Exercice 1. Le problème de Képler (10pt).

Soient a, b, c trois réels positifs. On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ (ellipsoïde). On pose $\phi(x, y, z) = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1$ et $f(x, y, z) = -xyz$.
(1) Donner une interprétation géométrique du problème $(\mathcal{P})$ suivant, dit de Képler :

$$\max_{\substack{(x,y,z)\in\mathcal{E} \\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0}} xyz$$

et montrer que ce problème admet un ensemble de solutions non vide.

La suite de l'exercice est centrée sur les conditions nécessaires d'optimalité au premier ordre (KKT).

(2) Supposer dans un premier temps qu'aucune des contraintes d'inégalité n'est active.
(2.1) Montrez que les contraintes sont qualifiées en tout point de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$.
(2.2) Exprimer la condition nécessaire d'optimalité au premier ordre et montrer qu'elle conduit à la résolution du système (S) :

$$\begin{cases} (x, y, z) \in \mathcal{E} \\ -yz + 2\lambda x/a^2 = 0 \\ -zx + 2\lambda y/b^2 = 0 \\ -xy + 2\lambda z/c^2 = 0 \end{cases}$$

(2.3) Montrer que ces équations impliquent $-3xyz + 2\lambda = 0$. En déduire en remplaçant dans (S) que $3x^2 = a^2$ et achever la résolution de S.
(2.4) Conclure les questions **(2)** précisément en revenant au problème d'optimisation de départ.

(3) On considère que la seule contrainte d'inégalité active est $x = 0$. Exprimer à nouveau la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre. Montrez que cette condition n'admet pas de solution.

(4) En utilisant la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre, montrer qu'il n'est pas possible d'avoir deux contraintes d'inégalité actives en un point solution. Est-il possible d'avoir les 3 contraintes d'inégalité actives en une solution ?

(5) En guise de résumé de l'exercice, décrire l'ensemble solution du problème $(\mathcal{P})$.

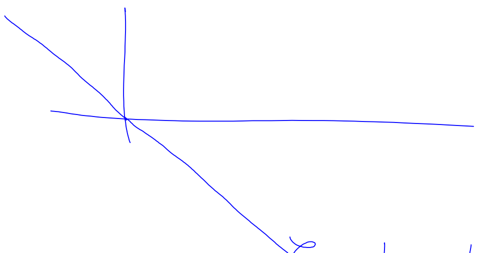
Rqu dans $\mathbb{R}^2$. de dim finie.

$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \underbrace{x+y}_{\phi(x,y)} = 0\}$

$\mathcal{C} = \phi^{-1}(\{0\})$.

ϕ est continue car polynomiale sur $\mathbb{R}^2$.
($\mathcal{C}^\infty$)

$\mathcal{C}$ = image réciproque par une app. continue du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$, est un fermé de $\mathbb{R}^2$



$\mathcal{C}$ est une dte de $\mathbb{R}^2$ non bornée
non compact

(1) - $\mathcal{E} = \phi^{-1}(\{0\})$ dans $\mathbb{R}^3$. avec $\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$
polynômiale donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$

et $\mathcal{E}$ est donc un fermé de $\mathbb{R}^3$.

- le 1er quadrant positif $K = \{(x,y,z) \;/\; x \geq 0 \; y \geq 0 \; z \geq 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$ naturellement.
(C'est aussi un ensemble convexe de $\mathbb{R}^3$)
- et par intersection, l'ensemble des contraintes $\mathcal{C} = \mathcal{E} \cap K$ est fermé dans $\mathbb{R}^3$.

- De plus $\mathcal{E}$ est borné car

$$\phi(x,y,z) = 0 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

implique naturellement que $|x| \leq a$
$|y| \leq b$
$|z| \leq c$

et alors par intersection $\mathcal{C}$ est borné, et fermé donc compact.
(en dim finie)

- $\mathcal{C}$ est non vide : en effet : $(x,y,z) = (a,0,0) \in \mathcal{C}$

Conclusion : $f(x,y,z) = -xyz$ qui est elle aussi continue ($\mathcal{C}^\infty$ ici) car polynômiale

est bornée et atteint ses bornes sur le compact $\mathcal{C}$

$\boxed{\text{Donc il existe un minimum global de } f \text{ sur } \mathcal{C}}$

2. Supposons que $(x,y,z) \in \mathcal{C}$ vérifie $\underline{x>0 \quad y>0 \quad z>0}$

HQC (x,y,z) revient donc à vérifier que $\nabla\phi(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{bmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ce qui est bien le cas car $x \neq 0$ ($y \neq 0$ et $z \neq 0$)

<u>Rque</u> : s'il y avait eu une c^te d'inégalité saturée, par ex ($x = 0$)

Pour HQC (x,y,z) il aurait fallu vérifier alors que

$\nabla\phi(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{bmatrix}$ et $\nabla g_1(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sont lin^t <u>indépendants</u>

<u>2.2</u> : Sous l'hyp $x>0 \quad y>0 \quad z>0$, HQC étant valide

le min. global de f sur $\mathcal{C}$ doit vérifier les CN1

Posons le Lagrangien :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \lambda\,\phi(x) + \mu_1(-x) + \mu_2(-y) + \mu_3(-z) \\ \lambda \in \mathbb{R} \\ \mu \in (\mathbb{R}^+)^3 \end{cases}$$

après avoir mis le PB sous forme canonique :

$$\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^3} f(x) \;/\; \phi(x)=0 \text{ et } \begin{array}{l} -x \leq 0 \\ -y \leq 0 \\ -z \leq 0 \end{array} \end{cases}$$

et CN1 : KKT

$$\begin{cases} -yz + \lambda\frac{2x}{a^2} - \mu_1 = 0 \\ -xz + \lambda\frac{2y}{b^2} - \mu_2 = 0 \\ -xy + \lambda\frac{2z}{c^2} - \mu_3 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \\ \text{et } -\mu_1 x = 0;\ -\mu_2 y = 0;\ -\mu_3 z = 0 \end{cases} \quad \left.\right\} \nabla_x \mathcal{L} = 0$$

- conditions de compatibilité -

ici, comme on a supposé que $x>0$, $y>0$ $z>0$

nec^t $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$

et alors KKT se ramène à :

$$(S)\quad \begin{cases} -yz + 2\lambda\frac{x}{a^2} = 0 & (\times x) \\ -xz + 2\lambda\frac{y}{b^2} = 0 & (\times y) \\ -xy + 2\lambda\frac{z}{c^2} = 0 & (\times z) \\ \text{et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \text{et } x>0,\ y>0,\ z>0 \end{cases}$$

$$(S) \Rightarrow \begin{array}{l} -xyz + 2\lambda\frac{x^2}{a^2} = 0 \\ -xyz + 2\lambda\frac{y^2}{b^2} = 0 \\ -xyz + 2\frac{z^2}{c^2} = 0 \end{array}$$

somme

$$-3\,xyz + 2\lambda\underbrace{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)}_{=1} = 0 \quad \text{car } (x,y,z) \in \mathcal{E}.$$

d'où $\boxed{2\lambda = 3xyz}$.

Alors S devient

$$\begin{cases} -yz + \frac{3x^2yz}{a^2} = 0 \\ -xz + \frac{3y^2xz}{b^2} = 0 \\ -xy + \frac{3z^2xy}{c^2} = 0 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{et } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ \text{et } x>0,\ y>0,\ z>0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>0 \quad y>0 \quad z>0 \\ -1+\frac{3x^2}{a^2}=0 \\ -1+\frac{3y^2}{b^2}=0 \\ -1+\frac{3z^2}{c^2}=0 \\ \text{et } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \underbrace{\left\{\begin{array}{l} x=\frac{a}{\sqrt3} \\ y=\frac{b}{\sqrt3} \\ z=\frac{c}{\sqrt3}\end{array}\right.}_{1^{er}\ p^t \text{ critique exhibé}}$$

2.4 : est-ce un minimum local ? (il faut regarder les CN2/CS2)

$$\nabla^2_{xx}\mathcal{L}\Big(\overset{x}{\overbrace{(x,y,z)}},\ \lambda=\frac{3}{2}xyz,\ \mu_1=0,\mu_2=0,\mu_3=0\Big)$$
$x=\frac{a}{\sqrt3},\ y=\frac{b}{\sqrt3},\ z=\frac{c}{\sqrt3}$

$$=\nabla^2 f(x)+\underbrace{\frac{abc}{2\sqrt3}}_{\lambda}\times\nabla^2\phi(x)\ \cancel{+0}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -z & -y\\ -z & 0 & -x\\ -y & -x & 0\end{pmatrix}+\frac{abc}{2\sqrt3}\begin{bmatrix}\frac{2}{a^2} & & 0\\ & \frac{2}{b^2} & \\ 0 & & \frac{2}{c^2}\end{bmatrix}$$

$$\nabla^2_{xx}\mathcal{L}=\begin{pmatrix}\frac{bc}{a\sqrt3} & -\frac{c}{\sqrt3} & -\frac{b}{\sqrt3}\\ -\frac{c}{\sqrt3} & \frac{ac}{b\sqrt3} & -\frac{a}{\sqrt3}\\ -\frac{b}{\sqrt3} & -\frac{a}{\sqrt3} & \frac{ab}{c\sqrt3}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T}_L\left(x=\frac{a}{\sqrt3}\ y=\frac{b}{\sqrt3}\ z=\frac{c}{\sqrt3}\right)=\Big\{h\in\mathbb{R}^3 \,/\, h\perp \underbrace{\nabla\phi(x)}\Big\}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{2x}{a^2}\\ \frac{2y}{b^2}\\ \frac{2z}{c^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/a\sqrt3\\ 2/b\sqrt3\\ 2/c\sqrt3\end{pmatrix}$$

CN2/ $\forall h\in \mathcal{T}_L \quad h^T\left[\nabla^2_{xx}\mathcal{L}\right]h\geq 0$

CS2/ $\forall h\neq 0\in \mathcal{T}_L \quad h^T\left[\nabla^2\right]h>0$

③ Supposons que $x=0$, $y>0$, $z>0$.

HQC : $\nabla\phi=\begin{pmatrix}0\\ 2y/b^2\\ 2z/c^2\end{pmatrix}$ et $\nabla c_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ sont lin^t indépendants : OUI ! -

KKT $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} -yz - \mu_1 = 0 \\ \lambda \frac{2y}{b^2} = 0 \\ \lambda \frac{2z}{c^2} = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0, \mu_1 \geq 0, \text{ et } y > 0, z > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x} = 0 \\ \mu_1 = -yz \geq 0 \\ \lambda = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y > 0 \quad z > 0 \end{cases}$$

Impossible

donc pas de sol^os sous cette hyp.

Il est clair que si on fait de même avec $y = 0 \quad x > 0 \quad z > 0$ ou $z = 0 \quad x > 0 \quad y > 0$

on aboutira au même type d'incompatibilité.

(4) Donc l'ensemble des branchements possibles pour les conditions de compatibilité.

il ne reste plus qu'à regarder les cas $x = y = 0 \quad z > 0$

ou $x = z = 0 \quad y > 0$

ou $y = z = 0 \quad x > 0$

(Sachant que $x = y = z = 0$ n'est pas possible car $(0,0,0) \notin \mathcal{E}$)

1^er cas : HQC : $\nabla\phi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2z}{c^2} \end{bmatrix}$ $\nabla C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\nabla C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

forment toujours une famille libre (car $z \neq 0$)

KKT devient alors
$$\begin{cases} x = 0, \ y = 0, \ \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0 \\ z > 0 \\ 0 = \mu_1 \\ 0 = \mu_2 \\ \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \\ \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \ y = 0 \\ \mu_1 = 0, \ \mu_2 = 0 \\ z = c \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\nabla^2_{xx}\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_L = \left\{ h \ / \ h \perp \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{c} \end{pmatrix}}_{\nabla\phi} \text{ et } \underline{\left\langle h, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 0} , \left\langle h, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 0 \right\}$$

(on oublie ça)

$$\boxed{h \in Z_h \iff h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} h_1 \geq 0 \\ h_2 \geq 0 \end{matrix}}$$

$(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ n'est pas tjs ≥ 0. $\Rightarrow$ la CN2 n'est pas valide

En considérant les valeurs de $f(x,y,z) = -xyz$.

on a $-\dfrac{abc}{3\sqrt{3}} < 0$ pour le 1er cas

$x = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \quad y = \dfrac{c}{\sqrt{3}} \quad z = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$

et dans les autres cas (saturation de 2 contraintes)

$f(x,y,z) = 0$

et par conséquent, le minimum global [dont on avait montré l'existence] est obtenu dans le 1er cas

$h \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h \in$ Plan engendré par $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$

$z = -x - y$ $\quad$ Soit $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$h = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad h = X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$h^T \left(\nabla^2_{xx}\mathcal{L} \right) h = (\alpha \beta) \underbrace{\boxed{X^T \left[\nabla^2_{xx}\mathcal{L} \right] X}}_{2\times 2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $\quad$ $\underline{\alpha\beta \text{ qque}}$