TD 2

▷ **Exercice 1.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ factorisable sans pivotage par l'algorithme de Gauss. Montrer que, si il existe :

- $(L_1, L_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ triangulaires inférieures à diagonale unité (les coefficients de la diagonale principale sont tous égaux à 1) ,
- $(U_1, U_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ triangulaires supérieures inversibles,

telles que $A = L_1U_1 = L_2U_2$, alors $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$.

▷ **Exercice 2.** Vous avez eu l'occasion de mettre en œuvre, au cours des TPs, la factorisation de Gauss avec pivotage partiel. C'est-à-dire la construction, à partir de la matrice A initiale, de l'équation $PA = LU$. L'objet mathématique P qui intervient dans cette équation est une matrice de permutation qui reflète les différents pivotages effectués. Sur le plan informatique, il vous était demandé de représenter cette donnée sous forme d'un simple vecteur. Expliquer en quelques lignes quelle algorithmique vous avez utilisée pour construire ce vecteur.

▷ **Exercice 3.** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose A inversible et on s'intéresse à la résolution du système linéaire $Ax = b$.

I- Méthode de Richardson

Soit $\alpha > 0$, on définit le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k + \alpha(b - Ax_k) \end{cases} \tag{1}$$

1- Montrer que ce schéma correspond à une méthode de relaxation associée à la résolution du système $Ax = b$, dont vous préciserez les matrices M et N.

2- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence suivante :

λ valeur propre de $A \Leftrightarrow 1 - \alpha\lambda$ valeur propre de $M^{-1}N$, avec M et N définies en 1-.

3- On suppose que toutes les valeurs propres de A sont réelles.

En conclure que la méthode converge $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $0 < \alpha\lambda < 2, \forall\lambda$ valeur propre de A.

4- On suppose que A est symétrique définie positive.

Montrer que le schéma itératif (1) s'écrit

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) \end{cases}$$

pour une fonction f que vous préciserez.

La méthode de Richardson correspond-elle à la méthode de la *steepest descent* (vous justifierez votre réponse)?

II- Méthode de Richardson "préconditionnée"

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On s'intéresse au système préconditionné

$$P^{-1}Ax = P^{-1}b. \tag{2}$$

5- Ecrire le schéma itératif de Richardson pour le système (2) en prenant $\alpha = 1$. On considérera le cas $\alpha = 1$ dans la suite de cette partie.

6- Montrer que ce schéma s'écrit formellement comme une méthode de relaxation associée au système non préconditionné $Ax = b$, dont vous préciserez les matrices M et N.

7- Application

Quel préconditionneur P permet l'obtention de la méthode de relaxation suivante (vous justifierez votre réponse) :

a) Méthode de Jacobi.

b) Méthode de Gauss-Seidel.

Exercice 1 :

$$A = L_1 U_1 = L_2 U_2 \Rightarrow L_1 = L_2 \underbrace{U_2 U_1^{-1}}_{I}$$

$$C = L_2 L_1^{-1}, \quad C_{ij} = \sum_k L_{ik}^{(2)} L_{jk}^{(1)-1} = \sum_{i \le k \le j} L_{ki}^{(2)} L_{kj}^{(1)-1} = \delta_{ij}$$

$$L_{ik}^{(2)} = 0 \Leftrightarrow k > i \qquad C = I \Rightarrow L_1 = L_2$$

$$L_{kj}^{(1)-1} = 0 \Leftrightarrow j > k$$

$$U_1 = U_2 L_2 L_1^{-1} = U_2 \Rightarrow U_1 = U_2, \quad L_1 = L_2$$

Exercice 2 : On construct $PA = LU$, avec P. la matrice de pivotage

Quelle(s) choix algorithmique fait ?

on cherche $\max_{j \in [\![k, n]\!]} |a_{kj}|$. $P(k) = j$, l'indice de la colonne du pivot.

à l'étape de descente, on intervertir $x(i)$ et $x(P(i))$

Exercice 3 :

I : (1) schéma itératif avec $A = M - N \Rightarrow x_{k+1} = M^{-1} N x_k + M^{-1} b$

$$(R)\ x_{k+1} = (I - \alpha A) x_k + \alpha b$$

$$M^{-1} N = I - \alpha A \Rightarrow M^{-1} = \alpha I ; M = \frac{1}{\alpha} I$$

$$N = M(I - \alpha A) = \frac{1}{\alpha} I - A$$

(2) μ V.P. de $M^{-1}N$, on a $\det(M^{-1}N - \mu I) = 0$

$$\iff \det((1-\mu)I - \alpha A) = 0$$

$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ $\iff (-\alpha)^n \det\left(A - \left(\frac{1-\mu}{\alpha}\right)I\right) = 0$

$$\iff \frac{1-\mu}{\alpha} \text{ V.p. de } A.$$

(3) CV $\iff \rho(M^{-1}N) < 1$ $\qquad \lambda \in Sp(A),\ |1 - \alpha\lambda| < 1$

$$-1 < 1 - \alpha\lambda < 1 \Rightarrow -2 < -\alpha\lambda < 0 \Rightarrow 2 > \alpha\lambda > 0$$

(4) A est symétrique défine positive (SPD)

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k), \end{cases} \quad \nabla f(x_k) = A x_k - b.$$

$$f(x_k) = \frac{1}{2} x_k^T A x_k - x_k^T b.$$

Steepest descent si $-\alpha = \lambda_p = \dfrac{\nabla f(x_k)^T \nabla f(x_k)}{\nabla^T f(x_k) A \nabla f(x_k)} = \dfrac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{\|\nabla f(x_k)\|_A^2}$

II

2(5) $A' = P^{-1}A$, $b' = P^{-1}b$

$$(R_{\alpha=1}) \begin{cases} x_0 = \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k + \alpha(b' - A' x_k) \end{cases}$$

$$= x_k + P^{-1}A - P^{-1}b x_k$$

$$= x_k + P^{-1}(A - x_k)$$

(6) $x_{k+1} = M^{-1}N x_k + M^{-1}b$

$(R_{\alpha=1})$ $x_{k+1} = (I - P^{-1}A) x_k + P^{-1}b$

- $M^{-1} = P^{-1} \Rightarrow M = P$
- $M^{-1}N = (I - P^{-1}A) \Rightarrow N = (I - P^{-1}A)M$

$$= P - A$$

(7) $A = M - N = D - E - F$

a) $x_{k+1} = D^{-1}(E+F)x_k + D^{-1}b$.

b) $x_{k+1} = (D-E)^{-1} F x_k + (D-E)^{-1} b$

a)
$D^{-1} = P^{-1} (\psi b)$

$P = \operatorname{diag}(A)$

b)
$(D-E)^{-1} = P^{-1}$

$P = D - E = A - F$.