TOULOUSE INP N7

$2^{\text{ième}}$ année Sciences du Numérique

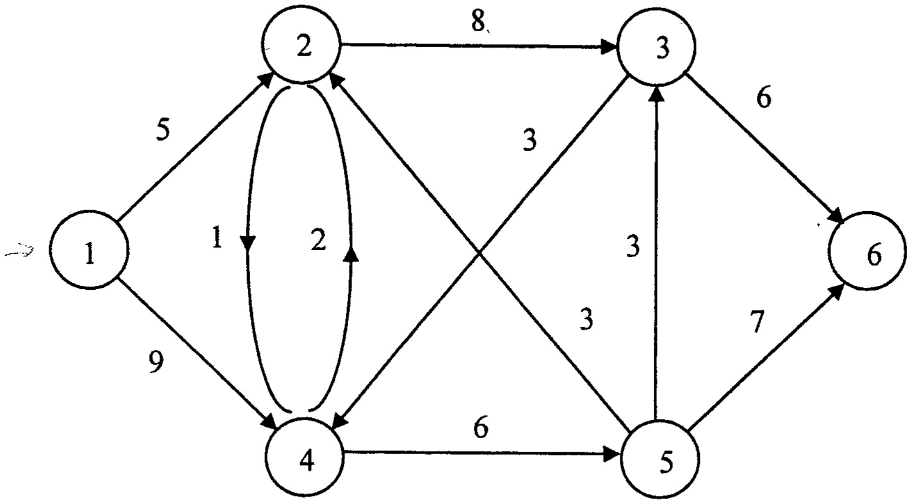
Contrôle de Théorie de Graphes - Vendredi 14 janvier 2022 – 08h00 – Riadh DHAOU, Gentian JAKLLARI

(Aucun document n'est autorisé à part une feuille A4)

Durée : 1 heure 30 - Nombre de pages : 2 pages

Exercice 1 : Flot maximal, coupe minimale

Q1) Donner une coupe minimale du graphe suivant (Source : 1, Puit : 6) :



Q2) Déterminer le flot maximal en appliquant l'algorithme de **Ford-Fulkerson**.

Q3) Est–il possible d'augmenter la valeur du flot maximal de 2 en augmentant la capacité d'un seul arc du graphe? Justifier.

Exercice 2 : Modélisation et Parcours de graphes

Considérez la séquence 01110100 comme étant disposée selon un motif circulaire. Notez que chacun des huit triplets binaires possibles : 000, 001, 011, ..., 111 apparait exactement une fois dans la liste circulaire. Pouvez-vous construire une liste similaire de longueur 16 où les quadruplets binaires apparaissent exactement une fois chacun ? De longueur 32 où les quintuplés binaires apparaissent exactement une fois ?
(Modéliser le problème par un graphe pour répondre aux questions)

Exercice 3 : Coloration de graphes

Q1) Supposons qu'un graph G a n sommets et un nombre chromatique k. Démontrer que G a au moins $\binom{k}{2}$ arêtes.

Q2) Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer qu'un graphe de degré maximal k peut être coloré en utilisant au plus (k+1) couleurs

Exercice 4 : Arbre couvrant 生成树

Q1) Soit (u,v) une arête de poids minimum dans un graphe connecté G. Montrer que (u,v) appartient à un arbre couvrant de poids minimum de G.

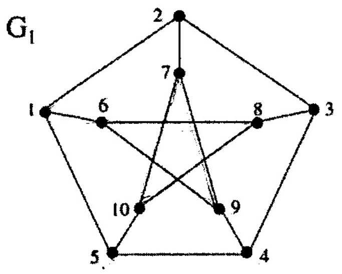
Exercice 5 : Diamètre, excentricité, rayon d'un graphe

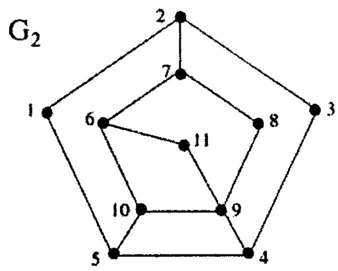
Soit G = (V;E) un graphe connexe et v ∊ V. Introduisons les notions suivantes :

1. Le **diamètre** d'un graphe G, D(G) est la longueur maximale des plus courts chemins.
2. L'**excentricité** du sommet *v*, e(v), est le maximum des distances de *v* à tout autre sommet du graphe ;
   c'est-à-dire e(v)= max { d(v, x) avec x ∊ V}.
3. Le **rayon** de G, r(G); est le minimum des excentricités des sommets de G ;
   c'est-à-dire r(G) = min {e(v) avec v ∊ V}.
4. Un **sommet central** de G est un sommet u tel que e(u) = r(G).

Répondre aux questions suivantes :

Q1) Trouver les excentricités, le rayon et les sommets centraux de :
a) Les deux graphes G1 et G2 :
b) Le graphe G3 = ([8]; {12; 14; 15; 23; 34; 38; 46; 47; 56; 67; 78}).





Q2) Donnez un exemple de graphe avec un rayon égal au diamètre.
Q3) Donner un exemple de graphe dont le diamètre est le double de son rayon.
Q4) Montrer que, pour chaque graphe G, r(G)≤ D(G) ≤ 2r(G).
Q5) Montrer que chaque graphe G admet un sous-graphe biparti avec au moins la moitié des arêtes de G.
Q6) Soit G un graphe d'ordre *n*. Montrer que si le graphe à 2*n*-1 arêtes alors il contient un cycle de longueur paire.