

# TEMA II: CONJUNTOS Y RELACIONES DE ORDEN

# OBJETIVOS GENERALES

- 1. Hacer que el alumno asimile el concepto de conjunto como la estructura algebraica más simple en la que se ambientarán el resto de las estructuras algebraicas,**
- 2. Conocer el concepto de aplicación entre conjuntos, y**
- 3. Conocer el concepto de relación binaria y en particular las relaciones de equivalencia y de orden.**

# OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Unificar y reafirmar el concepto de conjunto y la notación de teoría de conjuntos.
- ✓ Entender los conjuntos como el modelo matemático más sencillo que se conoce.
- ✓ Decidir cuando dos conjuntos son iguales o uno de ellos está contenido en otro.
- ✓ Conocer el conjunto de las partes de un conjunto.
- ✓ Saber operar con conjuntos (unión, intersección, complemento).
- ✓ Reconocer las propiedades que satisfacen las distintas operaciones entre conjuntos y saber utilizarlas para demostrar igualdades entre conjuntos.

# OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Conocer el producto cartesiano entre conjuntos y sus propiedades.
- ✓ Conocer el concepto de correspondencia y saber calcular imagen, imagen inversa, dominio y codominio de una correspondencia.
- ✓ Saber cuando una correspondencia entre dos conjuntos es una aplicación y saber clasificarla.
- ✓ Saber calcular la composición de dos aplicaciones.
- ✓ Conocer la correspondencia inversa de una aplicación.
- ✓ Reconocer cuando una familia de subconjuntos de un conjunto es un partición.
- ✓ Entender el concepto de relación binaria y saber determinar las propiedades que satisface.

# OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Distinguir entre relación de equivalencia y de orden.
- ✓ Saber calcular una clase de equivalencia y el conjunto cociente asociado a una relación de equivalencia, y
- ✓ Conocer los conceptos de conjunto totalmente ordenado y conjunto bien ordenado.
- ✓ Entender los distintos elementos notables de un conjunto ordenado y saber calcularlos.

# BIBLIOGRAFÍA

- **“Matemática discreta para la computación”. M.A. García-Muñoz. Servicio de Publ. Univ. Jaén. 2010.**
- **“Álgebra lineal”, J. de Burgos. McGraw-Hill, 1995.**
- **“Álgebra y Geometría Analítica”, F. Granero. McGraw-Hill, 1994.**
- **“Álgebra lineal y geometría: curso teórico-práctico”, J. García- García y M. López Pellicer. Marfil, 1992.**
- **“Matemática discreta”, F. García Merayo. Paraninfo, 2001.**
- **“Estructuras de Matemática discreta para la computación”, B. Kolman y otros. Prentice Hall, 1997.**
- **“Problemas resueltos de Matemática discreta”, F. García Merayo y otros. Paraninfo, 2003.**

# DESARROLLO TEÓRICO

II.1 Introducción.

II.2 Conjuntos.

II.2.1 Conceptos básicos.

II.2.2 Operaciones con conjuntos.

II.2.3 Producto cartesiano.

II.3 Aplicaciones entre conjuntos.

II.4 Relaciones binarias.

II.4.1 Relaciones de equivalencia.

II.4.2 Relaciones de orden.

# 1. INTRODUCCIÓN





El concepto de **conjunto** es uno de los más importantes en matemáticas, aun más que la operación de contar, pues se puede encontrar implícita o explícitamente, en todas las ramas de las matemáticas puras y aplicadas. En su forma explícita, los principios y terminología de los conjuntos se utilizan para construir teoremas matemáticos más claros y precisos, y para explicar conceptos abstractos como el **infinito**.

Todo matemático o filósofo ha empleado razonamientos de **teoría de conjuntos** de una forma más o menos consciente. La teoría de conjuntos se debe al matemático ruso Georg Cantor (1845-1918), aunque otros matemáticos como George Boole (1815-1864) dieron los primeros pasos para su desarrollo.



En el último cuarto del siglo XIX se vivió un episodio apasionante de la historia de las matemáticas que las ligaría desde entonces a la historia de la lógica. Primero, George Boole trató de presentar la lógica como parte de las matemáticas. Poco después G. Fregge (1848-1925) intentó demostrar que la aritmética era parte de la lógica y, dando un gran paso tanto en la historia de las matemáticas como en la historia de la lógica, G. Cantor se adelantó a Fregge con una fundamentación lógica de la aritmética. Como consecuencia, Cantor creó una nueva disciplina matemática entre 1874 y 1897: la **Teoría de Conjuntos**.

Cantor definió **conjunto** como “una colección en un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, llamados los elementos del conjunto”.



Su obra fue admirada y condenada simultáneamente por sus contemporáneos. Desde entonces los debates en el seno de la **teoría de conjuntos** han sido siempre apasionados, sin duda por hallarse estrechamente conectados con importantes cuestiones lógicas.

La **teoría de conjuntos** empezó a influir en otras áreas de las matemáticas. Por ejemplo, Lebesgue la utilizó en su integral. Posteriormente se intentó axiomatizar la teoría de conjuntos. El primero que lo hizo fue Zermelo en 1908. Después lo intentaron Fraenkel, von Neumann, Bernays y Gödel. Este último terminó demostrando las limitaciones de cualquier teoría axiomática.

## 2. CONJUNTOS



## 2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Llamaremos **conjunto** a toda colección de objetos y **elemento** a cada uno de los objetos de un conjunto.

Un conjunto se puede definir de dos formas:

- I) Por **extensión**: citando cada elemento,
- II) Por **comprensión**: citando una propiedad que verifican todos sus elementos.

Utilizaremos las letras mayúsculas  $A, B, X, \dots$  para denotar conjuntos y las letras minúsculas  $a, b, x, y, \dots$  para denotar elementos.



## 2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

$a \in A$  (El elemento “a” pertenece al conjunto “A”)

$a \notin A$  (El elemento “a” no pertenece al conjunto “A”)

$\emptyset = \{ \} = \text{conjunto vacío}$

$\mathbb{N} = \{\text{números naturales}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\text{números enteros}\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\text{números racionales}\} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ tal que } a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{N} \text{ y } b \neq 0 \right\}$

$\mathbb{R} = \{\text{números reales}\} \ni \pi, e, \frac{a}{b}, \sqrt{2}$

$\mathbb{C} = \{\text{números complejos}\} = \{a + bi \text{ tal que } a, b \in \mathbb{R}\}$



## 2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Los conjuntos los podemos representar mediante **diagramas de Venn** (regiones del plano delimitadas por una curva cerrada que encierra a los elementos del conjunto) o bien mediante diagramas en línea (los elementos de un conjunto se representan sobre una línea recta).

Llamaremos **cardinal** de un conjunto  $A$  al número de elementos de dicho conjunto y lo representaremos por **card**( $A$ ). Atendiendo a esto diremos que un conjunto es **finito** si **card**( $A$ ) es finito, en otro caso diremos que  $A$  es **infinito**.

Dados  $X$  e  $Y$  conjuntos, diremos que son **iguales**,  $X = Y$ , si están formados por los mismos elementos.



## 2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

**Proposición 2.1.** La igualdad de conjuntos satisface las siguientes propiedades:

- i) **Reflexiva:**  $A = A$  para todo conjunto  $A$ .
- ii) **Simétrica:**  $A$  y  $B$  conjuntos, si  $A = B$  entonces  $B = A$ .
- iii) **Transitiva:**  $A$ ,  $B$  y  $C$  conjuntos, si  $A = B$  y  $B = C$  entonces  $A = C$ .

Diremos que  $X$  es un **subconjunto** de  $Y$  ( $X$  **está contenido** o **incluido** en  $Y$ ),  $X \subseteq Y$ , si todo elemento de  $X$  es un elemento de  $Y$ . Es decir,

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow (\forall x \in X \text{ entonces } x \in Y).$$

Usamos  $X \subset Y$  cuando  $X$  está contenido en  $Y$  y sabemos que no son iguales, es decir,  $X \subset Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$  y  $X \neq Y$ .

Si  $X$  no está contenido en  $Y$  se denotara por  $X \not\subseteq Y$ .





## 2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

**Proposición 2.2.** El conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto  $X$ ,  $\emptyset \subseteq X$ ,  $\forall X$ . (Demostración ejercicio 2.8.)

**Proposición 2.3.** La inclusión de conjuntos satisface las siguientes propiedades:

- i) **Reflexiva:**  $A \subseteq A$  para todo conjunto  $A$ .
- ii) **Antisimétrica:**  $A$  y  $B$  conjuntos, si  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$  entonces  $A = B$ .
- iii) **Transitiva:**  $A$ ,  $B$  y  $C$  conjuntos, si  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq C$  entonces  $A \subseteq C$ .

Llamaremos **subconjuntos propios** de  $X$  a los subconjuntos distintos de  $\emptyset$  y de  $X$ . A los subconjuntos  $X$  y  $\emptyset$  del conjunto  $X$  se les llama **subconjuntos impropios** de  $X$ .



## 2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Dado un conjunto  $X$ , llamaremos **conjunto de las partes** o **conjunto potencia** de  $X$ ,  $\mathcal{P}(X)$  al conjunto que tiene por elementos a todos los subconjuntos de  $X$ , esto es,

$$\mathcal{P}(X) = \{ A / A \subseteq X \} .$$

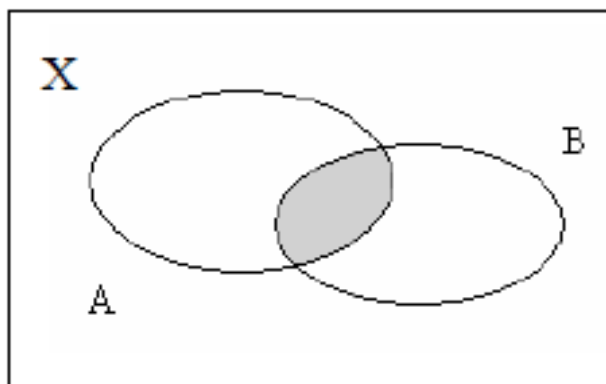
Se tiene  $\text{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^{\text{card}(X)}$  (Demostración ejercicio 2.20.)

## 2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Sea  $X$  un conjunto y  $A, B \in \mathcal{P}(X)$ , llamaremos **intersección** de  $A$  y  $B$ , al subconjunto de  $X$  formado por los elementos que pertenecen simultáneamente a  $A$  y a  $B$ ,

$$A \cap B = \{ x \in X / x \in A \text{ y } x \in B \} \in \mathcal{P}(X).$$

Diremos que  $A$  y  $B$  son **disjuntos** si  $A \cap B = \emptyset$ .





## 2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

**Proposición 2.4.** La intersección de conjuntos satisface las propiedades:

i) **Conmutativa:**  $A \cap B = B \cap A$ ,  $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$ .

ii) **Asociativa:**  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ,  $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ .

iii) **Idempotencia:**  $A \cap A = A$ ,  $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ .

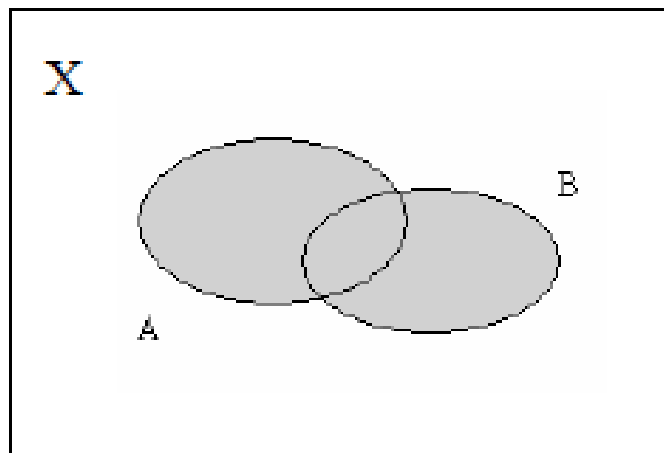
iv) **Elemento ínfimo:**  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ,  $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ .

v) **Elemento neutro:**  $A \cap X = A$ ,  $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ .

## 2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Sea  $X$  un conjunto y  $A, B \in \mathcal{P}(X)$ , llamaremos **unión** de  $A$  y  $B$ , al subconjunto de  $X$  formado por los elementos que pertenecen al menos a uno de dichos conjuntos, es decir:

$$A \cup B = \{ x \in X / x \in A \text{ ó } x \in B \} \in \mathcal{P}(X).$$





## 2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

**Proposición 2.5.** La unión de conjuntos satisface las propiedades:

i) **Conmutativa:**  $A \cup B = B \cup A$ ,  $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$ .

ii) **Asociativa:**  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ,  $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ .

iii) **Idempotencia:**  $A \cup A = A$ ,  $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ .

iv) **Elemento universal:**  $A \cup X = X$ ,  $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ .

v) **Elemento neutro:**  $A \cup \emptyset = A$ ,  $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ .



## 2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

**Proposición 2.6.** La unión junto con la intersección de conjuntos satisface las propiedades:

i) **Leyes de absorción:**

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X).$$

ii) **Distributivas:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

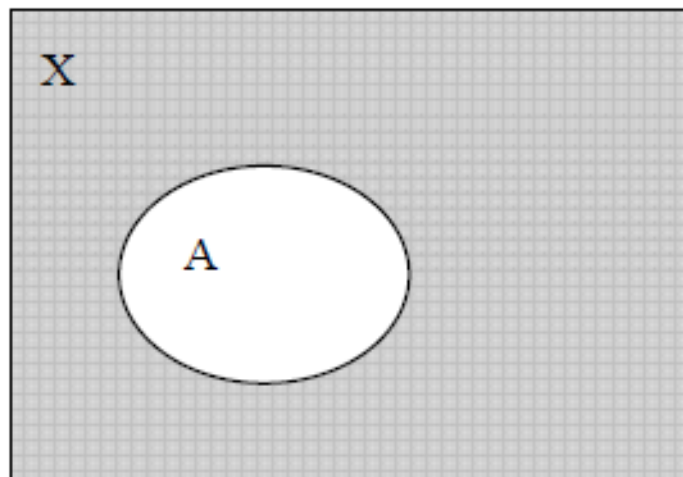
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X).$$

## 2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Sea  $X$  un conjunto y  $A \in \mathcal{P}(X)$ , llamaremos **complemento** de  $A$  respecto de  $X$ , al conjunto formado por todos los elementos de  $X$  que no pertenecen a  $A$ , es decir:

$$A' = \bar{A} = \{ x \in X / x \notin A \} \in \mathcal{P}(X).$$







## 2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

***Proposición 2.7.*** El complemento de un conjunto satisface:

i) **Involución:**  $(A')' = A \quad \forall A \in \mathcal{P}(X).$

ii) **Complemento del universo:**  $X' = \emptyset$

iii) **Complemento del vacío:**  $\emptyset' = X$



## 2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

**Proposición 2.8.** La operación complemento junto con la unión y la intersección satisfacen las propiedades:

i) **Ley del complemento:**

$$A \cup A' = X \qquad A \cap A' = \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

ii) **Leyes de De Morgan:**

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \qquad \forall A, B \in \mathcal{P}(X).$$



## 2.3 PRODUCTO CARTESIANO

Un **par ordenado** es un objeto formado por dos elementos con un orden determinado que notaremos por  $(a, b)$ . A los elementos “a” y “b” se les denomina **primera** y **segunda componente** del par  $(a, b)$ . Dos pares ordenados son **iguales** si y sólo si las componentes correspondientes son iguales.

De forma análoga podemos definir una **terna**, **cuaterna**, **quíntupla** y en general, **n-upla** como un objeto formado por  $n$  elementos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  en un orden dado y lo notaremos por  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .



## 2.3 PRODUCTO CARTESIANO

Dados  $X$  e  $Y$  conjuntos, llamaremos **producto cartesiano** de  $X$  e  $Y$ , al conjunto formado con todos los pares ordenados que pueden formarse con elementos de  $X$  e  $Y$ :

$$X \times Y = \{(a, b) / a \in X \text{ y } b \in Y\}$$

Se tiene que **card**( $X \times Y$ ) = **card**( $X$ ).**card**( $Y$ ). (Demostración ejercicio 2.21.)

El producto cartesiano se puede representar mediante diagramas cartesianos, diagramas sagitales y tablas de doble entrada.



## 2.3 PRODUCTO CARTESIANO

De igual forma se puede definir el producto cartesiano de tres o más conjuntos:

Dados  $A_1, A_2, \dots, A_n$  conjuntos, definimos su **producto cartesiano** como el conjunto formado por todas las  $n$ -uplas posibles  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de forma que  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) / a_i \in A_i, \forall i \}$$



## 2.3 PRODUCTO CARTESIANO

**Proposición 2.9.** Sean  $X$  e  $Y$  conjuntos,  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  y  $C, D \in \mathcal{P}(Y)$ , se tiene:

i)  $X \times Y \neq Y \times X$ .

ii)  $A \times C \subseteq X \times Y$ .

iii) Distributiva respecto de la unión

$$X \times (C \cup D) = (X \times C) \cup (X \times D)$$

$$(A \cup B) \times Y = (A \times Y) \cup (B \times Y)$$

iv) Distributiva respecto de la intersección

$$X \times (C \cap D) = (X \times C) \cap (X \times D)$$

$$(A \cap B) \times Y = (A \times Y) \cap (B \times Y)$$

v)  $(X \times C)' = X \times C' \quad (A \times Y)' = A' \times Y$

vi)  $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$ .

# 3. APLICACIONES



Sean  $X$  e  $Y$  conjuntos. Una **correspondencia** entre  $X$  e  $Y$  es una terna  $(X, Y, G)$  donde  $G \subseteq X \times Y$ . Al conjunto  $X$  se le llama **conjunto inicial**, al conjunto  $Y$  se le llama **conjunto final** y a  $G$  se le llama **grafo** o **gráfica** de la correspondencia.

Si el par  $(x, y) \in G$  se dice que “ **$x$  se corresponde con  $y$** ”.

A una correspondencia como la anterior se le suele asignar letras  $f, g, h, \dots$ , representándose mediante

$$f: X \longrightarrow Y, \quad \text{o bien,} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

Nótese que el grafo de tal correspondencia se denota mediante  $G_f$  para indicar que es el grafo de  $f$ .





En lo que sigue sea  $f = (X, Y, G)$  una correspondencia.

Si  $a \in X$ , llamaremos **imagen de  $a$** ,  $f(a)$ , al conjunto de elementos de  $Y$  que se corresponden mediante  $f$  con  $a$ :

$$f(a) = \{ b \in Y / (a, b) \in G \} \subseteq Y$$

Si  $b \in Y$ , llamamos **imagen inversa de  $b$** ,  $f^{-1}(b)$ , al conjunto de elementos de  $X$  que se corresponden con  $b$ :

$$f^{-1}(b) = \{ a \in X / (a, b) \in G \} \subseteq X$$



Llamaremos **dominio** de una correspondencia  $f$  al subconjunto de  $X$  formado por los elementos cuya imagen es distinta del vacío, es decir:

$$\text{Dom}(f) = \{ a \in X / f(a) \neq \emptyset \} \subseteq X.$$

Llamaremos **imagen** de  $f$  al conjunto formado por todas las imágenes de los elementos de  $A$ ,

$$\text{Im}(f) = \bigcup_{a \in \text{Dom}(f)} f(a) \subseteq Y.$$



Una correspondencia  $f: X \longrightarrow Y$  se dice que es una **aplicación** cuando todo elemento de  $X$  tiene UNA Y SOLO UNA imagen en  $Y$ :

$$\forall a \in X, \exists_1 b \in Y \text{ tal que } f(a)=b$$

Dadas dos aplicaciones  $f, g$  diremos que son **iguales** si tienen iguales conjunto inicial y final y el mismo grafo:

$$f = g \Leftrightarrow f, g: X \longrightarrow Y \text{ y } f(a) = g(a), \forall a \in X.$$



Dada una aplicación  $f: X \longrightarrow Y$  y  $A \subseteq X$ , llamamos **imagen de A por f**,  $f_*(A)$ , al subconjunto de  $Y$  formado por todas las imágenes por  $f$  de los elementos de  $A$

$$f(A) = f_*(A) = \bigcup_{a \in A} f(a) = \{ f(a) / a \in A \}$$

Si  $C \subseteq Y$ , llamamos **imagen inversa de C por f** o **preimagen de C por f**,  $f^*(C)$ , al subconjunto de  $X$  formado por todos los elementos cuya imagen por  $f$  pertenecen a  $C$

$$f^{-1}(C) = f^*(C) = \{ a \in X / f(a) \in C \}$$



## Tipos de aplicaciones

Dada una aplicación  $f: X \longrightarrow Y$ , diremos que es:

A) **inyectiva** si cada elemento de  $Y$  es imagen a lo mas de un elemento de  $X$ , es decir,

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'), \quad (\text{equiv. } f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

B) **sobreyectiva** si todo elemento de  $Y$  es imagen al menos de un elemento de  $X$ ,

$$\forall b \in Y, \exists a \in X \text{ tal que } f(a) = b,$$

C) **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez,

$$\forall b \in Y, \exists_1 a \in X \text{ tal que } f(a) = b.$$

Toda aplicación biyectiva de un conjunto en si mismo se le llama **permutación**.



Dado  $X$  un conjunto, la **identidad en  $X$** ,  $\text{Id}_X: X \longrightarrow X$  aplicación tal que  $\text{Id}_X(a) = a$ , para todo  $a \in X$ .

**Proposición 2.10.** Sea  $f: X \longrightarrow Y$  una aplicación se tiene:

- i) si  $f$  es inyectiva entonces  $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ ,
- ii) si  $f$  es sobreyectiva entonces  $\text{card}(X) \geq \text{card}(Y)$ , y
- iii) si  $f$  es biyectiva entonces  $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$ .

Dadas  $f: X \longrightarrow Y$  y  $g: Y \longrightarrow Z$  aplicaciones, podemos definir una correspondencia  $h: X \longrightarrow Z$  tal que  $h(x) = g(f(x))$ . Así definida  $h$  es también una aplicación que llamamos **aplicación compuesta de  $f$  y  $g$**  y se denota por  $h = g \circ f$ .



**Proposición 2.11.** La composición de aplicaciones satisface la propiedad asociativa, es decir, si  $f: X \longrightarrow Y$ ,  $g: Y \longrightarrow Z$  y  $h: Z \longrightarrow T$  entonces  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

**Proposición 2.12.** Dada  $f: X \longrightarrow Y$  aplicación, se tiene  $f \circ \text{Id}_X = f$  y  $\text{Id}_Y \circ f = f$ .

Dada una aplicación  $f: X \longrightarrow Y$  (es decir,  $f = (X, Y, G)$ ) existe una correspondencia de  $Y$  en  $X$ ,  $f^{-1} = (Y, X, G_{\text{inv}})$ , de manera que  $(b, a) \in G_{\text{inv}}$  si y sólo si  $(a, b) \in G$ . Además si  $f$  es biyectiva, entonces  $f^{-1}$  es una aplicación, también biyectiva, que se llama **inversa de  $f$** .



**Proposición 2.14.** Sean  $X$  e  $Y$  conjuntos,  $f: X \longrightarrow Y$  y  $g: Y \longrightarrow X$  aplicaciones. Entonces:

- i) Si  $f$  es biyectiva, entonces  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$  y  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y$ .
- ii) Si  $g \circ f = \text{Id}_X$ , entonces  $f$  es inyectiva y  $g$  sobreyectiva.
- iii) Si  $g \circ f = \text{Id}_X$  y  $f \circ g = \text{Id}_Y$ , entonces  $f$  y  $g$  son biyectivas y  $g = f^{-1}$ . (Demostración ejercicio 2.44)

**Proposición 2.15.** Sean  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  conjuntos,  $f: X \longrightarrow Y$  y  $g: Y \longrightarrow Z$  aplicaciones biyectivas, entonces  $g \circ f: X \longrightarrow Z$  es biyectiva y  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ . (Demostración ejercicio 2.45)





Sean  $I$  y  $X$  conjuntos, llamamos **familia de elementos de  $X$  indizada en  $I$**  a toda aplicación  $f: I \longrightarrow X$  tal que  $f(i) = x_i$ . Usaremos la notación  $(x_i)_{i \in I} = \{ x_i / i \in I \}$ . Si  $I$  es finito se dice que la familia es **finita** y si  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  se escribe  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Sea  $X$  es un conjunto y  $(A_i)_{i \in I}$  es una familia de elementos de  $\mathcal{P}(X)$  indizada en  $I$ , es decir, una aplicación  $f: I \longrightarrow \mathcal{P}(X)$  tal que  $f(i) = A_i$ . Llamamos **unión** de la familia anterior al conjunto

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \in X / \exists i \in I \text{ t. q. } x \in A_i \}.$$

De igual forma, llamamos **intersección** de la familia al conjunto

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \in X / x \in A_i, \forall i \in I \}.$$



Sea  $X$  un conjunto. Una **partición** de  $X$  es una familia  $(A_i)_{i \in I}$  de elemento de  $\mathcal{P}(X)$  satisfaciendo:

- i)  $A_i \neq \emptyset$  para todo  $i \in I$ ,
- ii) Si  $i \neq j$ , entonces  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , y

- iii)  $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ .

## 4. RELACIONES BINARIAS



Sea  $X$  un conjunto. Llamamos **relación binaria** en  $X$  a todo subconjunto  $R$  del producto cartesiano  $X \times X$ , es decir,

$$R \subseteq X \times X.$$

Diremos que “ **$a$  está relacionado con  $b$  por  $R$** ”, y lo notaremos por  $a R b$ , si y solo si  $(a, b) \in R$ .

Sea  $R$  una relación binaria en el conjunto  $X$ , diremos que:

- $R$  es **reflexiva**, si  $a R a$  para todo  $a \in X$ .
- $R$  es **simétrica**, siempre que  $a R b$ , se tiene que  $b R a$ .
- $R$  es **antisimétrica**, siempre que  $a R b$  y  $b R a$ , se tiene que  $a=b$ .
- $R$  es **transitiva**, siempre que  $a R b$  y  $b R c$ , se tiene que  $a R c$ .



## 4.1 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación binaria  $R$  en  $X$  se dice que es una **relación de equivalencia** si verifica simultáneamente las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Dada  $R$  una relación de equivalencia sobre un conjunto  $X$  y  $a \in X$ , definimos la **clase de equivalencia** de  $a$  al subconjunto de  $X$  formado por todos los elementos relacionados con  $a$ , es decir,

$$\bar{a} = [a] = \{ x \in X / x R a \}.$$



## 4.1 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

**Proposición 2.16.** Sea  $R$  una relación de equivalencia en  $X$ . Entonces  $a R b$  si y solo si  $\bar{a} = \bar{b}$ . (Demostración ejercicio 2.49)

Sea  $R$  una relación de equivalencia en  $X$ . Llamaremos **conjunto cociente de  $X$  por la relación  $R$** , y lo notaremos por  $X/R$ , al conjunto de todas las clases de equivalencia en  $X$  determinadas por  $R$

$$X/R = \{ \bar{a} / a \in X \}$$

Además la aplicación  $p: X \longrightarrow X/R$ , definida por  $p(a) = \bar{a}$ , para todo  $a \in X$  es sobreyectiva y recibe el nombre de **proyección canónica**.

**Proposición 2.17.**  $X/R$  determina una partición en  $X$ . (Demostración ejercicio 2.51)



## 4.1 RELACIONES DE ORDEN

Una relación binaria  $R$  sobre un conjunto  $X$  diremos que es una **relación de orden** si verifica simultáneamente las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Diremos que  $X$  es un conjunto **ordenado** si hay una relación de orden definida en  $X$ .

Generalmente escribimos  $a \leq b$  y se lee “ $a$  es menor o igual que  $b$ ” cuando  $(a, b) \in R$ .

Dos elementos  $a, b \in X$  se dicen **comparables** por la relación de orden  $R$  si y solo si  $a \leq b$  o bien  $b \leq a$  ( $(a, b) \in R$  o  $(b, a) \in R$ ).



## 4.1 RELACIONES DE ORDEN

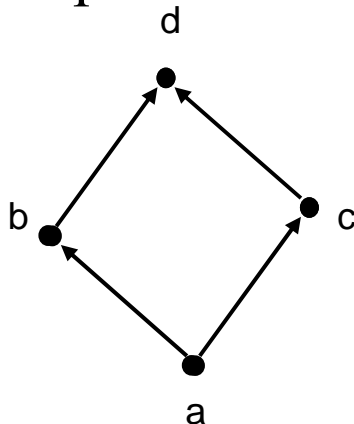
Una relación de orden  $R$  en  $X$ , se dice que es un **orden total** si cualquier par de elementos de  $X$  son comparables. En tal caso se dice que  $X$  es un conjunto **totalmente ordenado**. En otro caso se dice que  $R$  es un **orden parcial** y que  $X$  es un conjunto **parcialmente ordenado**.

Sea  $R$  una relación de orden en  $X$ , un subconjunto no vacío  $A$  de  $X$  se llama **cadena** cuando todo par de elementos de  $A$  son comparables por la relación  $R$  de  $X$ , es decir, la relación de orden  $R$  restringida a  $A$  es un orden total.



## 4.1 RELACIONES DE ORDEN

Cuando el conjunto  $X$  ordenado por la relación  $R$  es finito, el orden puede ser representado gráficamente mediante un diagrama conocido como **diagrama en árbol** o **diagrama de Hasse**. En tales diagramas los elementos se representan por puntos y cuando dos elementos son comparables, los puntos que los representan se unen mediante una flecha de manera que si  $a \leq b$ , en el diagrama aparecerá una flecha ascendente desde el punto que representa al elemento  $a$  hasta el punto que representa al punto  $b$ .





## 4.1 RELACIONES DE ORDEN

Sea  $X$  un conjunto ordenado por una relación de orden  $R$  y  $A \subseteq X$ . Diremos que  $A$  está **acotado superiormente** si existe un  $x \in X$  tal que  $a \leq x$  para todo  $a \in A$ . A tal elemento  $x$  se le llama **cota superior** de  $A$ .

Diremos que  $A$  está **acotado inferiormente** si existe un  $y \in X$  tal que  $y \leq a$  para todo  $a \in A$ . A tal elemento  $y$  se le llama **cota inferior** de  $A$ . Si  $A$  está acotado inferior y superiormente se dice que  $A$  está **acotado**.

Se dice que un elemento  $m \in A$  es el **máximo** de  $A$  si es una cota superior de  $A$ . De igual forma un elemento  $n \in A$  es el **mínimo** de  $A$  si es un cota inferior de  $A$ .



## 4.1 RELACIONES DE ORDEN

***Proposición 2.19.*** Si existe máximo de un conjunto (resp. mínimo) es único.

Un conjunto ordenado  $X$  se dice **bien ordenado** si todo subconjunto no vacío de  $X$  tiene un elemento mínimo.

***Proposición 2.20.*** Todo conjunto bien ordenado está totalmente ordenado.



## 4.1 RELACIONES DE ORDEN

Sea  $A \subseteq X$ . Llamaremos **supremo** de  $A$ ,  $\sup(A)$ , al mínimo (si existe) del conjunto de cotas superiores de  $A$  y llamaremos **ínfimo** de  $A$ ,  $\inf(A)$ , al máximo (si existe) del conjunto de cotas inferiores de  $A$ .

Sea  $X$  un conjunto ordenado. Un elemento  $x \in X$  se dice **maximal** de  $X$  si la relación  $x \leq a$  para algún  $a \in X$ , implica que  $x = a$ . Un elemento  $y \in A$  se dice **minimal** en  $X$  si la relación  $b \leq y$  para algún  $b \in X$ , implica que  $y = b$ .