Relación de Problemas n^{o}1.
EL CUERPO DE LOS NUMEROS REALES.

1. Demostrar las siguientes afirmaciones:

   (a) $a \in R^+ \Leftrightarrow a^{-1} \in R^+$,
   (b) Si $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$,
   (c) $\mid a.b \mid = |a|.|b| \quad \forall a, b \in R$,
   (d) $\mid |a| - |b| \mid \leq |a - b| \quad \forall a, b \in R$,
   (e) $1 \leq n \quad \forall n \in N$,
   (f) Si $m, n \in N \Rightarrow m + n \in N, \quad m.n \in N$,
   (g) Si $n \in N \Rightarrow (-n) \notin N$,
   (h) Si $n \in N$ y $\frac{1}{n} \in N \Rightarrow n = 1$.

2. Probar por inducción que:

$$1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots 2^n = 2^{n+1} \qquad \forall n \in N,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots (2n - 1) = n^2 \qquad \forall n \in N.$$

3. Sea $x \in R$, se define por inducción las potencias de exponente natural de x como:

$$x^1 = x,$$
$$x^{n+1} = x^n .\, x \qquad \forall n \in N.$$

   Probar que $x^{m+n} = x^m .\, x^n \qquad \forall x \in R, \quad \forall m, n \in N$.

4. Encontrar una condición suficiente y necesaria para que $A \subseteq R$ verifique que $\inf(A) = \sup(A)$.

5. Sea $A \subseteq R$, $A \neq \emptyset$ ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de números reales pueden ser el conjunto de los mayorantes de A?:
   $R, R^+, N, R^*, R \setminus N, Z,$
   $\{x \in R : 0 \leq x < 1\}, \{x \in R : 2 \leq x\},$
   $\{x \in R : -5 < x < -3\} \bigcup \{x \in R : 0 < x \leq 5\},$
   $\{x \in R : -10 < x < 10\} \bigcap N,$
   $\{x \in R : -10 < x < 10\} \bigcup N.$

6. Hallar, si existen, los máximos, mínimos, supremos e ínfimos de los conjuntos del ejercicio anterior.