Universidad de Jaén. Escuela Politécnica Superior de Jaén.
Grado en Ingeniería Informática
Asignatura: **Análisis y Métodos Numéricos**. Curso 2017/18
F.Javier Muñoz Delgado
Paqui Molina Alba

Notas 1 (24-09-2017):

Tema 1: El cuerpo de los números reales.

Cuestiones previas.

¿Dónde encontrar información sobre este tema? La mayoría de libros titulados Análisis, Análisis Matemático, Cálculo o Cálculo Infinitesimal pueden ser útiles para este primer tema y para muchos otros. También es fácil encontrar en internet apuntes, presentaciones y vídeos de diferentes profesores y universidades que pueden ser de utilidad.

Lo que aquí se presenta son una notas de carácter informal para ayudar a comprender lo que aparece en los libros y para conocer hasta dónde llegar. Los problemas que hay al final son algunos ejemplos y cada uno debe valorar si son muchos o pocos, y en su caso, buscar más del nivel que considere oportuno.

1. Los números reales.

El cálculo gira entorno al concepto de función, la más simple la función real de variable real. Estudiaremos las funciones, sus derivadas, sus integrales, etc. Las funciones asignan a números reales otros números reales. Parece lógico comenzar estudiando qué son los números reales pues con ellos se va a trabajar durante el curso.

La mayoría de los libros incluyen un tema dedicado al estudio de los números reales.

2. ¿Cómo aparecen los números reales o cómo se llega a los números reales?

Habría dos caminos para llegar a los números reales.

Ampliando los conjuntos numéricos.

Este camino sería más “histórico”, más parecido a como nos fueron apareciendo desde el colegio.

Primero aparecieron los **números naturales**, con los que aprendimos a contar, 1, 2, 3, ... (Algunos autores y libros, incluyen también el cero y otros no). El conjunto de todos los naturales se denota con la **letra** $\mathbb{N}$.

Después nos enseñaron a **sumar y** a **multiplicar** los números naturales. (Reflexionar sobre los algoritmos para estas operaciones y recordar las propiedades de sumas y productos)

También nos enseñaron a restar y a dividir, aunque en ocasiones no podíamos encontrar la solución como un número natural.

A veces, la resta de dos números naturales no podía realizarse, pues daría un número "negativo",y por tanto, necesitábamos ampliar los números naturales hasta los **números enteros**, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... El conjunto de los enteros se denota con la **letra $\mathbb{Z}$**.

Igualmente, al intentar dividir, nos podíamos encontrar con divisiones que no daban un "resultado exacto". Por ello, necesitábamos ampliar los números enteros a los **números racionales**. El conjunto de los racionales se denota por la **letra $\mathbb{Q}$**.

En este conjunto $\mathbb{Q}$ están todos los cocientes, o fracciones, de números enteros (salvo dividir por cero, o de denominador cero). Los números racionales se podían escribir de muchas maneras, eran las fracciones equivalentes (6/4 era igual o equivalente a 3/2). Las fracciones también tenían su representación decimal. Los decimales podían ser: decimales exactos (por ejemplo, 3/2 era 1.5) con un número finito de cifras decimales no nulas), decimales periódicos puros (1/3 era 0.33333....) o decimales periódicos mixtos (2/15 era 0.13333...).

(Recordad los símbolos matemáticos utilizados, para conjuntos y operaciones, los paréntesis, los números primos, la descomposición factorial, las operaciones con fracciones, la reducción a fracción irreducible, expresión decimal, el paso de expresión decimal a fracción, etc.)

Con esta construcción, los números naturales estaban dentro de los enteros y éstos dentro de los racionales. Las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir (salvo por cero) se podían hacer sin ningún problema y el resultado era siempre un número racional (que en ocasiones también era entero o natural). Los números racionales se podían ordenar y decíamos que uno era mayor o menor que otro. También podíamos dibujarlos en una recta colocando el 0, a cierta distancia a la derecha el 1 (la distancia nos fijaba la escala) y sucesivamente colocábamos los restantes números naturales, los enteros negativos a la izquierda y, finalmente, el resto de los racionales.

Todo parecía resuelto hasta que aparecieron las raíces cuadradas. Estudiando algunos problemas geométricos sencillos nos encontrábamos con el Teorema de Pitágoras, un caso fácil, la diagonal del cuadrado unidad. La longitud del cuadrado unidad tenía que ser un número cuyo cuadrado fuese 2. Podíamos ver que la raíz cuadrada de dos debía ser mayor que 1 y menor que 2, o que debía ser mayor que 1.4, pero menor que 1.5, así podíamos seguir, pero cuál sería la fracción exacta que nos diese la raíz de dos. Esto fue un problema para la Humanidad, durante mucho tiempo. Si pensamos en un cuadrado (o dibujamos un cuadrado) podríamos pensar que en ese lado habría cierto número de centímetros, o milímetros, o mejor de átomos (como pensaban algunos en la Antigua Grecia, lo más pequeño que existiese). La diagonal tendría también cierto número de centímetros, o milímetros, o mejor de átomos. La relación, o cociente, entre el número de centímetros o milímetros nos podría dar una aproximación del número raíz cuadrada de dos. Claro que si fuesen átomos, la fracción nos daría la cantidad exacta.

Raíz de dos no es racional. Si la raíz de dos fuese racional, sería una fracción a/b, que podríamos considerar irreducible (en otro caso, simplificaríamos los factores comunes). Elevando al cuadrado, $2\,b^2 = a^2$, de donde a debe ser un número par. Podríamos escribir a=2c, con c otro número entero. Sustituyendo en la igualdad anterior $2\,b^2 = 4\,c^2$, y simplificando $b^2 = 2\,c^2$, por lo que b debería ser también un número par y la fracción a/b no sería irreducible, pues serían ambos enteros pares. La contradicción viene del hecho de suponer que el cuadrado de a/b es 2.

De igual manera, podríamos encontrar que otras muchas raíces de números enteros no pueden ser números racionales. Serán **números irracionales**.

Necesitamos aumentar el conjunto de los números racionales e incluir otros números. De igual forma que la raíz de dos surge como solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$, muchos otros números irracionales surgen como raíces de ecuaciones polinómicas de coeficientes enteros. Serían los **irracionales algebraicos**. Pero aún hay más, pues números como π (la proporción entre la longitud de la circunferencia y su diámetro) no son algebraicos. Tampoco el número e, base de la exponencial o de los logaritmos neperianos, es algebraico. Los números π y e son ejemplos de **irracionales trascendentes**.

Cuando consideramos la raíz cuadrada de 2, la aproximamos por 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, ... Son números racionales cada vez más próximos entre si, pero que no se acercan a un número racional, pues la raíz de dos no lo es. La raíz de 2, está entre el 1 y el 2, entre el 1.4 y 1.5, entre 1.41 y 1.42, entre 1.414 y 1.415, y así podríamos seguir, hasta el infinito y no encontrar el número raíz cuadrada de dos entre los números racionales. Sucesivamente podríamos decir que **los números racionales tienen "agujeros"**.

Podríamos inventarnos más números irracionales, por ejemplo 1.01001000100001.... donde colocamos un cero, dos ceros, tres ceros, ..., antes de cada uno. El número así creado no es racional, pues su desarrollo decimal no es periódico.

El conjunto de los números irracionales se denota por la **letra $\mathbb{I}$**. Los racionales y los irracionales forman el conjunto de los **números reales** que se denota por la **letra $\mathbb{R}$**. Con las operaciones suma y producto, los reales tienen la estructura algebraica de cuerpo. Además, tienen un orden.

Construcción axiomática de $\mathbb{R}$.

En la mayoría de los libros, por rapidez, se opta por la construcción del cuerpo de los números reales a partir de una axiomática. Se supone que existe un conjunto de elementos $\mathbb{R}$, junto con dos operaciones internas (significa que se toman dos elementos de $\mathbb{R}$ y se obtiene otro elemento de $\mathbb{R}$) llamadas suma y producto, y una relación de orden, junto con una propiedades:

1) **Axiomas de cuerpo**:

La operación **suma** cumple:

Asociativa, (a+b)+c=a+(b+c) (Nadie sabe sumar tres cantidades, cuando hay tres se toman dos, se suman y el resto se suma con el tercero. La propiedad asociativa dice que da igual por donde empecemos)

Conmutativa, a+b=b+a

Elemento neutro, existe un elemento, llamado cero y denotado 0, tal que a+0=0+a=a.

Elemento opuesto, para cada número real, a, existe otro que denotamos -a, tal que a + (-a)=(-a)+a=0

(Estas propiedades nos permiten trabajar con comodidad. Por ejemplo, si dada la expresión a+b=c, conocemos a y c, y nos preguntamos por cuánto será b, diríamos de forma casi inmediata que b es c-a. Para llegar a ello, es necesario hacer unas operaciones y usar unas propiedades.

a+b=c

Sumamos una cantidad en los dos miembros

d+(a+b)=d+c

Aplicamos la propiedad asociativa

(d+a)+b=d+c

Para despejar b, d+a debería ser un elemento neutro, y para ello, d debería ser el opuesto de a.

(-a+a)+b=-a+c

0+b=-a+c

b=-a+c

Finalmente, aplicando la propiedad conmutativa

b=c-a

Por ello, que el conjunto $\mathbb{R}$, con la operación suma, tenga esas propiedades nos da tranquilidad, y nos permite operar con facilidad. Otros conjuntos con otras operaciones no tienen estas propiedades y debemos proceder con mucho más cuidado, y muchos pasos no podrían realizarse.)

La operación **producto** cumple:

Asociativa (a*b)*c=a*(b*c)

Conmutativa a*b=b*a

Elemento unidad. Existe un elemento, llamado uno y denotado 1, tal que a*1=1*a=a.

Elemento opuesto. Para cada número real, a, distinto del cero, existe otro que denotamos 1/a tal que a*(1/a)=(1/a)*a=1

Las dos operaciones se "llevan bien":

Distributiva a*b+a*c=a*(b+c) (Cuando tenemos que sumar dos productos con un factor en común, podemos primero sumar y luego multiplicar, ahorramos así un producto y mejoramos "el coste computacional")

2) **Axiomas de orden**:

El orden cumple las siguientes propiedades:

Reflexiva, a≤a

Antisimétrica, si a≤b y b≤a entonces a=b

Transitiva, si a≤b y b≤c entonces a≤c.

Orden total, dados dos números a,b, se cumple que $a \leq b$ o $b \leq a$.

El orden se "lleva bien" con la suma y el producto:

Con la suma: si $a \leq b$ entonces $a+c \leq b+c$.

Con el producto: si $a \leq b$ y $0 \leq c$ entonces $a*c \leq b*c$.

3) **Axioma del supremo o completitud.**

Todo conjunto de números reales, que tenga algún elemento y esté acotado superiormente, siempre tiene supremo en $\mathbb{R}$.

(Para comprender esto es necesario conocer el concepto de **supremo** (respectivamente, **ínfimo**) y para ello conocer el concepto de **cota superior** (respectivamente, **cota inferior**). Un conjunto de números reales A se dice que está **acotado superiormente** (respectivamente, **acotado inferiormente**) si existe un número real c que sea mayor o igual (respectivamente, menor o igual) que todos los de A. Un número c así, se llama una **cota superior** de A (respectivamente, una **cota inferior** de A). El supremo de un conjunto A acotado superiormente es el mínimo de las cotas superiores. El ínfimo de un conjunto A acotado inferiormente es el máximo de las cotas inferiores.)

Observemos que las aproximaciones que calculábamos de la raíz cuadrada de dos, 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ... es un conjunto acotado superiormente, pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$, en cambio, gracias al axioma del supremo sí tiene supremo en $\mathbb{R}$.

3. Lo que se puede hacer tras las operaciones de suma y producto, y el orden.

Gracias al orden podemos representar los números sobre una recta, la llamaremos **recta real**, colocando los menores a la izquierda y los mayores a la derecha.

También podemos considerar los números mayores y/o menores que unos dados, dando lugar así a los **intervalos**, que podemos notar $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,\infty)$, (a,∞), $(-\infty,\infty)$.

Podemos también definir el **valor absoluto** de un número real. Si un número real x, es mayor o igual que cero, su valor absoluto es el mismo, $|x|=x$, por el contrario si un número es menor o igual que cero, su valor absoluto es su opuesto, $|x|=-x$.

El valor absoluto de un número real, puede verse como la **distancia** al punto 0. Igualmente, si queremos saber la distancia a un punto a, podemos considerar $|x-a|$. Se define el **entorno** del punto a y radio ϵ, al intervalo $(a-\epsilon,a+\epsilon)$, es decir aquellos números que cumplen $|x-a|<\epsilon$.

Cuando los números reales aparecen tras la axiomática, los números naturales aparecen como el menor **conjunto inductivo**. Un conjunto, A, de números reales es inductivo si contiene al 1, y, además, si contiene a un número, también contiene a su siguiente ($n \in A$ entonces $n+1 \in A$). Los conjuntos de los naturales, los enteros, o los racionales, son ejemplos de conjuntos inductivos. El más pequeño es el de los naturales (1, 2, 3, ...).

Esto conduce a un tipo de demostración conocido como **demostración por inducción**. Por ejemplo, si observamos que al sumar los primeros números impares (1, 3, 5, 7, ...) obtenemos los cuadrados de los números naturales,

1=1
1+3=4
1+3+5=9
1+3+5+7=16
......
podríamos preguntarnos si eso ocurre siempre, es decir si

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$$

Hemos comprobado que es verdad para n=1, 2, 3, 4, y podríamos continuar con más números, pero no podemos comprobarlo para infinitos números, necesitamos algún tipo de demostración que conduzca a la seguridad para los infinitos números naturales.
Demostración por inducción:

1) ¿Es cierto para el primer número? Sí, para n=1 se cumple.

2) ¿Si fuese cierto hasta un número n, lo será también para el siguiente, n+1?
Es decir, suponemos que se cumple

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$$

hasta un cierto valor de n.
Ahora nos preguntamos si será cierto también para n+1.
Escribimos la expresión para n+1, y nos preguntamos si será cierto.
¿$1+3+5+7+\ldots+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$?
La herramienta que debemos usar es que la propiedad se cumple hasta el valor de n.
Operamos en el primer miembro:
1+3+5+7+...+(2(n+1)-1)= 1+3+5+7+...+(2n-1)+ (2n+1) = n^2 + (2n+1)
En la última igualdad hemos utilizado el supuesto de que la propiedad es cierta hasta n.
Operamos en el segundo miembro:
$(n+1)^2=n^2$+2n+1
Por tanto, los dos miembros de la igualdad para n+1 son iguales y tenemos que de la igualdad para n, se llega a la igualdad también para n+1.
Conclusión: la igualdad es cierta para cualquier valor de n natural.

En ocasiones, la propiedad es cierta a partir de un valor de n distinto del 1. A veces es desde n=0, otras desde un entero mayor. La demostración se realizaría igual, se comprueba para el primer valor y, suponiendo que se cumple hasta un cierto número natural, se demuestra para el siguiente.

4. Algunos problemas.

1) Calcular x, justificando todos los pasos con los axiomas de cuerpo, sabiendo que:

$$\frac{(x+x/2)/2+x}{2} + x = 30$$

2) Representar en la recta real los valores de x que cumplen las expresiones siguientes. Expresarlos, si es posible, como un intervalo o unión de varios intervalos. Decir si están acotados, superior o inferiormente, y, en ese caso, calcular el supremo y/o el ínfimo:

a) $3x - 2 < x + 5$
b) $-\frac{x}{4} < 7x + 2$
c) $\frac{6}{x-1} \geqslant 10$
d) $\frac{3x+1}{2x+2} < 7$
e) $18x - 3x^2 > 0$
f) $(x-2)(x+1)>0$
g) $x^2 + 9 - 6x < 0$
h) $x^2 < 2x + 8$
i) $|x| = 5$
j) $|x| < 6$
k) $|x| > 2$
l) $|x| \leqslant 3$

3) Resolver la ecuación:

$$|1+|2-x|| = 3$$

4) Representar en la recta real los valores de x que cumplen las expresiones siguientes. Expresarlos, si es posible, como un intervalo o unión de varios intervalos. Decir si están acotados, superior o inferiormente, y, en ese caso, calcular el supremo y/o el ínfimo:

a) $|x + 2| < 3$
b) $|x - 2| \geqslant 5$
c) $|3x - 5| < 7$
d) $|3x - 5| \geqslant 7$
e) $|5 - \frac{2}{x}| < 1$
f) $|x^2 - 9| = 0$
g) $|x^2 - x - 4| = 2$
h) $|\frac{3}{2}x - \frac{4}{3}| > 1$
i) $|\frac{5}{2} - \frac{3x}{4}| > 0$

5) Resolver las inecuaciones:

a) $|1+|x-2|| \leqslant 3$
b) $||x-2|-3| \leqslant 1$

c) $||x-5|-8| \geqslant 2$

6) Probar por inducción matemática que se cumple para cualquier número natural

a) 3 + 7 + 11 + ... + (4n - 1) = n*(2 n + 1)

b) 3 + 5 + 7 + ... + (2n+1) = n*(n+2)

c) 1*3 + 2*4 + 3*5 + ... + n*(n+2) = $\frac{n*(n+1)*(2n+7)}{6}$

d) $\frac{1}{1*5} + \frac{1}{5*9} + \ldots.. + \frac{1}{(4n-3)*(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

e) La suma de los n primeros cuadrados (comenzando por n=1) es $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

f) La suma de los n primeros números pares (comenzando por el 2) vale $2n^2$

g) $n^3 + 2n$ es múltiplo de 3.

7) Comparar los valores de n^2 y de 2^n, para valores de n pequeños (n=1, 2, 3, 4, 5, ...) conjeturar si una expresión es mayor o menor que la otra a partir de cierto n. Utilizar la técnica de demostración por inducción para intentar demostrar la conjetura.