Introduction aux télécommunications

Département sciences du numérique
Première année

Séquence 3
Le bruit dans la chaine de transmission

1- Filtrage adapté,
2- Règle de décision,
3- Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
4- Notion d'efficacité en puissance de la transmission.

Nathalie Thomas, IRIT/ENSEEIHT
Nathalie.Thomas@enseeiht.fr

Introduction aux télécommunications

Département sciences du numérique
Première année

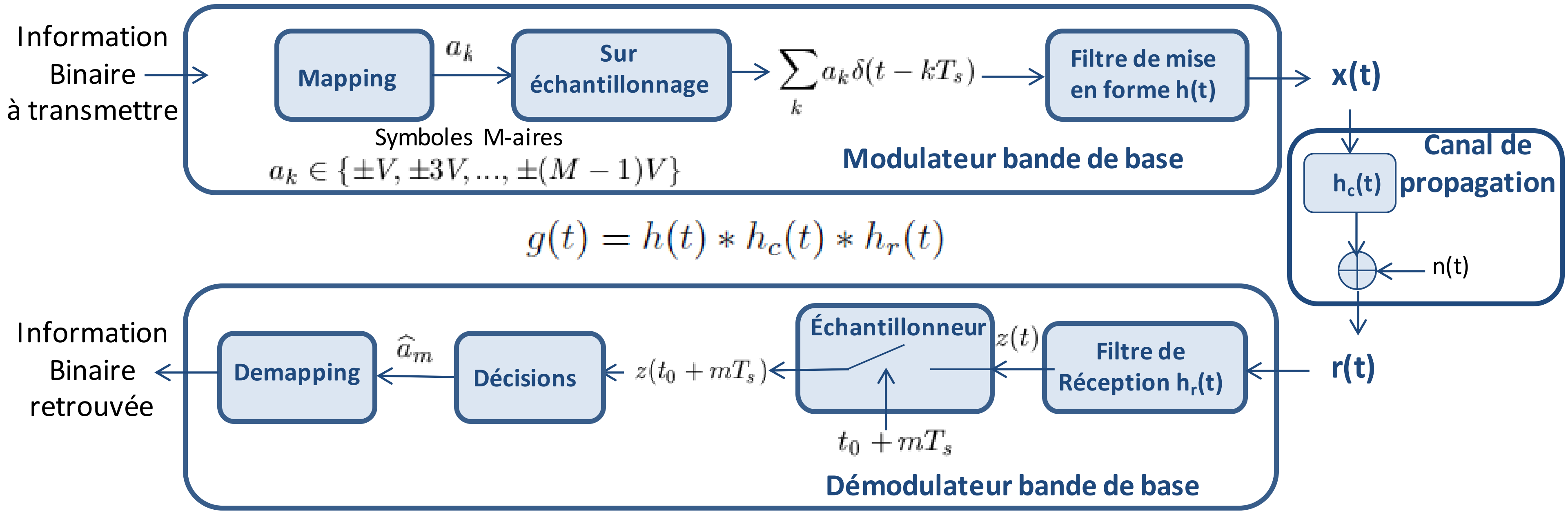
Séquence 3
Le bruit dans la chaine de transmission

1- Filtrage adapté,
2- Règle de décision,
3- Taux d’erreur symbole et taux d’erreur binaire,
4- Notion d'efficacité en puissance de la transmission.

Nathalie Thomas, IRIT/ENSEEIHT
Nathalie.Thomas@enseeiht.fr

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté



<u>Quand le critère de Nyquist est vérifié :</u>

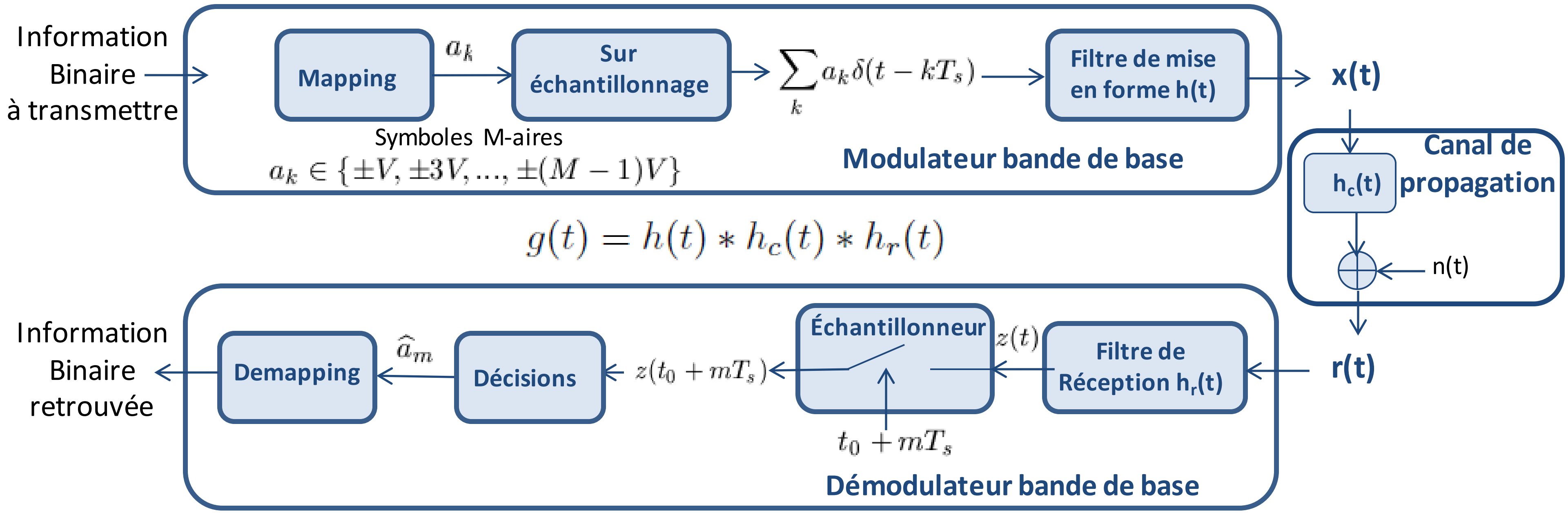
$$z(t_0+mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0+mT_s)$$

Terme utile

Bruit
(filtré et échantillonné)
Gaussien, puissance σ_w^2

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté



$$g(t) = h(t) * h_c(t) * h_r(t)$$

Quand le critère de Nyquist est vérifié :

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

Terme utile

Bruit
(filtré et échantillonné)
Gaussien, puissance σ_w^2

➡ Rapport signal sur bruit aux instants de décision :

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \, |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \left|g(t_0)\right|^2}{\sigma_w^2}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \, |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \Leftrightarrow \text{ Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \left|g(t_0)\right|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \Leftrightarrow \text{ Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f)e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f)df}} = \frac{\left|\int_R H(f)H_c(f)H_r(f)e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_R \left|H_r(f)\right|^2 df}} \le \frac{\left\{\int_R \left|H(f)H_c(f)\right| df\right\}^{1/2} \left\{\int_R \left|H_r(f)\right|^2 df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2}\int_R \left|H_r(f)\right|^2 df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \, |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \; \Leftrightarrow \; \text{Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f) df}} = \frac{\left|\int_R H(f) H_c(f) H_r(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 \, df}} \leq \frac{\left\{\int_R |H(f) H_c(f)| \, df\right\}^{1/2} \left\{\int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :

$$H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

avec : $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f) H_c(f) \end{cases}$

(Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\int_{-\infty}^{\infty} a(f) b^*(f) df\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} a(f) a^*(f) df \int_{-\infty}^{\infty} b(f) b^*(f) df$, égalité pour $a(f) = \lambda b(f)$)

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \, |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \;\Leftrightarrow\; \text{Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f) df}} = \frac{\left|\int_R H(f) H_c(f) H_r(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 \, df}} \le \frac{\left\{\int_R |H(f) H_c(f)| \, df\right\}^{1/2} \left\{\int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

<u>Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :</u>

$$\boxed{H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0}}$$

avec : $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f) H_c(f) \end{cases}$

$$\boxed{H_e(f) = H(f) H_c(f) \xrightarrow{TF^{-1}} h_e(t) = h(t) * h_c(t)}$$

Forme d'onde reçue

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \Leftrightarrow \text{Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f)e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f)df}} = \frac{\left|\int_R H(f)H_c(f)H_r(f)e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 df}} \leq \frac{\left\{\int_R |H(f)H_c(f)| df\right\}^{1/2}\left\{\int_R |H_r(f)|^2 df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

<u>Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :</u>

$$H_r(f) = \lambda H_e^*(f)e^{-j2\pi f t_0} \xrightarrow{TF^{-1}} \boxed{h_r(t) = \lambda h_e^*(t_0 - t)}$$

avec : $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f)H_c(f) \end{cases}$

Forme d'onde reçue

$$\boxed{H_e(f) = H(f)H_c(f) \xrightarrow{TF^{-1}} h_e(t) = h(t) * h_c(t)}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \, |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \;\Leftrightarrow\; \text{Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f) df}} = \frac{\left|\int_R H(f) H_c(f) H_r(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 \, df}} \underset{\uparrow}{\leq} \frac{\left\{\int_R |H(f) H_c(f)| \, df\right\}^{1/2} \left\{\int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

<u>Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :</u>

$$H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0} \xrightarrow{TF^{-1}} \boxed{h_r(t) = \lambda h_e^*(\underbrace{t_0}_{\text{puis décalée (causalité)}} \overbrace{- t}^{h_e(t) \text{ retournée}})}$$

avec : $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f) H_c(f) \end{cases}$

Forme d'onde reçue

$$\boxed{H_e(f) = H(f) H_c(f) \xrightarrow{TF^{-1}} h_e(t) = h(t) * h_c(t)}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \, |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \;\Leftrightarrow\; \text{Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f) df}} = \frac{\left|\int_R H(f) H_c(f) H_r(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 \, df}} \leq \frac{\left\{\int_R |H(f) H_c(f)| \, df\right\}^{1/2} \left\{\int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :

Filtre adapté

$$H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0} \xrightarrow{TF^{-1}} \boxed{h_r(t) = \lambda h_e^*(t_0 - t)}$$

avec : $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f) H_c(f) \end{cases}$

Forme d'onde reçue

$$\boxed{H_e(f) = H(f) H_c(f) \xrightarrow{TF^{-1}} h_e(t) = h(t) * h_c(t)}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0+mT_s)=a_m g(t_0)+w(t_0+mT_s)$$

$$SNR=\frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w}=\frac{\sigma_a^2\,|g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \;\Leftrightarrow\; \text{Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}=\frac{\left|\int_R G(f)e^{j2\pi f t_0}df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f)df}}=\frac{\left|\int_R H(f)H_c(f)H_r(f)e^{j2\pi f t_0}df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2\,df}}\leq\frac{\left\{\int_R |H(f)H_c(f)|\,df\right\}^{1/2}\left\{\int_R |H_r(f)|^2\,df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2\,df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

<u>Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :</u>

Filtre adapté

$$H_r(f)=\lambda H_e^*(f)e^{-j2\pi f t_0}\xrightarrow{TF^{-1}}\boxed{h_r(t)=\lambda h_e^*(t_0-t)}$$

avec : $\begin{cases}\lambda\in\mathbb{R}^* \\ H_e(f)=H(f)H_c(f)\end{cases}$

Forme d'onde reçue

$$\boxed{H_e(f)=H(f)H_c(f)\xrightarrow{TF^{-1}}h_e(t)=h(t)*h_c(t)}$$

Adapté à la forme d'onde reçue

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \left|g(t_0)\right|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \Leftrightarrow \text{ Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

Maximise le SNR aux instants optimaux d'échantillonnage

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f) df}} = \frac{\left|\int_R H(f) H_c(f) H_r(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 df}} \le \frac{\left\{\int_R |H(f)H_c(f)|\, df\right\}^{1/2} \left\{\int_R |H_r(f)|^2 df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

<u>Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :</u>

Filtre adapté

$$H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0} \xrightarrow{TF^{-1}} \boxed{h_r(t) = \lambda h_e^*(t_0 - t)}$$

avec : $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f)H_c(f) \end{cases}$

Forme d'onde reçue

$$\boxed{H_e(f) = H(f)H_c(f) \xrightarrow{TF^{-1}} h_e(t) = h(t) * h_c(t)}$$

Adapté à la forme d'onde reçue

Introduction aux télécommunications

Département sciences du numérique
Première année

Séquence 3

Le bruit dans la chaine de transmission

1- Filtrage adapté,
2- Règle de décision,
3- Taux d’erreur symbole et taux d’erreur binaire,
4- Notion d'efficacité en puissance de la transmission.

Nathalie Thomas, IRIT/ENSEEIHT
Nathalie.Thomas@enseeiht.fr

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Règle de décision

Terme d'intérêt

Terme de bruit
Échantillon de bruit filtré : w_m

$$z(t_0+mT_s) = a_m g(t_0) + \underbrace{\cancel{\sum_{k\neq m} a_k g(t_0+(m-k)T_s)}}_{\substack{\textbf{Interferences entre symboles} \\ \textbf{= 0 si critère de Nyquist respecté}}} + w(t_0+mT_s) \longrightarrow \boxed{\text{Décisions}} \longrightarrow \widehat{a}_m$$

$\longrightarrow$ Règle de décision du **Maximum A Posteriori** : $\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} P\left(\widetilde{a}_m | z_m\right)$

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Règle de décision

Terme d'intérêt

Terme de bruit
Échantillon de bruit filtré : w_m

$$z(t_0+mT_s) = a_m g(t_0) + \underbrace{\cancel{\sum_{k\neq m} a_k g(t_0+(m-k)T_s)}}_{} + w(t_0+mT_s) \longrightarrow \boxed{\text{Décisions}} \longrightarrow \widehat{a}_m$$

Interferences entre symboles
= 0 si critère de Nyquist respecté

→ Règle de décision du **Maximum A Posteriori** : $\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} P\left(\widetilde{a}_m | z_m\right)$

=> Règle de décision du **Maximum de vraissemblance** (symboles équiprobables) :

$$\boxed{\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} p\left(z_m | \widetilde{a}_m\right)}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Règle de décision

Critère de Nyquist respecté : $z(t_0 + mT_s) \equiv z_m = a_m g(t_0) + \underbrace{w_m}_{\sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)} \longrightarrow \boxed{\text{Décisions}} \longrightarrow \widehat{a}_m$

Règle de décision du **Maximum de vraissemblance** (symboles équiprobables)

$$\boxed{\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} p\left(z_m | \widetilde{a}_m\right)}$$

avec

$$p(z_m|\widetilde{a}_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{(z_m - \widetilde{a}_m g(t_0))^2}{2\sigma_w^2}\right)$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Règle de décision

Critère de Nyquist respecté : $z(t_0 + mT_s) \equiv z_m = a_m g(t_0) + w_m \longrightarrow$ Décisions $\longrightarrow \widehat{a}_m$

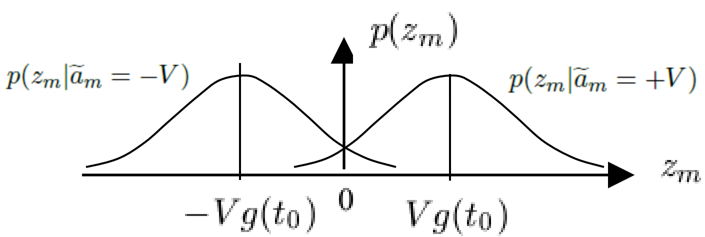
Règle de décision du **Maximum de vraissemblance** (symboles équiprobables)

$$\boxed{\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} p\left(z_m | \widetilde{a}_m\right)}$$

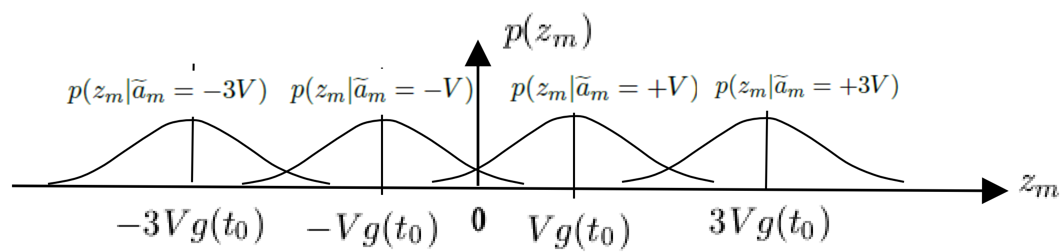
avec

$$p(z_m|\widetilde{a}_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{\left(z_m - \widetilde{a}_m g(t_0)\right)^2}{2\sigma_w^2}\right)$$

<u>Cas binaire :</u> $\widetilde{a}_m \in \{\pm V\}$



<u>Cas 4-aire :</u> $\widetilde{a}_m \in \{\pm V, \pm 3V\}$



Impact du bruit dans la chaine de transmission

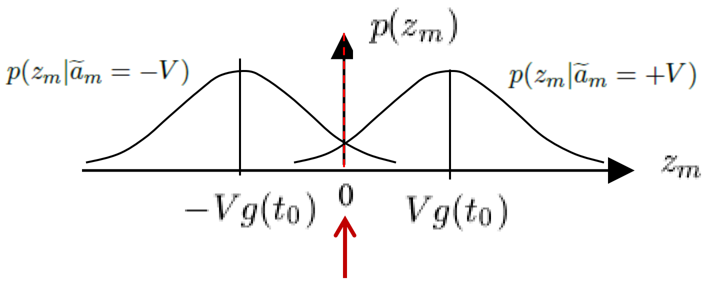
Règle de décision

Critère de Nyquist respecté : $z(t_0 + mT_s) \equiv z_m = a_m g(t_0) + w_m \longrightarrow$ **Décisions** $\longrightarrow \widehat{a}_m$

Règle de décision du **Maximum de vraissemblance** (symboles équiprobables)

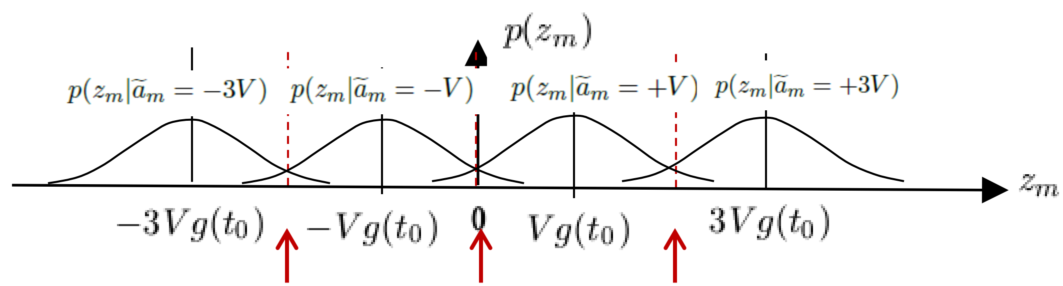
$$\boxed{\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} p\left(z_m | \widetilde{a}_m\right)} \quad \text{avec} \quad p(z_m|\widetilde{a}_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{\left(z_m - \widetilde{a}_m g(t_0)\right)^2}{2\sigma_w^2}\right)$$

<u>Cas binaire :</u> $\widetilde{a}_m \in \{\pm V\}$



$$Regle\ de\ decision \Longrightarrow \begin{cases} z_m \geq 0 : \widehat{a}_m = +V \\ z_m < 0 : \widehat{a}_m = -V \end{cases}$$

<u>Cas 4-aire :</u> $\widetilde{a}_m \in \{\pm V, \pm 3V\}$



$$Regle\ de\ decision \Longrightarrow \begin{cases} z_m \leq -2Vg(t_0) : \widehat{a}_m = -3V \\ -2Vg(t_0) < z_m \leq 0 : \widehat{a}_m = -V \\ 0 < z_m \leq 2Vg(t_0) : \widehat{a}_m = +V \\ z_m \geq 2Vg(t_0) : \widehat{a}_m = +3V \end{cases}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Règle de décision

Critère de Nyquist respecté : $z(t_0 + mT_s) \equiv z_m = a_m g(t_0) + w_m \longrightarrow$ Décisions $\longrightarrow \widehat{a}_m$

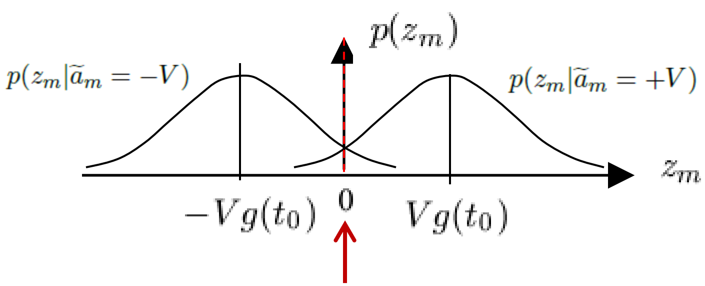
Règle de décision du **Maximum de vraissemblance** (symboles équiprobables)

$$\boxed{\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} p\left(z_m | \widetilde{a}_m\right)}$$

avec

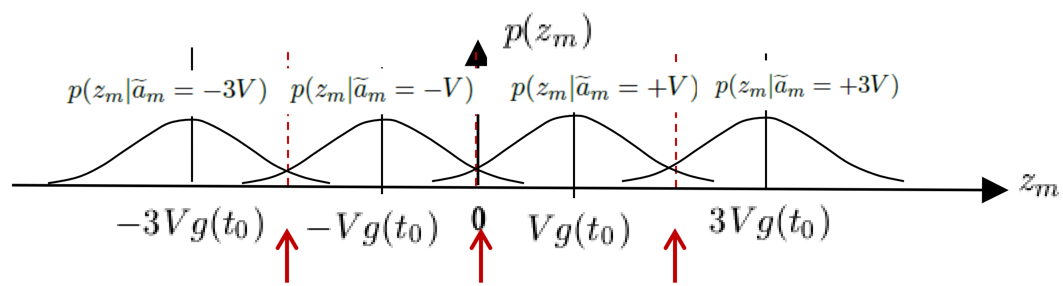
$$p(z_m|\widetilde{a}_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{\left(z_m - \widetilde{a}_m g(t_0)\right)^2}{2\sigma_w^2}\right)$$

<u>Cas binaire :</u> $\widetilde{a}_m \in \{\pm V\}$

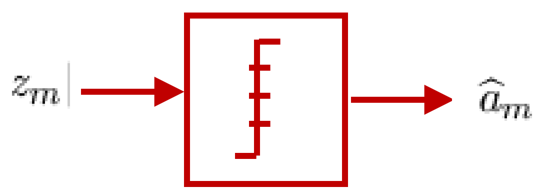


$$Regle\ de\ decision \Longrightarrow \begin{cases} z_m \geq 0 : \widehat{a}_m = +V \\ z_m < 0 : \widehat{a}_m = -V \end{cases}$$

<u>Cas 4-aire :</u> $\widetilde{a}_m \in \{\pm V, \pm 3V\}$



$$Regle\ de\ decision \Longrightarrow \begin{cases} z_m \leq -2Vg(t_0) : \widehat{a}_m = -3V \\ -2Vg(t_0) < z_m \leq 0 : \widehat{a}_m = -V \\ 0 < z_m \leq 2Vg(t_0) : \widehat{a}_m = +V \\ z_m \geq 2Vg(t_0) : \widehat{a}_m = +3V \end{cases}$$



Détecteur à seuil (Threshold detector or slicer)

Introduction aux télécommunications

Département sciences du numérique
Première année

Séquence 3
Le bruit dans la chaine de transmission

1- Filtrage adapté,
2- Règle de décision,
3- Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
4- Notion d'efficacité en puissance de la transmission.

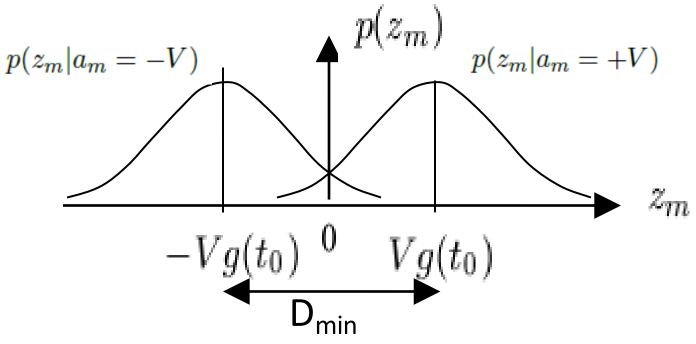
Nathalie Thomas, IRIT/ENSEEIHT
Nathalie.Thomas@enseeiht.fr

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Taux d'erreur symbole (TES)

$\longrightarrow$ Cas binaire : $a_m \in \{\pm V\}$, équiprobables

$\longrightarrow$ Nyquist respecté et seuil de decision en 0

$$\begin{cases} z_m = a_m g(t_0) + w_m \\ w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2) \end{cases}$$



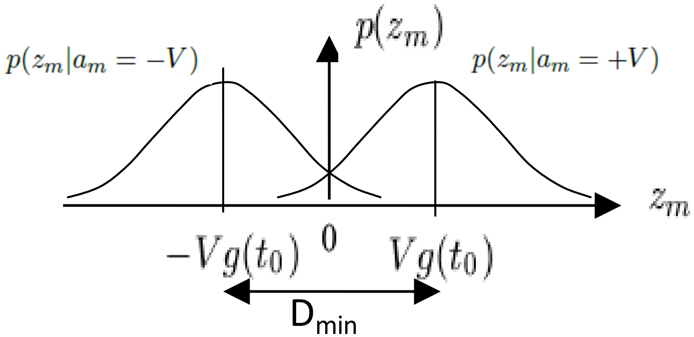
Impact du bruit dans la chaine de transmission

Taux d’erreur symbole (TES)

→ <u>Cas binaire :</u> $a_m \in \{\pm V\}$, équiprobables

→ Nyquist respecté et seuil de decision en 0

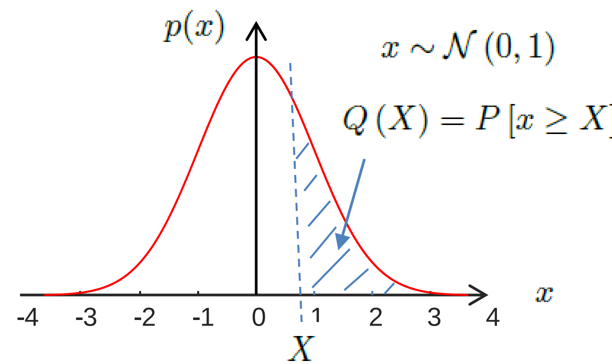
$$\begin{cases} z_m = a_m g(t_0) + w_m \\ w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2) \end{cases}$$



$$\boxed{TES_{min} = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) = Q\left(\frac{D_{min}}{2\sigma_w}\right)}$$

$a_k \in \{\pm V\}$

Nyquist respecté, seuil de décision en 0

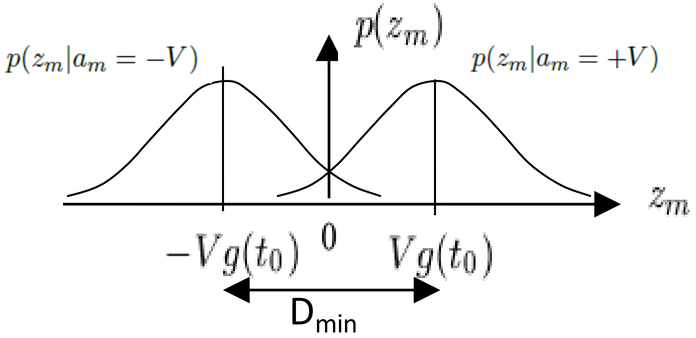


Impact du bruit dans la chaine de transmission
Taux d'erreur symbole (TES)

$\longrightarrow$ <u>Cas binaire :</u> $a_m \in \{\pm V\}$, équiprobables et indépendants

$\longrightarrow$ **Nyquist respecté** et seuil de decision en 0

$$\begin{cases} z_m = a_m g(t_0) + w_m \\ w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2) \end{cases}$$



$$\boxed{TES_{min} = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) = Q\left(\frac{D_{min}}{2\sigma_w}\right)}$$

$a_k \in \{\pm V\}$

Nyquist respecté, seuil de décision en 0

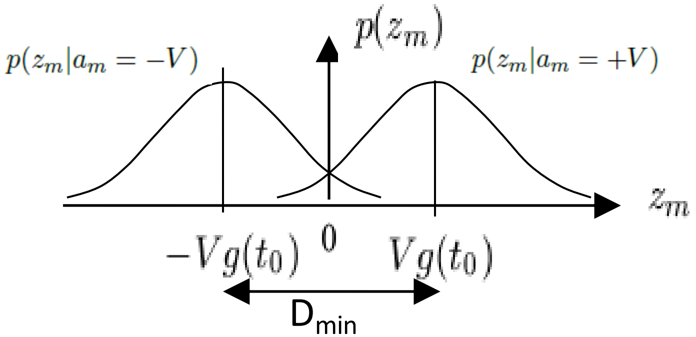
$\longrightarrow$ **Nyquist respecté**, seuil de decision en 0 **et filtrage adapté**

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Taux d'erreur symbole (TES)

$\longrightarrow$ <u>Cas binaire :</u> $a_m \in \{\pm V\}$, équiprobables et indépendants

$\longrightarrow$ **Nyquist respecté** et seuil de decision en 0

$$\begin{cases} z_m = a_m g(t_0) + w_m \\ w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2) \end{cases}$$



$$\boxed{TES_{min} = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) = Q\left(\frac{D_{min}}{2\sigma_w}\right)}$$

$a_k \in \{\pm V\}$

Nyquist respecté, seuil de décision en 0

$\longrightarrow$ **Nyquist respecté**, seuil de decision en 0 **et filtrage adapté**

TES_{min} en fonction de $\dfrac{E_b}{N_0}$ (SNR par bit à l'entrée du récepteur) ?

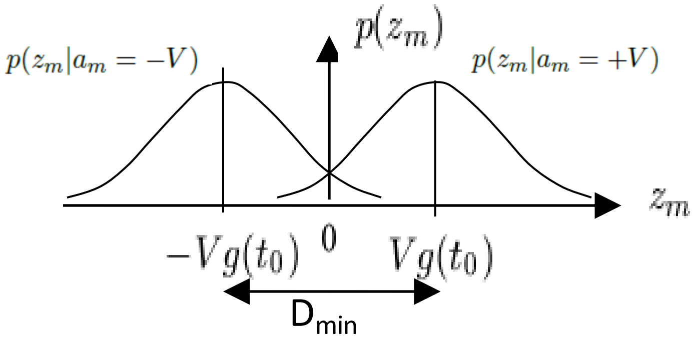
Impact du bruit dans la chaine de transmission

Taux d'erreur symbole (TES)

$\longrightarrow$ <u>Cas binaire :</u> $a_m \in \{\pm V\}$, équiprobables et indépendants

$\longrightarrow$ **Nyquist respecté** et seuil de decision en 0

$$\begin{cases} z_m = a_m g(t_0) + w_m \\ w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2) \end{cases}$$



$$\boxed{TES_{min} = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) = Q\left(\frac{D_{min}}{2\sigma_w}\right)}$$

$a_k \in \{\pm V\}$

Nyquist respecté, seuil de décision en 0

$\longrightarrow$ **Nyquist respecté**, seuil de decision en 0 **et filtrage adapté**

TES_{min} en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ (SNR par bit à l'entrée du récepteur) ?

Filtrage adapté : $H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$ ou $H_e(f) = \frac{1}{\lambda} H_r^*((f) e^{-j2\pi f t_0}$

=> $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f) = H_e(f)H_r(f) = \lambda \left|H_e(f)\right|^2 e^{-j2\pi f t_0} = \frac{1}{\lambda} \left|H_r(f)\right|^2 e^{-j2\pi f t_0}$

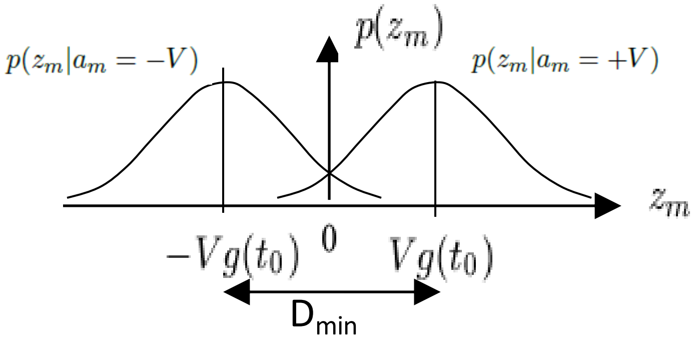
Impact du bruit dans la chaine de transmission

Taux d'erreur symbole (TES)

$\longrightarrow$ <u>Cas binaire :</u> $a_m \in \{\pm V\}$, équiprobables et indépendants

$\longrightarrow$ **Nyquist respecté** et seuil de decision en 0

$$\begin{cases} z_m = a_m g(t_0) + w_m \\ w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2) \end{cases}$$



$$\boxed{TES_{min} = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) = Q\left(\frac{D_{min}}{2\sigma_w}\right)}$$

$a_k \in \{\pm V\}$

Nyquist respecté, seuil de décision en 0

$\longrightarrow$ **Nyquist respecté**, seuil de decision en 0 **et filtrage adapté**

TES_{min} en fonction de $\dfrac{E_b}{N_0}$ (SNR par bit à l'entrée du récepteur) ?

Filtrage adapté : $H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$ ou $H_e(f) = \dfrac{1}{\lambda} H_r^*((f) e^{-j2\pi f t_0}$

=> $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f) = H_e(f)H_r(f) = \lambda \left|H_e(f)\right|^2 e^{-j2\pi f t_0} = \dfrac{1}{\lambda}\left|H_r(f)\right|^2 e^{-j2\pi f t_0}$

$$\boxed{TES_{min} = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

$a_k \in \{\pm V\}$

Nyquist respecté, seuil de décision en 0
Filtrage adapté

Taux d'erreur symbole (TES)

→ Cas M-aire : $a_m \in \{\pm V, \pm 3V, ..., \pm(M-1)V\}$, équiprobables et indépendants

→ **Nyquist respecté** et seuil de decision en 0

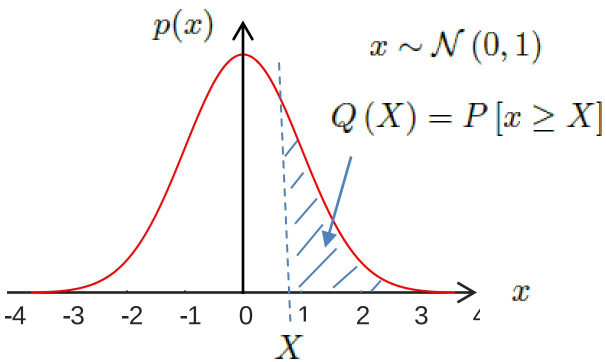
$$TES_{min} = 2\left(\frac{M-1}{M}\right) Q\left(\frac{V g(t_0)}{\sigma_w}\right)$$

→ **Nyquist respecté**, seuil de decision en 0 **et filtrage adapté**

$$\boxed{TES_{min} = 2\left(\frac{M-1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6 log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

$$a_m \in \{\pm V, \pm 3V, ..., \pm(M-1)V\}$$

Obtenu pour une modulation **M-PAM** (Bande de base), dans un **canal de Nyquist**, avec **filtrage adapté.**



Impact du bruit dans la chaine de transmission
Taux d'erreur binaire (TEB)

→ <u>Optimisation du mapping</u>

→ **Mapping en binaire « Naturel »**

bits	symboles
00	-3
01	-1
10	+1
11	+3

Proba erreur 1
>> Proba erreur 2

Une erreur symbole = 2 bits erronnés

<u>Exemple (voir TD, pour 4-PAM avec V=1, $N_0=10^{-3}\ V^2/Hz$, R_b=1kbps) :</u>

$$P\left(\widehat{a}_k = -V / a_k = -3V\right) = Q(2) - Q(6) = 0.0228$$
$$P\left(\widehat{a}_k = +V / a_k = -3V\right) = Q(6) - Q(10) = 9.87\ 10^{-10}$$
$$P\left(\widehat{a}_k = +3V / a_k = -3V\right) = Q(10) = 7.62\ 10^{-24}$$

→ **Mapping de Gray**

bits	symboles
00	-3
01	-1
11	+1
10	+3

Un symbole erronné = 1 bit erronné

Mapping de GRAY ➡ $TEB \approx \dfrac{TES}{\log_2(M)}$

$$\left(TEB = \frac{\text{Nbre de bits erronés}}{\text{Nbre de bits transmis}} \approx \frac{\text{Nbre symboles erronés}}{\text{Nbre symboles transmis x Nbre bits codés par symbole}}\right)$$

Introduction aux télécommunications

Département sciences du numérique
Première année

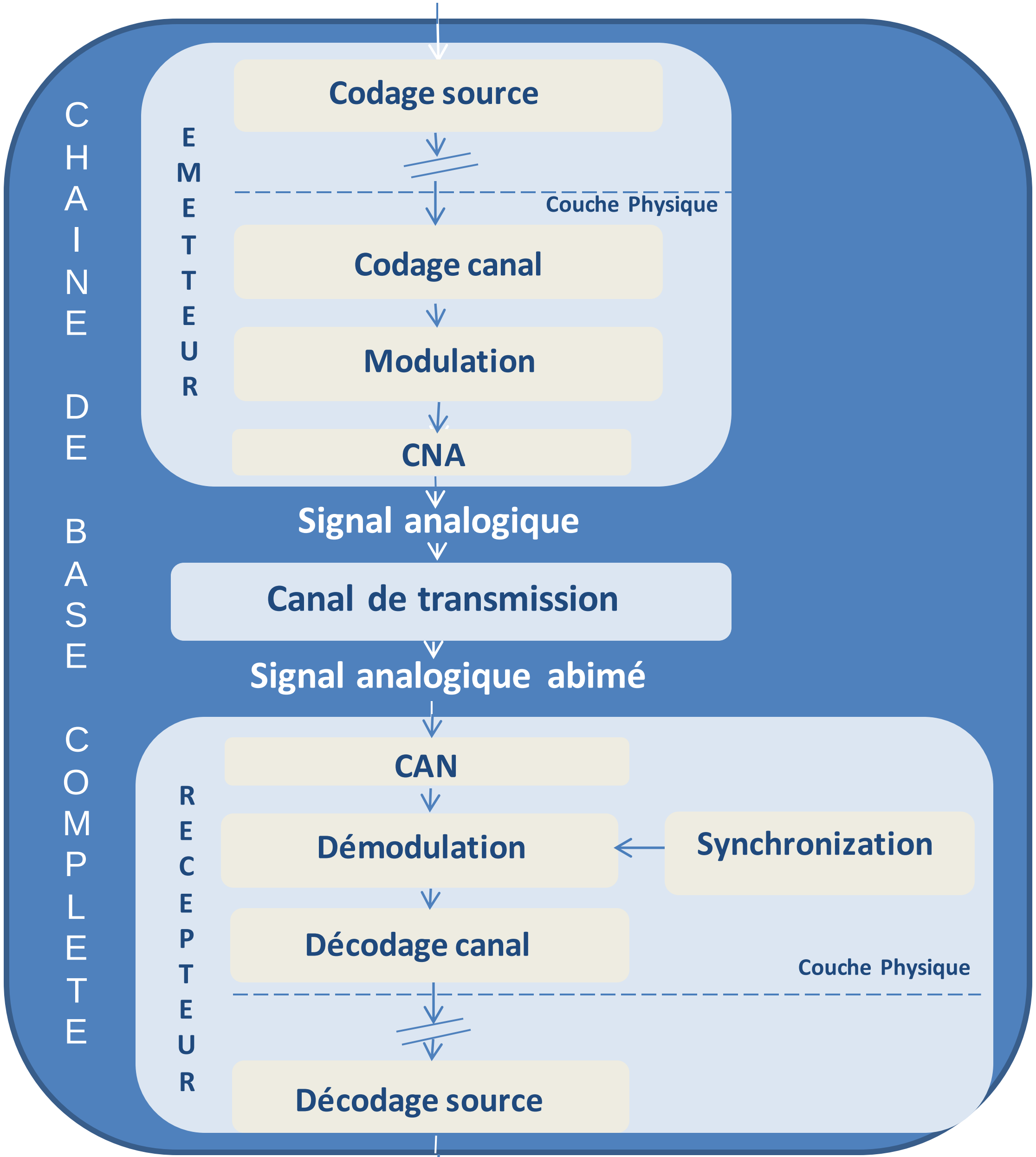
Séquence 3
Le bruit dans la chaine de transmission

1- Filtrage adapté,
2- Règle de décision,
3- Taux d’erreur symbole et taux d’erreur binaire,
4- Notion d'efficacité en puissance de la transmission.

Nathalie Thomas, IRIT/ENSEEIHT
Nathalie.Thomas@enseeiht.fr

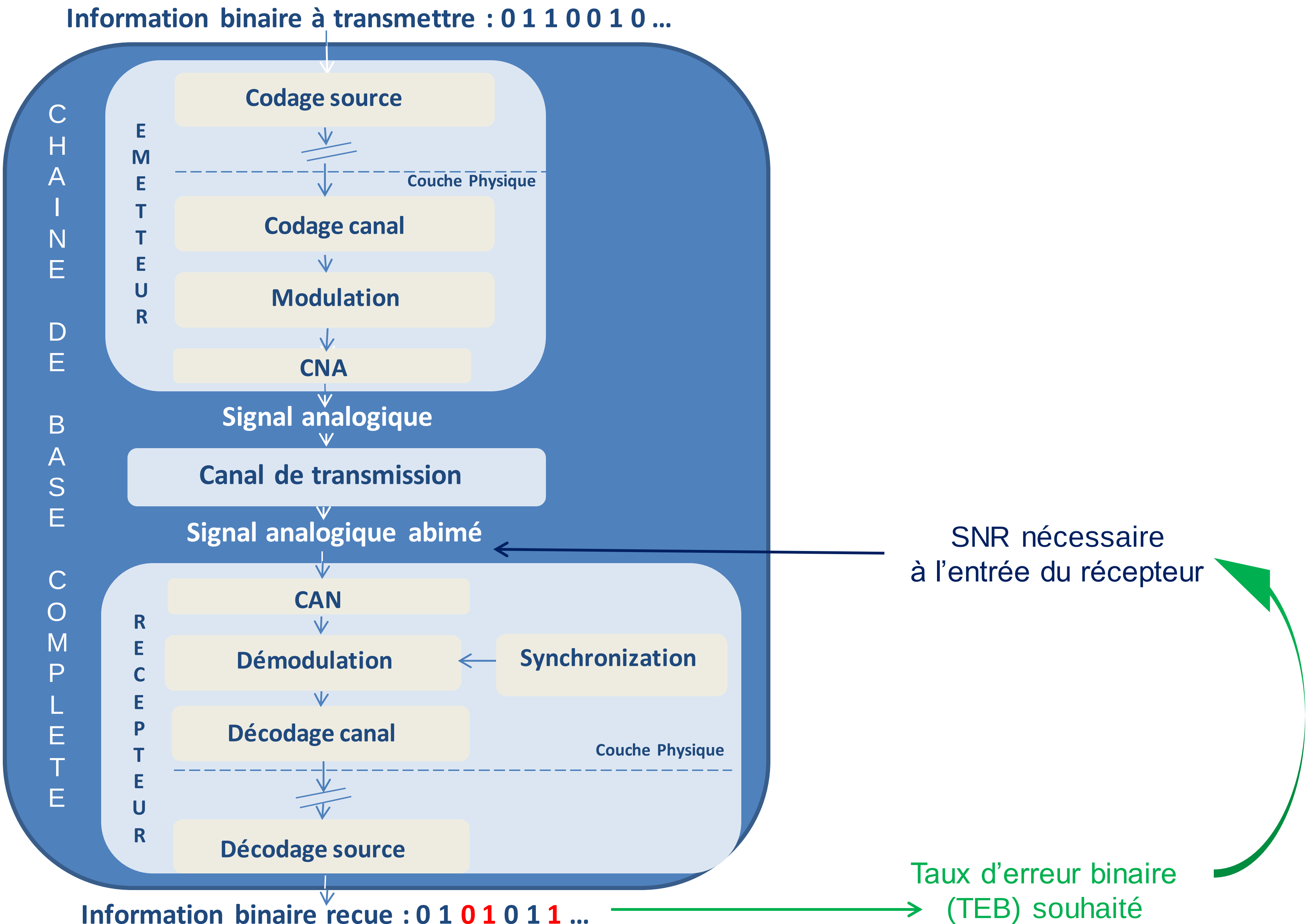
Chaine de communication numérique : **Efficacité en puissance**

Information binaire à transmettre : 0 1 1 0 0 1 0 …

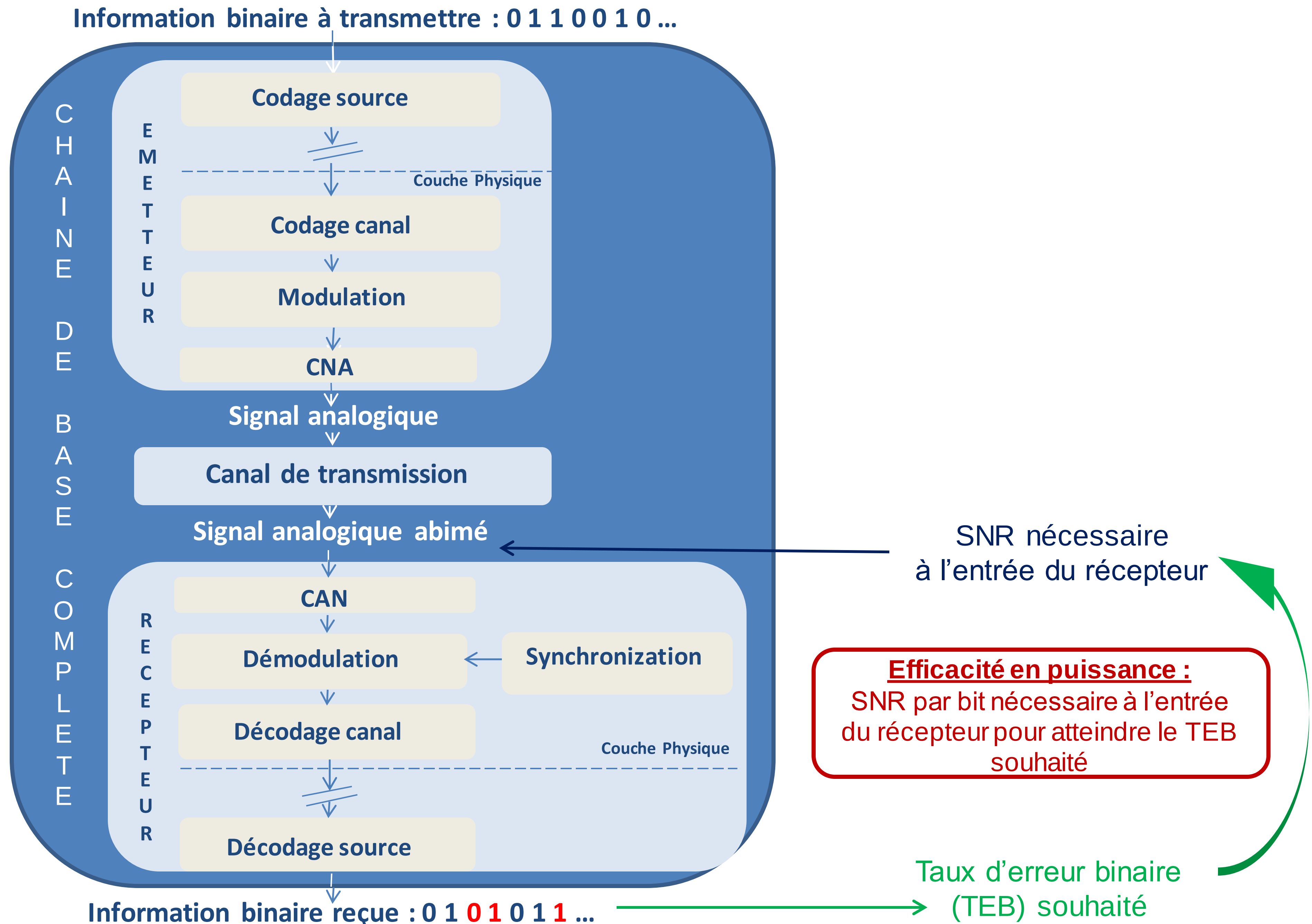


Information binaire reçue : 0 1 0 1 0 1 1 … → Taux d'erreur binaire (TEB) souhaité

Chaine de communication numérique : **Efficacité en puissance**

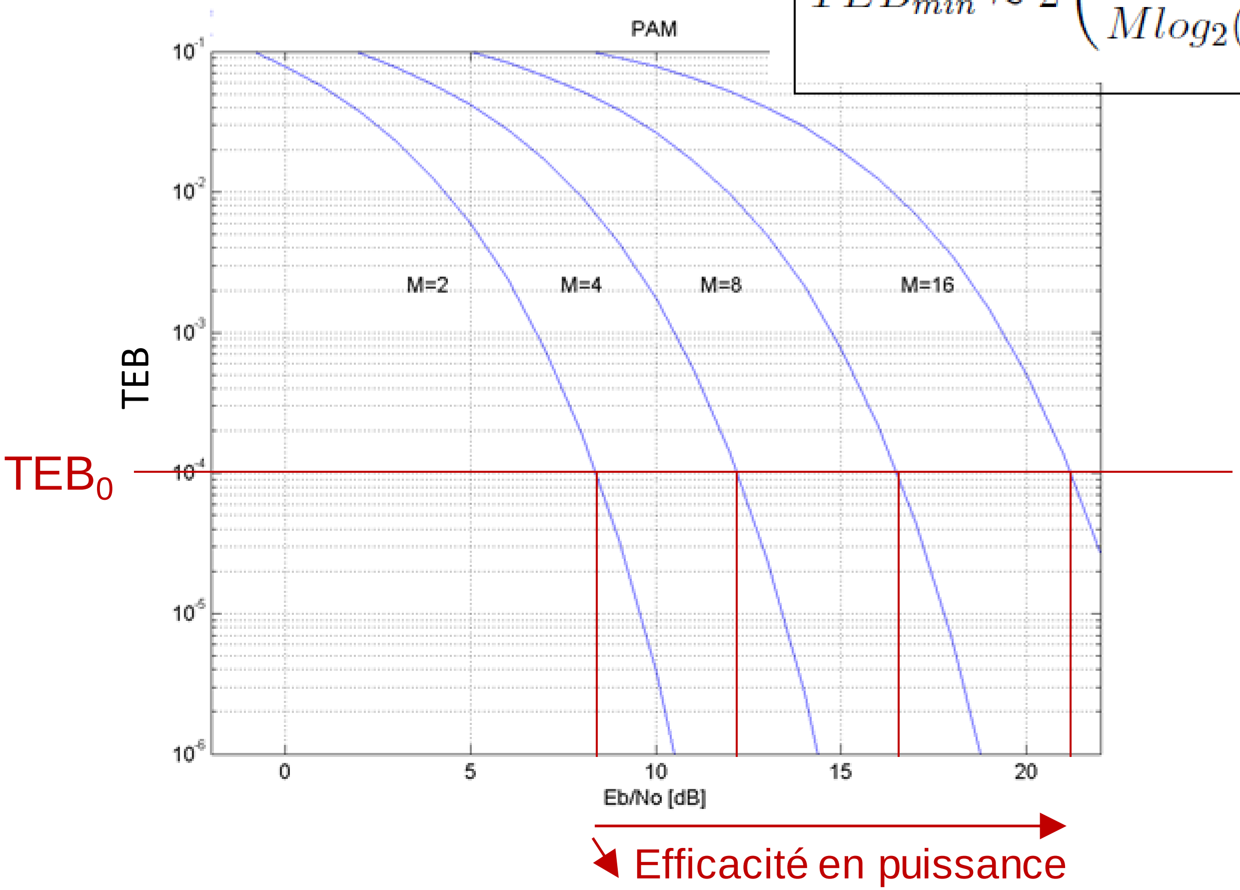


Chaine de communication numérique : Efficacité en puissance



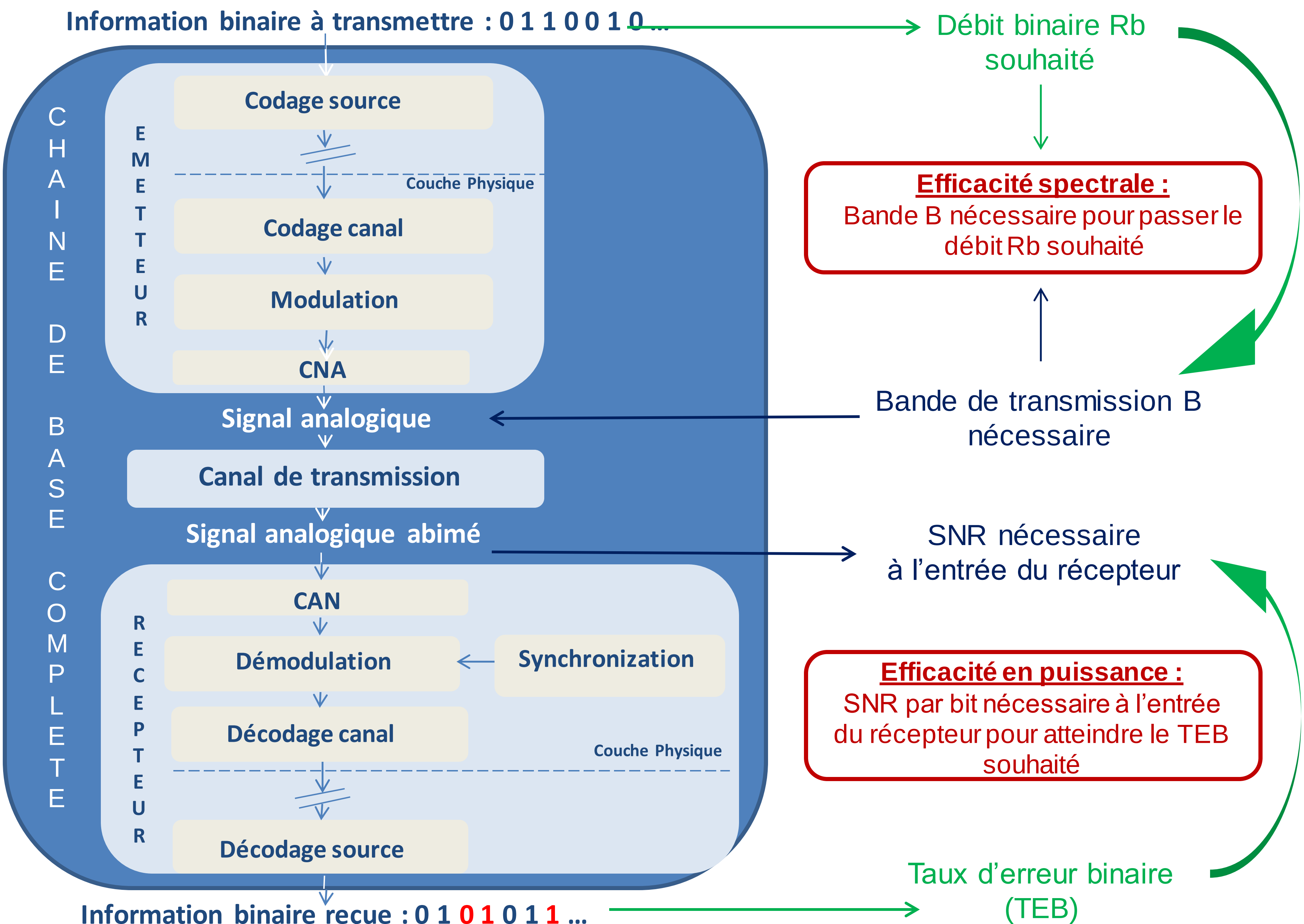
Impact du bruit dans la chaine de transmission
Efficacité en puissance de la transmission

$$TEB_{min} \approx 2\left(\frac{M-1}{Mlog_2(M)}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



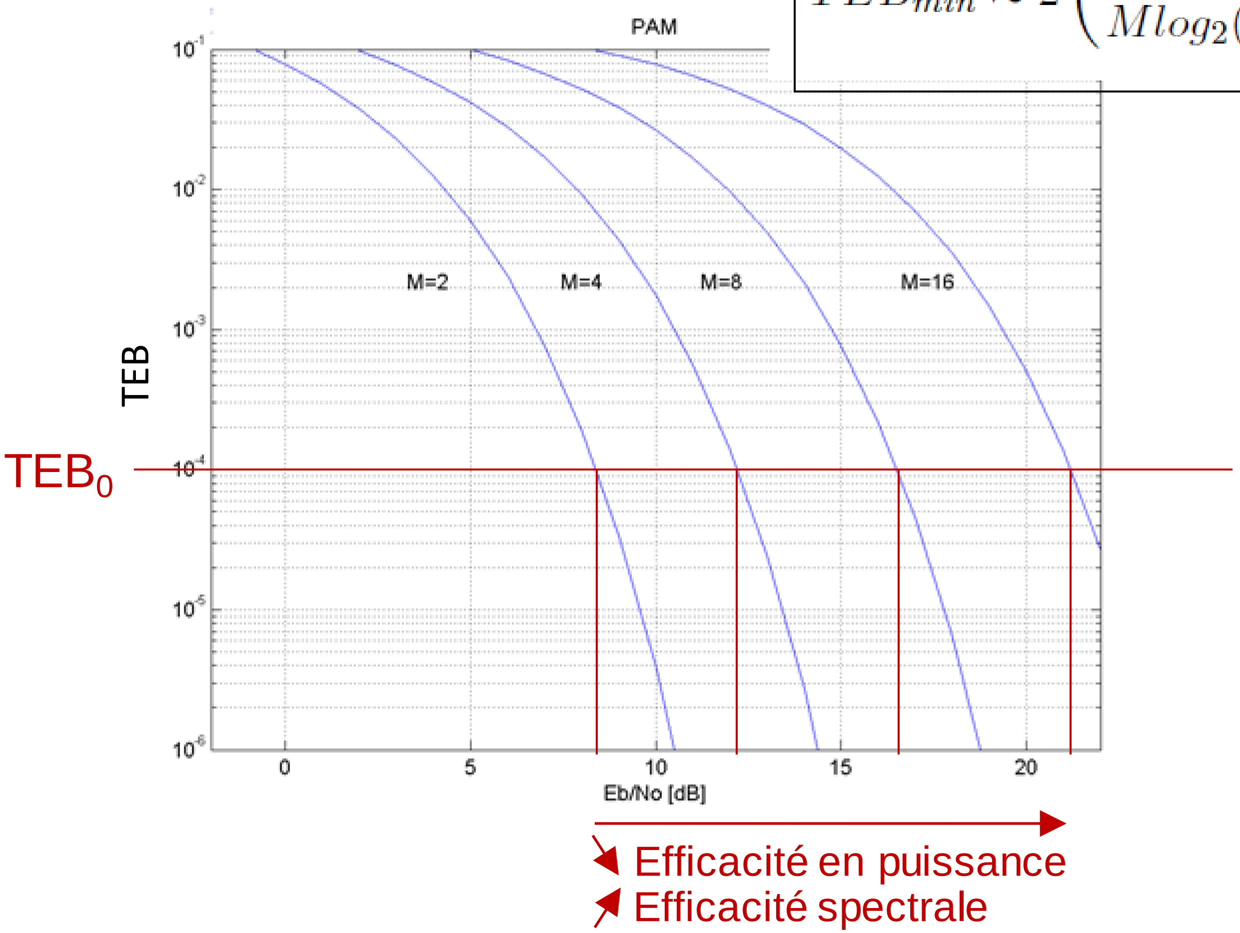
Résultats obtenus pour une modulation bande de base M-aire (**M-PAM**), dans un **canal de Nyquist**, avec **filtrage adapté** et **mapping de Gray**

Chaine de communication numérique : critères de performance



Impact du bruit dans la chaine de transmission
Efficacité en puissance de la transmission

$$TEB_{min} \approx 2\left(\frac{M-1}{Mlog_2(M)}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



Résultats obtenus pour une modulation bande de base M-aire (**M-PAM**), dans un **canal de Nyquist**, avec **filtrage adapté** et **mapping de Gray**