Introduction aux communications numériques
Etude de l'impact du bruit dans la chaine de transmission

Première année - Département Sciences du Numérique

2020-2021

1 Introduction

Ce troisième travail va être dédié à l'étude du bruit dans la chaine de transmission numérique : impact du bruit introduit par le canal sur la transmission, influence du filtrage adapté, calcul et estimation du taux d'erreur binaire (TEB).
Pour cela, vous allez devoir implanter sous Matlab différentes chaines de transmission, les analyser et les comparer en vous focalisant, cette fois, sur leur efficacité en puissance : influence du respect ou du non respect du critère de filtrage adapté, influence du mapping. De la même manière que pour le devoir précédent nous vous demanderons de répondre à un certain nombre de questions en plus de l'envoi de vos codes pour l'évaluation.

2 Chaine de référence

On va, dans un premier temps, introduire du bruit dans la chaine de transmission implantée sans canal dans le devoir 2, avec un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, rectangulaires de durée T_s et de hauteur 1. Le bruit sera introduit en utilisant la fonction *randn.m* de Matlab, pour générer des échantillons suivant une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance 1, et en venant modifier la variance (donc la puissance), pour obtenir le niveau E_b/N_0 souhaité, de la manière suivante : $bruit = \sigma_n * randn(1, length(x));$, avec x qui représente le signal à bruiter et σ_n^2 qui est donnée par (voir démonstration en annexe) :

$$\sigma_n^2 = \frac{P_x N_s}{2 \log_2(M) \frac{E_b}{N_0}},$$

où N_s représente le facteur de suréchantillonage, M l'ordre de la modulation et P_x la puissance du signal à bruiter (signal en sortie du modulateur bande de base). P_x peut être obtenue sous matlab de la manière suivante : $P_x = mean(abs(x).\hat{}2)$.

2.1 Paramètres

La chaine de transmission devra être implantée avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = 24000$ Hz, pour transmettre un débit binaire $R_b = 6000$ bits par seconde.

2.2 Implantation de la chaine sans bruit

Vous commencerez par reprendre la chaine sans bruit afin de vous assurer que le TEB obtenu est bien nul.

2.3 Implantation de la chaine avec bruit

Rajouter le bruit à la chaine précédente et :

1. Observer le diagramme de l'oeil pour différentes valeurs de E_b/N_0.
2. Tracer le taux d'erreur binaire obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 8 dB.
3. Comparer, en les traçant sur une même figure, le TEB simulé au TEB théorique de la chaine étudiée. Ce tracé doit permettre de valider le bon fonctionnement de votre chaine de transmission. Attention à la précision de vos mesures pour les TEBs simulés (voir en annexe).

3 Première chaine à étudier, implanter et comparer à la chaine de référence

On considèrera maintenant un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et les réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, données par la figure 1. Le résultat du produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ est donné dans la figure 2.

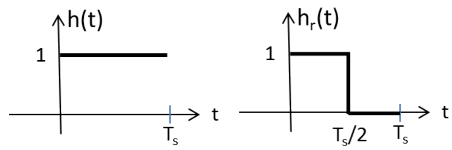

Figure 1: Réponses impulsionnelles des filtres d'émission et de réception.

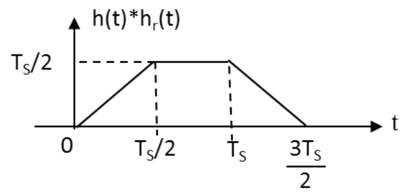

Figure 2: Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$.

3.1 Paramètres

La chaine de transmission devra être implantée avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = 24000$ Hz, pour transmettre un débit binaire $R_b = 6000$ bits par seconde.

3.2 Implantation de la chaine sans bruit

1. Tracer un diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception sur la durée T_s (N_s échantillons) afin de déterminer les instants optimaux d'échantilllonnage. Les résultats obtenus sont-ils conformes à à ce qui est attendu en théorie ?

2. En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuil optimal, vérifier que le TEB obtenu est bien nul.

3.3 Implantation de la chaine avec bruit

Rajouter le bruit à la chaine précédente et :

1. Observer le diagramme de l'oeil pour différentes valeurs de E_b/N_0.

2. Tracer le taux d'erreur binaire obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 8 dB.

3. Comparer, en les traçant sur une même figure, le TEB simulé au TEB théorique de la chaine étudiée. Ce tracé doit permettre de valider le bon fonctionnement de votre chaine de transmission. Attention à la précision de vos mesures pour les TEBs simulés (voir en annexe).

4. Comparer le TEB obtenu par simulation pour la chaine de transmission étudiée au TEB obtenu par simulation (ou au TEB théorique) de la chaine de référence (comparaison en termes d'efficacité en puissance). La similitude ou différence obtenue devra être expliquée. La chaine éventuellement la plus efficace en puissance devra être identifiée, en expliquant ce qui la rend éventuellement plus efficace.

5. Cette chaine de transmission est-elle plus efficace spectralement que la chaine de référence (voir premier travail réalisé sur les modulateurs bande de base) ? Expliquer ce qui la rend éventuellement plus efficace.

4 Deuxième chaine à étudier, implanter et comparer à la chaine de référence

On considèrera un mapping 4-aire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-3, -1, 1, 3\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, rectangulaires de hauteur 1 et de durée Ts.

4.1 Paramètres, mapping

La chaine de transmission devra être implantée avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = 24000$ Hz, pour transmettre un débit binaire $R_b = 6000$ bits par seconde. On utilisera les lignes de codes suivantes pour réaliser le mapping et le demapping 4-aire :

- Mapping : $Symboles = (2 * bi2de(reshape(bits, 2, length(bits)/2).') - 3).'$;
  si $bits$ représente le vecteur contenant l'information binaire à transmettre. $Symboles$ contiendra alors les symboles issus du mapping.
- Demapping : $BitsDecides = reshape(de2bi((SymbolesDecides + 3)/2).', 1, length(bits))$;
  si $SymbolesDecides$ représente le vecteur contenant les symboles en sortie du bloc décision. $BitsDecides$ contiendra alors l'information binaire retrouvée, à comparer avec l'information binaire transmise pour calculer le taux d'erreur binaire.

4.2 Implantation de la chaine sans bruit

1. Tracer un diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception afin de déterminer les instants optimaux d'échantillonnage et les seuils optimaux de décision (détecteur à seuil). Les résultats obtenus sont-ils conformes à la théorie ? Expliquez votre réponse.
2. En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuils optimaux, vérifier que le TEB obtenu est bien nul.

4.3 Implantation de la chaine avec bruit

1. Tracer le taux d'erreur symbole (TES) obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels allant de 0 à 8 dB.
2. Comparer, en les traçant sur une même figure, le TES obtenu par simulation sur la chaine implantée (question précédente) au TES théorique suivant :

   $$TES = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

   donné pour une transmission de symboles 4-aires indépendants prenant leurs valeurs dans $\pm 1, \pm 3$, en utilisant une chaine de transmission respectant le critère de Nyquist, le critère de filtrage adapté et utilisant les instants optimaux d'échantillonnage et seuils optimaux de décision. La similitude ou différence obtenue entre le TES simulé et le TES théorique donné devra être expliquée.
3. Tracer le taux d'erreur binaire (TEB) obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels.
4. Comparer le TEB obtenu par simulation sur la chaine implantée au TEB déterminé au TEB théorique suivant :

   $$TEB = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

   La similitude ou différence obtenue devra être expliquée. La chaine éventuellement la plus efficace en puissance devra être identifiée, en expliquant ce qui la rend éventuellement plus efficace.
5. Comparer le TEB obtenu par simulation sur la chaine implantée au TEB obtenu pour la chaine de référence. Leur similitude ou différence devra être expliquée. La chaine éventuellement la plus efficace en puissance devra être identifiée, en expliquant ce qui la rend éventuellement plus efficace.

6. Cette chaine de transmission est-elle plus efficace spectralement que la chaine de référence (voir premier travail réalisé sur les modulateurs bande de base) ? Expliquer ce qui la rend éventuellement plus efficace.

5 Annexes

5.1 Puissance de bruit à introduire dans les chaines de transmission

On introduit un bruit de densité spectrale de puissance $N_0/2$ dans la bande F_e. La variance du bruit à introduire est donc donnée par :

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} F_e = \frac{E_s}{2\frac{E_s}{N_0}} F_e = \frac{P_x T_s}{2\frac{E_s}{N_0}} F_e = \frac{P_x N_s}{2log_2(M)\frac{E_b}{N_0}}$$

où

- E_s représente l'énergie par symbole à l'entrée du récepteur : $E_s = \log_2(M) E_b$, si E_b représente l'énergie binaire à l'entrée du récepteur et M l'ordre de la modulation,
- T_s représente la durée symbole,
- N_s représente le facteur de suréchantillonnage : $T_s = N_s T_e$, $T_e = 1/F_e$ étant la période d'échantillonnage
- P_x représente la puissance du signal à bruiter (signal en sortie du modulateur bande de base).

5.2 Précision sur les mesures de TEB

Le TEB peut être modélisé par une somme de variables aléatoires X_k prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$ avec les probabilités $P[X_k = 0] = 1 - p$ (pas d'erreur) et $P[X_k = 1] = p$ (erreur) :

$$TEB = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

L'erreur quadratique relative sur le TEB est donnée par :

$$\epsilon^2 = \frac{\sigma_{TEB}^2}{m_{TEB}^2},$$

où m_{TEB} et σ_{TEB}^2 représentent, respectivement, la moyenne et la variance sur l'estimation du TEB.
La précision sur les mesures de TEB sera donnée par ϵ. On peut écrire :

$$m_{TEB} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} E[X_k] = \frac{1}{N} N (1 \times p + 0 \times (1 - p)) = p$$

et

$$\sigma_{TEB}^2 = E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k\right)^2\right] - p^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} E[X_k X_i] - p^2$$

- si $k = i$ (N cas) alors $E\left[X_k^2\right] = 1^2 \times p + 0^2 \times (1 - p) = p$
- si $k \neq i$ ($N^2 - N$ cas) alors $E[X_k X_i] = E[X_k] E[X_i] = p^2$

D'où :

$$\sigma_{TEB}^2 = \frac{1}{N^2} \left\{Np + \left(N^2 - N\right) p^2\right\} - p^2 = \frac{p(1-p)}{N}$$

On constate que la variance de l'erreur tend vers 0 quand N augmente et on peut écrire l'erreur quadratique relative sur le TEB de la manière suivante :

$$\epsilon^2 = \frac{\sigma_{TEB}^2}{m_{TEB}^2} = \frac{1-p}{Np} \simeq \frac{1}{Np} \; pour \; p << 1$$

On obtient alors :

- le nombre d'élément binaire à générer, N, de manière à obtenir une précision ϵ fixée sur la mesure d'un TEB dont la valeur est, a priori, connue. Par exemple, si on veut mesurer un TEB de 10^{-2} avec une précision de 10%, il faudra générer $N = \frac{1}{10^{-2}\times(10^{-1})^2} = 10^4$ bits.
- le nombre de simulations à réaliser si la valeur à mesurer pour le TEB n'est pas, a priori, connue. On fera alors des simulations jusqu'à observer $1/\epsilon^2$ erreurs pour obtenir une mesure avec une précision ϵ fixée. Par exemple, si on veut mesurer le TEB avec une précision $\epsilon = 10\%$, il faudra compter les erreurs jusqu'à en obtenir $1/\epsilon^2 = 10^2$ avant de considérer la mesure de TEB obtenue comme disposant de la précision requise.