



## Examen Calcul Scientifique

Durée : 1 heure

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique définie positive et  $b \in \mathbb{R}^n$ . On cherche à résoudre le système  $Ax = b$  avec la méthode itérative suivante :

---

### Algorithm 1

---

```
1: Set the initial guess  $x_0$ 
2:  $r_0 = b - Ax_0$ ;  $\beta = \|r_0\|_2$ 
3:  $v_1 = r_0 / \|r_0\|_2$ ;
4: for  $j = 1, 2, \dots, m$  do
5:    $w_j = Av_j$ 
6:   for  $i = 1, \dots, j$  do
7:      $h_{i,j} = v_i^T w_j$ 
8:      $w_j = w_j - h_{i,j} v_i$ 
9:   end for
10:   $h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$ 
11:  if  $h_{j+1,j} = 0$  then
12:     $m = j$ 
13:    goto 16
14:  end if
15:   $v_{j+1} = w_j / h_{j+1,j}$ 
16: end for
17:  $y_m = H_m^{-1}(\beta e_1)$  and  $x_m = x_0 + V_m y_m$ 
```

---

avec  $e_1$  le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ , et  $m \in \mathbb{N}^*$ .

On s'intéresse à la boucle définie par les équations 4 à 16 de l'algorithme.

- 1- Quel processus traduisent les lignes 5 à 10 et la ligne 15 ?
- 2- Soit l'itération  $j \in \mathbb{N}^*$ . Quelle est la complexité calcul (nombre d'opérations en virgule flottante) associée aux instructions définies dans les équations 5 à 9 ?

Dans toute la suite, on suppose que le test d'arrêt s'est activé à l'itération  $m$ .

- 3- Quel est la complexité calcul associée à cette boucle avec  $m$  itérations ?

On s'intéresse aux étapes de résolution décrites à la ligne 17.

- 4- Quelle est la structure de la matrice  $H_m \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  contenant les valeurs  $(h_{i,j})$  ?
- 5- Proposez un algorithme pour la résolution du système  $H_m y_m = \beta e_1$ . Vous justifierez votre choix. Quelle est la complexité calcul pour la résolution de ce système ?
- 6- Quelle propriété vérifient les colonnes de la matrice  $V_m = [v_1, \dots, v_m]$  ?
- 7- On suppose que l'algorithme converge théoriquement en au plus  $n$  itérations. Quel comportement pouvez-vous anticiper en pratique ? Quels sont les avantages et inconvénients de cet algorithme par rapport à celui du gradient conjugué ?