INTRODUCTION AUX TELECOMMUNICATIONS
Première année Sciences du Numérique
TD1
2020 – 2021

I. EXERCICE 1 : ÉTUDE D'UNE CHAINE DE TRANSMISSION EN BANDE DE BASE SANS CANAL

On considèrera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, données par la figure 1. Le résultat du produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ est donné dans la figure 2.

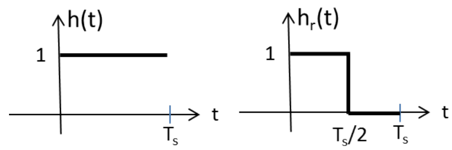

Fig. 1. Réponses impulsionnelles des filtres d'émission et de réception.

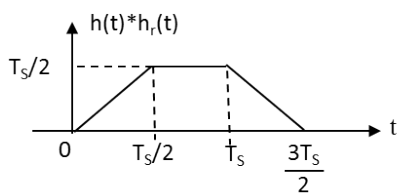

Fig. 2. Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$.

A. Etude théorique

1) La chaîne de communication peut-elle vérifier le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.
   Oui pour $t_0 \in \left[\frac{T_s}{2}, T_s\right]$ car on a alors $g(t_0) \neq 0$ et $g(t_0 + pT_s) = 0 \; \forall \, p \in Z^*$
2) Sans canal de propagation, tracer le signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la suite de bits émise suivante : 0110100. Retrouve-t-on sur ce signal le fait que la chaine de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ?
   Le signal $z(t)$ est tracé en rouge sur la figure 3. On voit bien qu'en échantillonnant à $t_0 + mT_s$, $m = 0, 1, 2, ...$, avec $t_0 \in \left[\frac{T_s}{2} T_s\right]$, on retrouve les symboles émis (au facteur $\frac{T_s}{2}$ près, représentant $g(t_0)$)

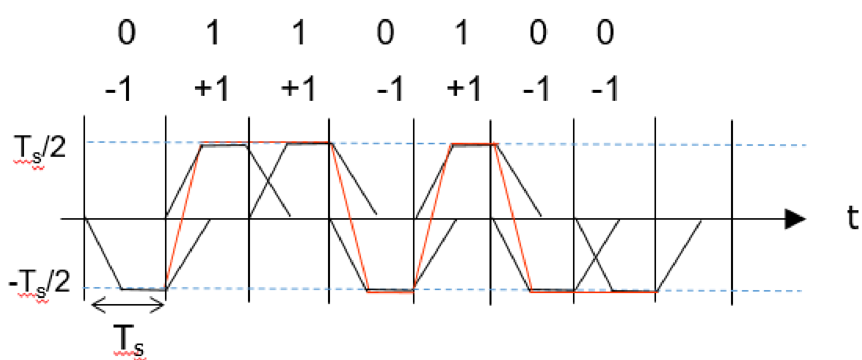

Fig. 3. Signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la suite de bits émise suivante : 0110100.

3) Toujours sans canal de propagation, tracer le diagramme de l'oeil avec une base de temps de T_s. Retrouve-t-on sur le diagramme de l'oeil le fait que la chaine de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ?
Le diagramme de l'oeil est tracé sur la figure 4. Il représente, sur un même tracé, tout ce qui peut se produire sur le signal pendant T_s. On peut en déduire s'il existe, quoi qu'il arrive sur le signal en question, un instant sans interférence entre symboles à chaque T_s. La réponse est oui. On retrouve le fait qu'on doive échantillonner à $t_0 + mT_s$, $m = 0, 1, 2, ...$, avec $t_0 \in \left[\frac{T_s}{2} T_s\right]$. A ces instants là nous aurons toujours, sans bruit, $\pm\frac{T_s}{2}$

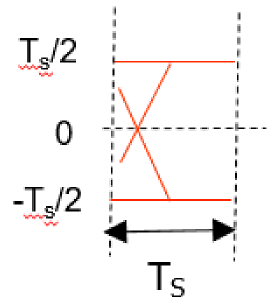

Fig. 4. Diagramme de l'oeil avec une base de temps de T_s

II. Exercice 2 : impact d'un canal de propagation à bande passante limitée

Soit un signal émis $x(t)$ qui se compose de symboles équiprobables et indépendants appartenant à l'alphabet $\{\pm 1\}$ mis en forme par un filtre en racine de cosinus surélevé de roll off égal à $0,2$. On transmet ce signal en bande de base dans un canal de transmission idéal de bande 1200 Hz. Le filtre de réception est identique au filtre de mise en forme.

1) Le critère de Nyquist peut-il être respecté pour cette transmission ? Si oui à quelle condition ?
Si on note $H(f)$ la réponse en fréquence du filtre d'émission et $H_r(f)$ la réponse en fréquence du filtre de réception, alors $H(f)H_r(f)$ est un filtre en cosinus surélevé qui permet de respecter le critère de Nyquist (un tracé de $H(f)H_r(f)$ et de ses versions décalées tous les $\frac{1}{T_s}$ montre que cette forme permet de respecter le critère de Nyquist car l'ajout de tous ces décalages est bien constant : critère de Nyquist vu dans le domaine fréquentiel). Attention cependant le critère de Nyquist doit être respecté sur $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f)$, si $H_c(f)$ représente la réponse en fréquence du canal de propagation. Ce canal est idéal sur une bande de 1200 Hz, ce qui veut dire que sa réponse en fréquence est donné par la figure 5. Pour pouvoir respecter le critère de Nyquist sur cette transmission il faudra donc que $\frac{1+\alpha}{2} R_s = 0.6 R_s < 1200\ Hz$, $R_s = \frac{1}{T_s}$ représentant le débit symbole. Cette condition permet que le canal de propoagation ne vienne pas "perturber" la forme $H(f)H_r(f)$ permettant de respectre le critère de Nyquist.

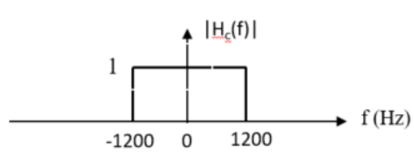

Fig. 5. Réponse en fréquence du canal de transmission.

2) En déduire le débit symbole R_s maximal qui pourra être transmis sans apparition d'interférence entre symboles aux instants optimaux d'échantillonnage.
$R_s \leq 2000\ bauds \Rightarrow (R_s)_{max} = 2000$ bauds.

3) Si l'on veut transmettre avec un débit binaire $R_b = 4$ Kbps, quels ordres de modulations pourront être utilisés sans apparition d'interférence entre symboles aux instants optimaux d'échantillonnage ?
$R_s = \frac{R_b}{log_2(M)}$, où M représente l'ordre de la modulation (nombre de symboles possibles). Il faudra ici $M \geq 4$ si on veut continuer à assurer le critère de Nyquist sur la transmission.

III. Exercice 3 : Étude d'une chaine de transmission en bande de base : bande de Nyquist

On considèrera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des filtres de mise en forme et de réception de même réponse impulsionnelle : $h_r(t) = h(t) = sinc(\pi t/T_s)$.

1) Sans canal de propagation :
   a) Vérifier dans le domaine fréquentiel que la chaîne de transmission peut vérifier le critère de Nyquist.
   $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f) = T_s\Pi_{1/T_s}(f) \times 1 \times T_s\Pi_{1/T_s}(f) = T_s^2\Pi_{1/T_s}(f)$.
   On a bien $\sum_k G\left(f - \frac{k}{T_s}\right) =$ constante(T_s^2) (faire un dessin pour le visualiser) et donc le critère de Nyquist peut être respecté.
   Remarque : Nous sommes ici dans le cas de respect du critère de Nyquist avec la bande occupée la plus petite possible (bande de Nyquist), irréalisable en pratique.
   b) Vérifier dans le domaine temporel que la chaîne de transmission peut vérifier le critère de Nyquist.
   $g(t) = TF^{-1}[G(f)] = T_s sinc(\pi t/T_s)$. Pour $t_0 = 0$ on a bien $g(t_0) \neq 0$ et $g(t_0 + pT_s) = 0 \; \forall \; p \in Z^*$, donc le critère de Nyquist peut être respecté sur cette chaine de transmission.
   Remarques :
   - les filtres donnés ici ne sont pas causaux, il faudrait donc décaler les réponses impulsionnelles pour les rendre causaux, ce qui modifierait le t_0 à considérer.
   - par rapport au calcul réalisé en cours : $g^{(t_0)}(t) = \frac{g(t)}{g(0)} = sinc(\pi t/T_s)$ ($g(t)$ déjà centré en 0), ce qui donne $G^{(t_0)}(f) = T_s\Pi_{1/T_s}(f)$ et donc $\sum_k G^{(t_0)}\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = constante = T_s$
2) On suppose maintenant que le canal de transmission introduit un filtrage et que le module de sa réponse en fréquence $H_c(f) = TF[h_c(t)]$ est donné par la figure 6. Peut-on, en présence de ce canal, continuer à respecter le critère de Nyquist ? Si oui, à quelle condition ?

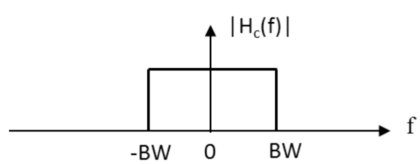

Fig. 6. Fonction de transfert du canal de l'exercice 2

Si $BW > \frac{1}{2T_s} \Leftrightarrow R_s = \frac{1}{T_s} < 2BW$ ($H(f)H_r(f)$ est de support $\left[-\frac{1}{2T_s}, \frac{1}{2T_s}\right]$), alors on pourra respecter le critère de Nyquist sur la transmission (limitation du débit possible pour une transmission sans interférences entre symboles aux instants de décision).