Position du problème

Problème général pour une modulation quelconque à M états

- modulation à $M = 2^k$ états : M symboles possibles $\{\alpha_j\}_{j=1,\ldots,M}$ constitué chacun de k bits
- à chaque symbole α_j correspond un signal émis $s_j(t)$ sur une période symbole de durée T_s
- canal gaussien :

$$r(t) = s(t) + n(t),\ t \in [0; T_s]$$

  - $r(t)$ est le signal reçu
  - $s(t)$ est le signal émis, choisi parmi les signaux $(s_j(t))_{j=1,\ldots,M}$
  - $n(t)$ un bruit blanc gaussien.
- pas d'interférence inter-symbole

Problème

Comment retrouver de façon optimale le symbole transmis à partir du signal $r(t)$ reçu sur une période symbole ?

Probabilité d'erreur

Erreur : si le symbole choisi a_i n'est pas le symbole émis a_j.

$$\begin{aligned} P(\text{erreur}) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{M}\bigcup_{i\neq j}\{\text{décider } \alpha_i \text{ et } \alpha_j \text{ est émis}\}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{M} P(\alpha_j)P(\text{erreur}|\alpha_j \text{ est émis}) \\ &= \sum_{j=1}^{M}\sum_{i\neq j} P(\alpha_j)P(\text{décider } \alpha_i|\alpha_j \text{ est émis}) \end{aligned}$$

exemple : 2 symboles $+1$ et -1.

$$P(\text{erreur}) = P(+1)P(-1|+1) + P(-1)P(+1|-1)$$

2 types de probabilité conditionnelle

- Probabilité **a posteriori** $P(\alpha_j|r)$: probabilité de choisir le symbole α_j connaissant le signal reçu r.
- Probabilité **a priori** ou vraisemblance $P(r|\alpha_j)$: probabilité de recevoir le signal r quand on émet symbole le symbole α_j.

Lien entre les 2 probabilités (règle de Bayes)

$$P(\alpha_j|r) = \frac{P(\alpha_j)P(r|\alpha_j)}{P(r)}$$

2 règles de décision :

1. règle du **Maximum A Posteriori** (MAP) :

$$\widehat{\alpha}_{\mathrm{MAP}} = \arg\max_{\alpha_i} P(\alpha_i|r)$$

2. règle du **Maximum de Vraisemblance** (*Maximum Likelihood*)

$$\widehat{\alpha}_{\mathrm{MV}} = \arg\max_{\alpha_i} P(r|\alpha_i)$$

Si les symboles sont **équiprobables**, alors $\widehat{\alpha}_{\mathrm{MAP}} = \widehat{\alpha}_{\mathrm{MV}}$.

1ère étape : cas du canal discret mono-dimensionnel

On considère que pour transmettre le symbole α_j, on émet le scalaire a_j, et le signal reçu est une variable réelle r qui s'écrit sous la forme :

$$r = a + n$$

où $a \in \{a_1, \ldots, a_M\}$ est la variable codant le symbole émis, et n est une variable gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ représentant le bruit.
Donc $r|a = a_j \sim \mathcal{N}(a_j, \sigma^2)$.

Récepteur ML

On détecte le symbole α_j si $P(r|a = a_j) > P(r|a = a_i)$ $\forall i \neq j$:

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r-a_j)^2} & > & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r-a_i)^2} & \forall i \neq j \\ \Leftrightarrow & (r-a_j)^2 & < & (r-a_i)^2 & \forall i \neq j \end{array}$$

Interprétation : on choisit le symbole le plus proche (en distance euclidienne) du signal reçu r.

Récepteur MAP

On détecte le symbole α_j si $P(a = a_j|r) > P(a = a_i|r)\ \forall i \neq j$

$$
\begin{array}{rrcll}
 & \frac{P(a_j)P(r|a=a_j)}{P(r)} & > & \frac{P(a_i)P(r|a=a_i)}{P(r)} & \forall i \neq j \\
\Leftrightarrow & P(a_j)e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r-a_j)^2} & > & P(a_i)e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r-a_i)^2} & \forall i \neq j \\
\Leftrightarrow & (r-a_j)^2 - 2\sigma^2 \ln P(a_j) & < & (r-a_i)^2 - 2\sigma^2 \ln P(a_i) & \forall i \neq j \\
\Leftrightarrow & (r-a_j)^2 & < & (r-a_i)^2 - 2\sigma^2 \ln \frac{P(a_i)}{P(a_j)} & \forall i \neq j
\end{array}
$$

2ème étape : cas discret multidimensionnel

On considère que sur chaque période, on reçoit un vecteur de dimension N et non un scalaire. Le modèle précédent devient :

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{n} \tag{1}$$

où $\mathbf{a} \in \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_M\}$ représente le symbole émis, et $\mathbf{n}$ est un vecteur gaussien $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$. Donc $\mathbf{r}|\mathbf{a} = \mathbf{a}_j \sim \mathcal{N}(a_j, \sigma^2)$.

Récepteur ML

On détecte le symbole α_j si $P(\mathbf{r}|\mathbf{a} = \mathbf{a}_j) > P(\mathbf{r}|\mathbf{a} = \mathbf{a}_i)\ \forall i \neq j$

$$\begin{array}{lrcll} & \left(2\pi\sigma^2\right)^{-N/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{r}-\mathbf{a}_j\|^2} & > & \left(2\pi\sigma^2\right)^{-N/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{r}-\mathbf{a}_i\|^2} & \forall i \neq j \\ \Leftrightarrow & \|\mathbf{r}-\mathbf{a}_j\|^2 & < & \|\mathbf{r}-\mathbf{a}_i\|^2 & \forall i \neq j \end{array}$$

Interprétation : on choisit de nouveau le symbole le plus proche (en distance euclidienne) du signal reçu $\mathbf{r}$.

Récepteur MAP

On détecte le symbole α_j si $P(\mathbf{a} = \mathbf{a}_j | \mathbf{r}) > P(\mathbf{a} = \mathbf{a}_i | \mathbf{r}) \; \forall i \neq j$

$$
\begin{array}{rrcll}
 & \frac{P(\mathbf{a}_j) P(\mathbf{r}|\mathbf{a}=\mathbf{a}_j)}{P(\mathbf{r})} & > & \frac{P(\mathbf{a}_i) P(\mathbf{a}|\mathbf{a}=\mathbf{a}_i)}{P(\mathbf{r})} & \forall i \neq j \\
\Leftrightarrow & P(\mathbf{a}_j) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{r}-\mathbf{a}_j\|^2} & > & P(a_i) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|r-a_i\|^2} & \forall i \neq j \\
\Leftrightarrow & \|r - \mathbf{a}_j\|^2 - 2\sigma^2 \ln P(a_j) & < & \|\mathbf{r} - \mathbf{a}_i\|^2 - 2\sigma^2 \ln P(\mathbf{a}_i) & \forall i \neq j \\
\Leftrightarrow & \|r - \mathbf{a}_j\|^2 & < & \|\mathbf{r} - \mathbf{a}_i\|^2 - 2\sigma^2 \ln \frac{P(\mathbf{a}_i)}{P(\mathbf{a}_j)} & \forall i \neq j
\end{array}
$$

3ème étape : retour au cas continu

Signal continu reçu

$$r(t) = s(t) + n(t) \ , \ t \in [0, T_s]$$

où $s(t) = s_j(t)$ pour émettre le symbole α_j, et $n(t)$ est un bruit blanc gaussien de DSP $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$.

Méthode

1. convertir le signal continu $r(t)$ en un vecteur $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$, où N est la dimension du signal transmis ;
2. estimer le symbole α émis à partir du vecteur $\mathbf{r}$.

Hypothèse

On considère dans la suite le cas où les symboles sont équiprobables, et donc $\widehat{\alpha}_{\mathrm{MV}} = \widehat{\alpha}_{\mathrm{MAP}}$.

Décomposition

Décomposition du signal reçu $r(t)$ sur une base orthonormale de fonctions $\{\Phi_n(t)\}_n$ de $L^2([0;T_s])$:

$$r(t) = \sum_k r_k \Phi_k(t) \text{ avec } r_k = \int_0^{T_s} r(t)\Phi_k(t)dt$$

Les signaux $s_1(t), \ldots, s_M(t)$ (et donc $s(t)$) se trouvent dans un espace de dimension N. Donc $s(t)$ est engendré par la base $\{\Phi_k(t)\}_{k=1,\ldots,N}$. Les composantes r_k de $r(t)$ dans cette base s'écrivent donc sous la forme :

$$r_k = s_{mk} + n_k$$

avec

$$\begin{array}{rcll} r_k & = & \int_0^{T_s} r(t)\Phi_k(t)dt, & k = 1, \ldots, N \\ s_{mk} & = & \int_0^{T_s} s_m(t)\Phi_k(t)dt, & k = 1, \ldots, N \\ n_k & = & \int_0^{T_s} n(t)\Phi_k(t)dt, & k = 1, \ldots, N \end{array}$$

$\Rightarrow$ $r(t)$, $s_m(t)$, et $n(t)$ sont représentés respectivement par $\mathbf{r} = [r_1, \ldots, r_N]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{s}_m = [s_{m1}, \ldots, s_{mN}]^{\mathrm{T}}$, et $\mathbf{n} = [n_1, \ldots, n_N]^{\mathrm{T}}$.

Remarque

- les composantes de $n(t)$ dans $\{\Phi_k(t)\}_{k\geq N+1}$ sont inutiles pour la décision.
- les composantes $(r_k)_{k\geq N+1}$ ne contiennent pas d'information sur le signal $s_m(t)$.

☞ la décision peut se faire entièrement à partir de $\mathbf{r}$.

Modèle

On obtient donc le modèle

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$$

avec $\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_M\}$ et $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \frac{N_0}{2} I_N\right)$.

☞ on retombe sur le problème de détection multi-dimensionnel (1).

Modèle

D'après (1), le symbole détecté est celui pour lequel le vecteur $\mathbf{s}_m$ correspondant minimise la distance

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2 = \langle \mathbf{r} - \mathbf{s}_m, \mathbf{r} - \mathbf{s}_m \rangle_{\mathbb{R}^N}$$

ce qui équivaut à maximiser la fonction

$$2\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_m \rangle_{\mathbb{R}^N} - \|\mathbf{s}_m\|^2$$

Or, on a :

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_m \rangle_{\mathbb{R}^N} = \langle r, s \rangle_{L^2([0,T_s])} = \int_0^{T_s} r(t) s_m(t) dt$$

et

$$\langle \mathbf{s}_m, \mathbf{s}_m \rangle_{\mathbb{R}^N} = \langle s_m, s_m \rangle_{L^2([0,T_s])} = \int_0^{T_s} |s_m(t)|^2 dt = \mathcal{E}_m$$

où $\mathcal{E}_m$ est l'énergie du signal s_m sur $[0, T_s]$.

Bilan

Le symbole α_m détecté est celui pour lequel le signal associé $s_m(t)$ maximise

$$\boxed{\rho_m = 2\int_0^{T_s} r(t)s_m(t)dt - \mathcal{E}_m \ , \ m = 1, \ldots, M}$$

Modulation à énergie constante

Si tous les signaux ont la même énergie, le symbole α_m détecté est celui pour lequel le signal associé $s_m(t)$ maximise

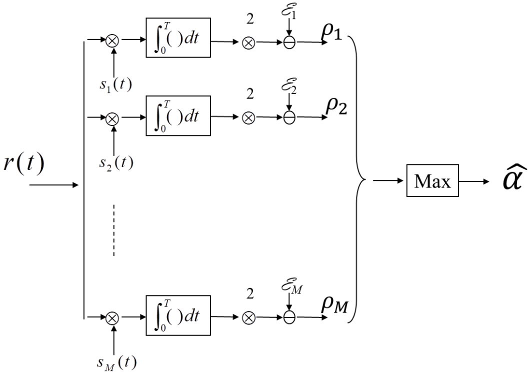
$$\boxed{\int_0^{T_s} r(t)s_m(t)dt \ , \ m = 1, \ldots, M}$$

Interprétation

$\int_0^{T_s} r(t)s_m(t)dt$ est la **corrélation** entre les signaux $r(t)$ et $s_m(t)$ sur la période symbole.

☞ le symbole détecté est donc celui pour lequel le signal reçu $r(t)$ ressemble le plus au signal émis $s_m(t)$ sur la période symbole.

Schéma de la détection par corrélation



Interprétation en termes de filtrage

Filtre adapté

Si on pose :

$$h_m(t) = \begin{cases} s_m(T_s - t) & , \; t \in [0, T_s] \\ 0 & , \; \text{sinon} \end{cases}$$

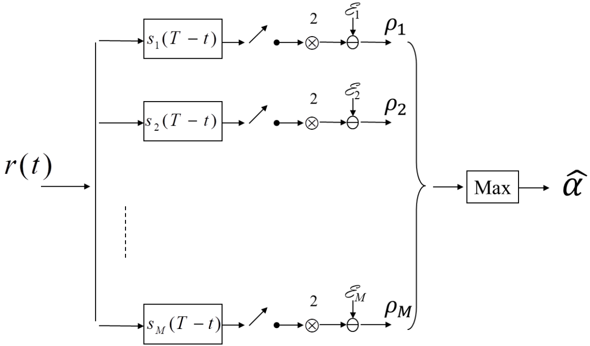
Alors on a :

$$\int_0^T r(t) s_m(t) dt = \int_{\mathbb{R}} r(t) h_m(T_s - t) dt = r * h_m(T_s)$$

Ainsi on peut voir le terme de corrélation $\int_0^{T_s} r(t) s_m(t) dt$ comme la sortie échantillonnée à l'instant T_s du filtre de réponse impulsionnelle $h_m(t)$, d'entrée $r(t)$.

Ce filtre est appelé **filtre adapté** au signal de mise en forme $s_m(t)$.

Schéma de la détection par filtrage adapté



Cas particulier : modulations PAM

Signaux émis

Pour les modulations Pulse Amplitude Modulation, on a :

$$s_m(t) = a_m h(t) \ , \ m = 1, \dots, M$$

Donc

$$\rho_m = 2a_m \int_0^{T_s} r(t)h(t)dt - a_m^2 \mathcal{E}_h = 2a_m \rho - a_m^2 \mathcal{E}_h$$

avec $\mathcal{E}_h = \int_0^{T_s} h^2(t)dt$ et $\rho = \int_0^{T_s} r(t)h(t)dt$.

Détection

On détecte le symbole α_j si $\rho_j > \rho_i$, $\forall i \neq j$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 2a_j\rho - a_j^2\mathcal{E}_h > 2a_i\rho - a_i^2\mathcal{E}_h \\
&\Leftrightarrow \quad 2(a_j - a_i)\rho > (a_j - a_i)^2\mathcal{E}_h \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho > \mathcal{E}_h \frac{a_j + a_i}{2} & \text{si } a_j > a_i \\ \rho < \mathcal{E}_h \frac{a_j + a_i}{2} & \text{si } a_j < a_i \end{cases}
\end{aligned}$$

Filtrage unique

On peut écrire :

$$\rho = r * h_r(T_s)$$

où $h_r(t) = h(T_s - t)$ est le filtre de réception adapté à l'**unique** filtre d'émission $h(t)$.

- ☞ on fait ainsi passer le signal reçu $r(t)$ à travers **un seul filtre**
- ☞ on compare la sortie de ce filtre calculée à l'instant T_s aux seuils

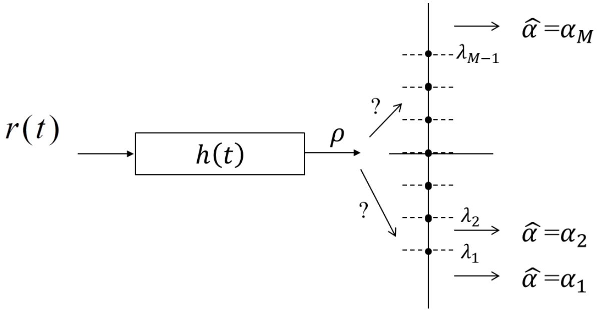
$$\lambda_i = \mathcal{E}_h \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$$

Seuillage

Si les amplitudes a_i sont rangées par ordre croissant, on a donc :

$$\widehat{\alpha}_{\mathrm{MV}} = \begin{cases} \alpha_1 & \text{si } \rho < \lambda_1 \\ \alpha_j & \text{si } \rho \in \,]\lambda_{j-1}; \lambda_j[\\ \alpha_M & \text{si } \rho > \lambda_{M-1} \end{cases}$$

Schéma de la détection par filtrage adapté pour PAM



Maximisation du rapport signal sur bruit en sortie pour modulation PAM

Filtrage du signal reçu

Soit $h_r(t)$ le filtre de réception. On obtient en sortie du filtre :

$$z(t) = r * h_r(t)$$

avec

$$r(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT_s) + n(t)$$

où $h_e(t) = h * h_c(t)$ est le filtre équivalent au filtre de mise en forme $h(t)$ et au filtre canal $h_c(t)$. Si on échantillonne à l'instant $t = t_0 + mT_s$, on obtient la variable

$$z_m = z(t0 + mT_s) = \sum_k a_k h_r * h_e(t_0 + (m-k)T_s) + h_r * n(t0 + mT_s)$$

Soit $g = h_r * h_e$. Si g vérifie le critère de Nyquist, alors z_m s'écrit sous la forme

$$z_m = a_m g(t_0) + w_m$$

où $w_m = h_r * n(t0 + mT_s)$, représentant le bruit, est une variable $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
Le rapport signal-sur-bruit est alors :

$$\mathrm{SNR} = \frac{a_m^2 |g(t_0)|^2}{\sigma^2}$$

Problème

Déterminer le filtre $h_c(t)$ en fonction de $h_e(t)$ qui maximise SNR (pour a_m fixé).

Passage par le domaine fréquentiel

On a : $g(t_0) = \mathrm{TF}^{-1}(G)(t_0)$, où $G(f) = H_c(f)H_e(f)$.
D'autre part, $\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} S_w(f)df$, avec $S_w(f) = |H_c(f)|^2 S_n(f) = |H_c(f)|^2 \frac{N_0}{2}$.
Donc :

$$\mathrm{SNR} = \frac{a_m^2 |\int_{\mathbb{R}} H_c(f)H_e(f)e^{2j\pi f t_0}df|^2}{\int_{\mathbb{R}} |H_c(f)|^2 \frac{N_0}{2} df}$$

Maximisation par rapport à $H_c(f)$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathrm{SNR} \leq \frac{a_m^2 \left(\int_{\mathbb{R}} |H_c(f)|^2 df\right) \left(\int_{\mathbb{R}} |H_e(f)e^{2j\pi f t_0}|^2 df\right)}{\frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_c(f)|^2 df}$$

avec égalité si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$\boxed{H_c(f) = \mu \overline{H_e(f)e^{2j\pi f t_0}}}$$

Conclusion

SNR est donc maximisé pour

$$\boxed{h_c(t) = \mu \overline{h_e(t_0 - t)}}$$

et on a

$$\boxed{\mathrm{SNR}_{\max} = \frac{2a_m^2 \mathcal{E}_{h_e}}{N_0} = \frac{2\mathcal{E}_m}{N_0}}$$

avec $\mathcal{E}_{h_e} = \int_{\mathbb{R}} |h_e(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |H_e(f)|^2 df$, et $\mathcal{E}_m = a_m^2 \mathcal{E}_{h_e}$ est l'énergie **reçue** pour le symbole α_m.

Remarque

Si le canal est gaussien ($h_c = \delta$), on a $\mathcal{E}_m = a_m^2 \mathcal{E}_h$, qui est l'énergie **émise** pour le symbole α_m.

Conclusion générale

Conclusion générale

- sur un canal gaussien, et sans interférence inter-symbole, détecter de façon optimale les symboles émis revient à maximiser le rapport signal-sur-bruit, donc à filtrer le maximum de bruit ;
- résultat intuitif puisque le bruit est alors la seule source de perturbation aléatoire ;
- conclusion non valable en présence d'autres perturbations aléatoires (interférences inter-symbole, interférences multi-utilisateurs, présence d'autres types de bruit,...).