

# **Introduction aux télécommunications**

**Département sciences du numérique  
Première année**

## **Séquence 4**

### **Transmissions sur fréquence porteuse**

- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe**
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes**
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale**
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :**
  - Exemple,**
  - Chaîne passe bas-équivalente**
  - Calcul de TEBs**

# Introduction aux télécommunications

Département sciences du numérique  
Première année

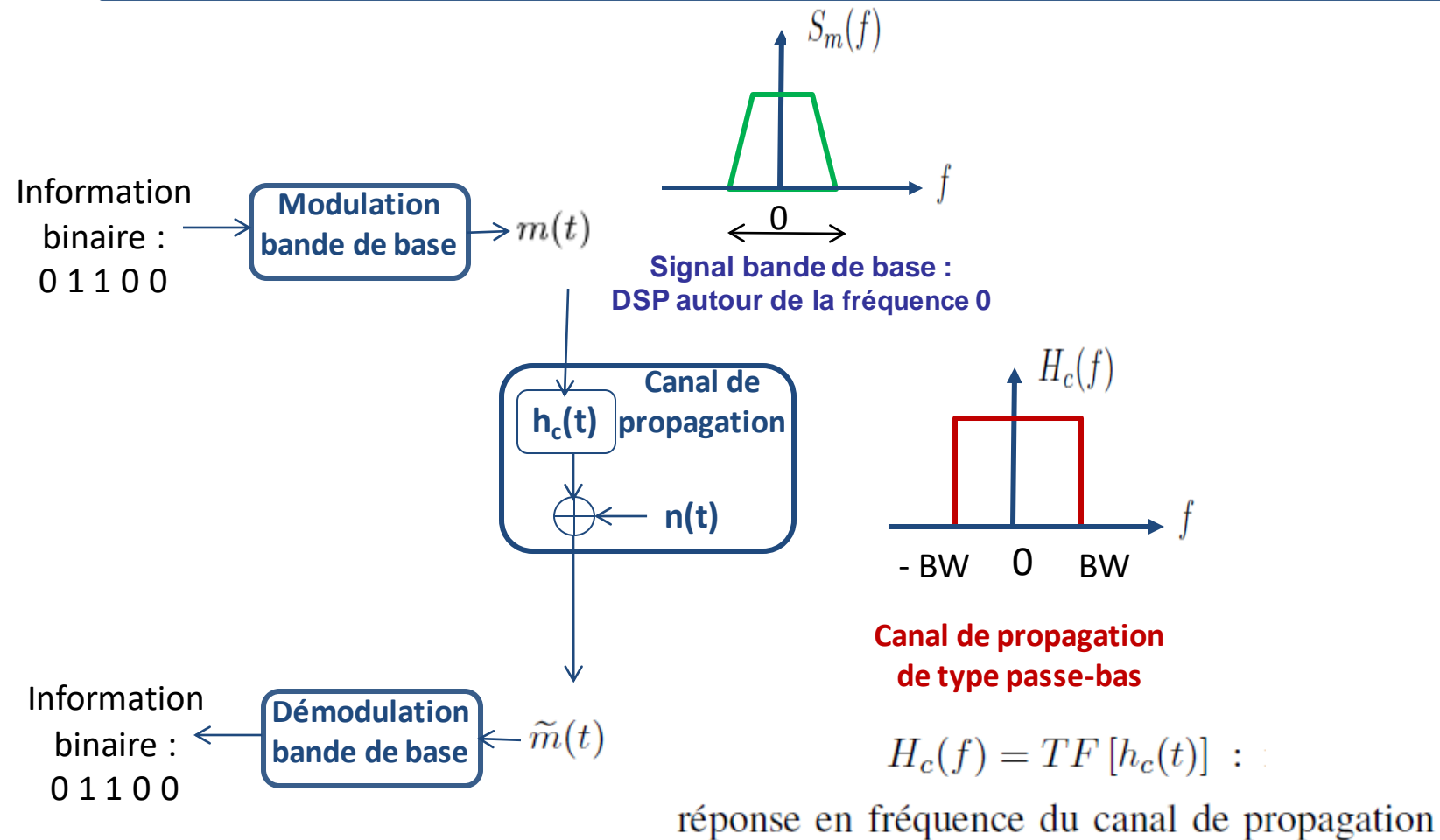
## Séquence 4

### Transmissions sur fréquence porteuse

- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :
  - Exemple,
  - Chaîne passe bas-équivalente
  - Calcul de TEBs

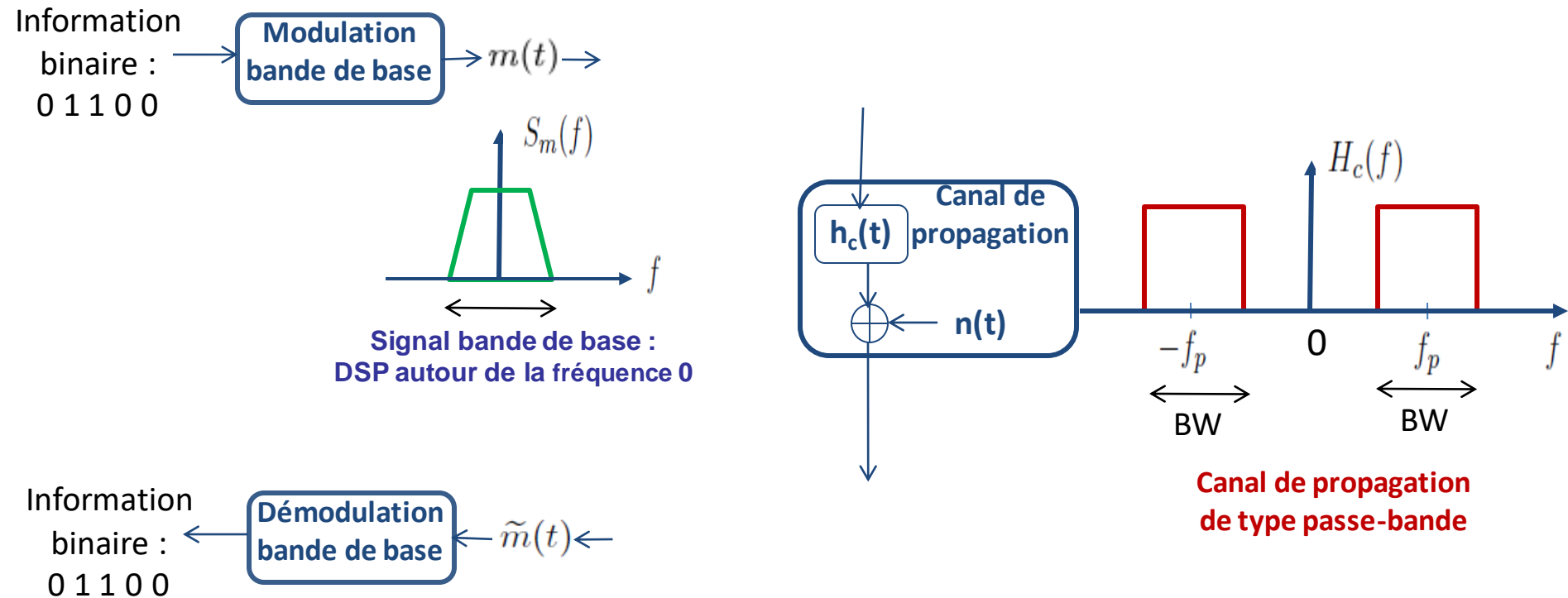
# Modulations numériques sur fréquence porteuse

## Transmissions en bande de base



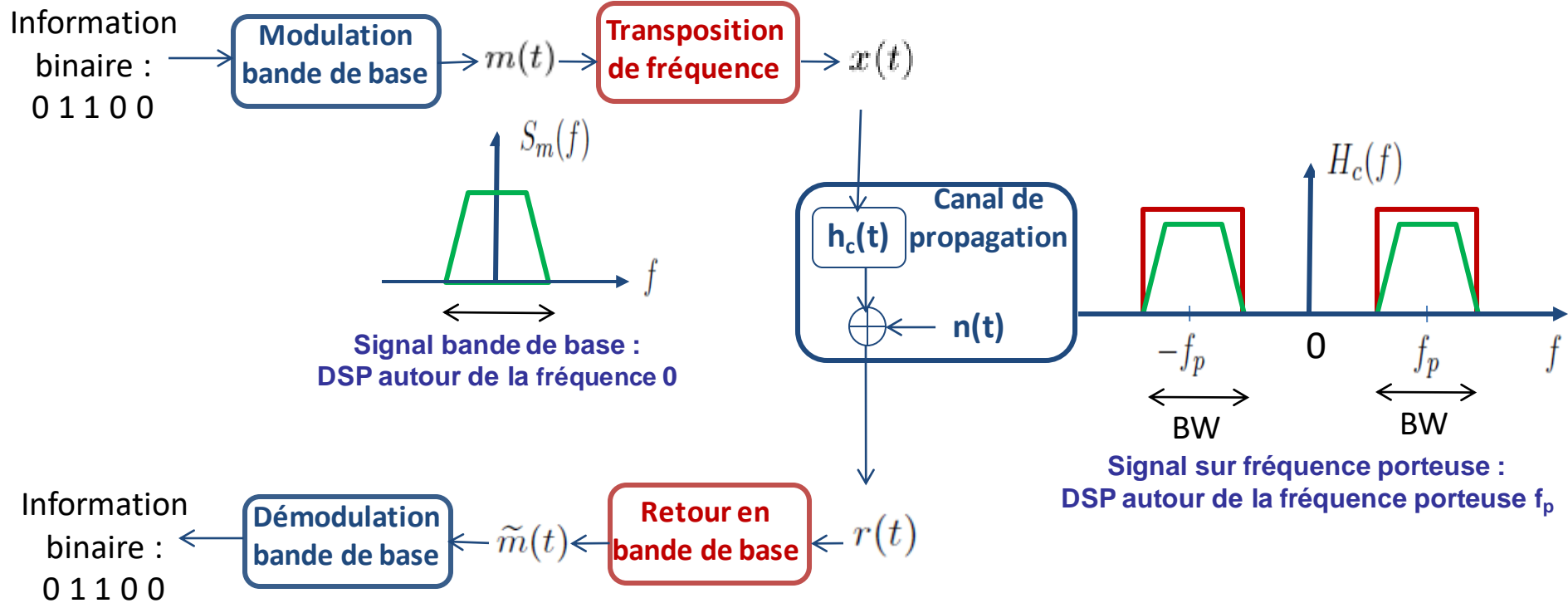
# Modulations numériques sur fréquence porteuse

## Transmissions sur fréquence porteuse



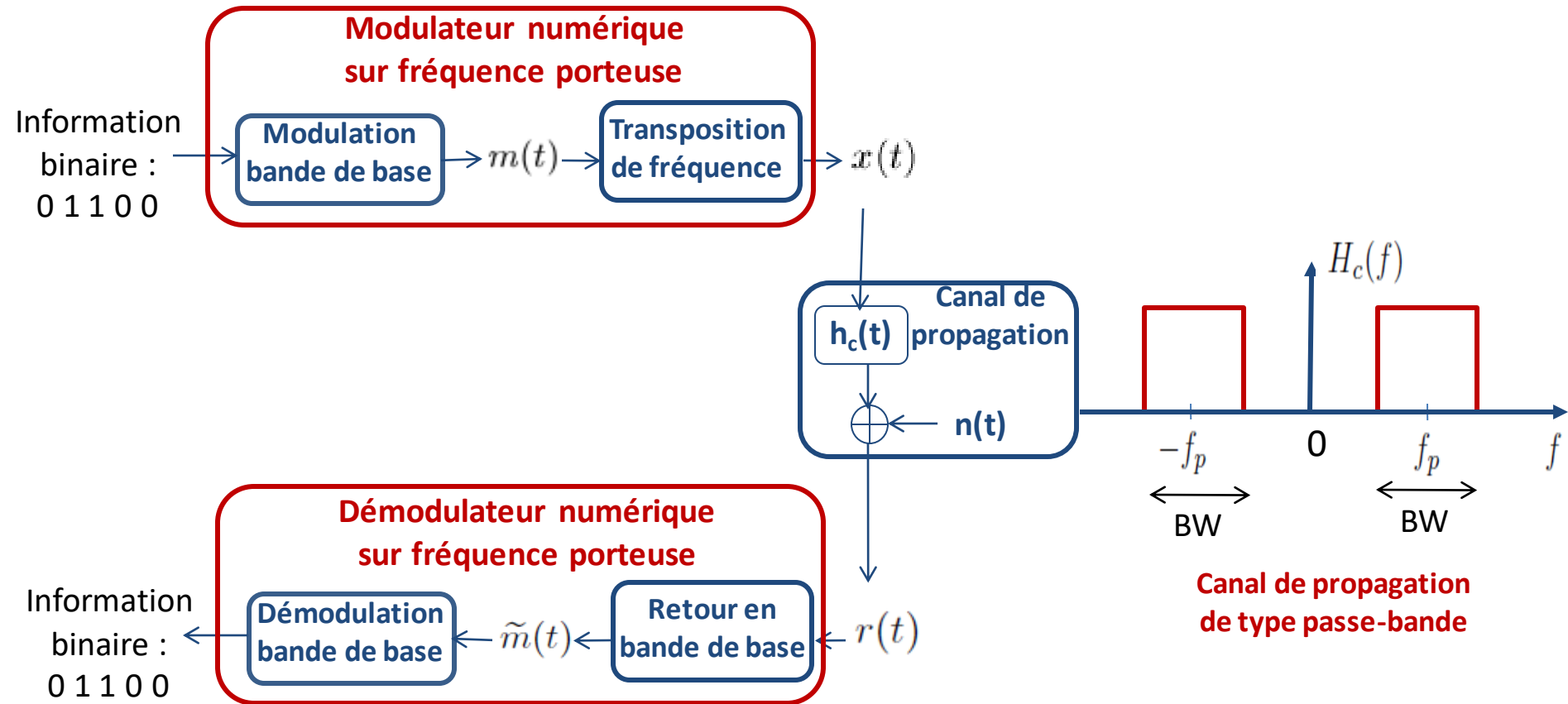
# Modulations numériques sur fréquence porteuse

## Transmissions sur fréquence porteuse



# Modulations numériques sur fréquence porteuse

## Transmissions sur fréquence porteuse



# Modulations numériques sur fréquence porteuse

## Classification des modulations sur fréquence porteuse

### → Modulation d'amplitude

$$x(t) = Am(t) \cos(2\pi f_p t)$$

Modulation d'amplitude sans porteuse

$$x(t) = (A + m(t)) \cos(2\pi f_p t), \quad A \geq |m(t)|_{\max}$$

Modulation d'amplitude avec porteuse

### → Modulation de phase

$$x(t) = A \cos(2\pi f_p t + k_p m(t))$$

### → Modulation de fréquence

$$F_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_i(t)}{dt} = f_p + k_f m(t) \quad (\text{fréquence instantannée})$$

$$x(t) = A \cos \left( \underbrace{2\pi f_p t + 2\pi k_f \int_0^t m(u) du}_{\Phi_i(t)} \right)$$

$m(t)$  : message à transmettre = signal modulant

$\cos(2\pi f_p t)$  : cosinus porteur

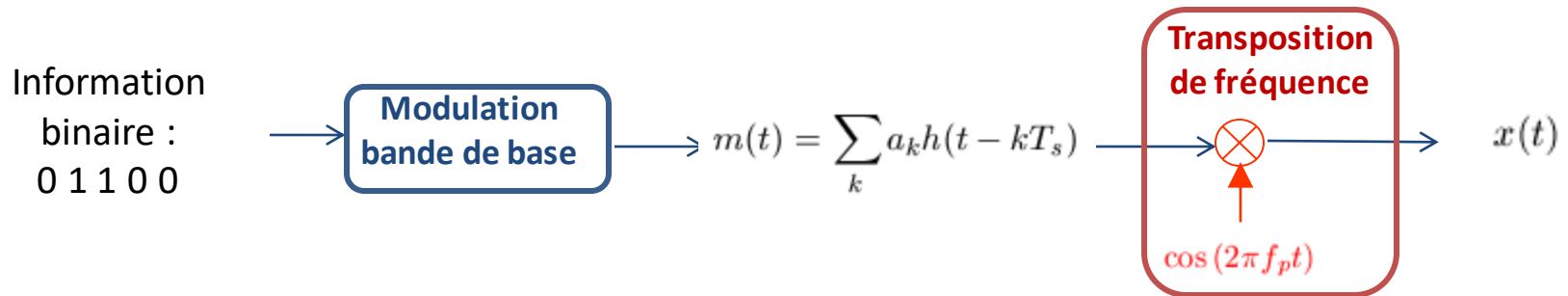
$f_p$  : fréquence porteuse

$x(t)$  : signal modulé sur porteuse

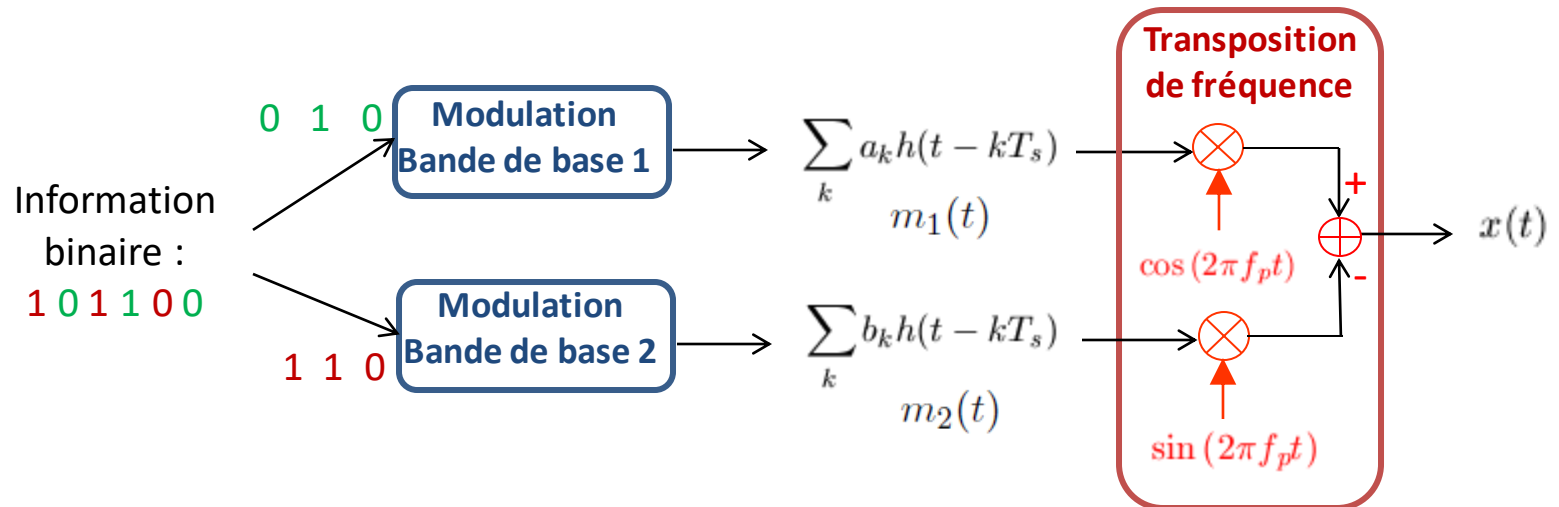
# Modulations numériques sur fréquence porteuse

## Classification des modulations sur fréquence porteuse

### Modulation mono-dimensionnelle



### ou bi-dimensionnelle



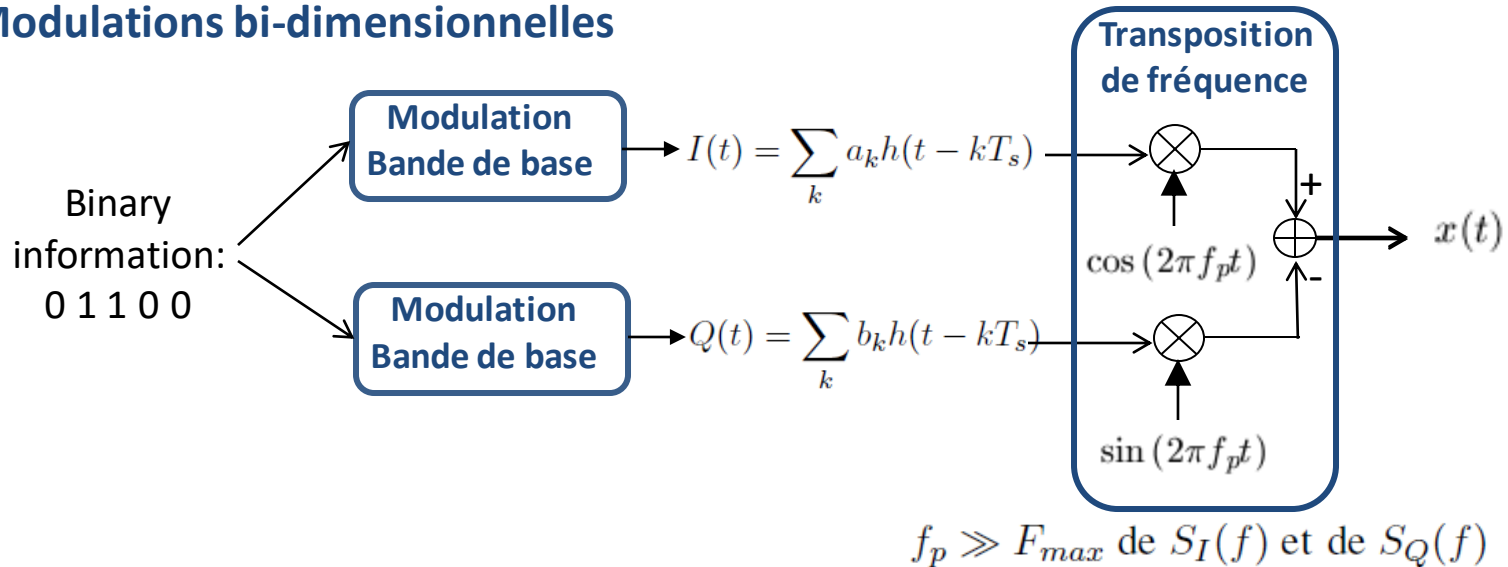
$$x(t) = \underbrace{\sum_k a_k h(t - kT_s)}_{m_1(t)} \cos(2\pi f_p t) - \underbrace{\sum_k b_k h(t - kT_s)}_{m_2(t)} \sin(2\pi f_p t)$$



# Modulations numériques sur fréquence porteuse

## Enveloppe complexe associée au signal modulé

### Modulations bi-dimensionnelles



$$x(t) = \underbrace{\sum_k a_k h(t - kT_s)}_{I(t)} \cos(2\pi f_p t) - \underbrace{\sum_k b_k h(t - kT_s)}_{Q(t)} \sin(2\pi f_p t)$$

Composante en phase

Composante en Quadrature

$$x(t) = \Re \left[ \underbrace{(I(t) + jQ(t))}_{\text{Enveloppe complexe}} e^{j2\pi f_p t} \right]$$

$$x_e(t) = I(t) + jQ(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s) \quad (d_k = a_k + jb_k)$$

Enveloppe complexe associée à  $x(t)$

### Modulation linéaires

$$x(t) = \underbrace{\sum_k a_k h(t - kT_s)}_{m_1(t)} \cos(2\pi f_p t) - \underbrace{\sum_k b_k h(t - kT_s)}_{m_2(t)} \sin(2\pi f_p t)$$

$$x(t) = \Re \left[ \boxed{(m_1(t) + jm_2(t)) e^{j2\pi f_p t}} \right]$$

L'enveloppe complexe associée au signal modulé sur porteuse dépend linéairement de l'information à transmettre

### ou non linéaires (modulations de fréquence)

$$x(t) = A \cos \left( 2\pi f_p t + 2\pi k_f \int_0^t m(u) du \right)$$

$$x(t) = \Re \left[ \boxed{A e^{j2\pi k_f \int_0^t m(u) du}} e^{j2\pi f_p t} \right]$$

Ce n'est pas le cas ici

# Introduction aux télécommunications

Département sciences du numérique  
Première année

## Séquence 4

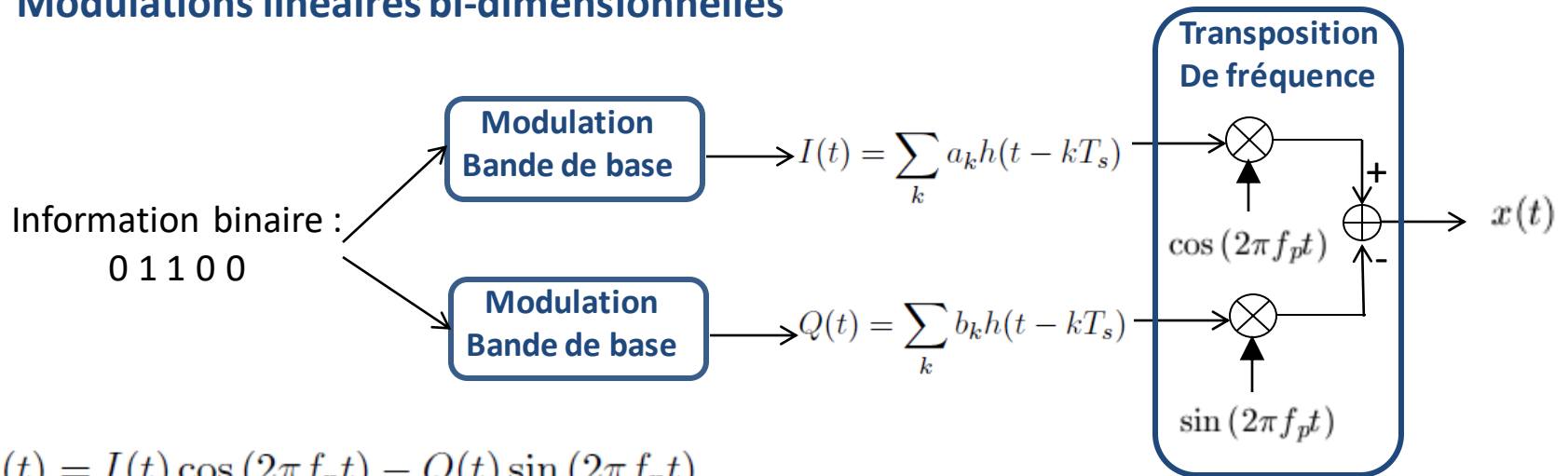
### Transmissions sur fréquence porteuse

- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe
- 2- **Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes**
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :
  - Exemple,
  - Chaîne passe bas-équivalente
  - Calcul de TEBs

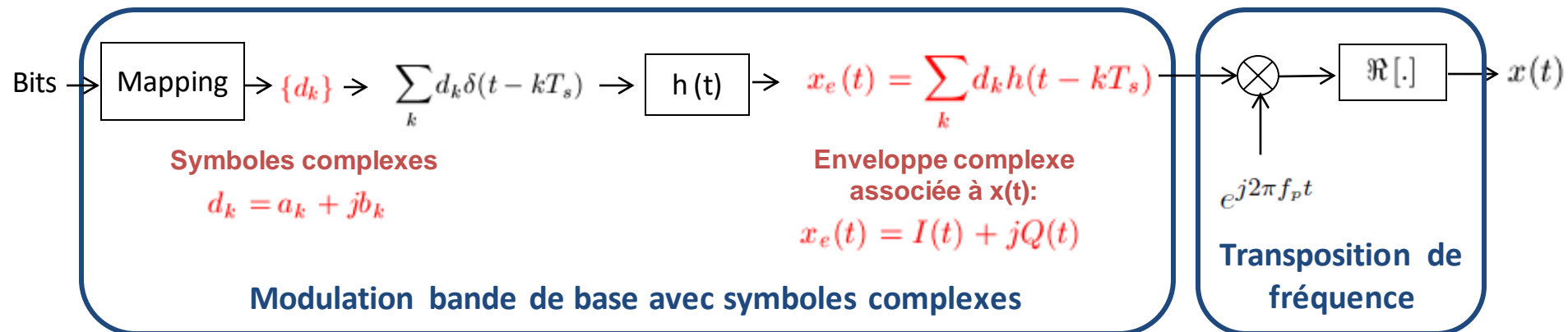
# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Représentation équivalente du modulateur

### Modulations linéaires bi-dimensionnelles

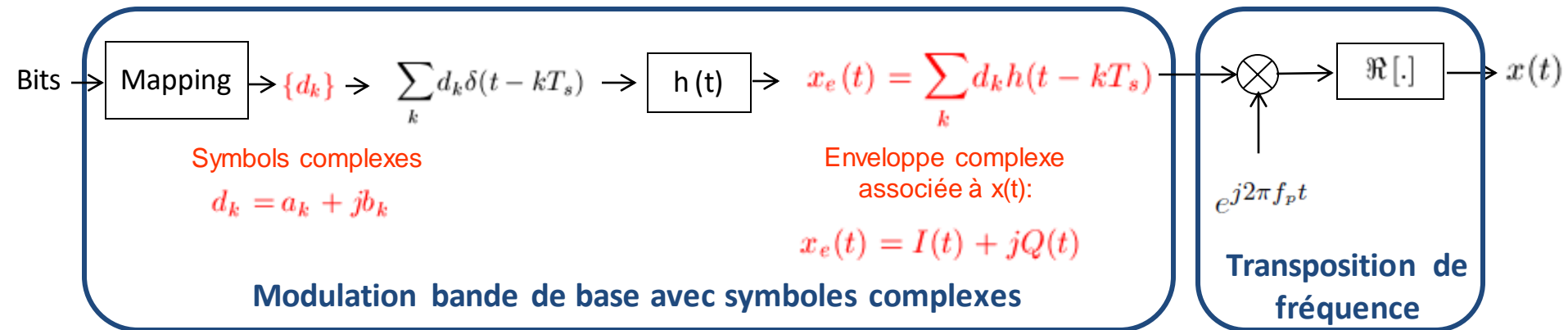


$$x(t) = \Re \left[ (I(t) + jQ(t)) e^{j2\pi f_p t} \right] = \Re \left[ x_e(t) e^{j2\pi f_p t} \right] \quad \text{avec} \quad x_e(t) = I(t) + jQ(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s) \quad (d_k = a_k + jb_k)$$



# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Modulations ASK, PSK, QAM



$$x(t) = \underbrace{\sum_k a_k h(t - kT_s)}_{I(t) : \text{voie en phase}} \cos(2\pi f_p t) - \underbrace{\sum_k b_k h(t - kT_s)}_{Q(t) : \text{voie en quadrature}} \sin(2\pi f_p t)$$

### Modulations mono-dimensionnelle

$$d_k = a_k \in \{\pm 1, \dots, \pm(M-1)\} \quad \text{M-ASK (Amplitude Shift Keying)}$$

### Modulations bi-dimensionnelles

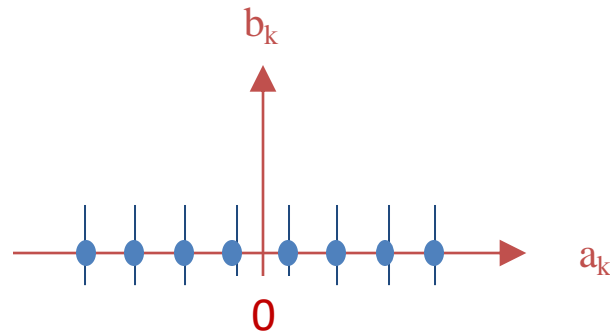
#### M-QAM (Quadrature Amplitude Modulation) carrée

$$a_k, b_k \text{ symboles } \sqrt{M}\text{-aires indépendants} \in \{\pm V, \pm 3V, \dots, \pm(\sqrt{M}-1)V\}$$

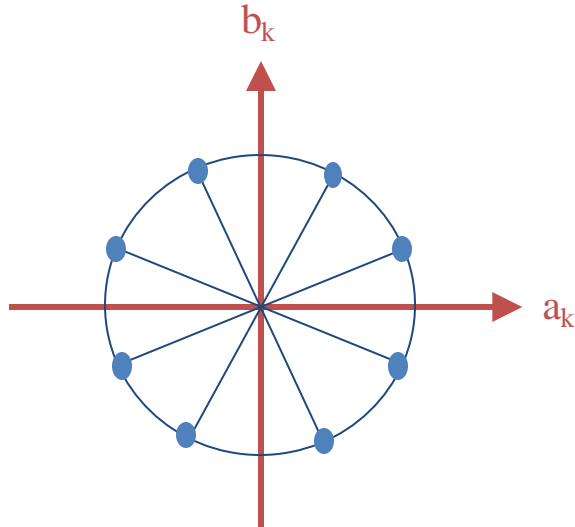
#### M-PSK (Phase Shift Keying)

$$d_k \in \{e^{j(\frac{2\pi}{M}l + \frac{\pi}{M})}\}, l = 0, \dots, M-1$$

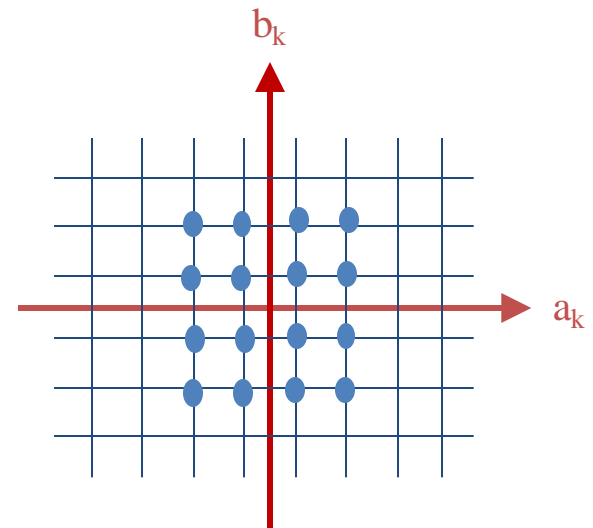
Représentation des symboles  $d_k$  possibles dans le plan  $(a_k, b_k)$



Constellations ASK



Constellations PSK

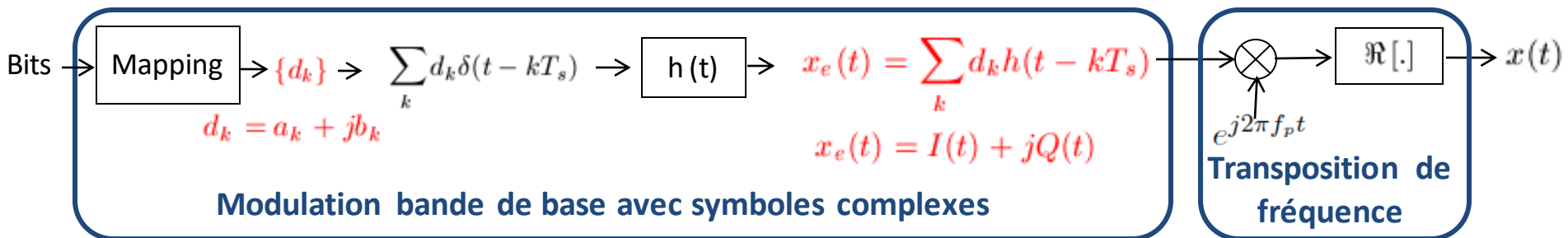


Constellations QAM

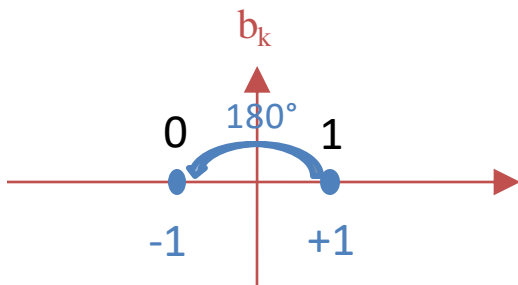
# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Exemples

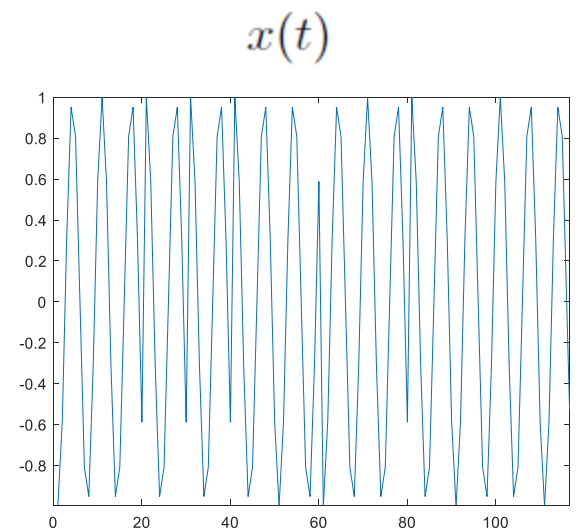
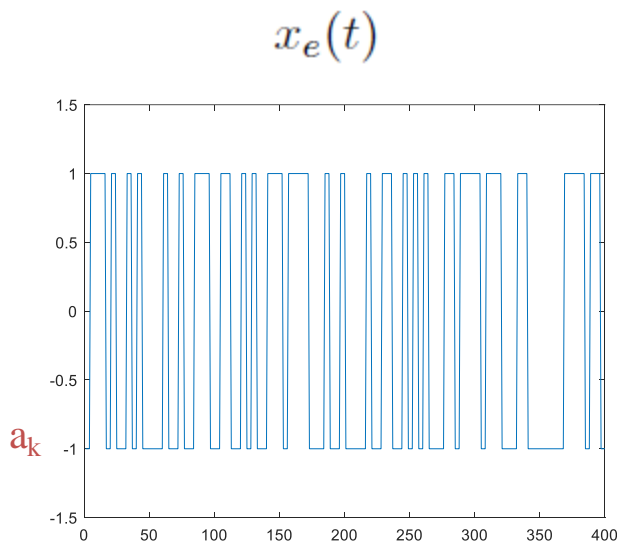
→ **Modulations linéaires mono-dimensionnelle : 2-ASK ou BPSK**



Bits	$a_k$	$d_k$
0	-1	$-1 = e^{j\pi}$
1	+1	$+1 = e^0$



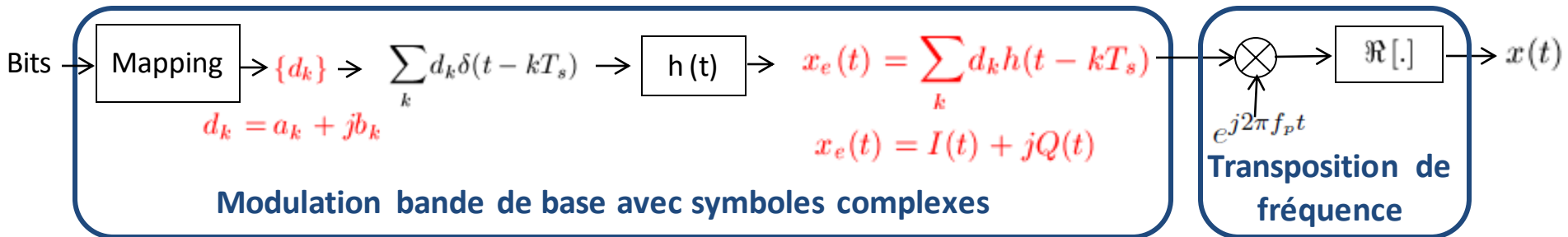
**Constellation BPSK**



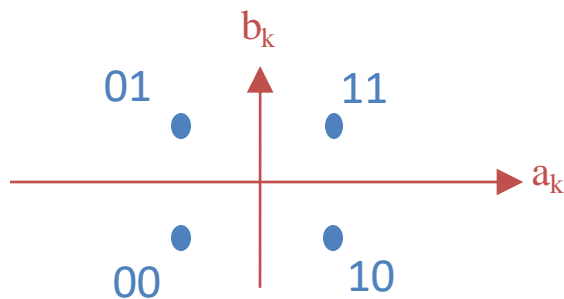
# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Exemples

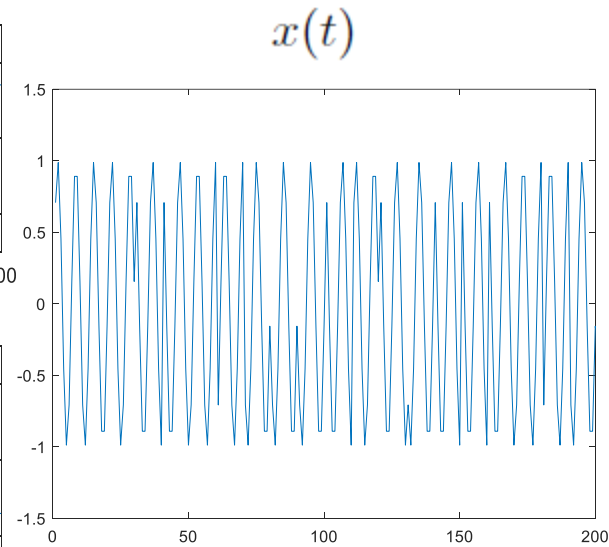
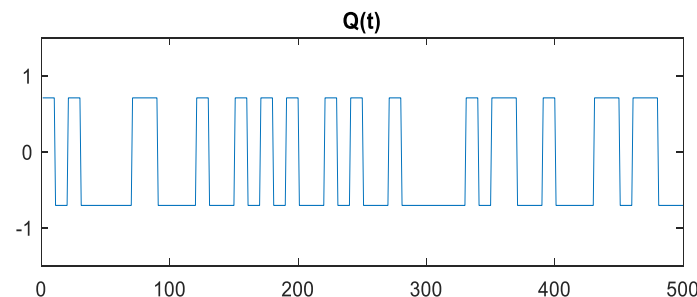
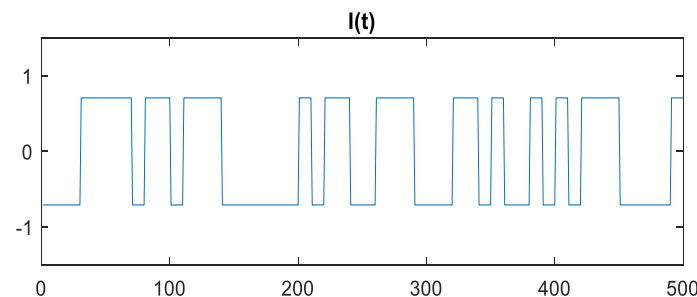
→ **Modulations linéaires bi-dimensionnelle : 4-PSK ou 4-QAM ou QPSK (DVB-S)**



Bits	$a_k$	$b_k$	$d_k$
00	-1	-1	$-1-j=e^{j5\pi/4}$
01	-1	+1	$-1-j=e^{j3\pi/4}$
11	+1	+1	$-1-j=e^{j\pi/4}$
10	+1	-1	$-1-j=e^{j7\pi/4}$



Constellation QPSK

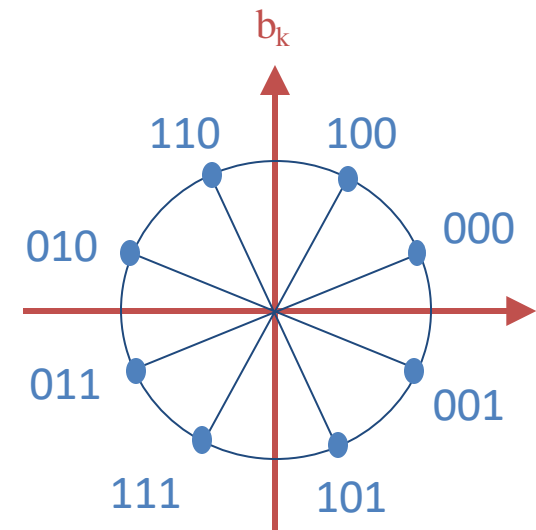
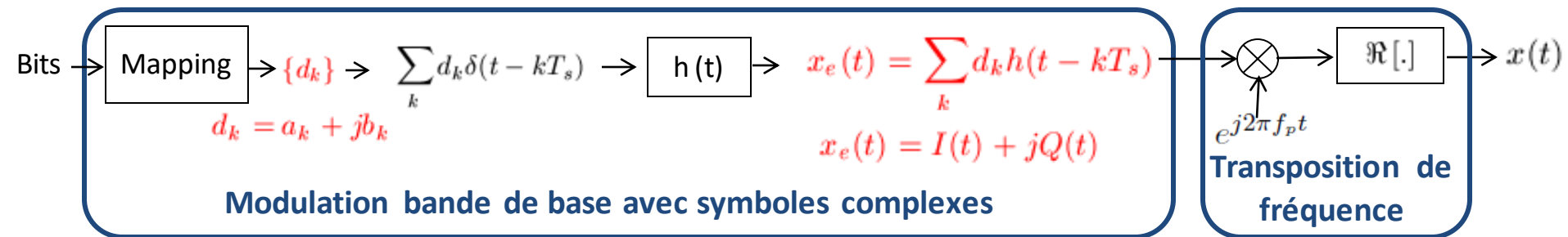




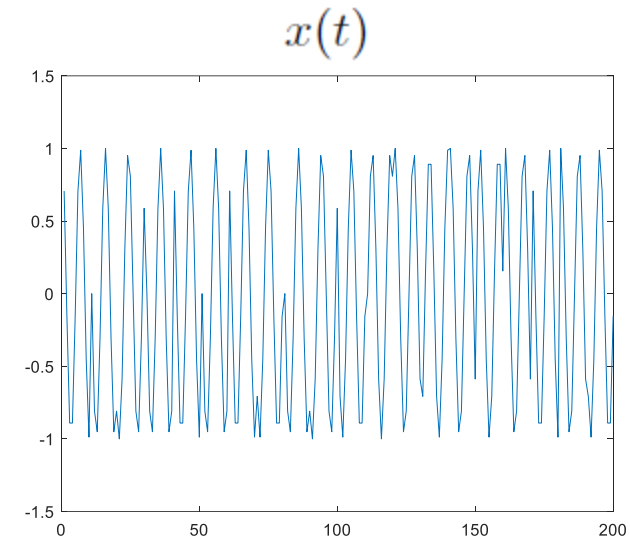
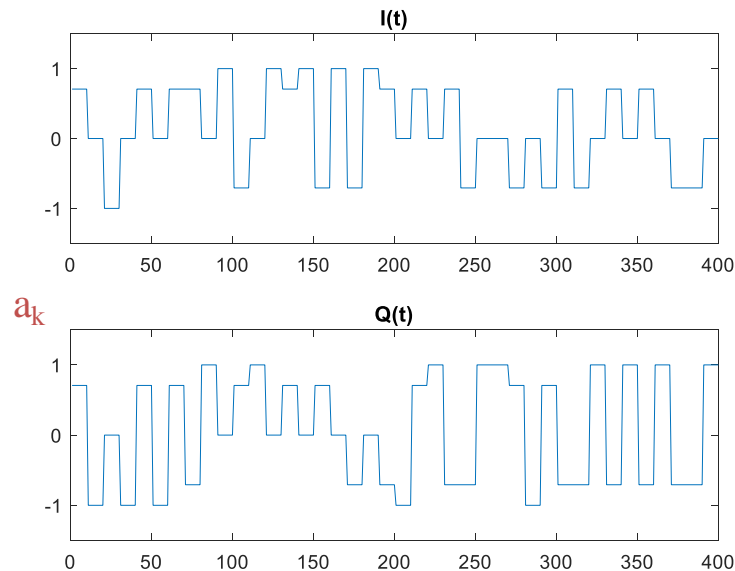
# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Exemples

→ **Modulations linéaires bi-dimensionnelle : 8-PSK (DVB-S2)**



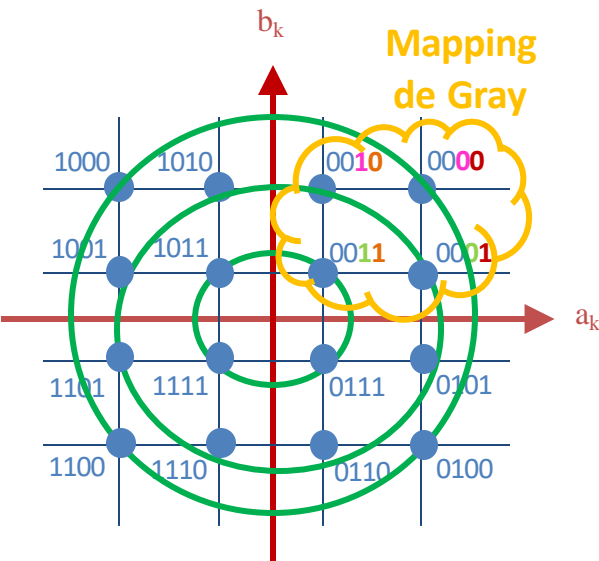
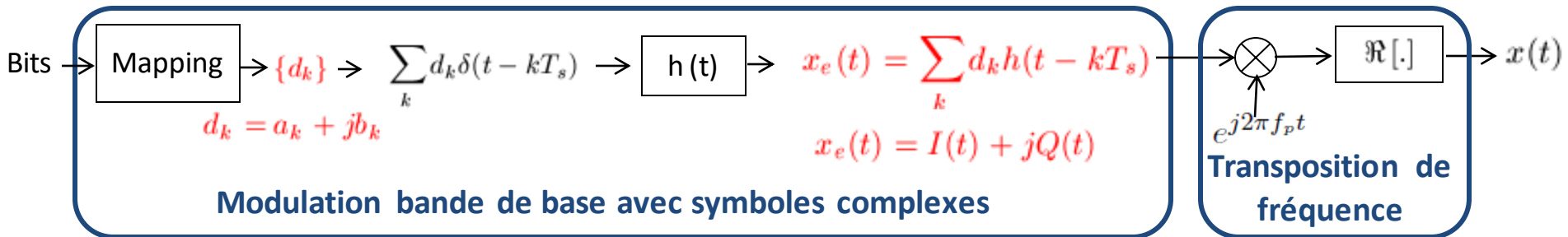
Constellation 8-PSK



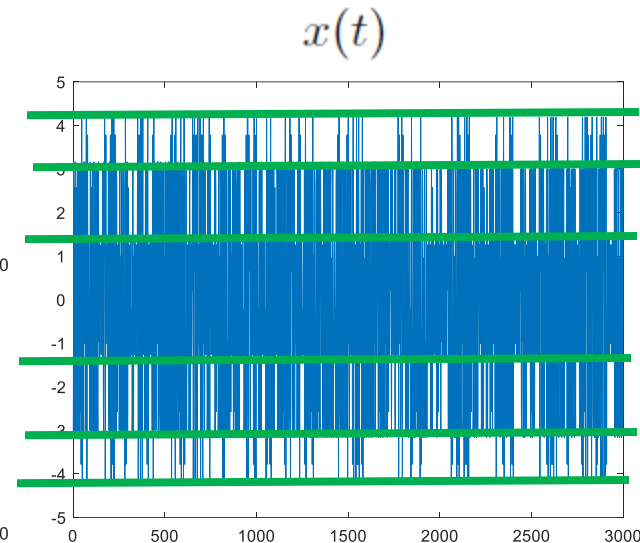
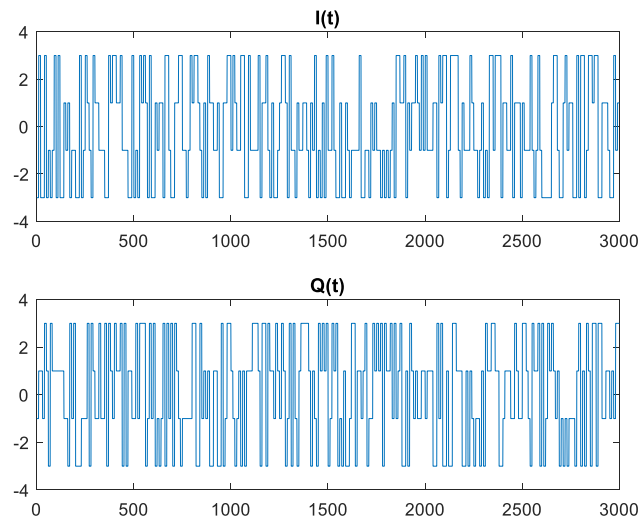
# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Exemples

### → Modulations linéaires bi-dimensionnelle : 16-QAM (DVB-C)



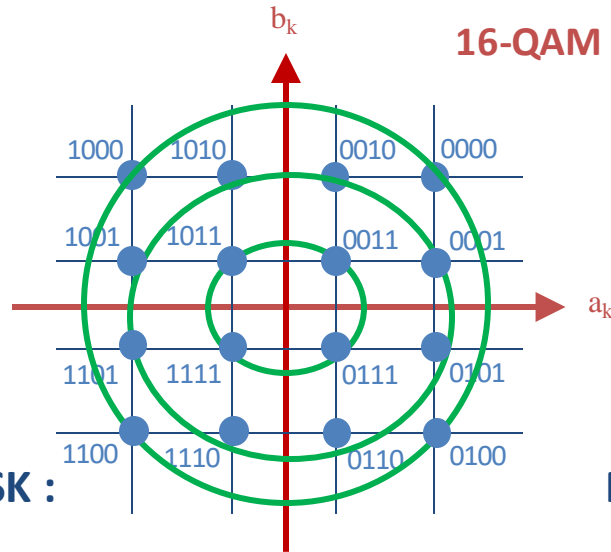
Constellation 16-QAM



(Enveloppe non constante)

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

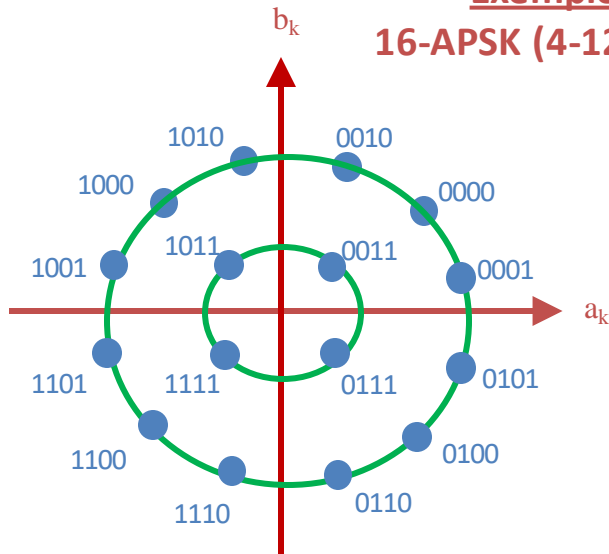
## Exemples



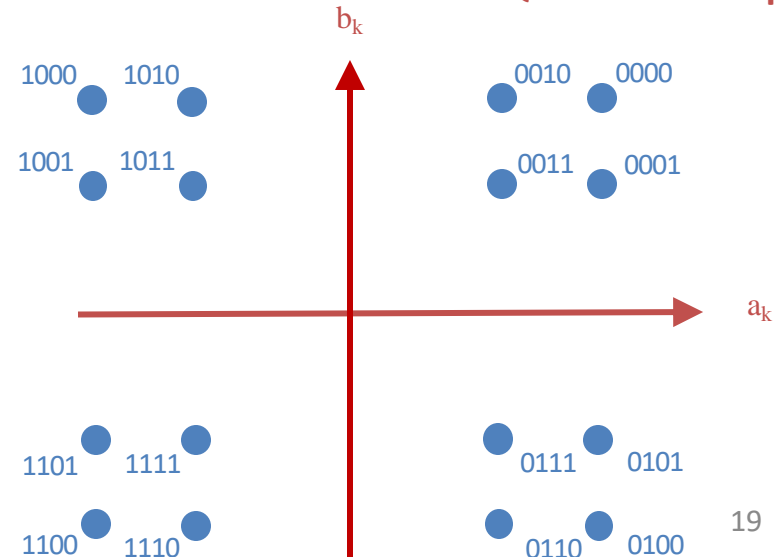
Modulations hybrides QAM/PSK :  
M-APSK (DVB-S2, DVB-SX)

Modulations hiérarchiques  
(DVB-T et T2, DVB-S2)

Exemple :  
**16-APSK (4-12 APSK)**



Exemple :  
**16-QAM hiérarchique**



# Introduction aux télécommunications

Département sciences du numérique  
Première année

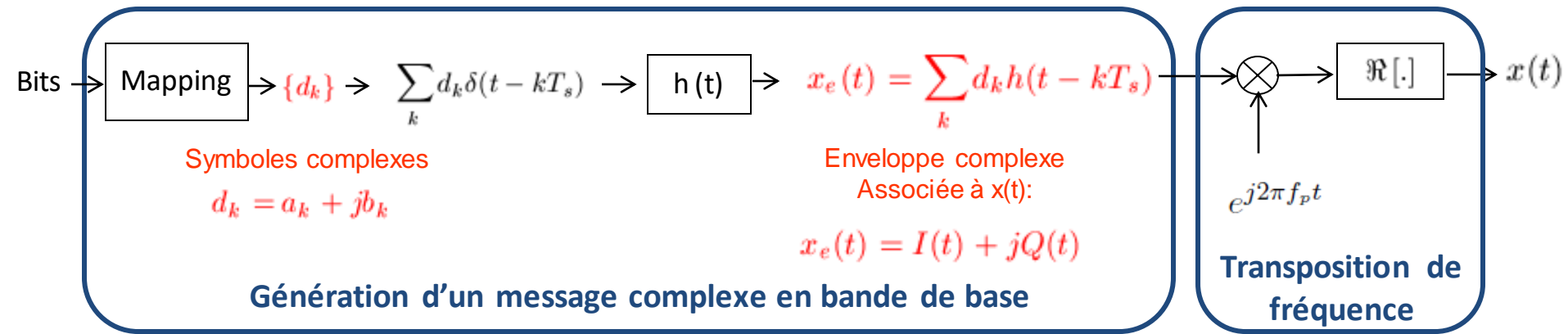
## Séquence 4

### Transmissions sur fréquence porteuse

- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :
  - Exemple,
  - Chaîne passe bas-équivalente
  - Calcul de TEBs

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

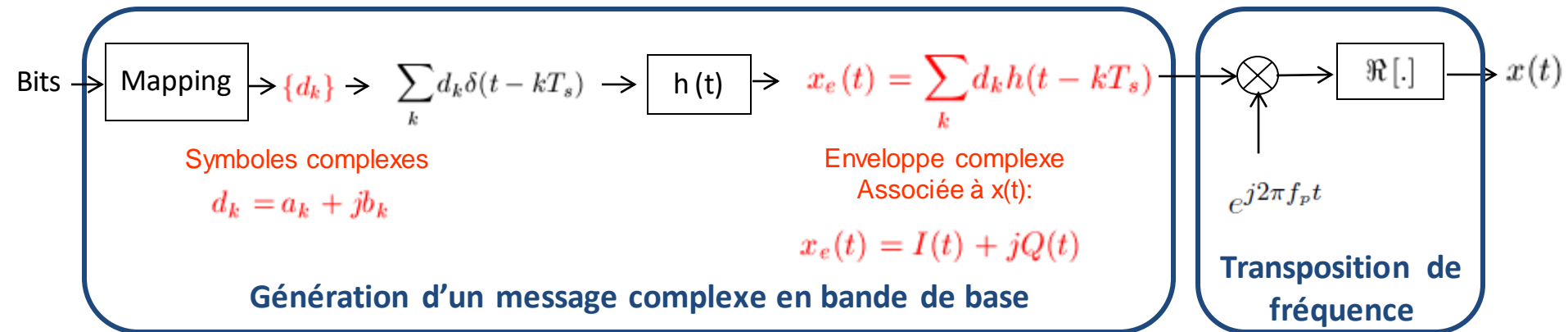
## Comparaison en termes d'efficacité spectrale



$$x_e(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s)$$

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Comparaison en termes d'efficacité spectrale



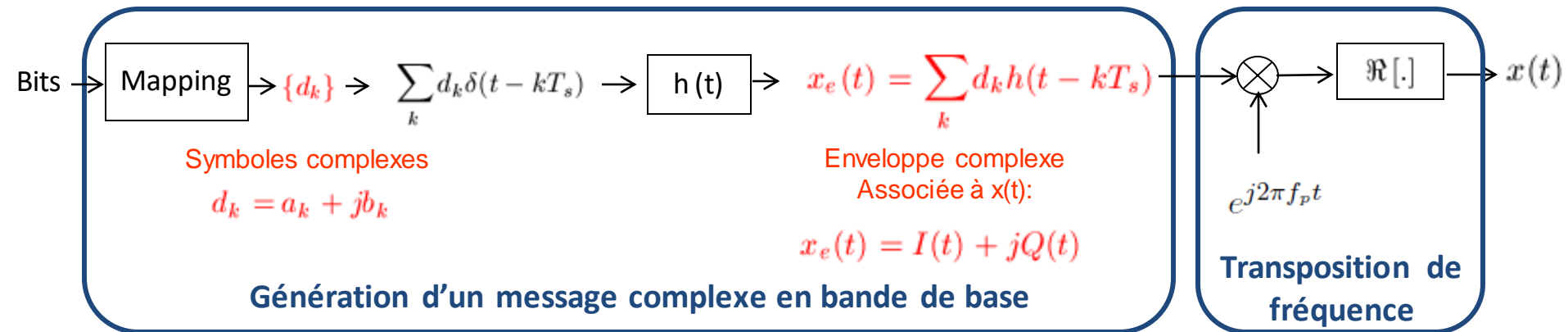
$$x_e(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s)$$



$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[ R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H \left( \frac{k}{T_s} \right) \right|^2 \delta \left( f - \frac{k}{T_s} \right)$$

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Comparaison en termes d'efficacité spectrale



$$x_e(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s)$$

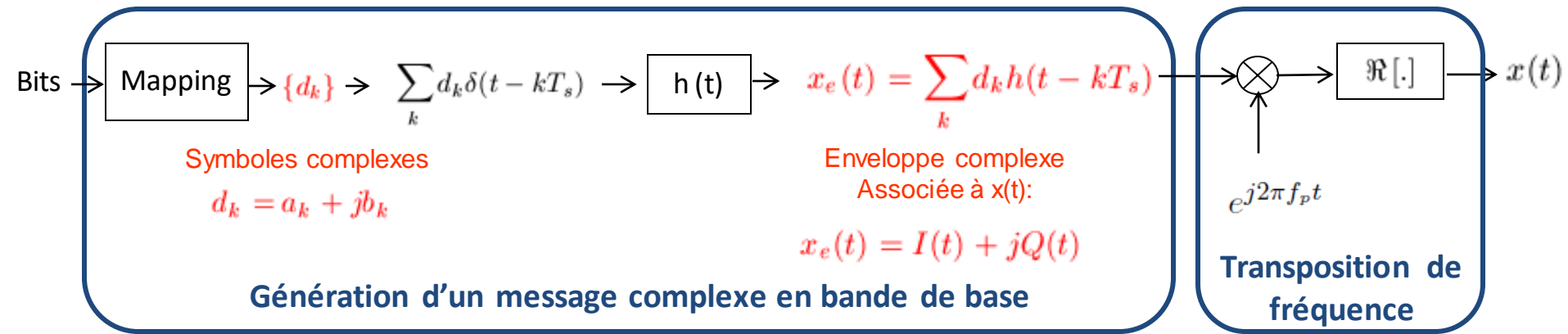


$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[ R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

$$x(t) = \Re \left[ x_e(t) e^{j2\pi f_p t} \right] \rightarrow R_x(\tau) = \frac{1}{2} \Re \left[ R_{x_e}(\tau) e^{j2\pi f_p \tau} \right]$$

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Comparaison en termes d'efficacité spectrale



$$x_e(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s)$$



$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[ R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H \left( \frac{k}{T_s} \right) \right|^2 \delta \left( f - \frac{k}{T_s} \right)$$

$$x(t) = \Re \left[ x_e(t) e^{j2\pi f_p t} \right] \rightarrow R_x(\tau) = \frac{1}{2} \Re \left[ R_{x_e}(\tau) e^{j2\pi f_p \tau} \right]$$

$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p))$$

TF

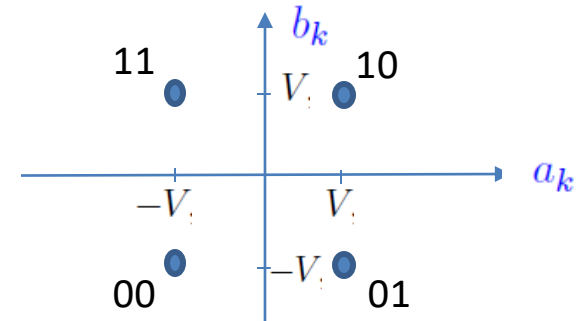
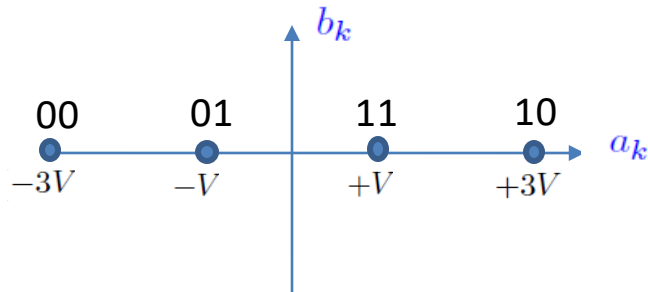


# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Comparaison en termes d'efficacité spectrale

### Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé

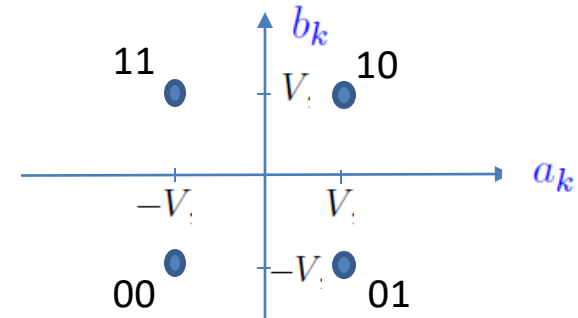
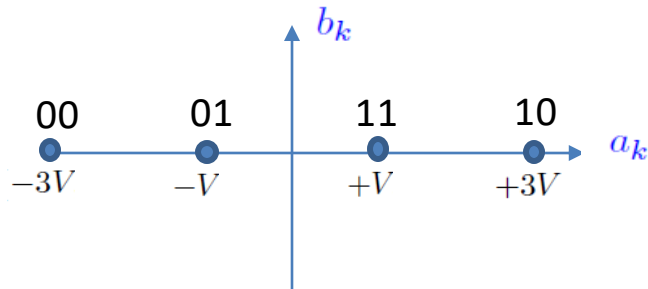


# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Comparaison en termes d'efficacité spectrale

### Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



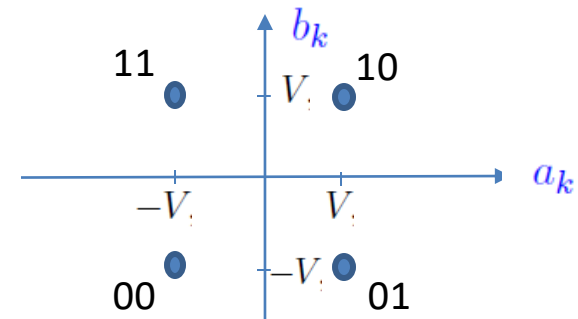
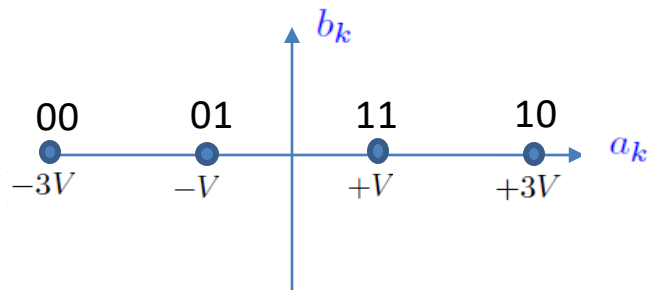
$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Comparaison en termes d'efficacité spectrale

### Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

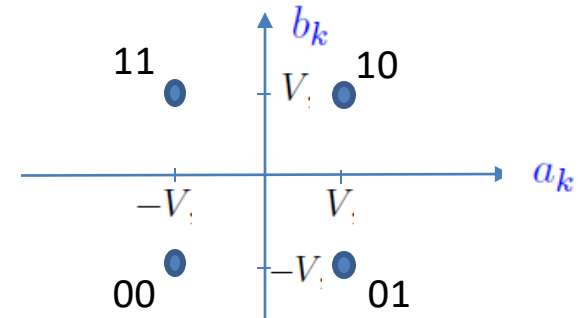
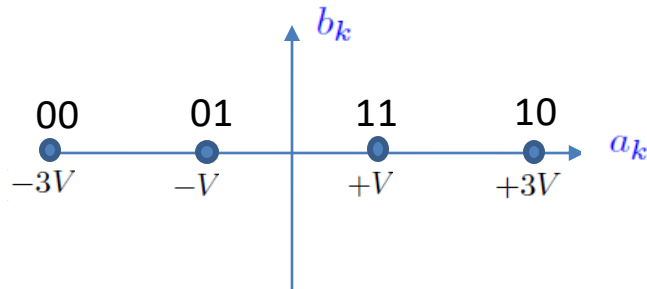
$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[ R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H \left( \frac{k}{T_s} \right) \right|^2 \delta \left( f - \frac{k}{T_s} \right)$$

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Comparaison en termes d'efficacité spectrale

### Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[ R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

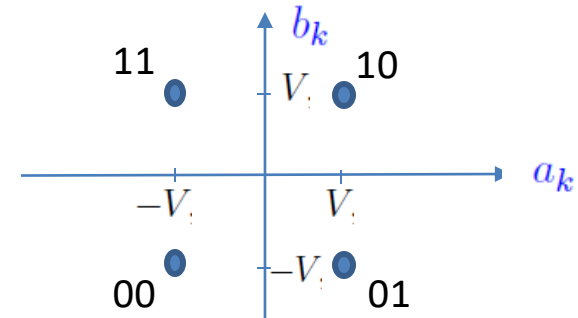
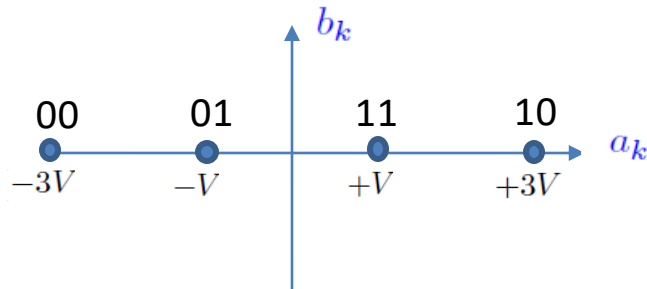
=0 car symboles indépendants      =0 car symboles à moyenne nulle

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Comparaison en termes d'efficacité spectrale

### Exemple

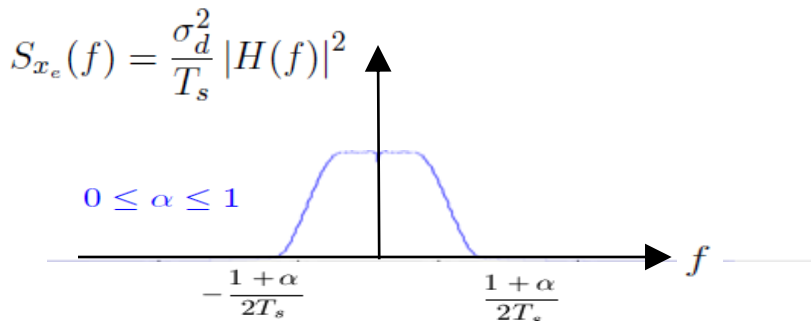
Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[ R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

=0 car symboles indépendants                      =0 car symboles à moyenne nulle

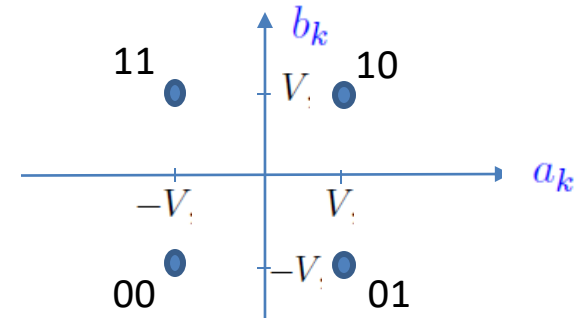
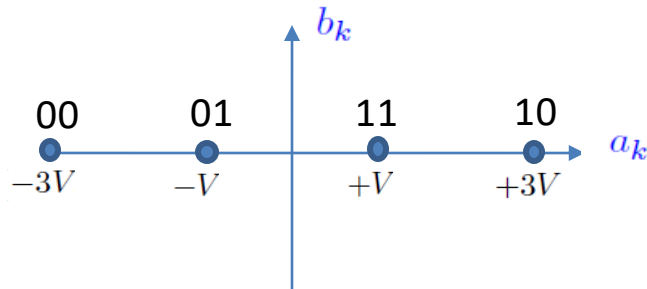


# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Comparaison en termes d'efficacité spectrale

### Exemple

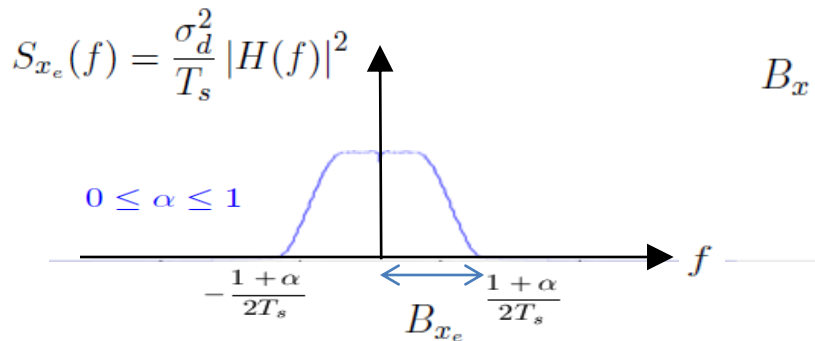
Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re [R_d(k) e^{j2\pi f k T_s}] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

=0 car symboles indépendants                      =0 car symboles à moyenne nulle



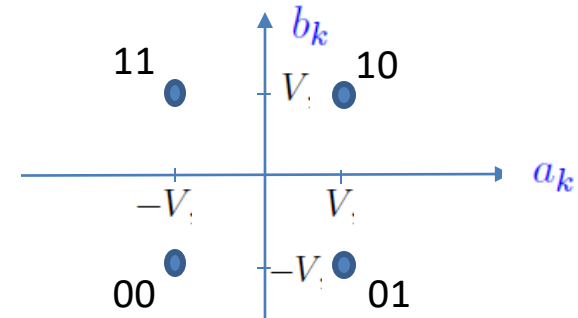
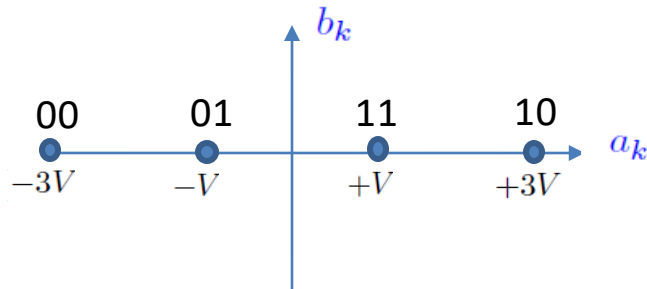
$$B_x = 2B_{x_e} = \frac{1 + \alpha}{T_s} = \frac{1 + \alpha}{\log_2(M) T_b} = \frac{1 + \alpha}{\log_2(M)} R_b$$

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Comparaison en termes d'efficacité spectrale

### Exemple

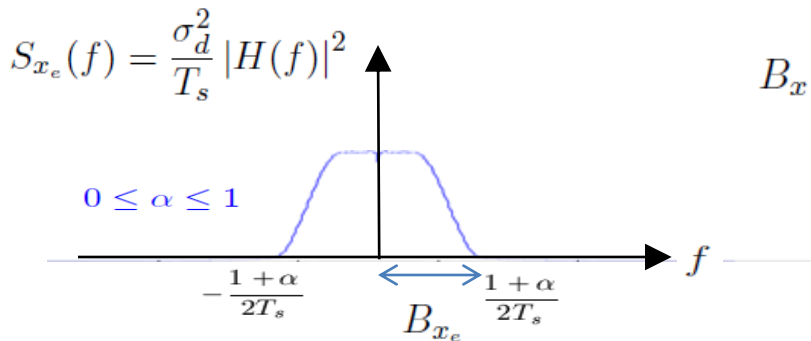
Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re [R_d(k) e^{j2\pi f k T_s}] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

=0 car symboles indépendants                      =0 car symboles à moyenne nulle



$$B_x = 2B_{x_e} = \frac{1 + \alpha}{T_s} = \frac{1 + \alpha}{\log_2(M) T_b} = \frac{1 + \alpha}{\log_2(M)} R_b$$

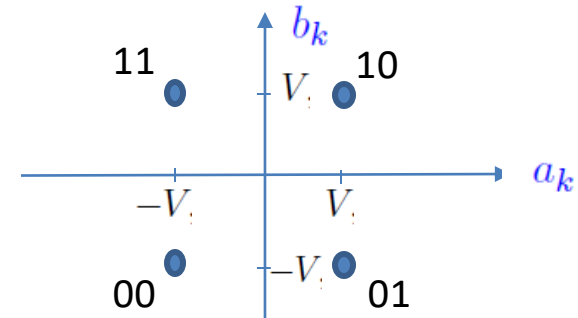
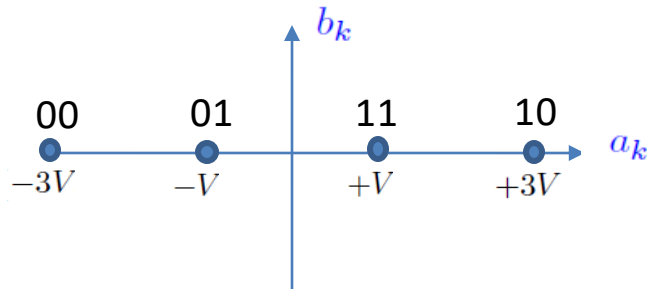
$$\eta = \frac{R_b}{B_x} = \frac{\log_2(M)}{1 + \alpha}$$

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Comparaison en termes d'efficacité spectrale

### Exemple

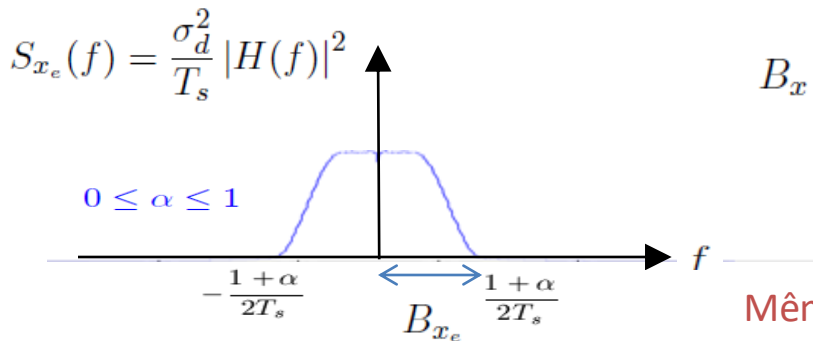
Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re [R_d(k) e^{j2\pi f k T_s}] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

=0 car symboles indépendants                      =0 car symboles à moyenne nulle



$$B_x = 2B_{x_e} = \frac{1 + \alpha}{T_s} = \frac{1 + \alpha}{\log_2(M) T_b} = \frac{1 + \alpha}{\log_2(M)} R_b$$

$$\eta = \frac{R_b}{B_x} = \frac{\log_2(M)}{1 + \alpha}$$

Même filtre de mise en forme, Même nombre de symboles  
**=> Même efficacité spectrale**



# **Introduction aux télécommunications**

**Département sciences du numérique  
Première année**

## **Séquence 4**

### **Transmissions sur fréquence porteuse**

- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe**
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes**
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale**
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :**
  - Exemple,**
  - Chaîne passe bas-équivalente**
  - Calcul de TEBs**

# Introduction aux télécommunications

Département sciences du numérique  
Première année

## Séquence 4

### Transmissions sur fréquence porteuse

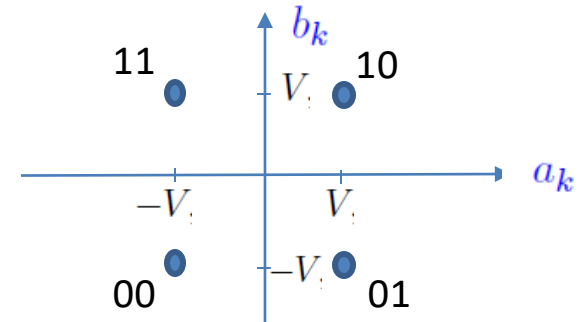
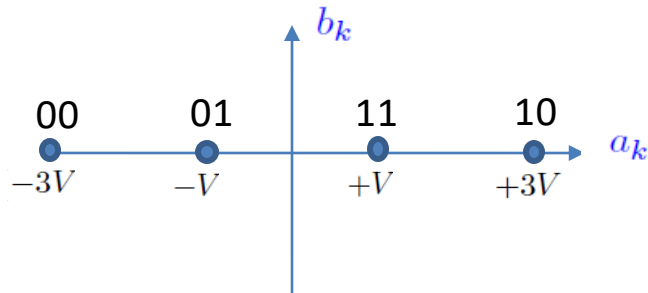
- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :
  - Exemple,
  - Chaîne passe bas-équivalente
  - Calcul de TEBs

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Comparaison en termes d'efficacité en puissance

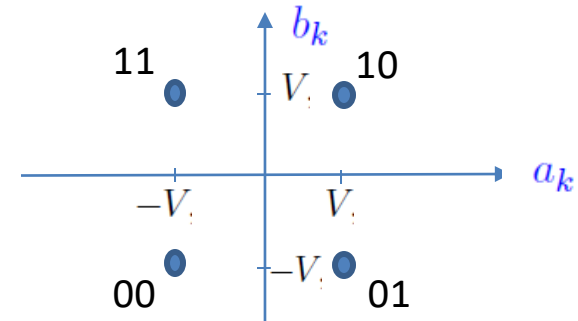
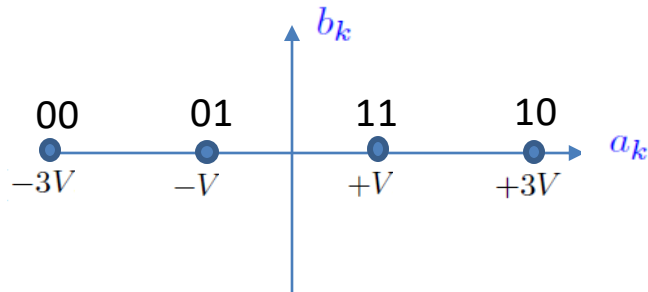
### Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



### Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



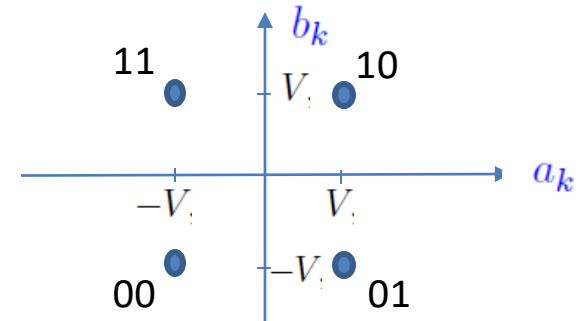
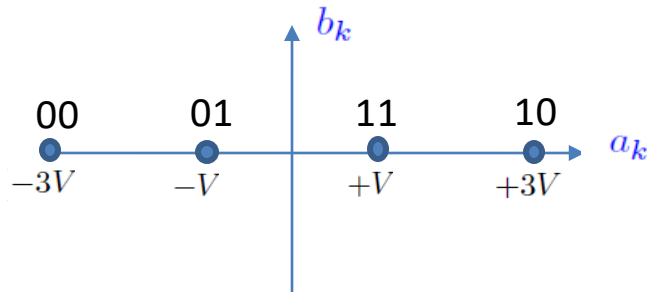
$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2}$$

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

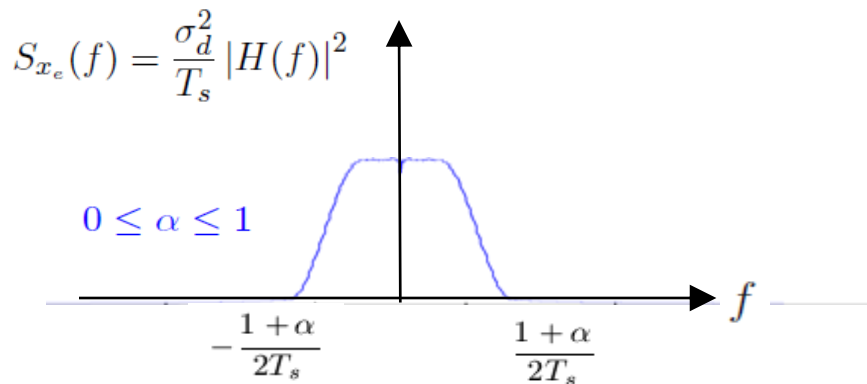
## Comparaison en termes d'efficacité en puissance

### Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2}$$

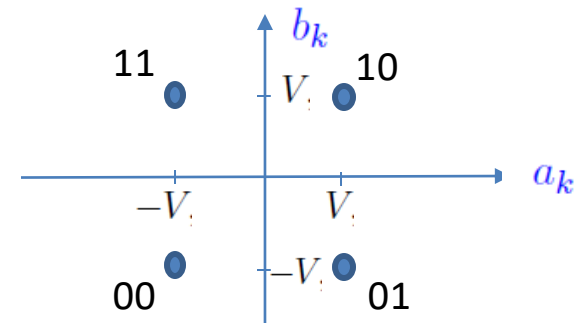
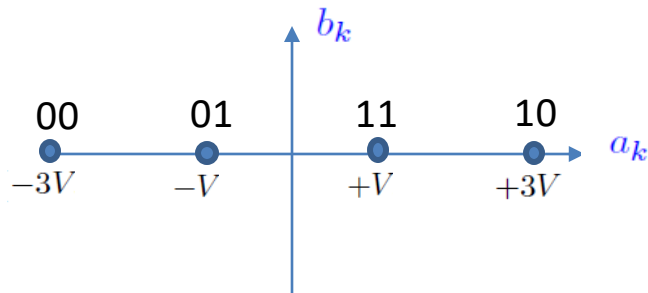


# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

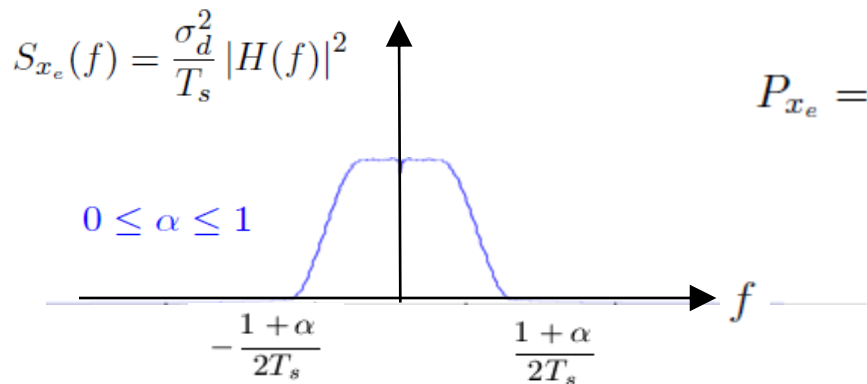
## Comparaison en termes d'efficacité en puissance

### Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2}$$



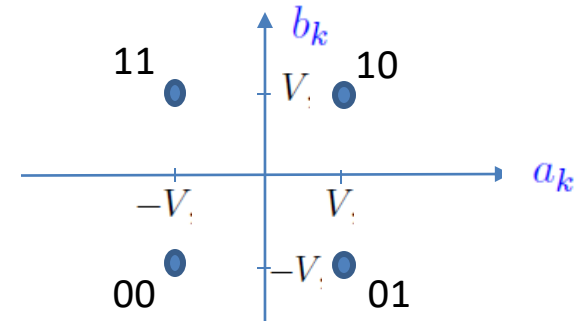
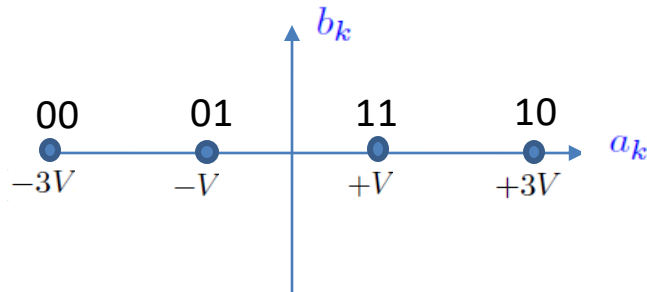
$$P_{x_e} = \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H(f)|^2 df = \frac{\sigma_d^2}{T_s} \times T_s = \sigma_d^2$$

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

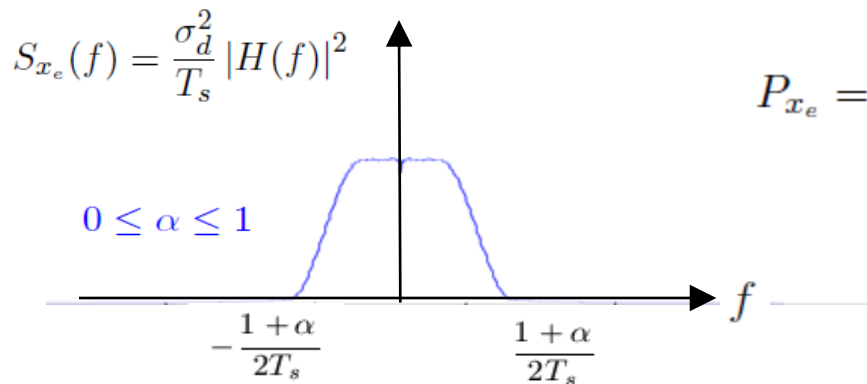
## Comparaison en termes d'efficacité en puissance

### Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2}$$



$$P_{x_e} = \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H(f)|^2 df = \frac{\sigma_d^2}{T_s} \times T_s = \sigma_d^2$$

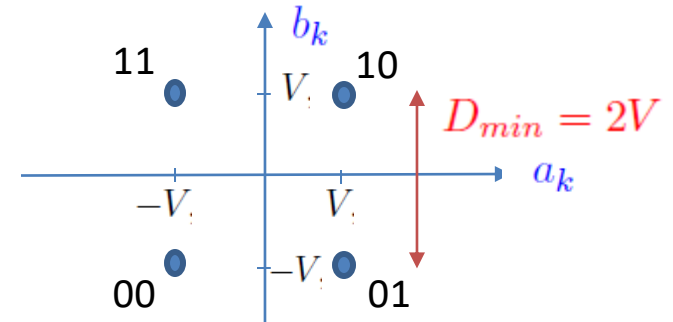
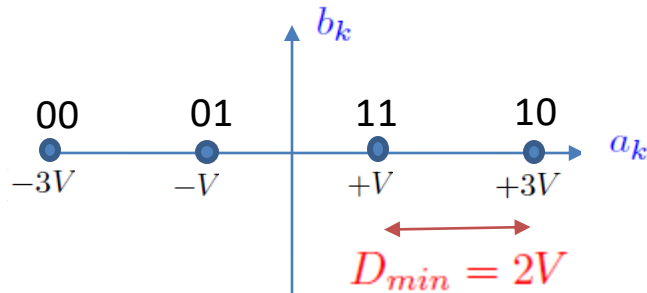
$$\Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2} = \frac{\sigma_d^2}{2}$$

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

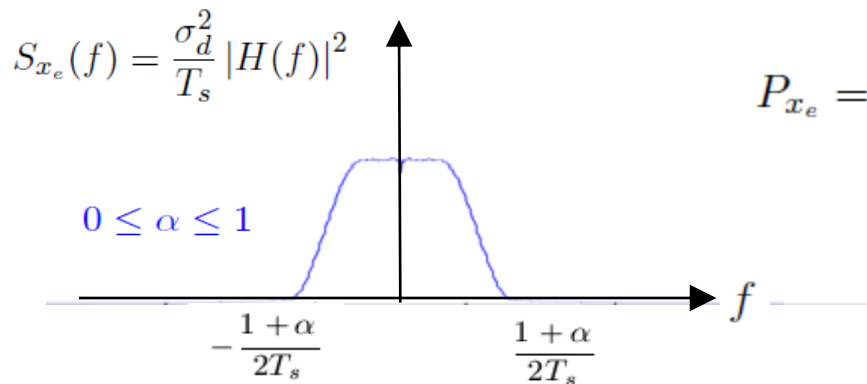
## Comparaison en termes d'efficacité en puissance

### Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2}$$



$$P_{x_e} = \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H(f)|^2 df = \frac{\sigma_d^2}{T_s} \times T_s = \sigma_d^2$$

$$\Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2} = \frac{\sigma_d^2}{2}$$

$$\sigma_d^2 = 5V^2 \text{ (4-ASK)}$$

$$\sigma_d^2 = 2V^2 \text{ (QPSK)}$$



# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

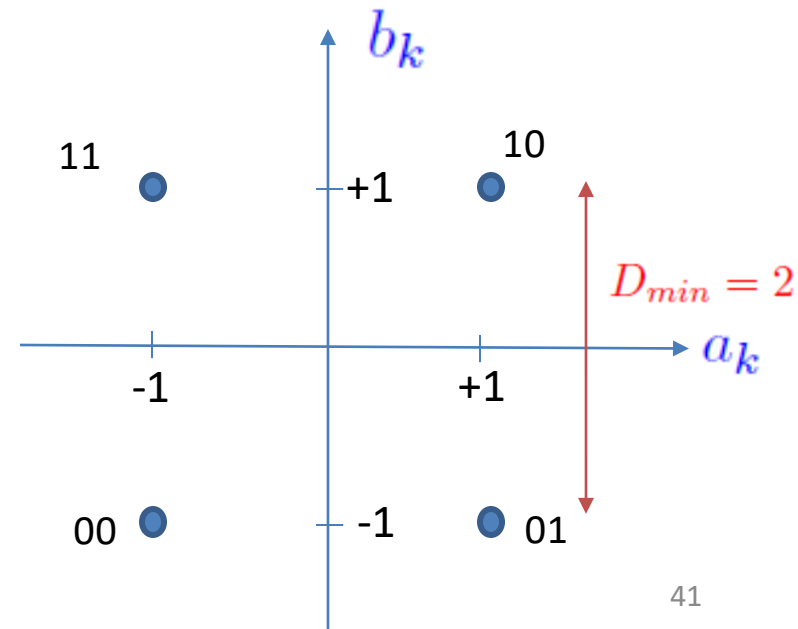
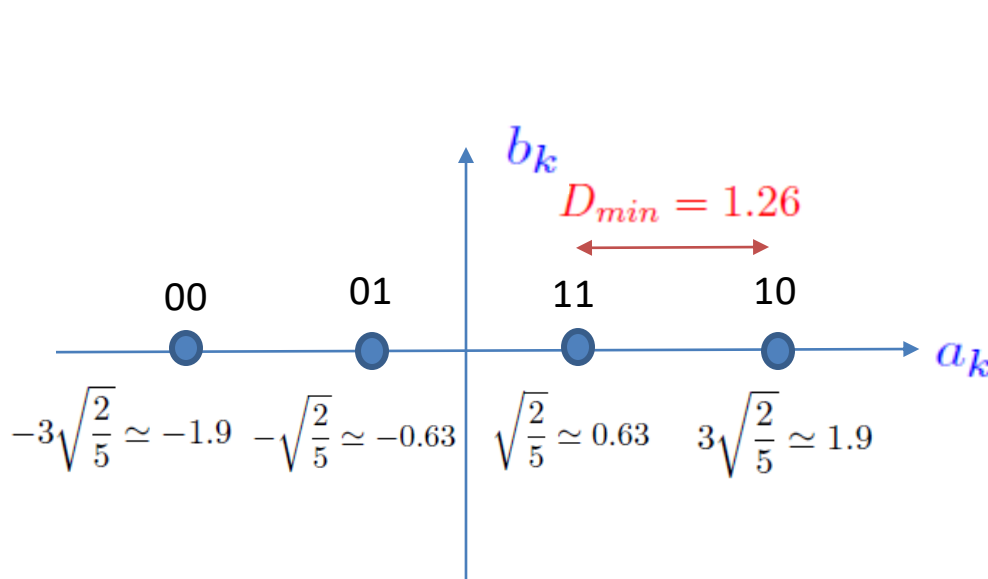
## Comparaison en termes d'efficacité en puissance

### Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),  
filtre de mise en racine de cosinus surélevé

$$P_x = \frac{P_{x_e}}{2} = \frac{\sigma_d^2}{2} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_d^2 = 5V^2 \text{ (4-ASK)} \\ \sigma_d^2 = 2V^2 \text{ (QPSK)} \end{array} \right.$$

$$P_x = \frac{P_{x_e}}{2} = \frac{\sigma_d^2}{2} = 1 \text{ pour } V = \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ (4-ASK)}, V = 1 \text{ (QPSK)}$$



# Introduction aux télécommunications

Département sciences du numérique  
Première année

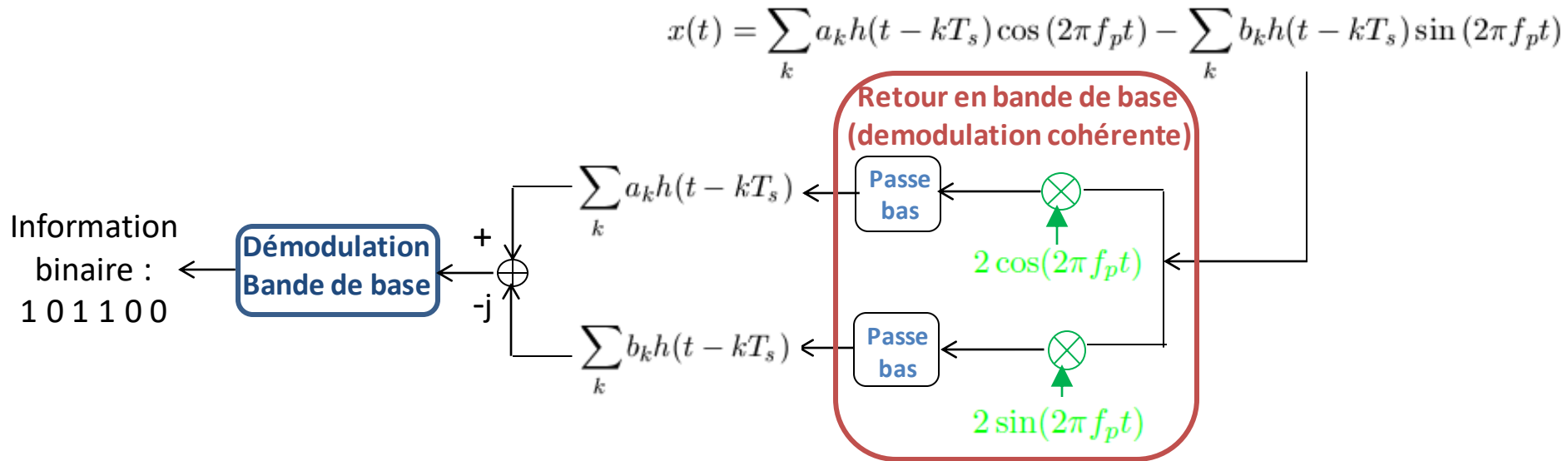
## Séquence 4

### Transmissions sur fréquence porteuse

- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :
  - Exemple,
  - Chaîne passe bas-équivalente
  - Calcul de TEBs

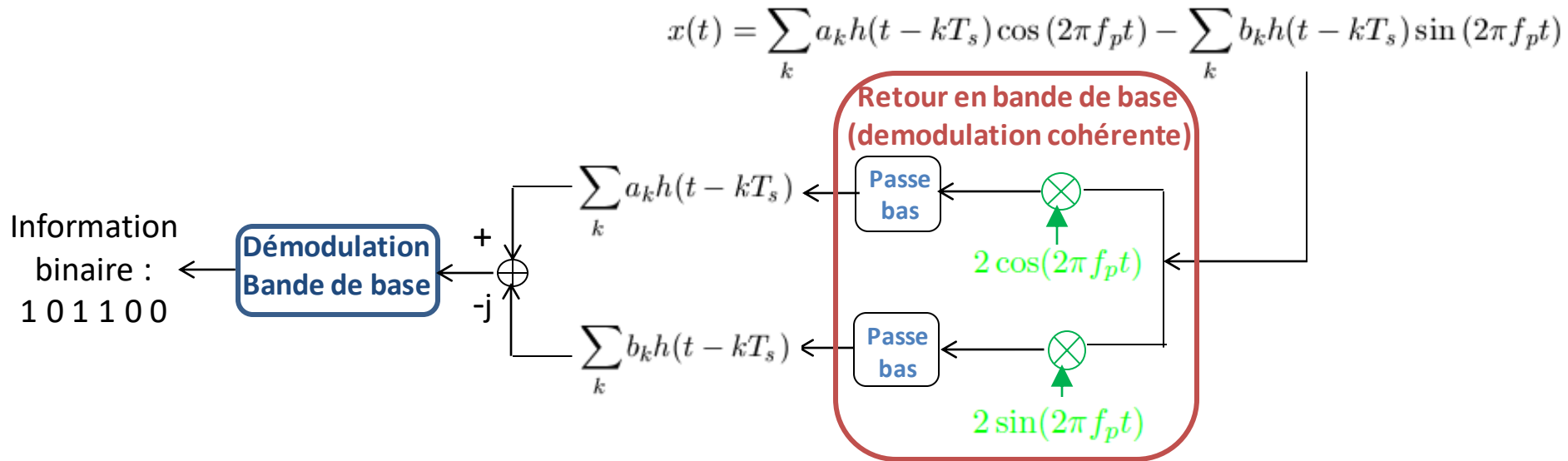
# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Démodulation cohérente



# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Démodulation cohérente



$$\left( \sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(2\pi f_p t) \right) \times (2 \cos(2\pi f_p t))$$

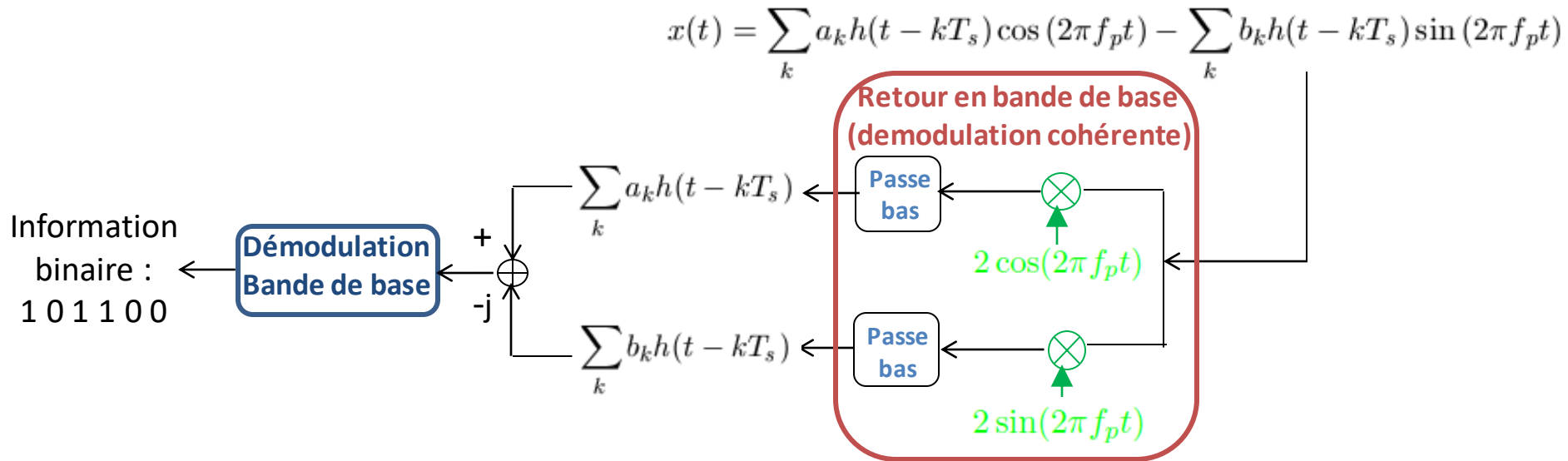
$$= \sum_k a_k h(t - kT_s) + \sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(4\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(4\pi f_p t)$$

$$\left( \sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(2\pi f_p t) \right) \times (2 \sin(2\pi f_p t))$$

$$= \sum_k a_k h(t - kT_s) \sin(4\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) + \sum_k b_k h(t - kT_s) \cos(4\pi f_p t)$$

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Démodulation cohérente



$$\left( \sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(2\pi f_p t) \right) \times (2 \cos(2\pi f_p t))$$

$$= \sum_k a_k h(t - kT_s) + \sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(4\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(4\pi f_p t)$$

Filtrés par le passe-bas

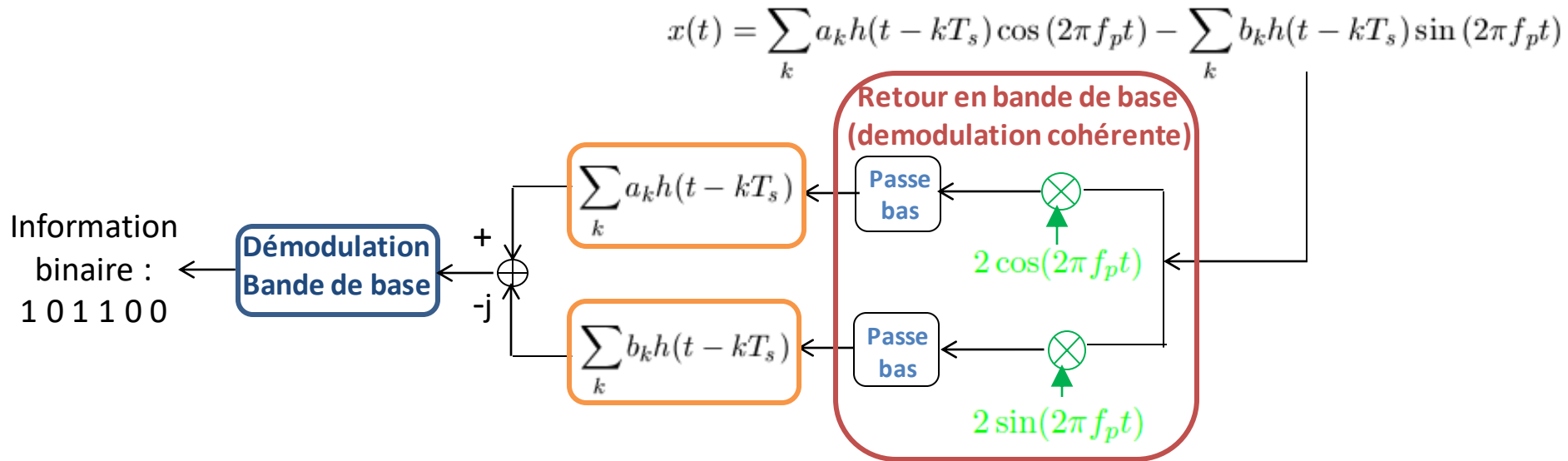
$$\left( \sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(2\pi f_p t) \right) \times (2 \sin(2\pi f_p t))$$

$$= \sum_k a_k h(t - kT_s) \sin(4\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) + \sum_k b_k h(t - kT_s) \cos(4\pi f_p t)$$

Filtrés par le passe-bas

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Démodulation cohérente



Voies orthogonales

$$= \left( \sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(2\pi f_p t) \right) \times (2 \cos(2\pi f_p t))$$

$$= \sum_k a_k h(t - kT_s) + \sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(4\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(4\pi f_p t)$$

Filtrés par le passe-bas

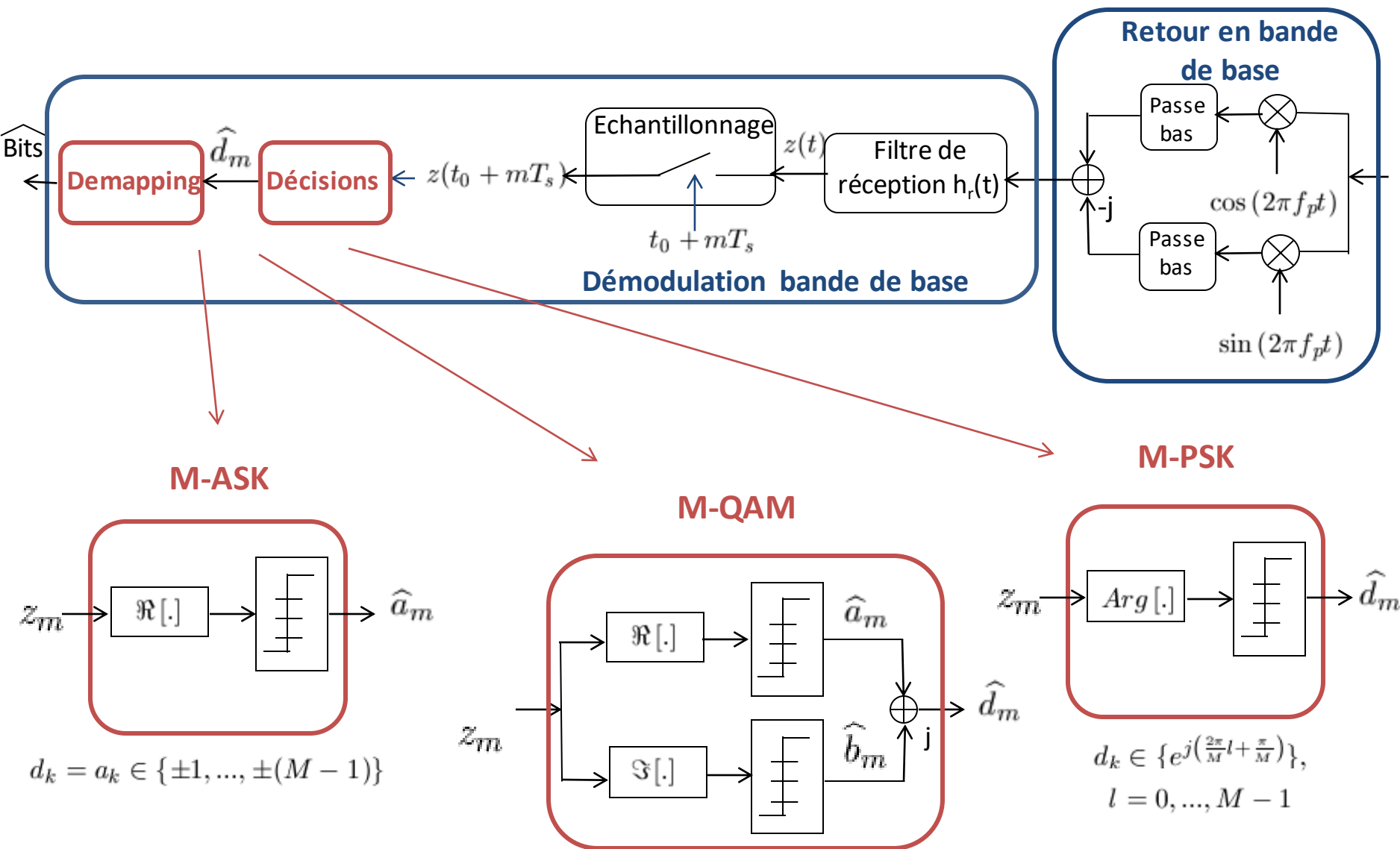
$$= \left( \sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(2\pi f_p t) \right) \times (2 \sin(2\pi f_p t))$$

$$= \sum_k a_k h(t - kT_s) \sin(4\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) + \sum_k b_k h(t - kT_s) \cos(4\pi f_p t)$$

Filtrés par le passe-bas

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

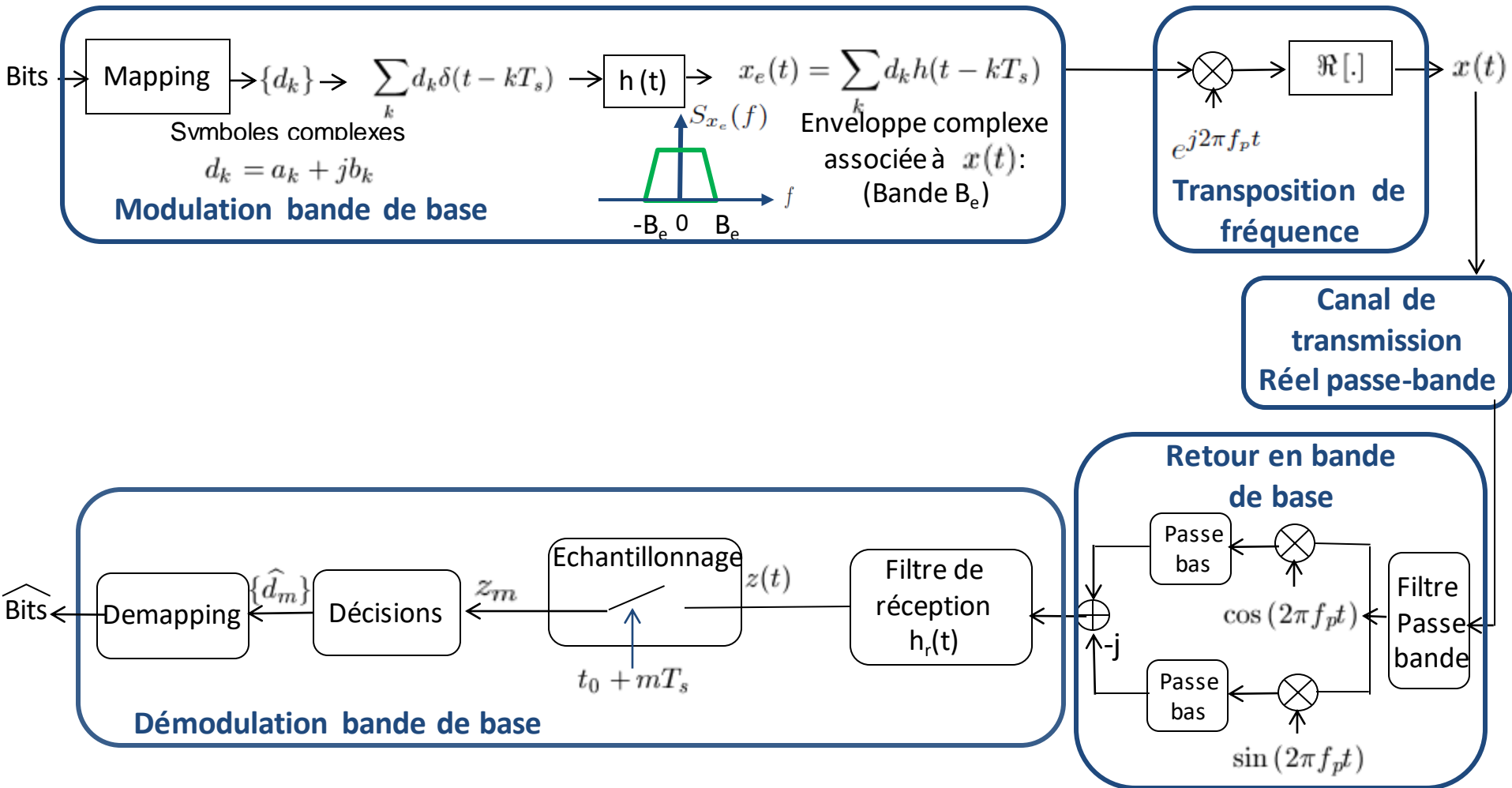
## Décisions et demapping



$a_k, b_k$  symboles  $\sqrt{M}$ -aires indépendants  $\in \{\pm V, \pm 3V, \dots, \pm(\sqrt{M}-1)V\}$

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

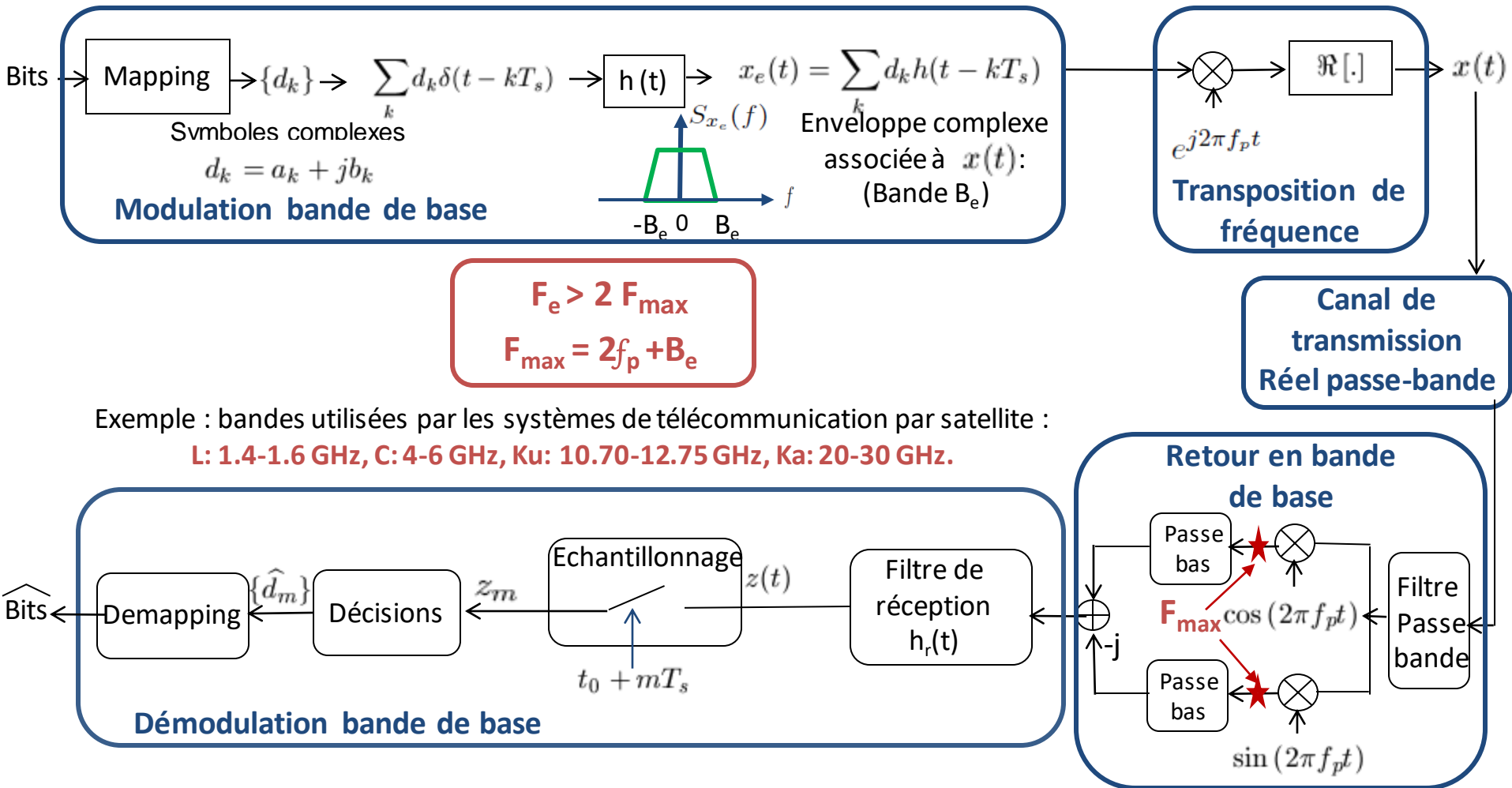
## Chaîne de transmission complète





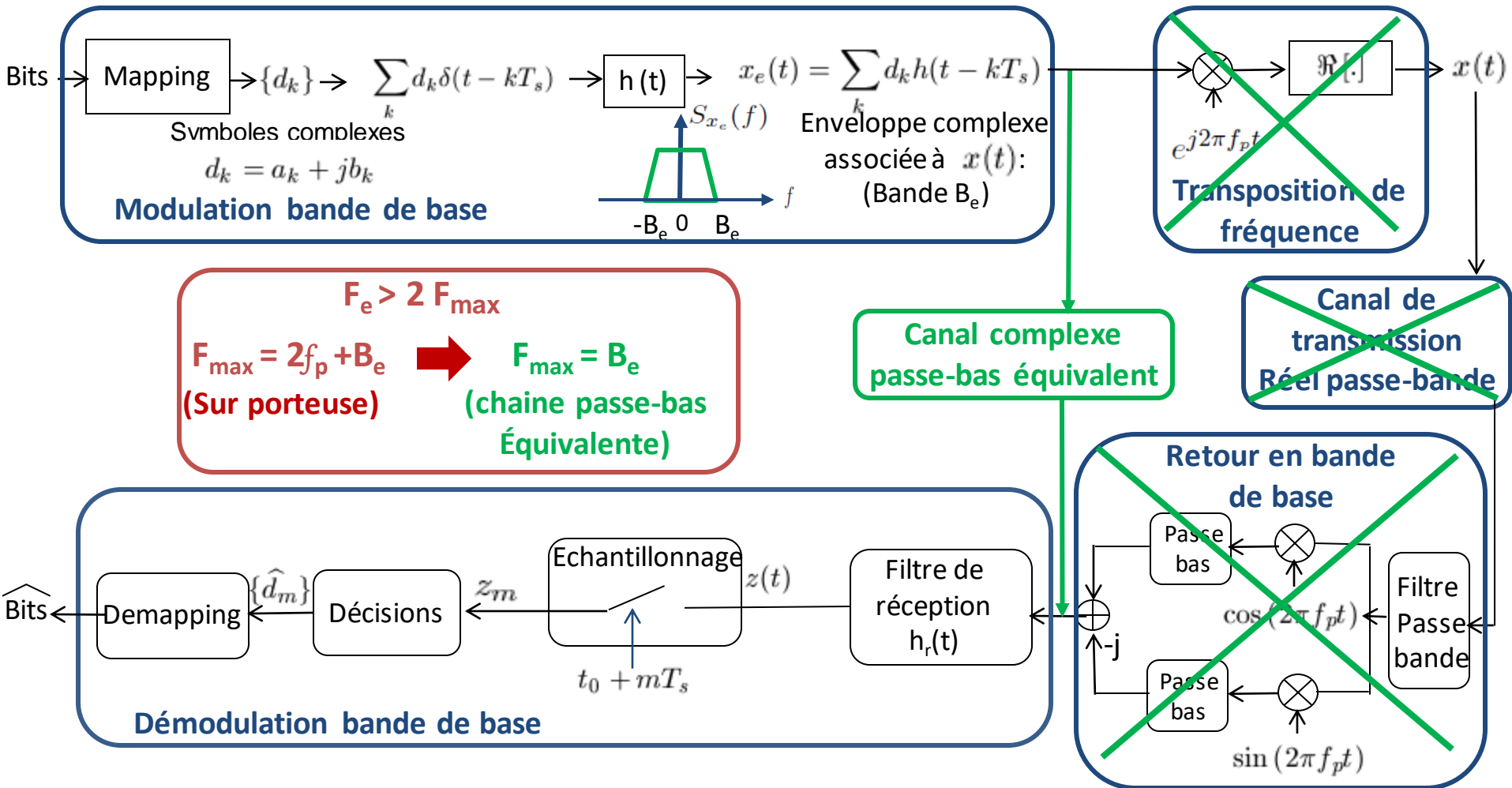
# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Chaîne de transmission complète



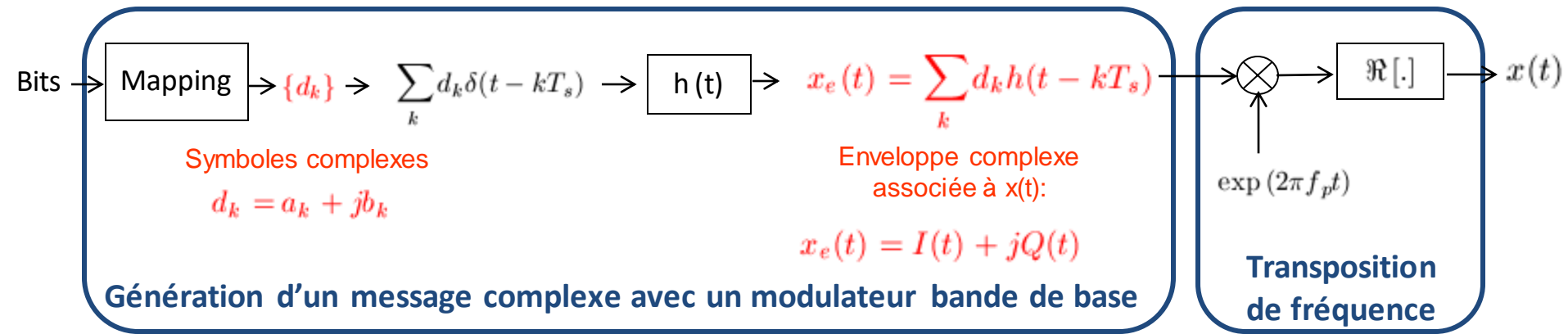
# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

**Chaine de transmission complète => Chaine passe-bas équivalente**

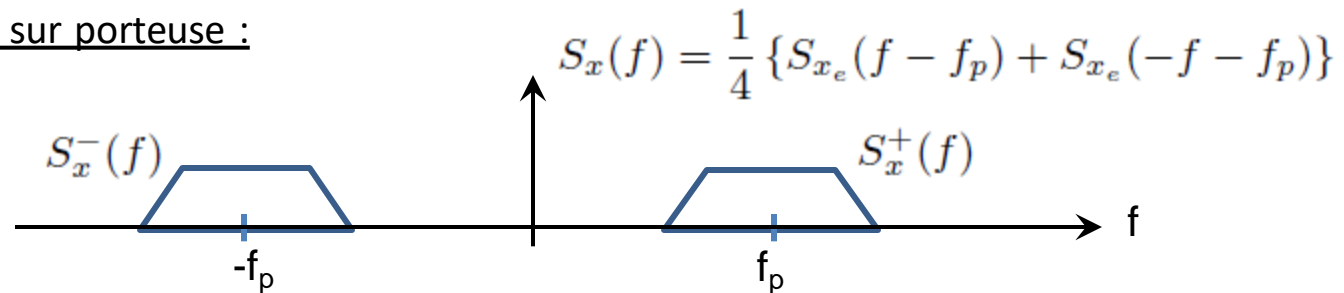


# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

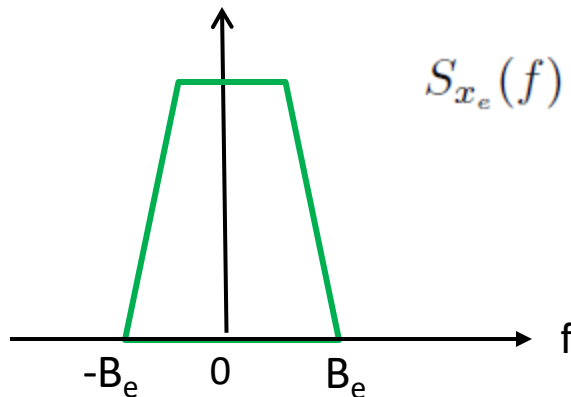
## Vers la chaine passe-bas équivalente : enveloppe complexe associée au signal modulé



$\rightarrow$  DSP du signal sur porteuse :



$\rightarrow$  DSP de l'enveloppe complexe correspondante :

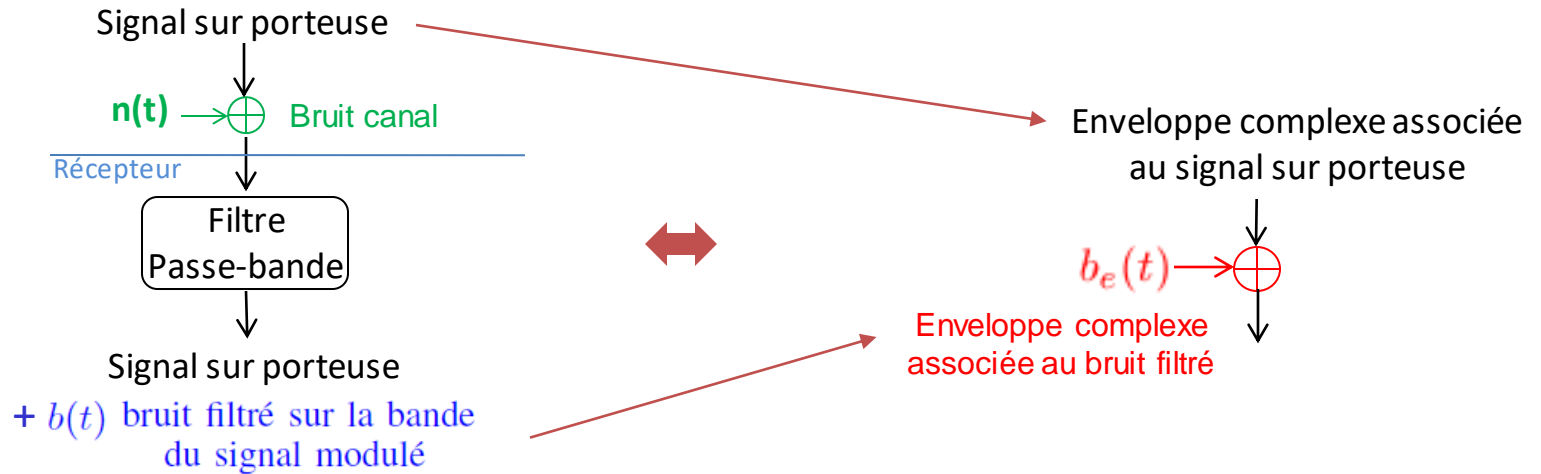


(ou  $X_e(f) = 2X_e^+(f + f_p)$  pour les signaux déterministes)

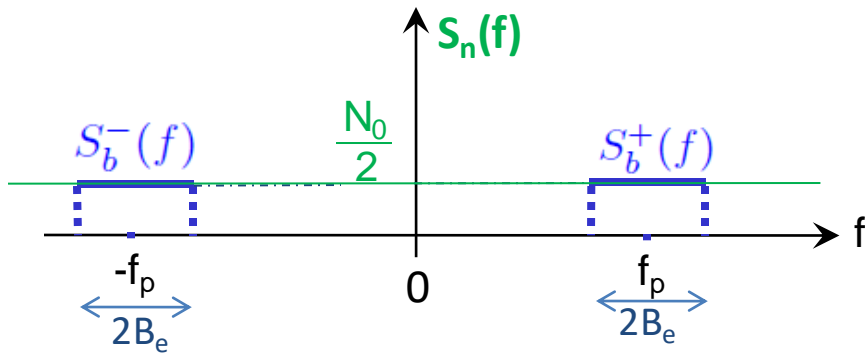
# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Vers la chaine passe-bas équivalente : canal passe-bas équivalent

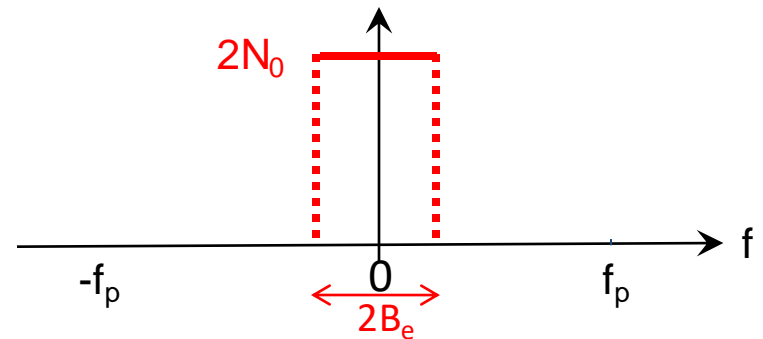
### Obtention du bruit passe-bas équivalent



$$S_b(f) = \frac{1}{4} (S_{b_e}(f - f_p) + S_{b_e}(-f - f_p))$$



$$S_{b_e}(f) = 4S_b(f + f_p)U(f + f_p) = 4S_b^+(f + f_p)$$



$$b_e(t) = I_b(t) + jQ_b(t) : \text{enveloppe complexe associée à } b(t)$$

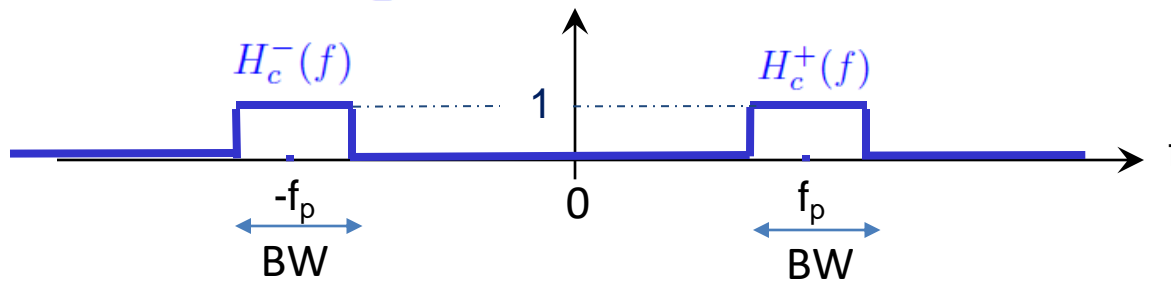
$$S_{I_b}(f) = S_{Q_b}(f) = N_0 \text{ sur la bande de } b_e(t)$$

# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

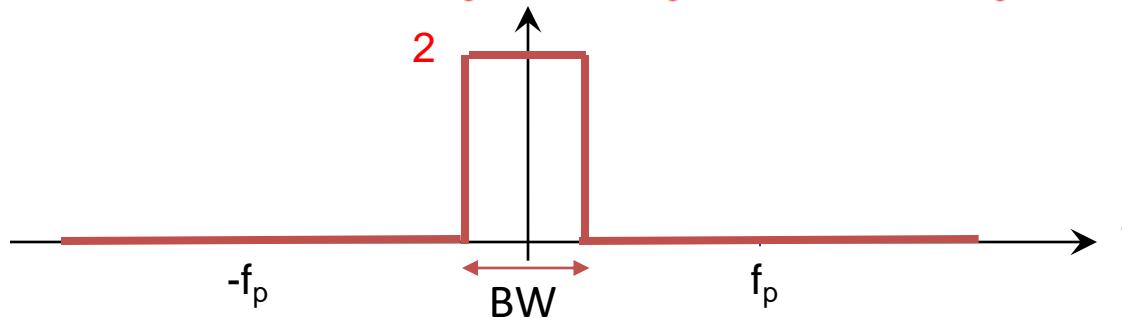
## Vers la chaine passe-bas équivalente : canal passe-bas équivalent

### Filtre canal passe-bas équivalent

$$H_c(f) = \frac{1}{2} (H_{c_e}(f + f_p) + H_{c_e}(f - f_p))$$



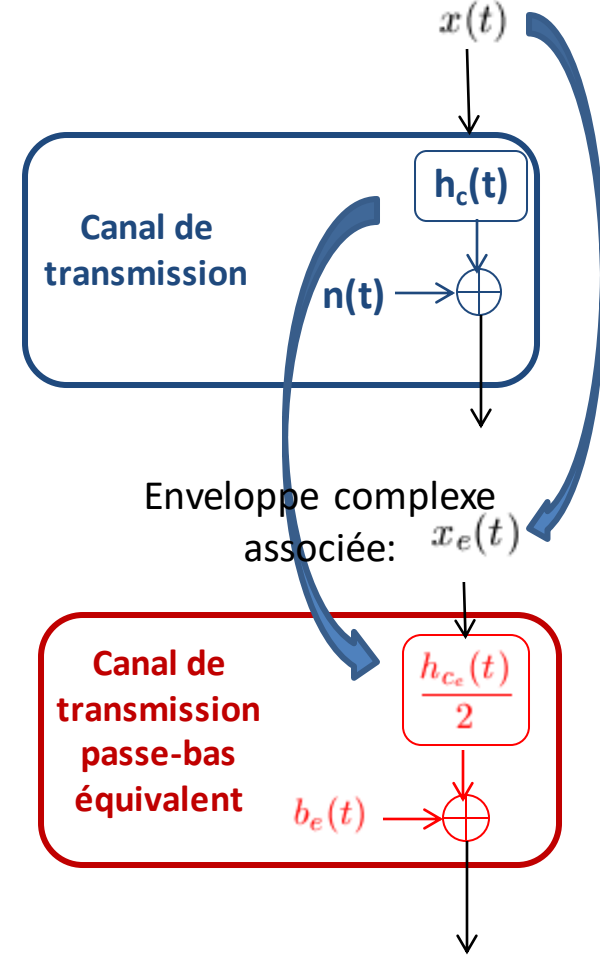
$$H_{c_e}(f) = 2H_c(f + f_p)U(f + f_p) = 2H_c^+(f + f_p)$$



(Remarque : le canal est supposé idéal sur sa bande passante dans la figure)

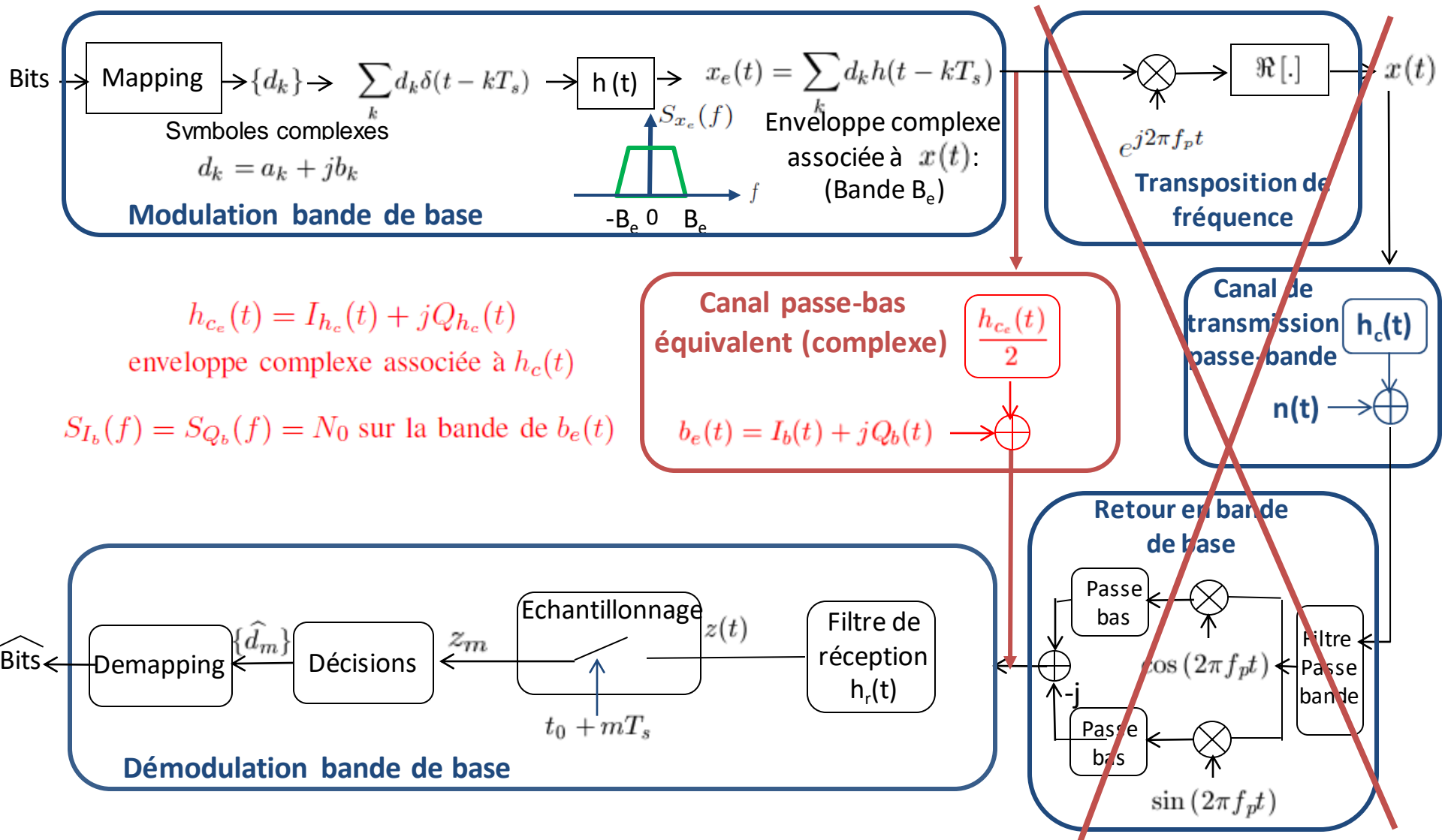
$h_{c_e}(t) = I_{h_c}(t) + jQ_{h_c}(t)$  : enveloppe complexe associée à  $h_c(t)$

Signal modulé sur porteuse :



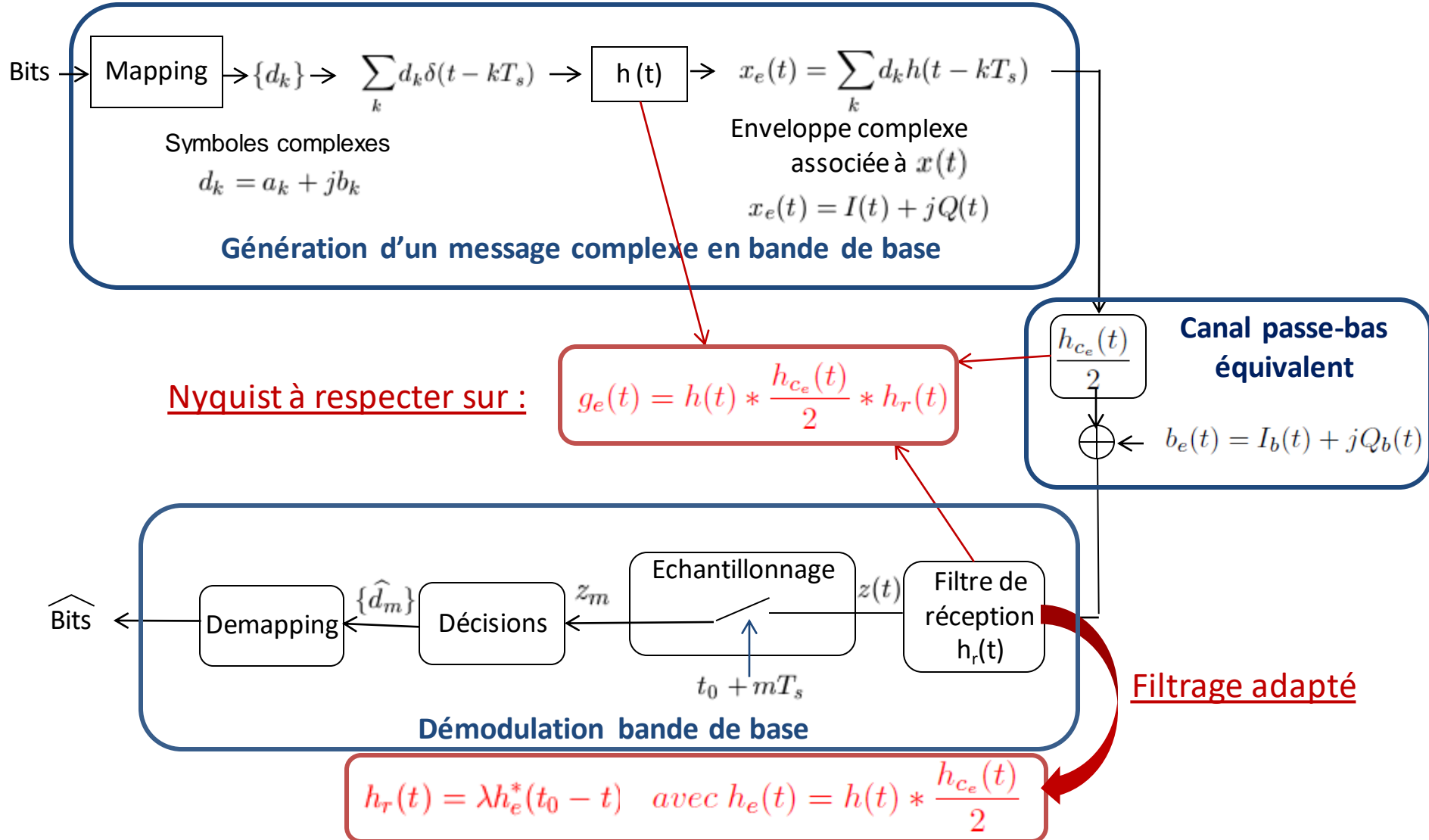
# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

**Chaine de transmission complète => Chaine passe-bas équivalente**



# Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

## Chaîne passe-bas équivalente : Critères de Nyquist et filtrage adapté



Les calculs de TEB en bande de base peuvent être ré-utilisés

# Introduction aux télécommunications

Département sciences du numérique  
Première année

## Séquence 4

### Transmissions sur fréquence porteuse

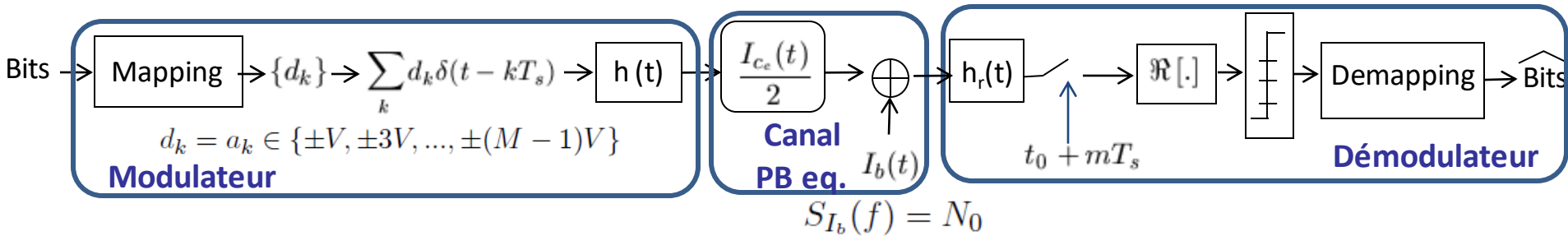
- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :
  - Exemple,
  - Chaîne passe bas-équivalente
  - Calcul de TEBs



# Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

## Performances des modulations sur porteuse

### Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-ASK**

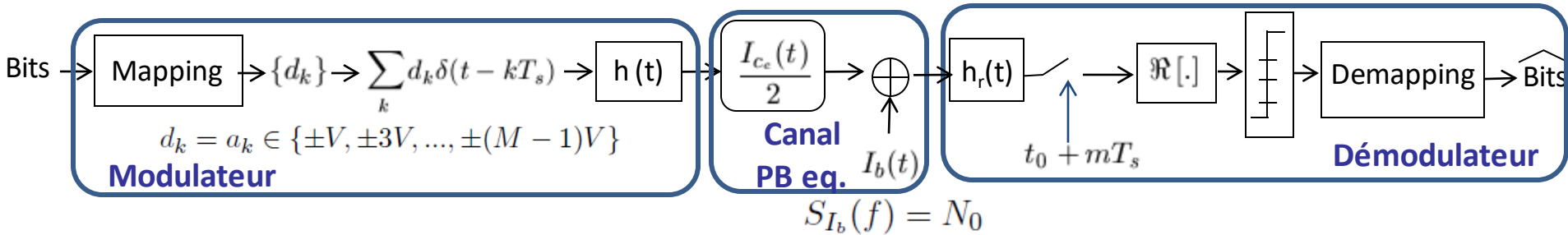


$$TES = TES_I = 2 \left( 1 - \frac{1}{M} \right) Q \left( \frac{Vg(t_0)}{\sigma_w} \right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

# Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

## Performances des modulations sur porteuse

### Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-ASK**



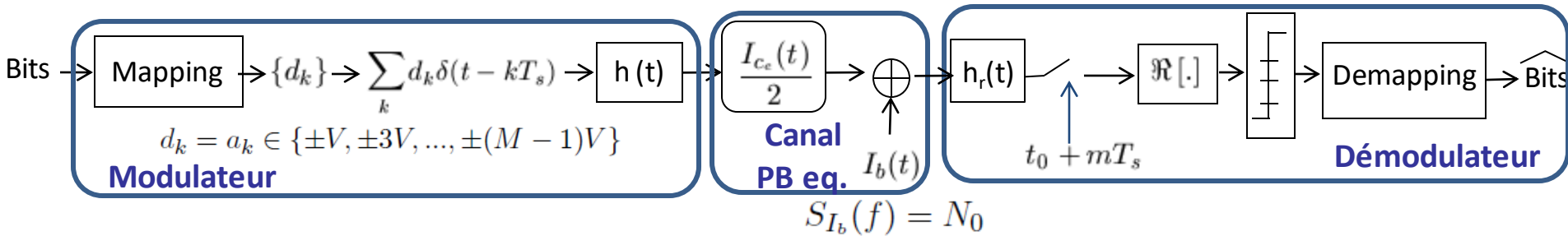
$$TES = TES_I = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left( \frac{Vg(t_0)}{\sigma_w} \right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_w^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

# Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

## Performances des modulations sur porteuse

### Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-ASK**



$$TES = TES_I = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left( \frac{Vg(t_0)}{\sigma_w} \right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_w^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$\text{Attention : } E_b = P_x T_b = \frac{P_{x_e}}{2} T_b = \frac{1}{2} \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b = \frac{\sigma_a^2}{2 \log_2(M)} g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

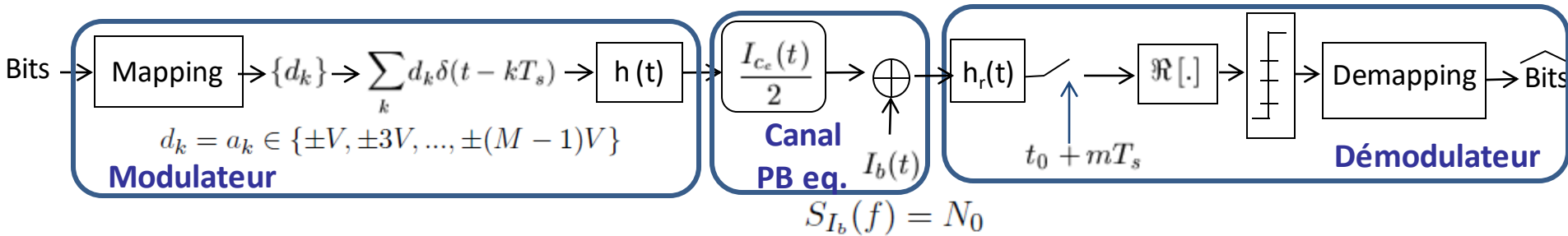
$$(\text{Forme d'onde à l'entrée du récepteur : } h_e(t) = h(t) * \frac{h_{c_e}(t)}{2} \xrightarrow{TF} H_e(f))$$

(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

# Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

## Performances des modulations sur porteuse

### Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-ASK**



$$TES = TES_I = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left( \frac{Vg(t_0)}{\sigma_w} \right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_w^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$\text{Attention : } E_b = P_x T_b = \frac{P_{x_e}}{2} T_b = \frac{1}{2} \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b = \frac{\sigma_a^2}{2 \log_2(M)} g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$(\text{Forme d'onde à l'entrée du récepteur : } h_e(t) = h(t) * \frac{h_{ce}(t)}{2} \xrightarrow{TF} H_e(f))$$

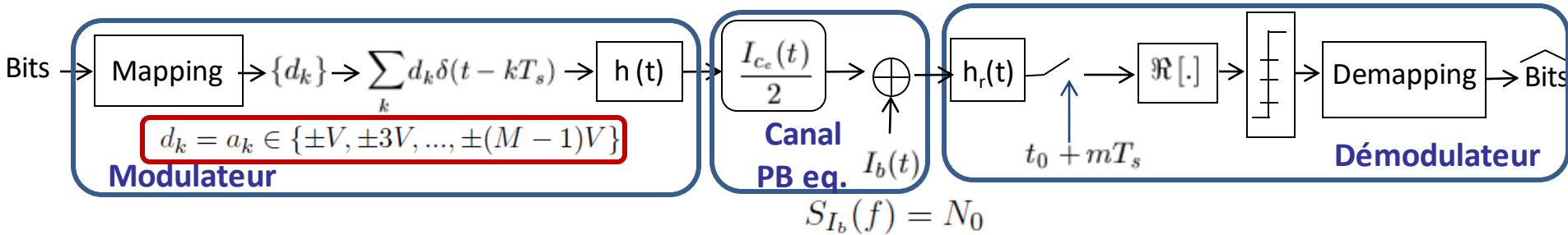
(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

$$\sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] = 2 \times \frac{V^2}{M} \times \{1^2 + (3)^2 + \dots + (M-1)^2\} = 2 \times \frac{V^2}{M} \frac{M(M^2-1)}{6} = \frac{V^2(M^2-1)}{3}$$

# Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

## Performances des modulations sur porteuse

### Chaine passe-bas équivalente à la modulation M-ASK



$$TES = TES_I = 2 \left( 1 - \frac{1}{M} \right) Q \left( \frac{V g(t_0)}{\sigma_w} \right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_w^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$\text{Attention : } E_b = P_x T_b = \frac{P_{x_e}}{2} T_b = \frac{1}{2} \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b = \frac{\sigma_a^2}{2 \log_2(M)} g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$(\text{Forme d'onde à l'entrée du récepteur : } h_e(t) = h(t) * \frac{h_{c_e}(t)}{2} \xrightarrow{TF} H_e(f))$$

(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

$$\sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] = 2 \times \frac{V^2}{M} \times \{1^2 + (3)^2 + \dots + (M-1)^2\} = 2 \times \frac{V^2}{M} \frac{M(M^2-1)}{6} = \frac{V^2(M^2-1)}{3}$$

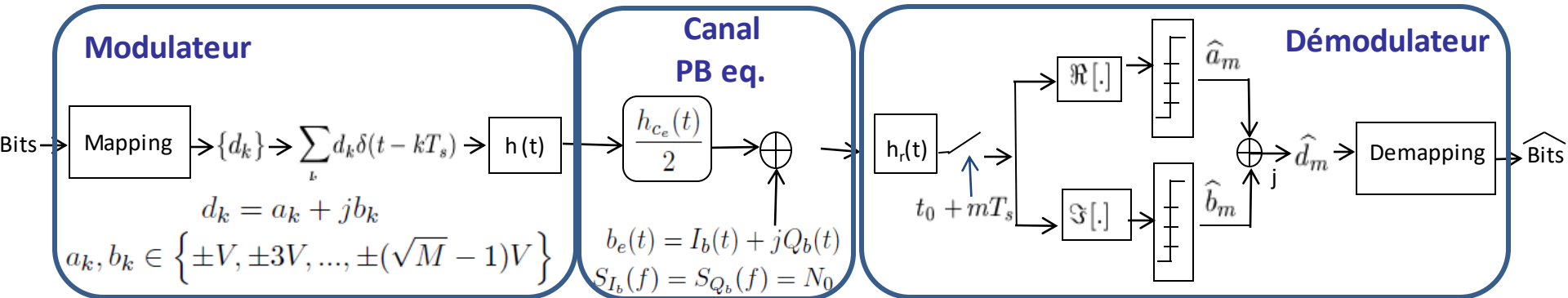


$$TES = TES_I = 2 \left( 1 - \frac{1}{M} \right) Q \left( \sqrt{\frac{6 \log_2(M) E_b}{M^2 - 1 N_0}} \right)$$

# Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

## Performances des modulations sur porteuse

Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-QAM** (carrée,  $M > 2$ )



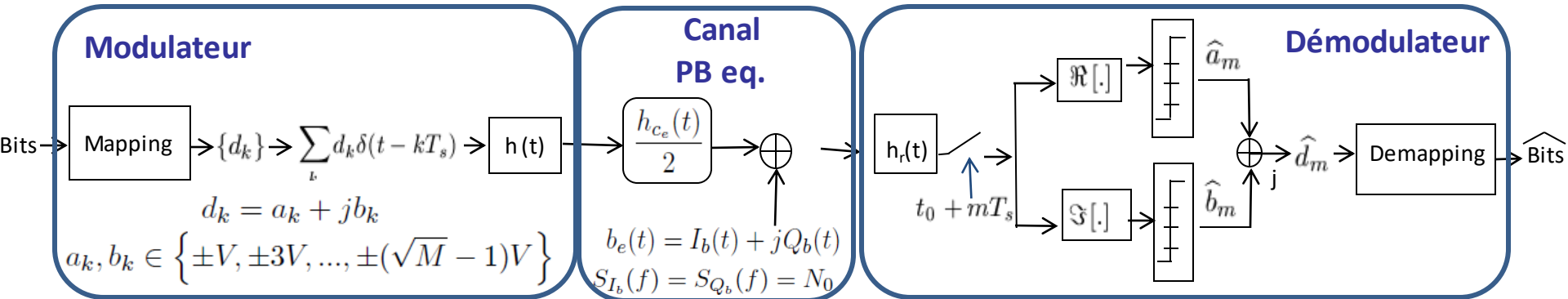
$$TES = TES_I + TES_Q - TES_I TES_Q$$

$$TES \simeq 2TES_I = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_{w_I}}\right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

# Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

## Performances des modulations sur porteuse

### Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-QAM** (carrée, $M > 2$ )



$$TES = TES_I + TES_Q - TES_I TES_Q$$

$$TES \simeq 2TES_I = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_{w_I}}\right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_{w_I}^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$\text{Attention : } E_b = P_x T_b = \frac{P_{x_e}}{2} T_b = \frac{1}{2} \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b = \frac{2\sigma_a^2}{2 \log_2(M)} g(t_0) = \frac{\sigma_a^2}{\log_2(M)} g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

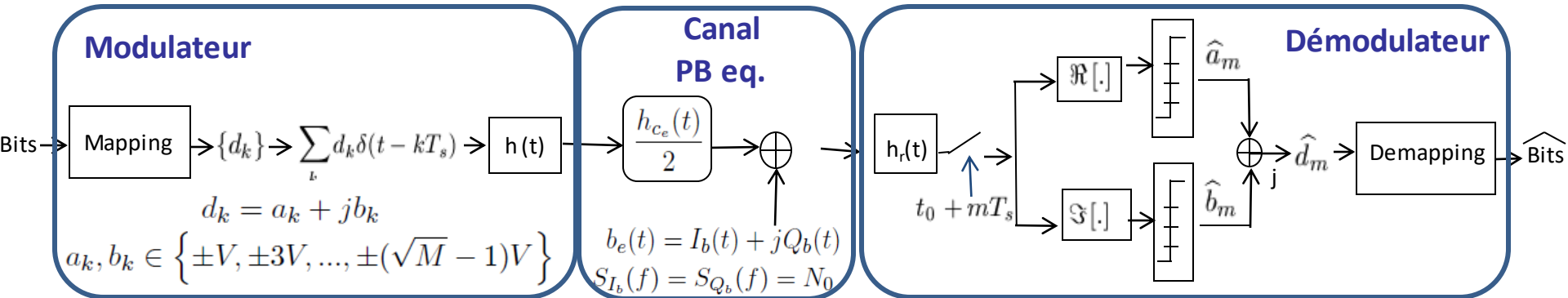
$$(\text{Forme d'onde à l'entrée du récepteur : } h_e(t) = h(t) * \frac{h_{ce}(t)}{2} \xrightarrow{TF} H_e(f))$$

(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

# Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

## Performances des modulations sur porteuse

### Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-QAM** (carrée, $M > 2$ )



$$TES = TES_I + TES_Q - TES_I TES_Q$$

$$TES \simeq 2TES_I = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_{w_I}}\right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_{w_I}^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$\text{Attention : } E_b = P_x T_b = \frac{P_{x_e}}{2} T_b = \frac{1}{2} \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b = \frac{2\sigma_a^2}{2 \log_2(M)} g(t_0) = \frac{\sigma_a^2}{\log_2(M)} g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$(\text{Forme d'onde à l'entrée du récepteur : } h_e(t) = h(t) * \frac{h_{ce}(t)}{2} \xrightarrow{TF} H_e(f))$$

(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

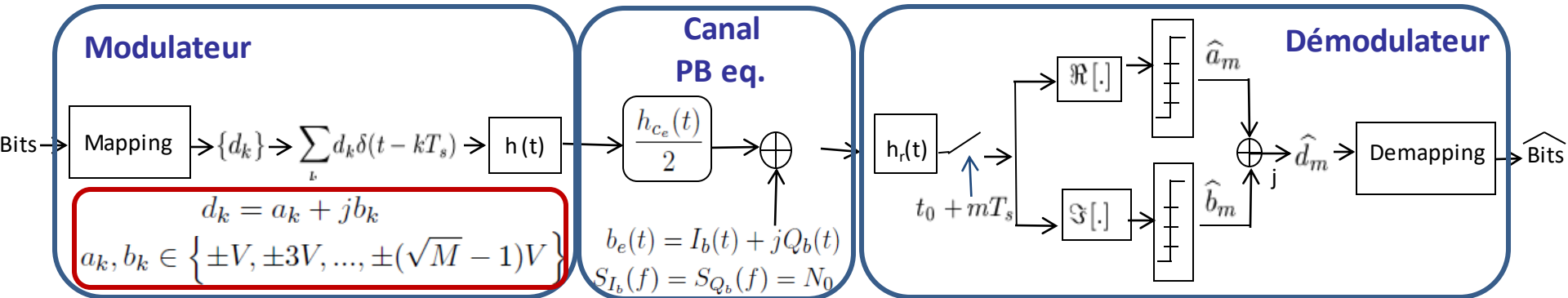
$$\sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] = 2 \times \frac{V^2}{\sqrt{M}} \times \{1^2 + (3)^2 + \dots + (\sqrt{M} - 1)^2\} = 2 \times \frac{V^2}{\sqrt{M}} \frac{\sqrt{M}(\sqrt{M}^2 - 1)}{6} = \frac{V^2(M - 1)}{3}$$



# Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

## Performances des modulations sur porteuse

### Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-QAM** (carrée, $M > 2$ )



$$TES = TES_I + TES_Q - TES_I TES_Q$$

$$TES \simeq 2TES_I = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_{w_I}}\right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_{w_I}^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

Attention :  $E_b = P_x T_b = \frac{P_{x_e} T_b}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b = \frac{2\sigma_a^2}{2 \log_2(M)} g(t_0) = \frac{\sigma_a^2}{\log_2(M)} g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$

(Forme d'onde à l'entrée du récepteur :  $h_e(t) = h(t) * \frac{h_{ce}(t)}{2} \xrightarrow{TF} H_e(f)$ )

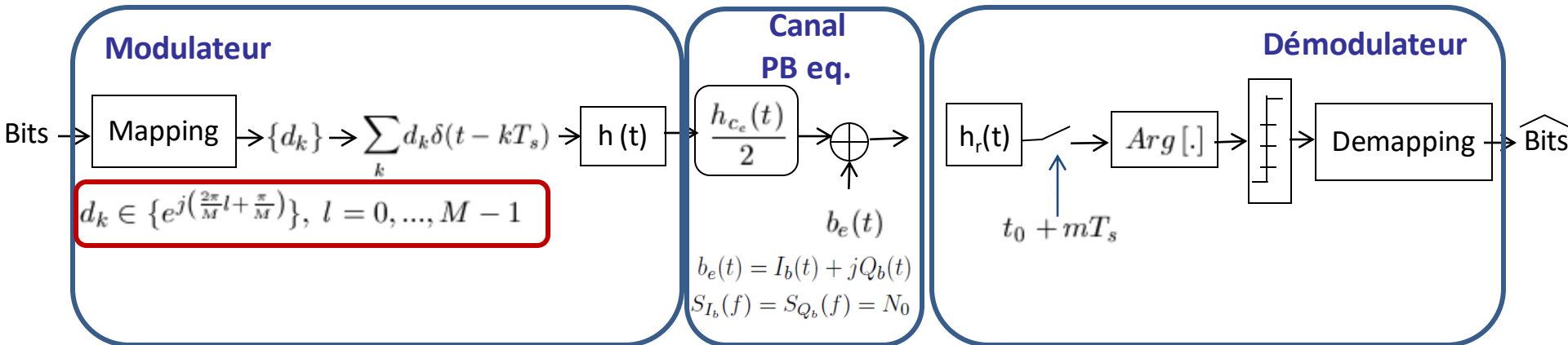
(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

$$TES \simeq 2TES_I = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{E_s}{N_0}}\right) = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

# Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

## Performances des modulations sur porteuse

### Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-PSK**



$$TES = 2Q \left( \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \left( \frac{\pi}{M} \right) \right)$$

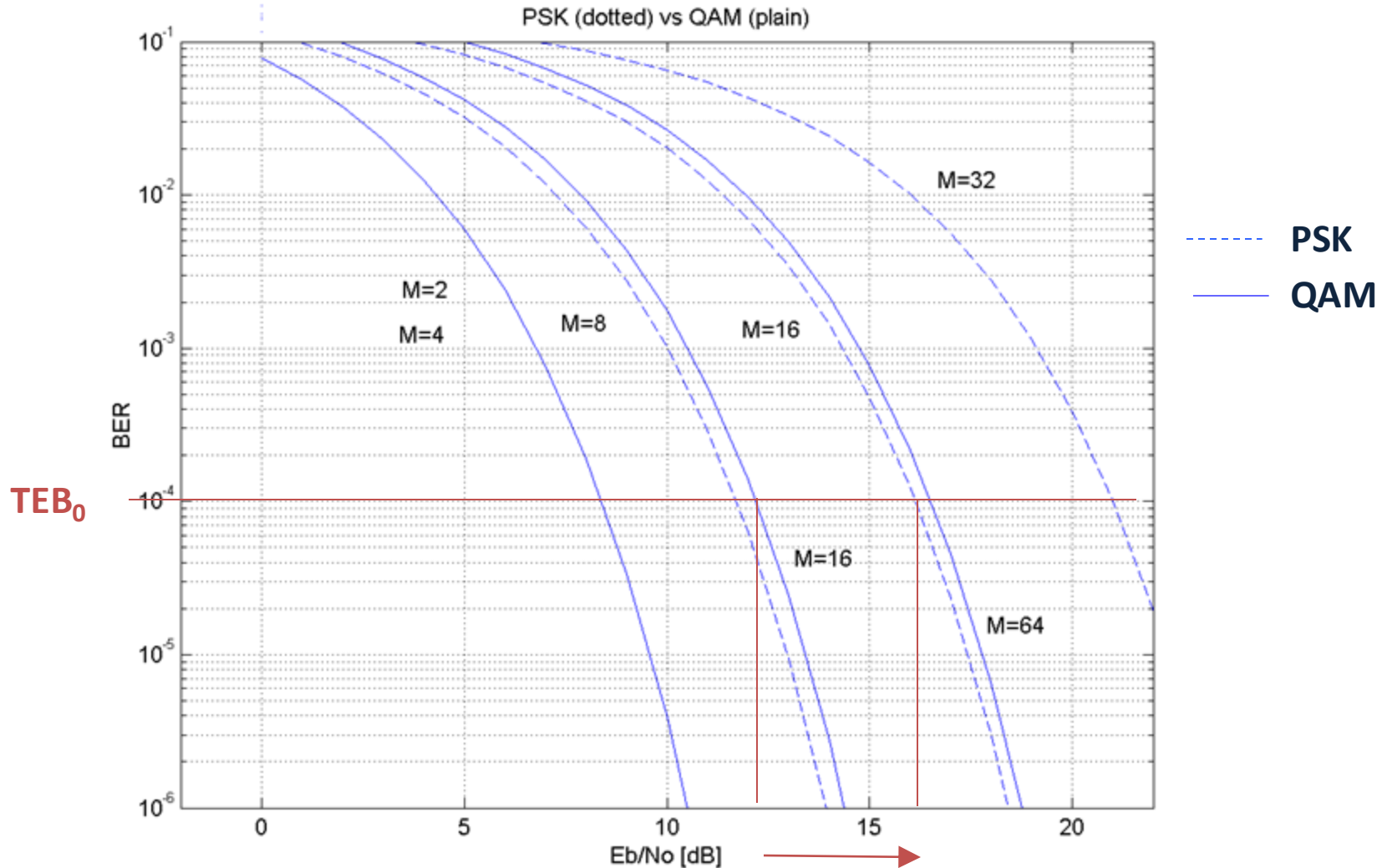
(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

(Critère de Nyquist + Filtrage adapté)

# Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

## Performances des modulations sur porteuse

### Comparaison PSK/QAM en termes d'efficacité en puissance



Pour un ordre  $M$  donné :

↘ efficacité en puissance pour PSK  
Même efficacité spectrale