2ième année Sciences du Numérique

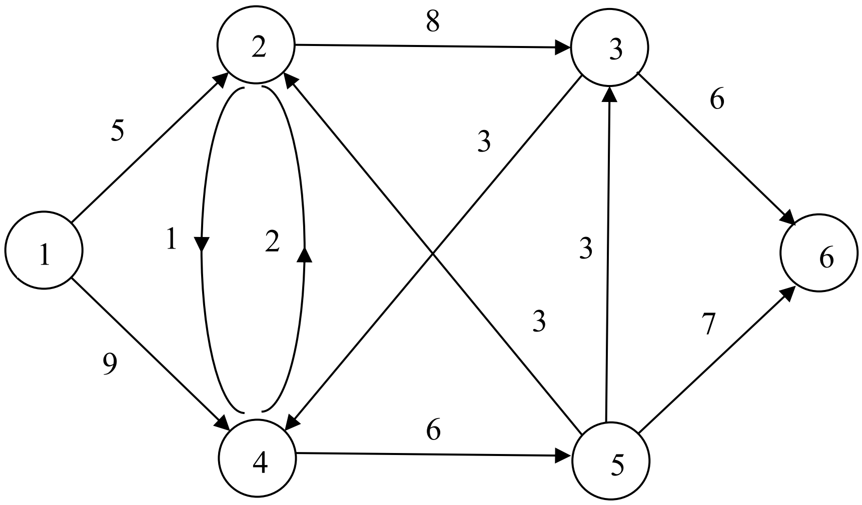
Contrôle de Théorie de Graphes - Vendredi 14 janvier 2022 – 08h00 – Riadh DHAOU, Gentian JAKLLARI

(Aucun document n'est autorisé à part une feuille A4)

Durée : 1 heure 30 - Nombre de pages : 2 pages

Exercice 1 : Flot maximal, coupe minimale

Q1) Donner une coupe minimale du graphe suivant (Source : 1, Puit : 6) : [0.5 point]



La coupe minimale Cmin= {36,45} ; On vérifia que la coupe minimale est égale au flot maximal donné dans la question 2.

Q2) Déterminer le flot maximal en appliquant l'algorithme de **Ford-Fulkerson**. [1.5 point]

Le flot le long des chemins suivants est pour 1236 : 5 ; 14236 :1 ; 1456 : 6

La valeur du flot maximal est Fmax = 12

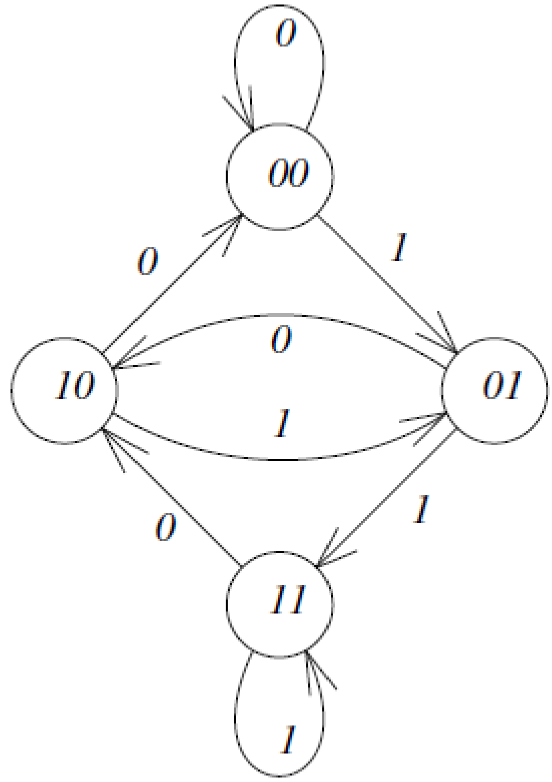
Q3) Est–il possible d'augmenter la valeur du flot maximal de 2 en augmentant la capacité d'un seul arc du graphe? Justifier. [1 point]

Les valeurs associées aux deux coupes {12, 42, 45} et {36, 56} sont égales à la valeur de la coupe minimale +1. On ne peut donc pas augmenter la valeur du flot de 2 en augmentant la capacité d'un seul arc du graphe.

Exercice 2 : Modélisation et Parcours de graphes [2 points sur le modle+2 points sur la preuve]

Considérez la séquence 01110100 comme étant disposée selon un motif circulaire. Notez que chacun des huit triplets binaires possibles : 000, 001, 011, …, 111 apparait exactement une fois dans la liste circulaire. Pouvez-vous construire une liste similaire de longueur 16 où les quadruplets binaires apparaissent exactement une fois chacun ? De longueur 32 où les quintuplés binaires apparaissent exactement une fois ?

(Modéliser le problème par un graphe pour répondre aux questions)



Considérons la figure précédente. C'est un graphe à quatre sommets, chacun étiqueté avec l'une des paires possibles de chiffres binaires. Imaginez que chacun représente les deux derniers chiffres du modèle jusqu'à présent. Les flèches partant d'un sommet sont étiquetées 0 ou 1 : les deux valeurs pour le chiffre suivant qui peut être ajouté au modèle, et les extrémités des flèches indiquent les nouveaux deux chiffres. Pour obtenir toutes les combinaisons à trois chiffres possibles, nous devons parcourir le graphe avec un cycle eulérien. En raison du résultat du problème précédent, il y a toujours deux arcs sortants et deux arcs entrants pour chaque sommet, et il doit y avoir un circuit eulérien.
La situation est la même pour n'importe quel nombre de chiffres sauf que le graphique deviendra plus complexe. Pour la version à 4 chiffres, il y aura 8 sommets et 16 arêtes. Mais dans tous les cas, il y aura deux arêtes entrant et deux sortants de chaque sommet, donc un circuit eulérien est possible.

<u>Exercice 3 : Coloration de graphes</u>

Q1) Supposons qu'un graph G a n sommets et un nombre chromatique k. Démontrer que G a au moins $\binom{k}{2}$ arêtes. [3 points]

Proof by contradiction: Let us assume m < $\binom{k}{2}$. Consider the graph H created by associating a vertex u_i for every color class C_i of G (the set of vertices in G colored with color i), where $1 \leq i \leq k$ and $u_i, u_j \in E(H)$ if and only if there's an edge between any vertex in C_i and any vertex in C_j. Since $|E(G)| < \binom{k}{2}$ it follows that $|E(H)| < \binom{k}{2}$ and, thus, H is not a complete graph. Therefore, there must be two color classes in G with no edges between them. The vertices of these two classes can be colored using the same color, producing a k-1 coloring of G and, therefore, contradicting the fact that G's chromatic number is k.

Q2) Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer qu'un graphe de degré maximal k peut être coloré en utilisant au plus (k+1) couleurs [2 points]

A simpler version of the proof of the 5-color theorem.

<u>Exercice 4 : Arbre couvrant</u> [3 points]

3/2

Q1) Soit (u,v) une arête de poids minimum dans un graphe connecté G. Montrer que (u,v) appartient à un arbre couvrant de poids minimum de G.

Proof by contradiction: Assume (u,v) does not belong in any minimum spanning tree. Let T a minimum spanning tree of G. There must be a path in T from u to v and adding (u,v) to this path would create a circle. We can break the circle by removing any other edge of the path and replace it with (u,v). This would create a spanning tree T’ whose weight would be less (contradicting that T is a minimum spanning tree) or equal to that of T, contradicting that (u,v) does not belong in any minimum spanning tree.!

Exercice 5 : Diamètre, excentricité, rayon d’un graphe

Soit G = (V;E) un graphe connexe et v ∊ V. Introduisons les notions suivantes :

1. Le **diamètre** d’un graphe G, D(G) est la longueur maximale des plus courts chemins.
2. L'**excentricité** du sommet *v*, e(v), est le maximum des distances de *v* à tout autre sommet du graphe ;
   c'est-à-dire e(v)= max { d(v, x) avec x ∊ V}.
3. Le **rayon** de G, r(G), est le minimum des excentricités des sommets de G ;
   c'est-à-dire r(G) = min {e(v) avec v ∊ V}.
4. Un **sommet central** de G est un sommet u tel que e(u) = r(G).

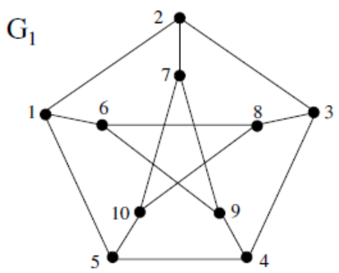
Répondre aux questions suivantes :

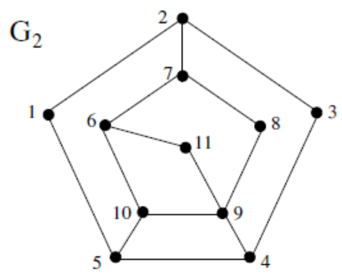
Q1) Trouver les excentricités, le rayon et les sommets centraux de : [0.5 point / Graphe]

a) Les deux graphes G1 et G2 :

Pour G1, e(si)=2, pour i=1..10, tous les sommets sont centraux. r(G1)=2
Pour G2, e(si)=4, pour i =1,11 et e(sj)=3 pour j=2..10 (ces sommets sj sont centaux). r(G2)=3

b) Le graphe G3 = ([8]; {12; 14; 15; 23; 34; 38; 46; 47; 56; 67; 78}).
Pour G3, e(s4)=2, e(si)=3 pour i ≠4. Le sommet s4 est central. r(G3)=2





Q2) Donnez un exemple de graphe avec un rayon égal au diamètre. [0.5 point]
K3
Q3) Donner un exemple de graphe dont le diamètre est le double de son rayon. [0.5]
Une chaine de longueur 2
Q4) Montrer que, pour chaque graphe G, r(G)≤ D(G) ≤ 2r(G). [1 point]

Étant donné que le rayon est l'excentricité minimale de tout sommet et que le diamètre est le maximum, le rayon ne peut pas être supérieur au diamètre.
Soient u et v des sommets de G tels que d(u; v) = diamG. Soit w un sommet central tel que e(w) = r(G). Cela signifie qu'aucun sommet n'est à une distance supérieure à r(G) de w. En particulier d(u;w) et d(v;w) sont tous deux inférieurs ou égaux à r(G). Donc, d(u;w) + d(v;w) ≤ 2 r(G).
Par l'inégalité triangulaire, d(u; v) ≤ d(u;w)+d(v;w). Ceci établit que r(G) ≤ d(G) ≤ 2 r(G).

Q5) Montrer que chaque graphe G admet un sous-graphe biparti avec au moins la moitié des arêtes de G. [1 point]

4/2

Preuve par récurrence :

Ceci peut être prouvé par récurrence sur le nombre de nœuds n dans le graphe. Il est clair que le cas de base de $n = 0$ (ou $n = 1$) est vrai, car il n'y a pas d'arêtes. Maintenant, imaginez ajouter un nœud à un graphe G pour créer un nouveau graphe G′. Par récurrence, on sait que G admet un sous-graphe biparti contenant au moins la moitié de ses arêtes. Soient U et V les partitions des nœuds de ce sous-graphe biparti. Considérons maintenant le nouveau nœud ajouté à G pour former G′. Ce sommet est adjacent à des sommets en en U ou en V, alors au moins la moitié des arêtes qui lui sont incidentes sont incidentes en U ou en V. Disons qu'au moins la moitié des arêtes sont incidentes a des sommets de U. On peut alors facilement former un sous-graphe biparti sur G′ en ajoutant le nouveau nœud à V, et en ignorant toutes ses autres arêtes.

Deuxième preuve (méthode de commutation):

On part de n'importe quelle partition de l'ensemble des sommets du graphe G en deux ensembles X et Y. L'utilisation des arêtes ayant une extrémité dans chaque ensemble donne un sous-graphe biparti H avec des partitions X et Y.

Si H a au moins a(G)/2 arêtes, la preuve est complète.

Si pour chaque sommet x de H, $\delta_H(x) \geq \delta_G(x)/2$, alors en appliquant la formule de la somme des degrés on a le nombre d'arêtes $a(H) \geq a(G)/2$ et la preuve est complète.

Supposons qu'il existe un sommet dans une partition de H, disons $v \in X$, que $\delta_H(v) < \delta_G(v)/2$. Nous déplaçons v de X vers Y. Donc, maintenant $\delta_H(v) \geq \delta_G(v)/2$.

Nous répétons cet algorithme jusqu'à ce que pour chaque sommet x de H, $\delta_H(x) \geq \delta_G(x)/2$. Il est clair que cet algorithme doit se terminer. Maintenant, en appliquant la formule de la somme des degrés, nous avons $a(H) \geq a(G)/2$ et la preuve est complète.

Q6) Soit G un graphe d'ordre *n*. Montrer que si le graphe à 2*n*-1 arêtes alors il contient un cycle de longueur paire. [0.5]

Nous avons montré dans la question 5 que le graphe contient un sous-graphe biparti H avec Card (A(H)) > Card (A(G))/2.

On a pour H, ordre de $H \leq n$ et Card $(A(H)) \geq n$. Donc, H contient un cycle (sinon H est une forêt, et le nombre d'arêtes dans une forêt est strictement inférieur au nombre de sommets). Puisque H est un graphe biparti, ce cycle est de longueur paire.