INTRODUCTION AUX TELECOMMUNICATIONS

Calcul de la densité spectrale de puissance d'un signal de communication numérique

Première année télécommunications et réseaux

2020 – 2021

Soit le signal suivant : $x(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$. Sa fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$R_x(t,\tau) = E\left[x(t)x^*(t-\tau)\right] = \sum_k \sum_n E\left[a_k a_n^*\right] h(t-kT_s)h(t-\tau-nT_s)$$

En notant $R_a(m) = E\left[a_k a_{k-m}^*\right]$ la fonction d'intercorrélation des symboles a_k (considérés comme stationnaires), on arrive à :

$$R_x(t,\tau) = \sum_k \sum_n R_a(k-n)h(t-kT_s)h(t-\tau-nT_s)$$

En posant m=k-n, on obtient :

$$R_x(t,\tau) = \sum_m R_a(m) \sum_k h(t-kT_s)h(t-\tau-kT_s+mT_s)$$

On constate que $R_x(t,\tau)$ dépend du temps. Le signal $x(t)$ n'est donc pas stationnaire, bien que les symboles a_k le soient. Cependant, on peut noter que sa fonction d'autocorrélation est périodique en t de période T_s : $R_x(t,\tau) = R_x(t+T_s,\tau)$. Sa moyenne est également périodique de période T_s : $E\left[x(t)\right] = E\left[x(t+T_s)\right]$. Le signal $x(t)$ est donc cyclostationnaire et sa fonction d'autocorrélation est définie par :

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} R_x(t,\tau)dt$$

On obtient alors :

$$R_x(\tau) = \sum_m R_a(m) \sum_k \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} h(t-kT_s)h(t-\tau-kT_s+mT_s)dt$$

Soit en posant $u = t - kT_s$:

$$R_x(\tau) = \sum_m R_a(m)\frac{1}{T_s}\sum_k \int_{-kT_s}^{-(k-1)T_s} h(u)h(u-\tau+mT_s)du = \frac{1}{T_s}\sum_m R_a(m)h(\tau) * h^*(mT_s-\tau)$$

En prenant la transformée de Fourier :

$$S_x(f) = \frac{|H(f)|^2}{T_s}\sum_m R_a(m)e^{-j2\pi f m T_s}$$

En introduisant la fonction d'intercorrélation normalisées des symboles a_k centrés :

$$\gamma_a(m) = \frac{E\left[(a_k - m_a)(a_{k-m}-m_a)^*\right]}{\sigma_a^2}$$

où $m_a = E[a_k]$ et $\sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2]$, on obtient :

$$S_x(f) = \frac{|H(f)|^2}{T_s}\sum_m \left(\sigma_a^2\gamma_a(m) + |m_a|^2\right)e^{-j2\pi f m T_s}$$

Enfin en prenant en compte le fait que

$$\sum_m e^{-j2\pi f m T_s} = \frac{1}{T_s}\sum_m \delta\left(f - \frac{m}{T_s}\right)$$

On obtient l'expression suivante pour la DSP de $x(t)$:

$$S_x(f) = \frac{|H(f)|^2}{T_s} \sum_m \sigma_a^2 \gamma_a(m) e^{-j2\pi f m T_s} + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_m \left| H(\frac{m}{T_s}) \right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T_s}\right)$$

Ce qui peut encore s'écrire, en prenant en compte la symétrie hermitienne de $\gamma_a(m)$:

$$S_x(f) = \sigma_a^2 \frac{|H(f)|^2}{T_s} + 2\sigma_a^2 \frac{|H(f)|^2}{T_s} \sum_{m=1}^{+\infty} Re\left\{\gamma_a(m) e^{-j2\pi f m T_s}\right\} + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_m \left| H(\frac{m}{T_s}) \right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T_s}\right)$$