Capítulo XXV

EL CAMPO ELECTRICO

FORMULARIO

CAMPO ELÉCTRICO:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q'}$$

CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UNA CARGA PUNTUAL:

$$\boldsymbol{E} = K_0 \frac{Q}{r^3} \boldsymbol{r}$$

CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS PUNTUALES:

$$\boldsymbol{E} = K_0 \sum_i \frac{Q_i}{r_i^3} \boldsymbol{r}_i$$

FLUJO ELÉCTRICO:

$$\Phi = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

TEOREMA DE GAUSS:

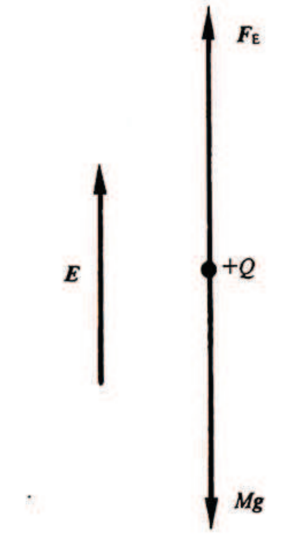
$$\Phi = \frac{\sum_i^n Q_i}{\varepsilon_0}$$

DENSIDAD LINEAL, SUPERFICIAL Y CÚBICA DE CARGA:

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \qquad \sigma = \frac{dQ}{dA} \qquad \rho = \frac{dQ}{dV}$$

EL CAMPO ELECTROSTÁTICO ES CONSERVATIVO:

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \qquad \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{E} = 0$$



Problema XXV-1

Problema 1. Una partícula de 5 g de masa cargada con 1 μC queda en equilibrio en el espacio, dentro de un campo eléctrico. Calcular módulo, dirección y sentido de la intensidad de este campo eléctrico.

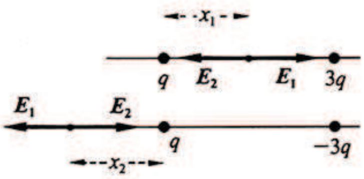
Solución

El campo eléctrico será vertical y hacia arriba:

$$Mg = F_E \quad \Rightarrow \quad Mg = EQ \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Mg}{Q} = \frac{5 \times 10^{-3} \times 9{,}8}{10^{-6}} = 49 \times 10^3 \text{ N/C}}$$

Problema 2. Dos cargas eléctricas puntuales, la una, A, triple que la otra, B, están separadas 1 m. Determinar el punto en que la unidad de carga positiva estaría en equilibrio.

1. Cuando A y B tienen el mismo signo.
2. Cuando tienen signos opuestos.



Problema XXV-2

Solución

$$E_1 + E_2 = 0$$

$$K_0 \frac{Q}{r^2} - K_0 \frac{3q}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = \frac{3}{(x-1)^2} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \boxed{x_1 = 0{,}366 \text{ m}} \\ \boxed{x_2 = -\,1{,}366 \text{ m}} \end{array} \right.$$

x_1 = solución cuando las cargas son positivas.
x_2 = solución cuando tienen signos opuestos.

Problema 3. Una carga puntual positiva de 10^{-2} μC está situada en el origen de un sistema de coordenadas ortogonales. Otra carga puntual negativa de -2×10^{-2} μC está sobre el eje de ordenadas y a 1 m del origen. Determinar la intensidad del campo eléctrico creado por esta distribución en puntos:

1. A (2,0) m.
2. B (1,3) m.
3. C (1/2, 1/2) m.
4. D (3,4) m.

Solución

1.er MÉTODO:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j}$$

$$E_x = E_{x_1} + E_{x_2}$$
$$E_y = E_{y_1} + E_{y_2}$$

$$E_1 = K_0 \frac{Q_1}{r_1^2} \quad \left| \quad \begin{array}{l} E_{x_1} = E_1 \cos\varphi_1 \\ E_{y_1} = E_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \end{array} \right.$$

$$E_2 = K_0 \frac{Q_2}{r_2^2} \quad \left| \quad \begin{array}{l} E_{x_2} = E_2 \cos\varphi_2 \\ E_{y_2} = E_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \end{array} \right.$$

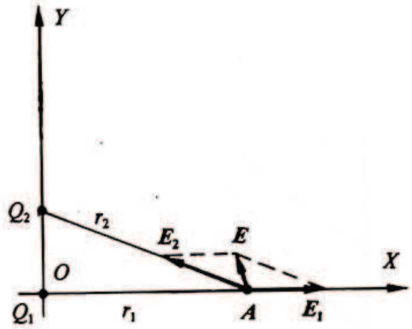
1)

$$E_1 = 9 \times 10^9 \frac{10^{-8}}{4} = \frac{45}{2} \text{ N/C}$$

$$E_2 = 9 \times 10^9 \frac{2 \times 10^{-8}}{5} = 36 \text{ N/C}$$

$\cos \varphi_1 = 1$	$E_{x_1} = \frac{45}{2}$ N/C	$E_x = \frac{45}{2} - \frac{72}{\sqrt{5}} = -9{,}7$ N/C
$\text{sen}\, \varphi_1 = 0$	$E_{y_1} = 0$	
$\cos \varphi_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$	$E_{x_2} = -\frac{72}{\sqrt{5}}$ N/C	$E_y = \frac{36}{\sqrt{5}} = 16{,}1$ N/C
$\text{sen}\, \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$	$E_{y_2} = \frac{36}{\sqrt{5}}$ N/C	

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -9{,}7\boldsymbol{i} + 16{,}1\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$



Problema XXV-3-1.ª

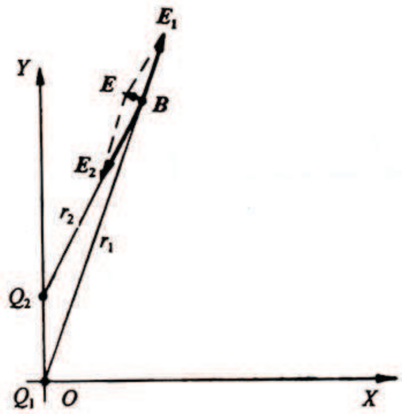
2)

$$E_1 = 9 \times 10^9 \frac{10^{-8}}{10} = 9 \text{ N/C}$$

$$E_2 = 9 \times 10^9 \frac{2 \times 10^{-8}}{5} = 36 \text{ N/C}$$

$\cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$	$E_{x_1} = \frac{9}{\sqrt{10}}$	
$\text{sen}\, \varphi_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}$	$E_{y_1} = \frac{27}{\sqrt{10}}$	$E_x = \frac{9}{\sqrt{10}} - \frac{36}{\sqrt{5}} = -13{,}2$ N/C
$\cos \varphi_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$	$E_{x_2} = -\frac{36}{\sqrt{5}}$	$E_y = \frac{27}{\sqrt{10}} - \frac{72}{\sqrt{5}} = -23{,}7$ N/C
$\text{sen}\, \varphi_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$	$E_{y_2} = -\frac{72}{\sqrt{5}}$	

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -13{,}2\boldsymbol{i} - 23{,}7\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$



Problema XXV-3-2.ª

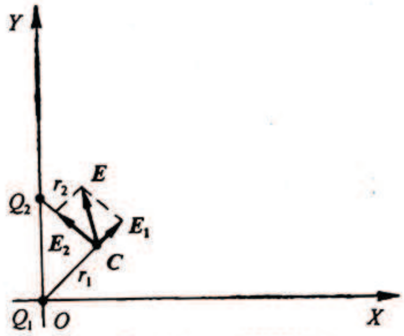
3)

$$E_1 = 9 \times 10^9 \frac{10^{-8}}{1/2} = 180 \text{ N/C}$$

$$E_2 = 9 \times 10^9 \frac{2 \times 10^{-8}}{1/2} = 360 \text{ N/C}$$

$\cos \varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$E_{x_1} = 90\sqrt{2}$ N/C	
$\text{sen}\, \varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$E_{y_1} = 90\sqrt{2}$ N/C	$E_x = 90\sqrt{2} - 180\sqrt{2} = -127{,}3$ N/C
$\cos \varphi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$E_{x_2} = -180\sqrt{2}$ N/C	$E_y = 90\sqrt{2} + 180\sqrt{2} = 381{,}8$ N/C
$\text{sen}\, \varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$E_{y_2} = 180\sqrt{2}$ N/C	

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -127{,}3\boldsymbol{i} + 381{,}8\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$

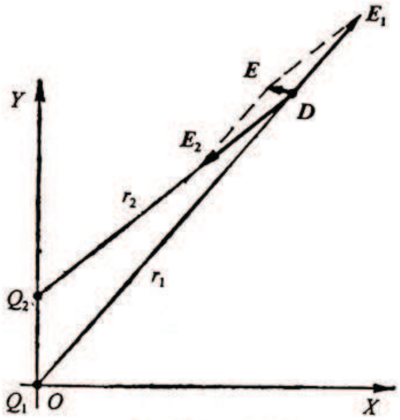


Problema XXV-3-3.ª

4)

$$E_1 = 9 \times 10^9 \frac{10^{-8}}{25} = \frac{18}{5} \text{ N/C}$$

$$E_2 = 9 \times 10^9 \frac{2 \times 10^{-8}}{18} = 10 \text{ N/C}$$



Problema XXV-3-4.ª

$$\cos\varphi_1 = \frac{3}{5} \qquad E_{x_1} = \frac{54}{25} \text{ N/C}$$

$$\operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{4}{5} \qquad E_{y_1} = \frac{72}{25} \text{ N/C}$$

$$\cos\varphi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad E_{x_2} = -5\sqrt{2} \text{ N/C}$$

$$\operatorname{sen}\varphi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad E_{y_2} = -5\sqrt{2} \text{ N/C}$$

$$E_x = \frac{54}{25} - 5\sqrt{2} = -4{,}9 \text{ N/C}$$

$$E_y = \frac{72}{25} - 5\sqrt{2} = -4{,}2 \text{ N/C}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -4{,}9\boldsymbol{i} - 4{,}2\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$

2.º MÉTODO:

Calculamos el potencial $V(P)$ en un punto cualquiera $P(x, y)$ del plano debido a la distribución dada:

$$V(P) = K_0 \Sigma \frac{Q_i}{r_i} = K_0 \left[\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right]$$

$$Q_1 = 10^{-2}\ \mu\text{C}$$

$$Q_2 = -2 \times 10^{-2}\ \mu\text{C}$$

$$r_1 = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r_2 = EP = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$V(P) = 90\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}\right]$$

y como:

$$\boldsymbol{E}(P) = -\boldsymbol{grad}\,V(P) = -\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} \Rightarrow$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 90\left[\frac{x}{[x^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{2x}{[x^2 + (y-1)^2]^{3/2}}\right]$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 90\left[\frac{y}{[x^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{2(y-1)}{[x^2 + (y-1)^2]^{3/2}}\right]$$

1) En el punto $A(2,0)$ m:

$$E_x = 90\left[\frac{2}{4^{3/2}} - \frac{4}{5^{3/2}}\right] = -9{,}7 \text{ N/C}$$

$$E_y = 90\,\frac{2}{5^{3/2}} = 16{,}1 \text{ N/C}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -9{,}7\boldsymbol{i} + 16{,}1\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$

2) En el punto $B(1,3)$ m:

$$E_x = 90\left[\frac{1}{10^{3/2}} - \frac{2}{5^{3/2}}\right] = -13{,}2 \text{ N/C}$$

$$E_y = 90\left[\frac{3}{10^{3/2}} - \frac{4}{5^{3/2}}\right] = -23{,}7 \text{ N/C}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -13{,}2\boldsymbol{i} - 23{,}7\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$

3) En el punto $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ m:

$$E_x = 90\left[\frac{1/2}{(1/2)^{3/2}} - \frac{1}{(1/2)^{3/2}}\right] = -127{,}3 \text{ N/C}$$

$$E_y = 90\left[\frac{1/2}{(1/2)^{3/2}} + \frac{1}{(1/2)^{3/2}}\right] = 381{,}8 \text{ N/C}$$

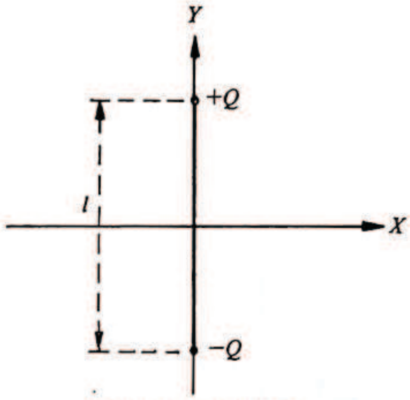
$$\boxed{\boldsymbol{E} = -127{,}3\boldsymbol{i} + 381{,}8\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$

4) En el punto $D(3,4)$ m:

$$E_x = 90\left[\frac{3}{25^{3/2}} - \frac{6}{18^{3/2}}\right] = -4{,}9 \text{ N/C}$$

$$E_y = 90\left[\frac{4}{25^{3/2}} - \frac{6}{18^{3/2}}\right] = -4{,}2 \text{ N/C}$$

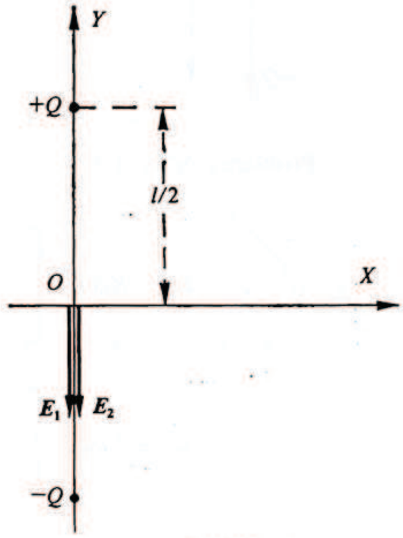
$$\boxed{\boldsymbol{E} = -4{,}9\boldsymbol{i} - 4{,}2\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$



Problema XXV-4

Problema 4. Calcular la intensidad del campo eléctrico creado por el dipolo eléctrico de la figura en los puntos:

1. $O(0,0)$.
2. $P(x,0)$.
3. $S(0,y)$.



Problema XXV-4-1.ª

Solución

1.er MÉTODO:

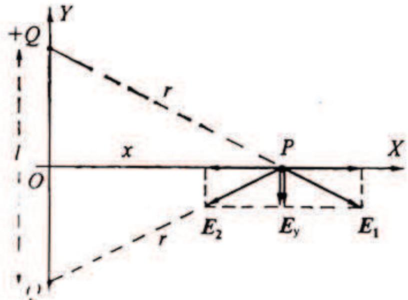
1)

$$E_1 = E_2 = \frac{4K_0Q}{l^2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E} = -2E_1\boldsymbol{j} = -\frac{8K_0Q}{l^2}\boldsymbol{j}}$$

2)

$$E_1 = E_2 = K_0\frac{Q}{r^2} = K_0\frac{Q}{x^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{4K_0Q}{4x^2 + l^2} \Rightarrow \boldsymbol{E} = -2E_{y_1}\boldsymbol{j} = -2E_1 \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j}$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{l/2}{\sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{l}{\sqrt{4x^2 + l^2}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E} = -\frac{8K_0Ql}{(4x^2 + l^2)^{3/2}}\boldsymbol{j}}$$



Problema XXV-4-2.ª

3)

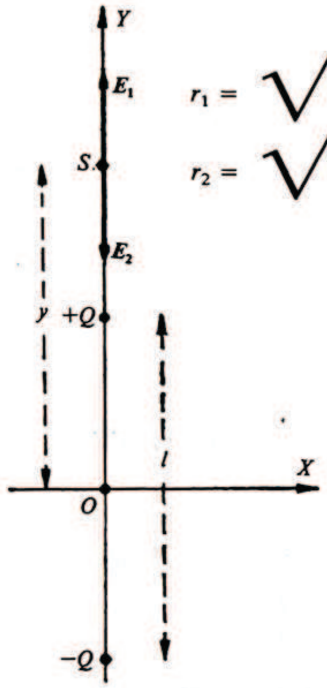
$$E_1 = K_0\frac{Q}{\left(y - \frac{l}{2}\right)^2}$$

$$E_2 = K_0\frac{Q}{\left(y + \frac{l}{2}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{E} = (E_1 - E_2)\boldsymbol{j}$$

$$E_1 - E_2 = K_0Q\left[\frac{1}{\left(y - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(y + \frac{l}{2}\right)^2}\right] = \frac{2K_0Qly}{\left(y^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E} = \frac{32K_0Qly}{(42y^2 - l^2)^2}\boldsymbol{j}}$$

2.° MÉTODO:



Problema XXV-4-3.

Calculamos $V(A)$, siendo $A(x,y)$:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2} \qquad r_2 = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2}$$

$$V(P) = K_0 Q \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2}} \right]$$

$$\boldsymbol{E} = -\, \boldsymbol{grad}\, V \quad \left| \begin{aligned} E_x &= K_0 Q \left[\frac{x}{\left[x^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{x}{\left[x^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right] \\ E_y &= K_0 Q \left[\frac{y - \frac{l}{2}}{\left[x^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{y + \frac{l}{2}}{\left[x^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right] \end{aligned} \right.$$

1) En $O(0,0)$:

$$E_x = 0$$

$$E_y = K_0 Q \left[\frac{-l/2}{(l/2)^3} - \frac{l/2}{(l/2)^3} \right] = -\frac{4 K_0 Q}{l^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\frac{8\, K_0 Q}{l^2}\, \boldsymbol{j}}$$

2) En $P(x,0)$:

$$E_x = K_0 Q x \left[\frac{1}{\left[x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right] = 0$$

$$E_y = K_0 Q \left[\frac{-l/2}{\left[x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{l/2}{\left[x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right] = -\frac{8 K_0 Q l}{(4x^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\frac{8 K_0 Q l}{(4x^2 + l^2)^{3/2}}\, \boldsymbol{j}}$$

3) En $S(0,y)$:

$$E_x = 0$$

$$E_y = K_0 Q \left[\frac{y - \frac{l}{2}}{\left[y - \frac{l}{2}\right]^3} - \frac{y + \frac{l}{2}}{\left[y + \frac{l}{2}\right]^3} \right] = \frac{2 K_0 Q l y}{\left[y^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{32 K_0 Q l y}{(4y^2 - l^2)^2}\, \boldsymbol{j}}$$

Problema 5. En el centro geométrico de un cubo de 2 m de arista tenemos una carga de 50 μC. Calcular el módulo de la intensidad del campo en el centro de una cara y el flujo que atravesará a cada una de ellas. (El medio que se considera es el vacío.)

Solución

1) La distancia del centro del cubo al centro de una cara será la mitad de la arista, o sea, 1 m:

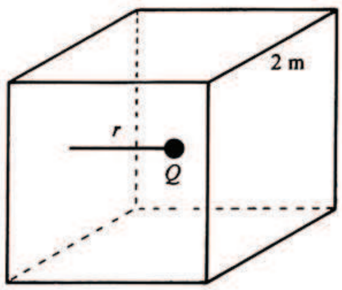
$$E = K_0 \frac{Q}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-6}}{1^2} \text{ N/C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = 45 \times 10^4 \text{ N/C}}$$

2) Según el teorema de Gauss, el flujo que atraviesa a una superficie cerrada que envuelve a una Carga Q es:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \Phi = 50 \times 10^{-6} \times 4\pi \times 9 \times 10^9 = 18\pi 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}$$

como el cubo tiene seis caras, el flujo que atraviesa una de ellas será:

$$\boxed{\Phi = \frac{18\pi 10^5}{6} = 3\pi 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}}$$



Problema XXV-5

Problema 6. Una carga puntual positiva de 10^{-2} μC se encuentra en el origen de un sistema de referencia. Determinar la intensidad del campo eléctrico creado por ella en el punto $P(2, -4, 5)$ m.

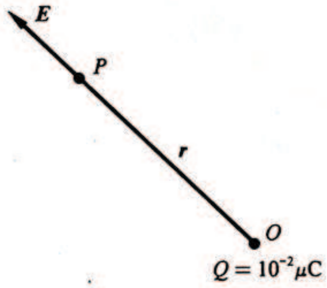
Solución

$$\boldsymbol{E} = K \frac{Q}{r^3} \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{4 + 16 + 25} = 3\sqrt{5} \text{ m}$$

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{\sqrt{5}}{15}(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k})$$

$$E = K \frac{Q}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{10^{-2} \times 10^{-6}}{45} = 2 \text{ N/C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E} = \frac{2\sqrt{5}}{15}(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}) \text{ N/C}}$$



Problema XXV-6

Problema 7. Una carga puntual positiva de 10^{-2} μC se encuentra en el punto $A(-1, 2, -1)$ m. Otra carga puntual negativa de -2×10^{-2} μC se encuentra en $B(2, -2, 2)$ m. Determinar el campo eléctrico creado por esta distribución en el punto $C(3,4,0)$ m.

Solución

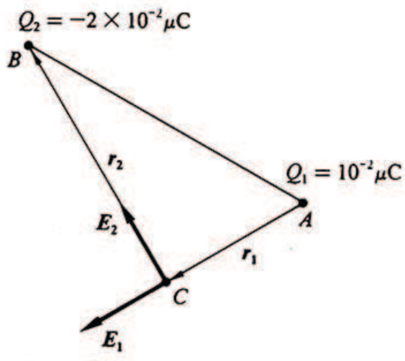
1.^er^ MÉTODO:

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{AC} = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} r_1 = \sqrt{21} \text{ m} \\ \dfrac{\boldsymbol{r}_1}{r_1} = \dfrac{\sqrt{21}}{21}(4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \end{array} \right.$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{CB} = -\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} r_2 = \sqrt{41} \text{ m} \\ \dfrac{\boldsymbol{r}_2}{r_2} = \dfrac{\sqrt{41}}{41}(-\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) \end{array} \right.$$

$$E_1 = 9 \times 10^9 \frac{10^{-8}}{21} = \frac{30}{7} \text{ N/C} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}_1 = \frac{10\sqrt{21}}{49}(4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \text{ N/C}$$

$$E_2 = 9 \times 10^9 \frac{2 \times 10^{-8}}{41} = \frac{180}{41} \text{ N/C} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}_2 = \frac{180\sqrt{41}}{1\,681}(-\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) \text{ N/C}$$



Problema XXV-7

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \left(\frac{40\sqrt{21}}{49} - \frac{180\sqrt{41}}{1\,681}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{20\sqrt{21}}{49} - \frac{1\,080\sqrt{41}}{1\,681}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{10\sqrt{21}}{49} + \frac{360\sqrt{41}}{1\,681}\right)\boldsymbol{k} \text{ N/C}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = 3{,}05\boldsymbol{i} - 2{,}24\boldsymbol{j} + 2{,}31\boldsymbol{k} \text{ N/C}}$$

2.° MÉTODO:

Calculamos el potencial V en un punto cualquiera $P(x,y,z)$, debido a la distribución dada:

$$\left.\begin{array}{l} V(P) = K_0\left[\dfrac{Q_1}{r_1} + \dfrac{Q_2}{r_2}\right] \\ K_0 = 9 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2 \\ Q_1 = 10^{-8}\ \text{C} \\ Q_2 = -2 \times 10^{-8}\ \text{C} \\ r_1 = AP = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2} \\ r_2 = BP = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ V(P) = 90\left[\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2}}\right]$$

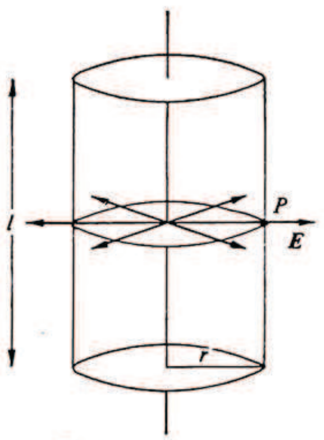
$$\boldsymbol{E} = -\,\boldsymbol{grad}\,V \left|\begin{array}{l} E_x = 90\left[\dfrac{x+1}{[(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2]^{3/2}} - \dfrac{2(x-2)}{[(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2]^{3/2}}\right] \\ E_y = 90\left[\dfrac{y-2}{[(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2]^{3/2}} - \dfrac{2(y+2)}{[(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2]^{3/2}}\right] \\ E_z = 90\left[\dfrac{z+1}{[(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2]^{3/2}} - \dfrac{2(z-2)}{[(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2]^{3/2}}\right] \end{array}\right.$$

En el punto $C(3,4,0)$ m:

$$\left.\begin{array}{l} E_x = 90\left[\dfrac{4}{21^{3/2}} - \dfrac{2}{41^{3/2}}\right] = 3{,}05\ \text{N/C} \\ E_y = 90\left[\dfrac{2}{21^{3/2}} - \dfrac{12}{41^{3/2}}\right] = -\,2{,}24\ \text{N/C} \\ E_z = 90\left[\dfrac{1}{21^{3/2}} + \dfrac{4}{41^{3/2}}\right] = 2{,}31\ \text{N/C} \end{array}\right| \ \boxed{\boldsymbol{E} = 3{,}05\boldsymbol{i} - 2{,}24\boldsymbol{j} + 2{,}31\boldsymbol{k}}$$

Problema 8. En un hilo largo y muy fino tenemos distribuida uniformemente una carga positiva. Sabiendo que λ es la carga por unidad de longitud del hilo, calcular la intensidad del campo eléctrico a una distancia r de él.

Solución



Problema XXV-8

Aplicando el teorema de Gauss a la superficie cilíndrica cerrada cuyo eje es el hilo (ver figura), nos queda:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\int_0^l \lambda dl}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \int_0^l dl}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

Por otra parte, aplicamos el concepto de flujo a la superficie lateral de este cilindro y nos queda:

$$\Phi = \int_A \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{A} = \int_A EdA\cos\varphi$$

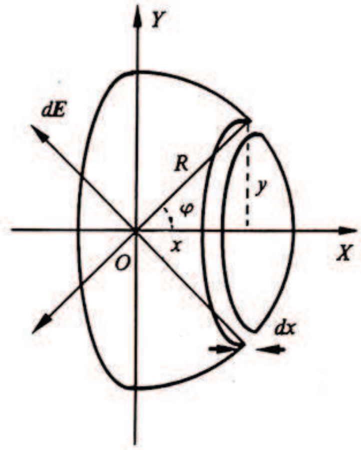
pero $\cos\varphi = 1$, ya que $\varphi = 0$ por ir el campo en la dirección del radio del cilindro y estar definido el vector área, normal a la superficie, por tanto:

$$\Phi = \int_A EdA = E\int_A dA = E2\pi rl$$

Los dos flujos calculados son iguales, puesto que el flujo que atraviesa los círculos superior e inferior son nulos, ya que el vector área y el vector campo son perpendiculares; luego:

$$\frac{\lambda l}{\varepsilon_0} = E 2\pi r l \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2K_0\lambda}{r}}$$

Problema 9. Determinar el valor de la intensidad del campo electrostático en el centro de una semiesfera cargada uniformemente su superficie con una densidad superficial de 1 $\mu C/cm^2$.



Problema XXV-9

Solución

$$dE_x = dE\cos\varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} dE = K_0 \dfrac{dQ}{R^2} \\ \\ dQ = \sigma 2\pi y dx \end{array} \right| \Rightarrow dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi y dx}{R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 R^2} y dx$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{x}{R} \\ \\ y = \sqrt{R^2 - x^2} \end{array} \right| \Rightarrow dE_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 R^3} x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

integrando:

$$E = \int_0^R dE_x = \int_0^R \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 R^3} x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0 R^3}\int_0^R (-2x)\ (R^2 - x^2)^{1/2}\, dx =$$

$$= -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{(R^2 - x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{6\varepsilon_0}$$

Sustituyendo valores en el SI nos quedará:

$$\boxed{E = \frac{4\pi 9 \times 10^9 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-4}} = 6\pi 10^7 \text{ N/C}}$$

Problema 10. Supongamos una distribución homogénea de carga sobre un conductor plano e indefinido; siendo σ su densidad superficial de carga, calcúlese la intensidad del campo eléctrico creado por esta distribución en un punto.

Solución

Apliquemos el teorema de Gauss a la superficie elemental dA_T cerrada de la figura ($ABCDE$), y queda:

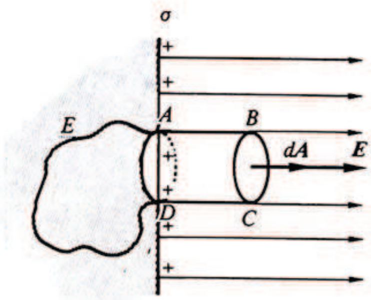
$$d\Phi = \frac{dQ}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dA}{\varepsilon_0}$$

Este flujo es idéntico al que atraviesa la superficie dA (ya que en masa conductora $E = 0$, luego el flujo a través de DEA será nulo, y por otra parte, el flujo a través de la superficie lateral del cilindro $ABCD$ también es nulo, por ser perpendiculares el vector campo y el vector área), y toma el valor:

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E dA \cos\varphi$$

pero $\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = 1$; luego:

$$d\Phi = E dA$$



Problema XXV-10

igualando nos queda:

$$EdA = \frac{\sigma dA}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 4\pi K_0 \sigma}$$

lo que nos indica que el campo eléctrico creado por una distribución de este tipo es homogéneo (toma el mismo valor en todos los puntos).

Problema 11. Calcular la intensidad del campo eléctrico creado por un volumen cilíndrico muy largo de radio a, en el que se halla distribuida uniformemente una carga positiva, conociendo la carga por unidad de volumen ρ; en puntos situados a una distancia r del eje en los casos siguientes:

1. $r \leqslant a$.

2. $r \geqslant a$.

Solución

El campo eléctrico en ambos casos tiene la dirección del radio de los cilindros coaxiales con el dado y toma el mismo valor en todos los puntos de la superficie lateral de cada cilindro.

1) Aplicando el teorema de Gauss a la superficie cerrada cilíndrica de radio r y longitud l (ver fig. 1.ª), tendremos:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

siendo Q la carga de su interior, y como:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \Rightarrow \quad Q = \oint_V \rho dV = \rho \oint_V dV = \rho \pi r^2 l \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{\rho \pi r^2 l}{\varepsilon_0}$$

Por otra parte, aplicamos el concepto de flujo a la superficie lateral de este cilindro y nos quedará:

$$\Phi = \int_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \int_A EdA \cos\varphi$$

pero $\cos\varphi = 1$, ya que $\varphi = 0$, por ir en la misma dirección ambos vectores y, además, por ser $\boldsymbol{E}$ el mismo en todos los puntos del área, nos quedará:

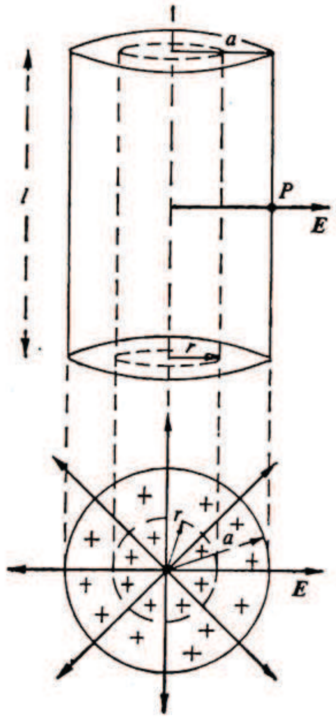
$$\Phi = \int_A EdA = E \int_A dA = E 2\pi r l$$

Los dos flujos calculados son iguales, puesto que el flujo que atraviesa los círculos superior e inferior son nulos, ya que el vector área y el vector campo son perpendiculares; luego:

$$\frac{\rho \pi r^2 l}{\varepsilon_0} = E 2\pi r l \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} = 2\pi K_0 \rho r}$$

para $r = a$ obtenemos:

$$E = 2\pi K_0 \rho a$$



Problema XXV-11-1.ª

2) Haciendo parecido razonamiento que antes. Aplicamos el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

pero en este caso:

$$Q = \oint_V \rho dV = \rho \oint dV = \rho \pi a^2 l \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{\rho \pi a^2 l}{\varepsilon_0}$$

Por otra parte:

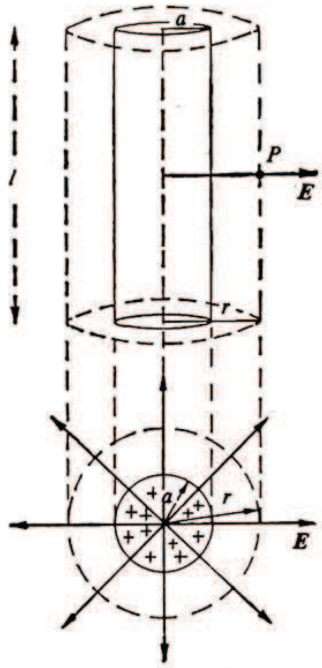
$$\Phi = \int_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \int_A E dA = E \int_A dA = E 2\pi r l$$

igualando por las mismas razones que en el caso anterior, nos queda:

$$\frac{\rho \pi a^2 l}{\varepsilon_0} = E 2\pi r l \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} = \frac{2\pi K_0 \rho a^2}{r}}$$

para $r = a$ se obtiene el mismo resultado que antes:

$$E = 2\pi K_0 \rho a$$



Problema XXV-11-2.ª