado por una carga Q. Suponer que $r \gg l$.



Problema XXIV-9

Solución

La fuerza resultante es:

$$F = K\frac{Qq}{(r+l)^2} - K\frac{Qq}{r^2} = \frac{KQq}{r^2}\left[\frac{1}{\left(1+\dfrac{l}{r}\right)^2} - 1\right]$$

siendo $r \gg l$, podemos poner:

$$\boxed{F \simeq \frac{KQq}{r^2}\left(\frac{1}{1+\dfrac{2l}{r}} - 1\right) = \frac{KQq}{r^2}\frac{\dfrac{-2l}{r}}{1+\dfrac{2l}{r}} \simeq -\frac{2KQql}{r^3} = -\frac{2KQp}{r^3}}$$

el signo menos nos indica que la fuerza resultante es de atracción (p = módulo del vector momento del dipolo).

Problema 10. La fuerza con que se atraen dos cuerpos iguales cargados cuando se encuentran a una distancia de 3 m es de 1 N. Se ponen en contacto y la carga se distribuye por igual entre los dos cuerpos. Colocándolas a continuación a la misma distancia, se repelen con una fuerza de 2 N. Calcular la carga que inicialmente tenían los dos cuerpos.

Solución

$$F = K\frac{Q_1Q_2}{r^2}$$

Inicialmente se tiene:

$$1 = 9\times10^9\frac{Q_1Q_2}{9} \Rightarrow Q_1Q_2 = 10^{-9}\ \mathrm{C}^2$$

después de ponerlas en contacto y separarlas de nuevo, la carga de cada cuerpo es $(Q_1 - Q_2)/2$; luego:

$$2 = 9\times10^9\frac{(Q_1-Q_2)^2}{4\times9} \Rightarrow (Q_1-Q_2)^2 = 8\times10^{-9}\ \mathrm{C}^2 \Rightarrow \boxed{Q_1 = 99{,}5\ \mu\mathrm{C}}\quad \boxed{Q_2 = 10{,}0\ \mu\mathrm{C}}$$

Problema 11. Calcular la fuerza que actúa sobre una carga de 1 μC colocada en (0,4) m debida a la siguiente distribución: en (0,0), una carga $Q_1 = -3$ μC; en (4,0) m, una carga $Q_2 = 4$ μC, y en (1,1) m, una carga $Q_3 = 2$ μC.

Solución

$$\boldsymbol{F} = KQ\Sigma\frac{Q_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$$

$$F_1 = K\frac{QQ_1}{r_1^2} = 9\times10^9\frac{10^{-6}\times3\times10^{-6}}{16} = \frac{27}{16}10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$\cos\varphi_1 = 0 \quad\Big|\quad F_{x1} = F_1\cos\varphi_1 = 0$$

$$\operatorname{sen}\varphi_1 = -1 \quad\Big|\quad F_{y1} = F_1\operatorname{sen}\varphi_1 = -\frac{27}{16}10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$F_2 = K\frac{QQ_2}{r_2^2} = 9\times10^9\frac{10^{-6}\times4\times10^{-6}}{32} = \frac{9}{8}10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$\cos\varphi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Big|\quad F_{x_2} = F_2\cos\varphi_2 = -\frac{9\sqrt{2}}{16}10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$\operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Big|\quad F_{y_2} = F_2\operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{9\sqrt{2}}{16}10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$F_3 = K\frac{QQ_3}{r_3^2} = 9\times10^9\frac{10^{-6}\times2\times10^{-6}}{10} = \frac{9}{5}10^{-3}\ \mathrm{N}$$

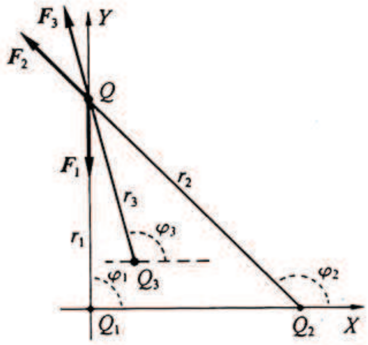
$$\cos\varphi_3 = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad\Big|\quad F_{x_3} = F_3\cos\varphi_3 = -\frac{9}{5\sqrt{10}}10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$\operatorname{sen}\varphi_3 = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad\Big|\quad F_{y_3} = F_3\operatorname{sen}\varphi_3 = \frac{27}{5\sqrt{10}}10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$F_x = F_{x_1} + F_{x_2} + F_{x_3} = \left(-\frac{9\sqrt{2}}{16} - \frac{9}{5\sqrt{10}}\right)10^{-3} = -1{,}36\times10^{-3}\ \mathrm{N}$$

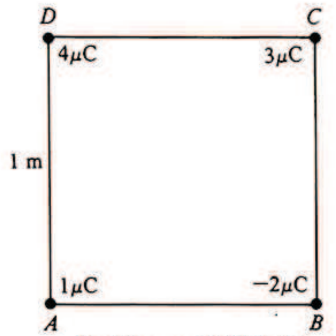
$$F_y = F_{y_1} + F_{y_2} + F_{y_3} = \left(-\frac{27}{16} + \frac{9\sqrt{2}}{16} + \frac{27}{5\sqrt{10}}\right)10^{-3} = 0{,}81\times10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = (-1{,}36\boldsymbol{i} + 0{,}81\boldsymbol{j})10^{-3}\ \mathrm{N}}$$



Problema XXIV-11

(Este problema se puede resolver más fácilmente calculando el potencial en el punto (0, 4) m, debido a la distribución dada, a continuación el valor del campo en dicho punto y, por tanto, la fuerza sobre 1 μC. Esta forma de operar se hará en los capítulos XXV y XXVI.)



Problema XXIV-12

Problema 12. El cuadrado de la figura tiene 1 m de lado. Determinar la fuerza que actúa sobre la carga situada en el vértice C.

Solución

$$F_A = 9 \times 10^9 \, \frac{10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{2} = 13{,}5 \times 10^{-3} \text{ N}$$

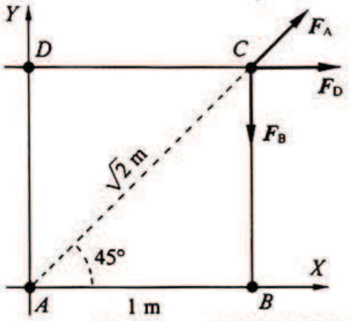
$$F_B = 9 \times 10^9 \, \frac{2 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{1} = 54 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_D = 9 \times 10^9 \, \frac{4 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{1} = 108 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$\boldsymbol{F}_A \left| \begin{array}{l} F_{Ax} = 13{,}5 \times 10^{-3} \, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ N} \\[2ex] F_{Ay} = 13{,}5 \times 10^{-3} \, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\boldsymbol{F}_B = -\,54 \times 10^{-3} \boldsymbol{j} \text{ N}$$

$$\boldsymbol{F}_D = \ 108 \times 10^{-3} \boldsymbol{i} \text{ N}$$



Problema XXIV-12-1.ª

$$\boxed{\boldsymbol{F} = 10^{-3} \left[\left(\frac{13{,}5\sqrt{2}}{2} + 108 \right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{13{,}5\sqrt{2}}{2} - 54 \right) \boldsymbol{j} \right] = 10^{-3}(117{,}5\boldsymbol{i} - 44{,}4\boldsymbol{j}) \text{ N}}$$

Problema 13. Dos cargas puntuales de -200 y 300 μC se encuentran situadas en los puntos A (1,2,1) m y B (3,0,2) m, respectivamente. Calcular la fuerza que ejercen sobre una tercera de 100 μC situada en C (−1,2,3) m.

Solución

La $\boldsymbol{F}_{13}$ tiene la dirección y sentido del vector $\boldsymbol{CA}$:

$$\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{C} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad r_{13} = |\boldsymbol{CA}| = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

el vector unitario en la dirección y sentido de $\boldsymbol{CA}$ será:

$$\frac{\boldsymbol{CA}}{CA} = \frac{2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})$$

y como:

$$F_{13} = 9 \times 10^9 \, \frac{200 \times 10^{-6} \, 100 \times 10^{-6}}{8} = \frac{45}{2} \text{ N}$$

tendremos:

$$\boldsymbol{F}_{13} = \frac{45}{2} \, \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}) = \frac{45\sqrt{2}}{4}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}) \text{ N}$$

La $\boldsymbol{F}_{23}$ tendrá la dirección y sentido del vector $\boldsymbol{BC}$:

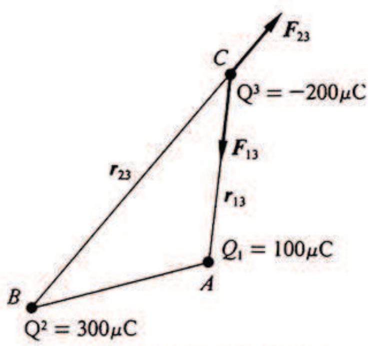
$$\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{B} = -\,4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad r_{23} = \boldsymbol{BC} = \sqrt{21} \text{ m}$$

además:

$$\frac{\boldsymbol{BC}}{BC} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = \frac{\sqrt{21}}{21}(-4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

y como:

$$F_{23} = 9 \times 10^9 \, \frac{300 \times 10^{-6} \, 100 \times 10^{-6}}{21} = \frac{90}{7} \text{ N}$$



Problema XXIV-13

luego:

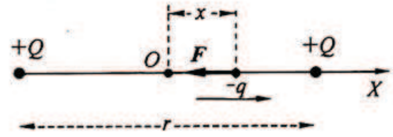
$$F_{23} = \frac{90}{7}\,\frac{\sqrt{21}}{21}\,(-4i + 2j + k) = \frac{30\sqrt{21}}{49}\,(-4i + 2j + k)\ \text{N}$$

obteniéndose para valor de la fuerza total:

$$\boxed{F = F_{13} + F_{23} = \left(\frac{45\sqrt{2}}{4} - \frac{120\sqrt{21}}{49}\right) i + \frac{60\sqrt{21}}{49}\, j + \left(\frac{30\sqrt{21}}{49} - \frac{45\sqrt{2}}{4}\right) k\ \text{N}}$$

Problema 14. Una partícula de masa m y carga $-q$ se encuentra en el punto medio de la línea que une otras dos cargadas con $+Q$ fijas y situadas a una distancia r la una de la otra. La partícula m está obligada a permanecer en la línea que une las dos cargas $+Q$; si separamos de la posición de equilibrio estable $a - q$ una distancia $A \ll r$, determinar su período de oscilación.

Solución



Problema XXIV-14

$$F = K_0 \frac{qQ}{\left(\frac{r}{2} + x\right)^2} - K_0 \frac{qQ}{\left(\frac{r}{2} - x\right)^2} = -K_0 qQ \frac{2rx}{\left(\frac{r^2}{4} - x^2\right)^2}$$

y como $x \ll r$, queda:

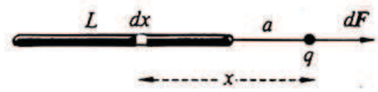
$$F = -\frac{32 K_0 qQ}{r^3} x = -kx \;\Rightarrow\; k = \frac{32 K_0 qQ}{r^3}$$

y como:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \;\Rightarrow\; \boxed{T = \frac{\pi r}{2} \sqrt{\frac{mr}{2 K_0 qQ}}}$$

Problema 15. Calcular la fuerza que ejerce una varilla de longitud L cargada con una densidad lineal de carga λ, sobre una partícula cargada con q situada en la misma línea de la varilla y a una distancia a de su extremo.

Solución



Problema XXIV-15

El valor de la fuerza dF debida al elemento dx será:

$$dF = K_0 \frac{q\,dQ}{x^2}$$

y como:

$$dQ = \lambda dx$$

nos queda:

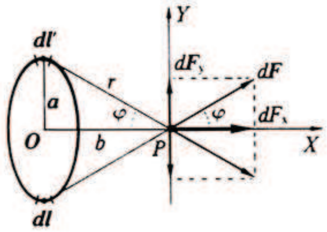
$$dF = K_0 q \lambda \frac{dx}{x^2}$$

el valor de la fuerza total resultante debida a todos los elementos de la varilla será:

$$\boxed{F = \int_a^{a+L} K_0 q\lambda \frac{dx}{x^2} = K_0 q\lambda \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a + L}\right] = K_0 q\lambda \frac{L}{a(a + L)}}$$

Problema 16. Un anillo de radio a está cargado con una densidad lineal de carga uniforme λ. Colocamos en un punto de su eje, y a una distancia b, una carga Q'. Calcular, en función de estos datos, la fuerza que actúa sobre esta carga.

Solución



Problema XXIV-16

El valor de la fuerza dF debida al elemento dl será:

$$dF = K\frac{Q'dQ}{r^2}$$

y como:

$$\left.\begin{aligned} dQ &= \lambda dl \\ r^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}\right| \quad dF = K\frac{Q'\lambda dl}{a^2+b^2}$$

que descompuesta en los ejes X e Y (ver figura) y teniendo en cuenta que la componente según el eje Y se nos anulará con la componente de la fuerza que actúa debida al elemento dl' y que esto nos ocurrirá con todas las componentes de las fuerzas debidas a todos los elementos que constituyen el anillo que se encuentran en un plano perpendicular al eje por P, sacamos en consecuencia que la fuerza activa será la suma (integral) de todas las componentes de las fuerzas creadas por todos los elementos del anillo en la dirección del eje X:

$$F = \oint dF_x$$

pero:

$$\left.\begin{aligned} dF_x &= dF\cos\varphi \\ \cos\varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad dF_x = \frac{KQ'\lambda b\, dl}{(a^2+b^2)^{3/2}}$$

luego:

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{KQ'\lambda b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\oint dl \\ \oint dl &= 2\pi a \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{2\pi KQ'\lambda ab}{(a^2+b^2)^{3/2}}}$$