Théorie des graphes

Chapitre 6 : Flots sur les réseaux

3 janvier 2022

INP TOULOUSE ENSEEIHT

Définition 6.1.1

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple orienté. On appelle source (respectivement puits) tout sommet s (respectivement p) de degré entrant $\delta^-(s) = 0$ (respectivement de degré sortant $\delta^+(p) = 0$).

Définition 6.1.2 – Réseau

On appelle réseau un graphe simple orienté pondéré ayant une source s et un puits p et tel qu'il existe au moins un chemin de s à p. La pondération est appelée capacité et sera supposé à valeur dans $\mathbb{N}$:

$$c \ : E \to \mathbb{N}.$$

Exemple 6.1.1.

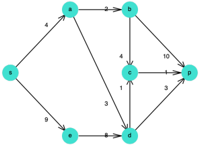


Figure 1 – *Exemple de réseau.*

Exercice 6.1.2. Donner quelques exemples de réseaux

Définition 6.1.3

Soit a un arc d'un graphe orienté, on note $i(a)$ le sommet d'origine (ou initial) de a et $t(a)$ le sommet d'arrivée (ou terminal) de a.

Définition 6.1.4 – Flots à travers un réseau

Un flot dans un réseau est une fonction $f : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) Contraintes de capacité
Pour tout arc a de E $0 \leq f(a) \leq c(a)$.

(ii) Conservation du flot (lois de Kirchhoff ou loi des nœuds)
Pour tout sommet v différent de la source et du puits on a

$$\sum_{a \in E, i(a)=v} f(a) = \sum_{a \in E, t(a)=v} f(a).$$

Remarque 6.1.1. La conservation du flot signifie que la somme de ce qui arrive en un sommet est égal à la somme de ce qui repart de ce sommet.

Définition 6.1.5 – Valeur d'un flot

Soit f un flot dans un réseau. On appelle valeur du flot la quantité

$$\omega(f) = \sum_{t(a)=p} f(a).$$

Remarque 6.1.2. On verra ci-après que cette quantité qui est la somme de ce qui arrivent au puits est aussi la somme de ce qui part de la source : $\omega(f) = \sum_{i(a)=s} f(a)$.

Définition 6.1.6 – Problème de flot maximum

On appelle problème de flot maximum dans un réseau la recherche d'un flot de valeur maximale.

Définition 6.2.1 – Coupe

Une coupe dans un réseau est la donnée d'une partition des sommets $V = X \cup \bar{X}$ telle que $s \in X$ et $p \in \bar{X}$. On notera $(X, \bar{X})$ une coupe.

Définition 6.2.2 – Capacité d'une coupe

On appelle capacité de la coupe $(X, \bar{X})$ la somme des capacités des arcs $a \in E$ allant de X à $\bar{X}$:

$$c(X, \bar{X}) = \sum_{i(a) \in X, t(a) \in \bar{X}} c(a).$$

Une coupe est une coupe minimum si pour tout autre coupe $(Y, \bar{Y})$ on a $c(Y, \bar{Y}) \leq c(X, \bar{X})$.

Exemple 6.2.1.

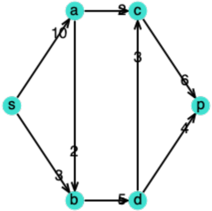


Figure 2 – *La capacité de la coupe* $(X, \bar{X}) = (\{s, a, b\}, \{c, d, p\})$ *est* $c(X, \bar{X}) = 2 + 5 = 7$*, celle de la coupe* $(Y, \bar{Y}) = (\{s, b, d\}, \{a, c, p\})$ *est* $c(Y, \bar{Y}) = 10 + 3 + 4 = 17$ *(l'arc* (a, b) *est dans le sens* $\bar{Y}, Y$*.*

- Soit X, Y 2 sous-ensembles de V, on note

$$E(X, Y) = \{a \in E, i(a) \in X, t(a) \in Y\}.$$

- Si $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$, on écrira $E(X, Y) = E(x, y)$.
- Si $a = (x, y)$, on écrira $f(a) = f(x, y)$, la valeur du flot sur l'arc a.
- On peut alors prolonger le flot f à toute paire (X, Y) de sous-ensembles de V en posant

$$f(X, Y) = \sum_{a \in E(X,Y)} f(a) - \sum_{a \in E(Y,X)} f(a).$$

On a immédiatement :

- $f(X, Y) \in \mathbb{R}$;
- $f(X, Y) = -f(Y, X)$ et $f(X, X) = 0$;
- $f(x, V) = f(\{x\}, V) = \sum_{a \in E, i(a)=x} f(a) - \sum_{a \in E, t(a)=x} f(a)$;
- Si $x \neq s$ ou $x \neq p$ alors $f(x, V) = 0$;
- $f(s, V) = \sum_{a \in E, i(a)=s} f(a)$ et $f(V, p) = \sum_{a \in E, t(a)=p} f(a)$.

Proposition 6.2.3

Pour toute coupe $(X, \bar{X})$ dans un réseau et tout flot f on a

$$f(X, \bar{X}) = f(s, V) = f(V, p).$$

- Démontrer la proposition ■

Corollaire 6.2.4 –

Soit f un flot dans un réseau et $(X, \bar{X})$ une coupe alors la valeur du flot est

$$\omega(f) = f(s, V) = f(V, p) = f(X, \bar{X}).$$

Théorème 6.2.5 – Théorème de Ford et Fulkerson

Soit f un flot dans un réseau et $(X, \bar{X})$ une coupe alors

$$\omega(f) = f(X, \bar{X}) \leq c(X, \bar{X}).$$

- $f(a) > 0$ pour tout a, donc

$$f(X, \bar{X}) = \sum_{a \in E(X, \bar{X})} f(a) - \sum_{a \in E(\bar{X}, X)} f(a) \leq \sum_{a \in E(X, \bar{X})} f(a) \leq c(X, \bar{X}).$$

■

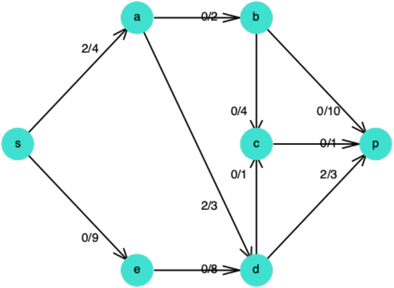
Définition 6.3.1 – Chaîne améliorable

Si f un flot dans un réseau et C est une chaîne élémentaire reliant s à p, une arête de C orientée de s vers p sera dite positive et une arête de C orientée de p vers s sera dite négative. La chaîne C sera dite améliorable si et seulement si on peut augmenter le flot de chaque arc positif tout en respectant la contrainte de capacité et si on peut diminuer le flot de tout arc négatif.

Remarque 6.3.1. Un chaîne C est améliorable si et seulement si

- Pour tout arc positif on a $f(a) < c(a)$;
- Pour tout arc négatif on a $f(a) > 0$.

Exercice 6.3.1. Donnez pour le réseau et le flot de la figure suivante donner des chaînes améliorables



l'étiquetage des arcs est flot/capacité

Soit C une chaîne améliorable dans un réseau. On définit la quantité Δ_a de la façon suivante

$$\Delta_a = \begin{cases} c(a) - f(a), & \text{si } a \text{ est un arc positif de } C \\ f(a), & \text{si } a \text{ est un arc négatif de } C \end{cases}$$

On notera alors $\Delta_C = \min_{a \in C} \Delta_a$.

Proposition 6.3.2

Soit f un flot dans un réseau, les assertions suivantes sont équivalentes

(i) f est un flot maximum ;

(ii) Il n'existe pas de chaîne améliorable dans le réseau ;

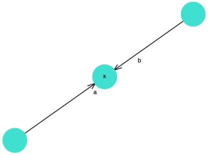
(iii) Il existe une coupe $(X, \bar{X})$ telle que $\omega(f) = c(X; \bar{X})$.

► *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Soit donc f un flot maximum, montrons par l'absurde qu'il n'existe pas de chaîne améliorante. Supposons donc qu'il existe une chaîne améliorante C de s à p et définissons l'application $f' : E \to \mathbb{R}$ par

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) + \Delta_C, & \text{si } a \text{ est un arc positif de } C \\ f(a) - \Delta_C, & \text{si } a \text{ est un arc négatif de } C \\ f(a), & \text{si } a \text{ n'est pas un arc de } C. \end{cases}$$

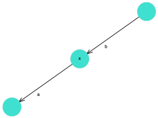
Alors f' est un flot :

- $f'(a) \geq 0$ et $f'(a) \leq c(a)$ par définition de Δ_C ;
- Loi de Kirchhoff. Soit $x \in V \backslash \{s, p\}$. Si x n'est pas sur C, il n'y a rien à démontrer car les flots des arcs incidents à x ne sont pas modifiés. Soient donc $x \in C, x \neq s$ et $x \neq p$ et a et b les arcs, dans cet ordre, incidents à x sur C. Il s'agit de montrer que $f'(x, V) = 0$. Nous avons 4 cas
  - $t(a) = x = t(b)$, par suite a est un arc positif $f'(a) = f(a) + \Delta_C$, b est un arc négatif $f'(b) = f(b) - \Delta_C$ et donc $f'(x, V) = f(x, V) + \Delta_C - \Delta_C = 0$.



  - $i(a) = x = i(b)$, même chose avec a arc négatif et b arc positif.

- • $i(a) = x = t(b)$, a et b sont des arcs négatifs.



Par suite $f'(a) = f(a) - \Delta_C$, $f'(b) = f(b) - \Delta_C$ et

$$\sum_{a' \in E, t(a')=x} f'(a') = \sum_{a' \in E\setminus\{a\}, t(a')=x} f(a') + f(a) - \Delta_C.$$

De même on a

$$\sum_{a' \in E, i(a')=x} f'(a') = \sum_{a' \in E\setminus\{b\}, i(a')=x} f(a') + f(b) - \Delta_C.$$

D'où

$$f'(x, V) = \sum_{a' \in E, t(a')=x} f'(a') - \sum_{a' \in E, i(a')=x} f'(a') = f(x, V) = 0.$$

- $t(a) = x = i(b)$, même chose, a et b sont des arcs positifs

- La valeur du flot f' est $\omega(f') = f'(s, V) = f(s, V) + \Delta_C$ car de s part un arc positif de la chaîne C, et donc le flot f n'est pas maximum.

(ii) $\rightarrow$ *(iii)*. Supposons donc qu'il n'existe pas de chaîne améliorable de s à p. Posons

$$X = \{s\} \cup \{x \in V, \text{il existe une chaîne améliorable de } s \text{ à } x\}.$$

Alors $(X, \bar{X})$ est une coupe car par hypothèse $p \notin X$. Mais alors

- Pour tout arc a, $i(a) \in X$ et $t(a) \in \bar{X}, f(a) = c(a)$ car sinon, il y aurait une chaîne améliorable de s à $t(a)$ (prendre une chaine améliorable de s à $i(a)$ et ajouter a), ce qui n'est pas possible par définition de $\bar{X}$.
- De même, pour tout arc a de $\bar{X}$ vers $X, f(a) = 0$. Par suite, d'après le corollaire 10 on a
$$\omega(f) = f(X, \bar{X}) = \sum_{i(a) \in X, t(a) \in \bar{X}} f(a) = c(X, \bar{X}).$$

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*. D'après le théorème de Ford Fulkerson, on a toujours $\omega(f) \leq c(X, \bar{X})$. Par suite *(iii)* implique que f est maximum et que $(X, \bar{X})$ est une coupe minimum.

$\blacksquare$

Corollaire 6.3.3

Dans tout réseau, il existe un flot maximum tel que pour tout arc a on ait $f(a) \in \mathbb{N}$.

► Soit f_0 le flot initial défini par $f(a) = 0$ pour tout arc $a \in E$. Soit, ce flot est maximum et c'est fini, soit il existe une chaine améliorante C de s à p. La valeur Δ_C est alors entière car la capacité est une fonction à valeur dans $\mathbb{N}$; par suite le flot construit f' est à valeur entière. Soit il est maximum et c'est terminé, soit on réitère le procédé. ■

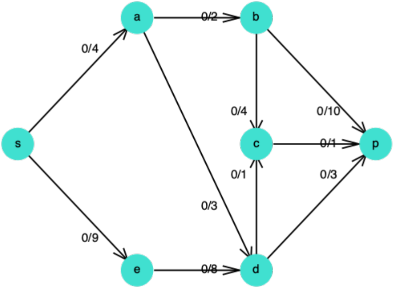
Théorème 6.3.4 – Ford et Fulkerson 1956

La valeur totale maximum d'un flot dans un réseau est égale à la capacité d'une coupe minimum.

Initialisation
pour $a \in E$ **faire**
    $f(a) = 0$
fin pour
$l(s) = (+, \infty)$ {labélisation de s, le signe donne la direction de l'arc de sommet initial s, le nombre donne la valeur d'augmentation du flot}
pour $x \in V$ **faire**
    $u(x) =$ **false** {initialisation du marquage}
    $\Delta(x) = \infty$
fin pour
Calcul itératif de chaîne améliorables et mise à jour du flot
répéter
    {Calcul d'une chaîne améliorable}
    Choisir parmi les sommets x tel que $u(x) =$**false** celui qui a été le premier labélisé
    {Calcul de $\Delta(y)$ pour un arc positif}
    pour $a \in E$ tel que $i(a) = x$ **faire**
        $y = t(a)$
        si y n'est pas labélisé **and** $f(a) < c(a)$ **alors**
            $\Delta(y) = \min\{c(a) - f(a), \Delta(x)\}$ **and** $l(y) = (x, +, \Delta(y))$
        fin si
    fin pour
    {Calcul de $\Delta(y)$ pour un arc négatif}
    pour $a \in E$ tel que $t(a) = x$ **faire**
        $y = i(a)$
        si y n'est pas labélisé **and** $f(a) > 0$ **alors**
            $\Delta(y) = \min\{f(a), \Delta(x)\}$ **and** $l(y) = (x, -, \Delta(y))$
        fin si
    fin pour
    $u(x) =$**true**
    si On a une chaîne améliorante **alors**
        Mettre à jour le flot
        Re-initialiser le marquage des sommets et l'étiquetage
    fin si
jusqu'à $u(x) =$**true** pour tout sommet qui a été labelisé
$X =$ l'ensemble des sommets labelisés
$\bar{X} = V \setminus X$

{Test si on a une chaîne améliorable}
si p est labélisé **alors**
{Calcul de l'écart minimal $\Delta = \min_y \Delta(y)$ sur C et mise à jour du flot}
$\Delta = \Delta(p)$
$y = p$
tant que $y \neq s$ **faire**
$x =$ la première composante du label $l(y)$
si le signe de $l(y)$ est $+$ **alors**
$f(a) = f(a) + \Delta$
sinon
$f(a) = f(a) - \Delta$
fin si
$y = x$
fin tant que
{Re-initialiser le marquage des sommets et l'étiquetage}
pour $x \in V$ **faire**
$l(x) = \textit{vide}$ {Re-initialisation de l'étiquetage}
fin pour
$l(s) = (+, \infty)$ {étiquetage de s}
pour $x \in V$ **faire**
$u(x) =$ **false**
$\Delta(x) = \infty$
fin pour
fin si

Exercice 6.3.2. Appliquer l'algorithme sur l'exemple suivant



l'étiquetage des arcs est flot/capacité

On note f_{ij} le flot de l'arc $(i,j) \in E$, le problème du flot maximum peut alors s'écrire

$$(PL) \begin{cases} Max\ v \\ \sum_{k \in S(s)} f_{sk} = v \\ \sum_{k \in S(j)} f_{jk} - \sum_{i \in P(j)} f_{ij} = 0,\ \forall j \neq s, p \\ \sum_{i \in P(p)} f_{ip} = v \\ 0 \leq f_{ij} \leq c_{ij},\ \forall (i,j) \in E \end{cases}$$

Les inconnues sont la valeur du flot v et les f_{ij}.

Exercice 6.4.1. Soit A la matrice d'incidence du graphe. On note

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} (f_{sk})_{k \in S(s)} \\ \vdots \\ f_{ij} \\ \vdots \\ (f_{ip})_{i \in P(p)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} (c_{sk})_{k \in S(s)} \\ \vdots \\ c_{ij} \\ \vdots \\ (c_{ip})_{i \in P(p)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ +v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Écrire (PL) à l'aide de ces matrices.