Flop count of Given QR is $3mn^2 - n^3$, which is about 50% more expensive than Householder QR.

Examen Calcul Scientifique

Documents autorisés : Notes de cours et TD, ainsi que les planches (imprimées) des présentations.
Durée : 1h30 (+30 min tiers temps)

Vous rendrez les deux exercices sur deux copies séparées.

Exercice 1 : Factorisation QR d'une matrice de Hessenberg supérieure

Nous souhaitons étudier le coût de la factorisation QR d'une matrice de Hessenberg supérieure H en suivant les deux approches vues en Cours-TD : celle avec les rotations de Givens et celle avec les réflexions de Householder.

Nous dirons qu'une matrice rectangulaire [1] $m \times n$ est de Hessenberg supérieure si $h_{i,j} = 0$ pout tout (i,j) tels que $i > j + 1$.

La factorisation QR de cette matrice va nous amener classiquement à une matrice R triangulaire supérieure.

(a) Matrice H, Hessenberg supérieure (b) Matrice R, triangulaire supérieure

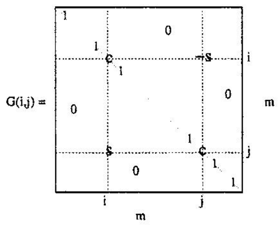
Figure 1: structures des matrices H et R

1– Si on se place dans le cas général d'une rotation de Givens $G(i,j)$ appliquée à une matrice A rectangulaire $m \times n$ (voir Figure 2),

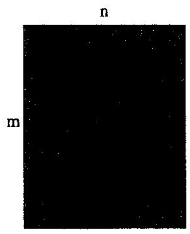
a- combien de lignes de la matrice sont modifiées ? n

b- quel est donc le nombre d'opérations virgules flottantes (*flops*) pour effectuer le produit $G(i,j) * A$? $O(m \times n)$

[1] dans la littérature, le dénomination "de Hessenberg" ne s'applique qu'à des matrices carrées



(a) Matrice $G(i, j)$



(b) Matrice A

Figure 2: matrices $G(i, j)$ et A dans le cas général

2– Factorisation QR par rotation de Givens d'une matrice Hessenberg supérieure

Si on utilise des rotations de Givens pour effectuer la factorisation QR d'une matrice de Hessenberg supérieure H, nous n'avons qu'une composante à annuler par colonne de la matrice (la composante $h_{i+1,i}$).

Après avoir travailler sur les $k-1$ premières colonnes, la matrice est de la forme :

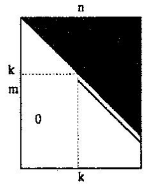


Figure 3: structure de H après k rotations

a- Quel est le nombre de *flops* pour éliminer la composante $h_{k+1,k}$ (on ne considérera pas les composantes qui sont nulles sur le début des deux lignes concernées, composantes qui vont rester nulles) ?

b- Quel est donc le coût de la factorisation QR d'une matrice de Hessenberg supérieure en utilisant des rotations de Givens ?

3– Rappelez le coût d'une factorisation QR d'une matrice $m \times n$ utilisant les réflexions de Householder. $\frac{4n^3}{3} \xrightarrow[n \neq m.]{} \frac{4n^2 m}{3}$

4– Quelle est l'approche à privilégier pour une factorisation QR d'une telle matrice[2] ?

→ [illegible]

[2] si on n'adapte pas la factorisation QR avec les réflexions de Householder pour préserver la structure Hessenberg supérieure de la matrice

Exercice 2 : Résolution de problèmes aux moindres carrés linéaires

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que $rg(A) = n$ et $b \in \mathbb{R}^m$, avec $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On s'intéresse au problème aux moindres carrés linéaires suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$$

avec $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$ la norme Euclidienne de x.

Si $m < n$, $n = rg(A)$

1- Justifier que $m \geq n$. $\mapsto$ $m < rg(A)$, $rg(A) \leq n$

2- Démontrer que la matrice $A^T A$ est symétrique définie positive. En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution x^* caractérisée par les équations normales :

$rg(A) \leq m$

$$(\mathcal{EN}) \quad (A^T A)x^* = A^T b.$$

$x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\| > 0$

3- Recherche de x^* par la SVD

Soit $A = U\Sigma V^T$ la SVD de A, avec $U \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$, $V \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, et $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

a- Quelles propriétés vérifient les colonnes des matrices U et V? Quelle structure a la matrice Σ? En déduire que $\Sigma^T\Sigma$ est inversible.

b- Depuis le système $(\mathcal{EN})$, montrer que x^* sécrit :

$$x^* = V(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T U^T b.$$

c- Quel résultat du cours retrouvez-vous concernant x^* ?

4- Recherche de x^* par factorisation QR

Soit $A = QR$ la factorisation QR de A.

On note $Q = [Q_1, Q_2] \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ et $R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, avec $Q_1 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $Q_2 \in \mathcal{M}_{m,m-n}(\mathbb{R})$ et $R_1 \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

a- Quelles propriétés vérifient les colonnes des matrices Q_1 et Q_2? Quelle structure a la matrice R_1?

b- Montrer l'égalité suivante :

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|R_1 x - Q_1^T b\|_2^2 + \|Q_2^T b\|_2^2$$

Montrer que x^* solution de $(\mathcal{P})$ s'écrit $x^* = R_1^{-1}Q_1^T b$.

c- Préciser les étapes requises pour la résolution de $(\mathcal{P})$ par factorisation QR et donner pour chacune leur complexité calcul. On supposera que la factorisation QR a été réalisée par application de reflexions de Householder. (Les calculs de complexité faits en cours peuvent être appliqués directement sans démonstration).

5- Recherche de x^* par la résolution des équations normales

a- Proposer deux méthodes - une directe par factorisation et l'autre itérative - pour la résolution du système $(\mathcal{EN})$. Vous argumenterez votre choix.

b- Concernant la méthode directe, préciser les étapes requises pour la résolution de $(\mathcal{EN})$ et donner pour chacune leur complexité calcul. (Les calculs de complexité faits en cours peuvent être appliqués directement sans démonstration).

c- Concernant la méthode itérative, préciser quelle étape vous semble la plus couteuse en terme de complexité calcul. Préciser dans quelles conditions il serait "plus intéressant" d'utiliser la méthode itérative plutôt que la méthode directe.

6- Moindres carrés linéaires pondérés

Soit $W \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. On s'intéresse au problème :

$$(\mathcal{P}_W) \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} f_W(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_W^2$$

avec $\|x\|_W = \sqrt{x^T W x}$.

a- Justifier que $\|.\|_W$ est bien définie sur $\mathbb{R}^m$.

b- Montrer qu'il existe $\widetilde{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\widetilde{b} \in \mathbb{R}^m$, que vous préciserez, tels que

$$f_W(x) = \frac{1}{2}\|\widetilde{A}x - \widetilde{b}\|_2^2.$$

c- Montrer que $(\mathcal{P}_W)$ admet une unique solution x_W^* caractérisée par :

$$(A^T W A)x_W^* = A^T W b.$$

d- En vous inspirant des questions 4- et 5-, proposer une méthode pour le calcul de x_W^*. Vous argumenterez votre choix.