INTRODUCTION AUX TELECOMMUNICATIONS
Première année télécommunications et réseaux
Correction du TD4
2020 – 2021

I. Exercice 1 : Comparaison de systèmes de transmission sur fréquence porteuse

On considère les trois systèmes de transmission définis dans le tableau suivant ("SRRCF" signifie "Square Root Raised Cosine Filter" ou filtre en racine de cosinus surélevé en français) :

Modulation :	16-QAM	16-PSK	16-ASK
Filtre d'emission :	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$
Filtre de reception :	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$
Debit binaire :	32 kbps	32 kbps	32 kbps
TEB :	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}

1) Dans les trois systèmes proposés la transmission se fait-elle en bande de base ou sur fréquence porteuse ?
La transmission se fait sur fréquence porteuse. Les modulations de type ASK, PSK et QAM sont des modulations numériques sur porteuse.
2) Donner le schéma des modulateurs pour les trois systèmes de transmission considérés.
On peut utiliser le schéma de la figure 1 en changeant le mapping pour obtenir une modulation 16-ASK ($d_k = a_k \in \{\pm 15, \pm 13, \pm 11, \pm 9, \pm 7, \pm 5, \pm 3, \pm 1\}$), 16-PSK ($d_k \in \left\{ e^{j\left(\frac{\pi}{16} + l\frac{\pi}{16}\right)} \right\}$, $l = 0, ..., 15$) ou 16-QAM ($d_k = a_k + jb_k$ avec $a_k \in \{\pm 3, \pm 1\}$ et $b_k \in \{\pm 3, \pm 1\}$), le filtre de mise en forme étant le même dans les 3 cas.

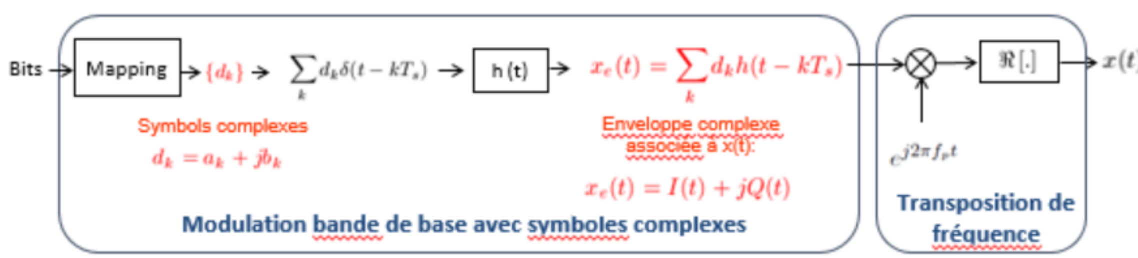

Fig. 1. Schéma général d'un modulateur sur fréquence porteuse.

3) Tracer les constellations des trois modulations considérées.
Voir diapositives de cours pour 16−QAM et 16−PSK.
Pour tracer la constellation de la 16-ASK il faut positionner les 16 valeurs possibles pour les symboles sur l'axe réel (modulation mono-dimensionnelle). On choisit, en général, des symboles à moyenne nulle, ce qui donnerait 8 points à placer de chaque côté de l'axe imaginaire, à équi-distance les uns les autres pour assurer la même protection aux différents symboles.
4) Déterminer le débit symbole transmis (R_s) dans les trois cas.
$R_s = \frac{R_b}{\log_2(M)} = 8$ kbauds, car $M = 16$, dans les 3 cas.
5) Calculer les efficacités spectrales des trois systèmes de transmission proposés. Pouvait-on s'attendre à un tel résultat ?
$\eta = \frac{\log_2(M)}{k}$, où k est donné par la bande occupée par le signal transmis : $B = kR_s$.
Ici $B = 2 \times \frac{1+\alpha}{2T_s} = (1 + \alpha) R_s$. On a donc $k = 1 + \alpha$ et donc $\eta \simeq 2.67$ bits/s/Hz dans les 3 cas. On pouvait s'attendre à ce résultat identique pour les 3 systèmes de transmission car ils ont le même nombre de symboles possibles (même ordre de la modulation) et le même filtre de mise en forme, ce dont dépend l'efficacité spectrale.

6) En modifiant la valeur du roll off, déterminer quelle est la borne maximale en termes d'efficacité spectrale pour les trois systèmes de transmission proposés.
On aura l'efficacité spectrale maximale pour un roll off de 0 (bande occupée la plus faible avec ce filtre de mise en forme pour un débit binaire donné). Ce qui donne $\eta_{max} = \frac{\log_2(M)}{1+\alpha} = 4$ bits/s/Hz pour une modulation sur porteuse d'ordre 16.
7) Le canal de propagation à traverser est supposé AWGN sur une bande de 15 kHz.
   a) Tracer la fonction de transfert du canal de propagation.
   On a ici un canal de type passe-bande (transmission sur fréquence porteuse). La figure 2 trace la réponse en fréquence de ce canal.

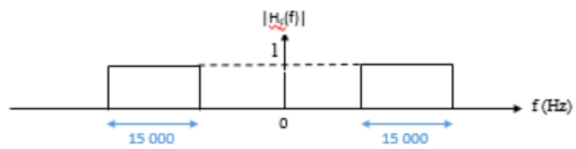

Fig. 2. Tracé du module de la réponse en fréquence du canal de propagation.

   b) Sera-t-il possible de réaliser chaque transmission en trouvant, au niveau du récepteur, des instants d'échantillonnage sans interférence entre symboles ? Expliquer votre réponse.
   Pour pouvoir réaliser la transmission en trouvant des instants d'échantillonnage sans interférence entre symboles il faut que $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f)$ soit une forme qui permette de respecter le critère de Nyquist. C'est le cas ici car $H(f)H_r(f)$ est un cosinus surélevé. Afin que $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f)$ continue à le respecter il faut que $2 \times \frac{1+\alpha}{2T_s} = (1+\alpha)\,R_s \leq 15000$ Hz, soit $R_s \leq 10000$ bauds, ce qui est bien le cas ici.
8) La figure 3 donne les courbes de TEB obtenus en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en dB pour les trois modulations considérées. En déduire les E_b/N_0 nécessaires pour satisfaire à la spécification du TEB ? Quel est le système le plus efficace en terme de puissance ? Justifier votre réponse.
$E_b/N_0(16ASK) \simeq 22dB > E_b/N_0(16PSK) \simeq 17dB > E_b/N_0(16QAM) \simeq 13dB$. Le système le plus efficace en puissance est celui qui demande le E_b/N_0 le plus faible pour atteindre le TEB fixé. Ici c'est donc le système utilisant la modulation $16 - QAM$.

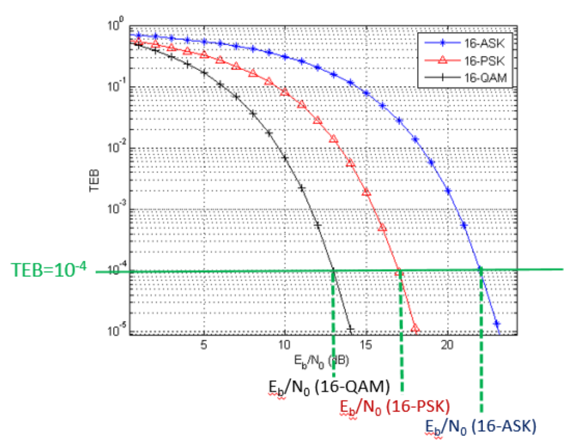

Fig. 3. Comparaison des TEB pour les modulations ASK, PSK et QAM pour $M = 16$

II. Exercice 2 : Performance d'une modulation BPSK

Soit un signal émis modulé en BPSK (Binary Phase Shift Keying). Ce signal est affecté par un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance $N_0/2 \; \forall f \in \mathbb{R}$. On appelle $H(f)$ et $H_r(f)$ les fonctions de transfert des filtres d'émission et de réception. On suppose que la fonction de transfert du canal $C(f)$ est telle que $C(f) = 1 \forall f \in \mathbb{R}$.

1) Donner le schéma de l'émetteur permettant de générer un signal modulé en BPSK. Tracer la constellation de la modulation.
   Le schéma du modulateur BPSK (Binary PSK ou modulation de phase à deux états) est donné dans la figure 4, avec $h(t) = TF^{-1}\left[H(f)\right]$. La constellation est tracée figure 5.

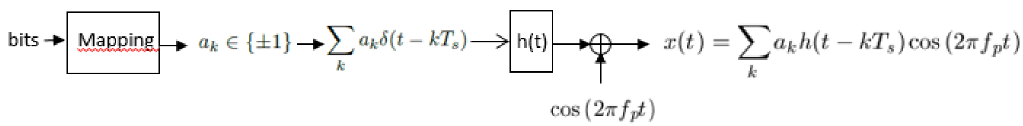

Fig. 4. Schéma d'un modulateur BPSK.

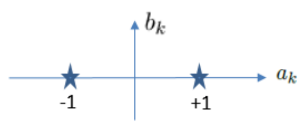

Fig. 5. Constellation BPSK.

2) Donner l'expression du signal modulé ainsi que celle de son enveloppe complexe.
   Signal modulé : $x(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_p t)$, où T_s représente la durée symbole, $h(t) = TF^{-1}\left[H(f)\right]$ et f_p représente la fréquence porteuse.
   Enveloppe complexe associée (par rapport à f_p) : $x_e(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$.

3) A partir du schéma de la chaîne passe-bas équivalente à la chaîne de transmission BPSK,
   a) Pour $G(f) = H(f)H_r(f)$ donné par :

$$G(f) = \begin{cases} T_s \cos^2\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right) & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{1}$$

   i) Montrer que $G(f)$ satisfait le critère de Nyquist.
   On utilise $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ pour arriver à :

$$G(f) = \begin{cases} \frac{T_s}{2} + \frac{T_s}{2}\cos\left(\pi f T_s\right) & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{2}$$

   On tombe sur un cosinus surélevé de roll off 1 qui permet de respecter le critère de Nyquist (se vérifie dans le domaine fréquentiel en traçant $G(f)$ et ses versions décalées $G\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$ et en les ajoutant pour voir que $\sum_k G\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = constante$).

   ii) Quel est le choix optimal de $H(f)$ et $H_r(f)$ qui minimise le taux d'erreur symbole (TES) ?
   Il faut respecter le critère de filtrage adapté (en plus du critère de Nyquist). Pour cela on prend :

$$H(f) = H_r(f) = \begin{cases} \sqrt{T_s}\cos\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right) & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{3}$$

iii) En considérant que le choix optimal a été effectué pour $H(f)$ et $H_r(f)$, exprimer le TEB de cette chaîne de transmission en fonction de E_b/N_0. On supposera les symboles émis équiprobables et indépendants.
S'il n'y a pas d'erreur de synhronisation dans le retour en bande de base, qu'on échantillonne aux instants optimaux et qu'on utilise un détecteur à seuil optimal (seuil en 0 ici), on peut utiliser $TEB = TES = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$ car on est alors en présence d'une chaine BPSK avec des symboles à moyenne nulle et indépendants et qui respecte les critères de Nyquist et de filtrage adapté.

b) Lorsqu'on utilise les filtres d'émission $H(f)$ et de réception $H_r(f)$ donnés par :

$$H(f) = \begin{cases} T_s \cos^2\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right) & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{4}$$

$$H_r(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{5}$$

i) Montrer que $G(f) = H(f)H_r(f)$ satisfait le critère de Nyquist.
$G(f)$ n'a pas changé par rapport à la question précédente, le critère de Nyquist peut donc continuer à être respecté.

ii) Expliquer pourquoi le taux d'erreur binaire doit être supérieur à $Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$.
Le filtrage de réception n'est plus adapté à la forme d'onde reçue, le taux d'erreur binaire sera donc plus élevé que précédemment car le filtrage adapté permet de maximiser le SNR aux instants d'échantillonnage et donc de minimiser le TES (=TEB ici).

iii) Calculer le TEB de cette nouvelle chaîne de transmission en fonction de E_b/N_0.
On va utiliser pour cela la chaine passe-bas équivalente à la chaine de transmission sur porteuse donnée par la figure 6, où $x_e(t) = I(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$ représente l'enveloppe complexe associé au signal émis $x(t)$ (uniquement la voie en phase dans le cas d'une transmission BPSK) et $I_b(t)$ représente la voie en phase du bruit complexe équivalent au bruit réel ajouté par le canal de propagation (DSP égale à N_0).
On peut utiliser sur cette chaine passe-bas équivalente l'expression $TEB = TES = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right)$ car les symboles émis sont indépendants et appartiennent à l'alphabet $\{\pm V\}$ avec $V = 1$, que $g(t) = h(t) * h_r(t)$ permet de respecter le critère de Nyquist si on échantillonne aux instants optimaux $t_0 + mT_s$ et que l'on utilise un détecteur à seuil avec seuil à 0. σ_w^2 représente la puissance du bruit en sortie du filtre de réception.
On calcule tout d'abord σ_w^2 : $\sigma_w^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = \frac{2N_0}{T_s}$
Puis l'énergie symbole E_s (attention c'est un paramètre physique, il s'agit de la véritable énergie reçue, pas celle calculée sur la chaine passe-bas équivalente) :
$E_s = P_{signal\ recu} T_s = P_x T_s = \frac{P_{x_e}}{2} T_s = \frac{1}{2}\sigma_a^2 \int_R |H(f)|^2 df = ... = \frac{3}{8} T_s$
En reportant dans l'expression du TEB on obtient : $TEB = Q\left(g(t_0)\sqrt{\frac{4E_s}{3N_0}}\right)$. On a ici $E_b = E_s$ (un bit codé par symbole) et $g(t_0) = 1$, d'où $TEB = Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{3N_0}}\right)$.

iv) AN : Evaluer les TEBs obtenus aux questions a) et b) pour un E_b/N_0 de 10 dB.
Attention dans les expressions de TEBs déterminées précédemment le E_b/N_0 qui apparaît n'est pas en dB. Il faut le transformer en utilisant $\left[\frac{E_b}{N_0}\right]_{dB} = 10 \log_{10}\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$.
Cela donne : $TEB = TES = Q\left(\sqrt{2}\right) = 0.0786$ pour la question a) (Nyquist + filtrage adapté).
$TEB = TES = Q\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 0.1241$ pour la question b) (Nyquist mais filtrage non adapté)

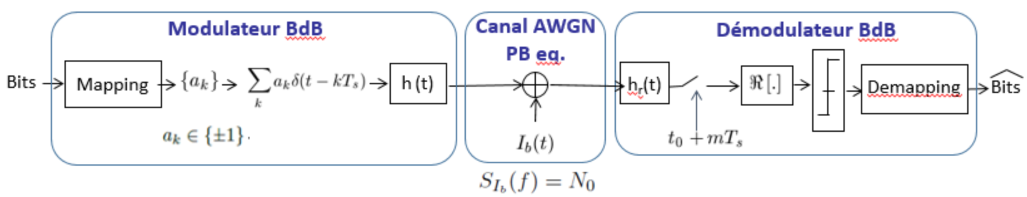

Fig. 6. Chaine passe-bas équivalent à une chaine de transmission BPSK.