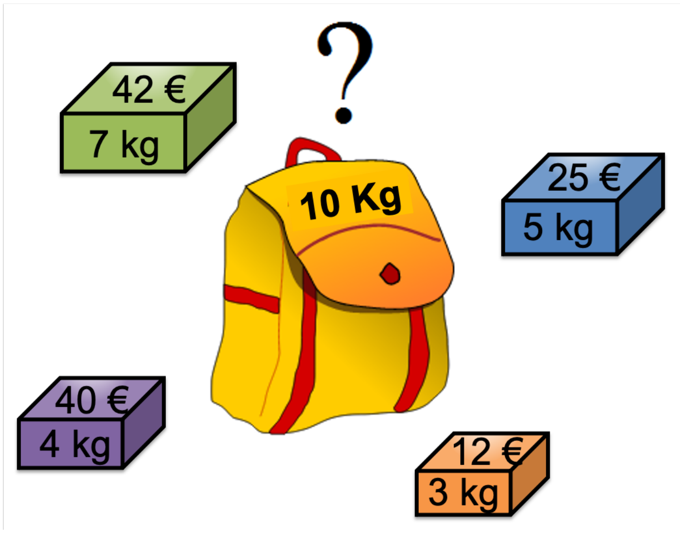
Programmation Linéaire en Nombres Entiers
II. Branch-and-Bound (Procédures de séparation et évaluation)

Sandra U. Ngueveu

INP-ENSEEIHT / LAAS-CNRS
sandra.ngueveu@toulouse-inp.fr - ngueveu@laas.fr

2021/2022

Cas illustratif : le problème du sac à dos (PS)



Données :

- sac à dos de capacité Q,
- $n = 4$ objets disponibles,
- l'objet i a un poids w_i et un coût c_i

Quels objets choisir pour maximiser le coût total en respectant la capacité du sac à dos ?

Variables

?

Fonction-objectif

?

Contraintes

?

Domaine

?

1 Relaxations et calculs de bornes

2 Arbre de décision / Arborescence

3 *Branch-and-bound*

4 Règles à respecter pour un algorithme correct

5 Exemples d'applications

Relaxation d'un PLNE

Soient deux problèmes (P) et (RP), soient $S_{(P)}$ et $S_{(RP)}$ les ensembles de solutions de ces problèmes, et soient $s^*_{(P)}$ et $s^*_{(RP)}$ leurs solutions optimales.

- Relaxation

  (RP) est relaxation de (P) si et seulement si $S_{(P)} \subset S_{(RP)}$

- Relaxation linéaire

  (RP) est relaxation linéaire de (P) si et seulement si
  $(\text{P}) = (\text{RP}) \cup \{\text{contraintes d'integralite}\}$

- Autres types de relaxations

  suppression ou agrégation de contraintes
  relaxation Lagrangienne
  ...

NB1 : Si (P) est un problème de minimisation, alors $f(s^*_{(RP)}) \leq f(s^*_{(P)})$.
NB2 : Si la solution optimale de (RP) est réalisable pour (P), alors elle est une solution optimale de (P).

Borne Inférieure (BI) et Borne Supérieure (BS)

Définitions (pour un problème de maximisation)

- BS = toute valeur supérieure ou égale à la valeur optimale
- BI = toute valeur inférieure ou égale à la valeur optimale

Comment obtenir des bornes pour un problème de maximisation) ?

- BI : le coût de toute solution réalisable fournit une borne inférieure
- BS : toute solution optimale d'une relaxation fournit une borne supérieure

Intérêt de BI : la solution correspondante est réalisable

Intérêts de BS :

- Evaluer la qualité d'une solution réalisable, en prouver l'optimalité
- Estimer l'écart à l'optimum alors qu'on ne connait pas la solution optimale
- Evaluer s'il est pertinent d'allouer plus de temps de calcul à la recherche d'une meilleure solution

Exemple de calcul de borne pour le problème du sac à dos

Borne 1 = capacité $\times \max_i r_i$ où $r_i = \frac{c_i}{w_i}$
Borne 2 : résoudre la relaxation linéaire (appelé problème du sac à dos fractionnaire - PSF)

$$(PSF) \max 42x_1 + 40x_2 + 12x_3 + 25x_4 \quad (1)$$

s.c.

$$7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10 \quad (2)$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \forall i \in \{1,2,3,4\} \quad (3)$$

(PSF) peut être résolution par un algorithme de programmation linéaire tel que simple. Mais il peut aussi être résolu par un algorithme polynomial basé sur le tri de tous les objets par ordre décroissant de ratio r_i

- Appliquer l'algorithme pour obtenir une borne supérieure de (PS)
- Que peut-on en déduire ?

1 Relaxations et calculs de bornes

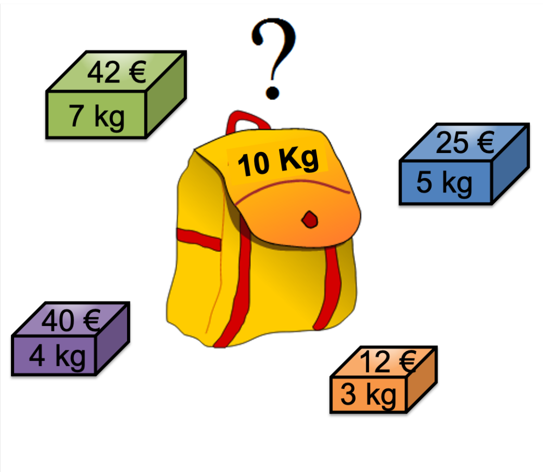
2 Arbre de décision / Arborescence

3 *Branch-and-bound*

4 Règles à respecter pour un algorithme correct

5 Exemples d'applications

Arbre de décision / Arbre des sous-problèmes



$$\max 42x_1 + 40x_2 + 12x_3 + 25x_4 \quad (4)$$

s.c.

$$7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10 \quad (5)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \quad (6)$$

- Construire un arbre de décision associé au problème
- En déduire l'arbres des sous-problèmes associés

L'arbre a 2^n feuilles ($\Rightarrow$ explosion combinatoire)

MAIS si nous pouvions identifier quels sous-arbres contiennent la solution optimale, alors nous pourrions réduire drastiquement l'espace de recherche

1 Relaxations et calculs de bornes

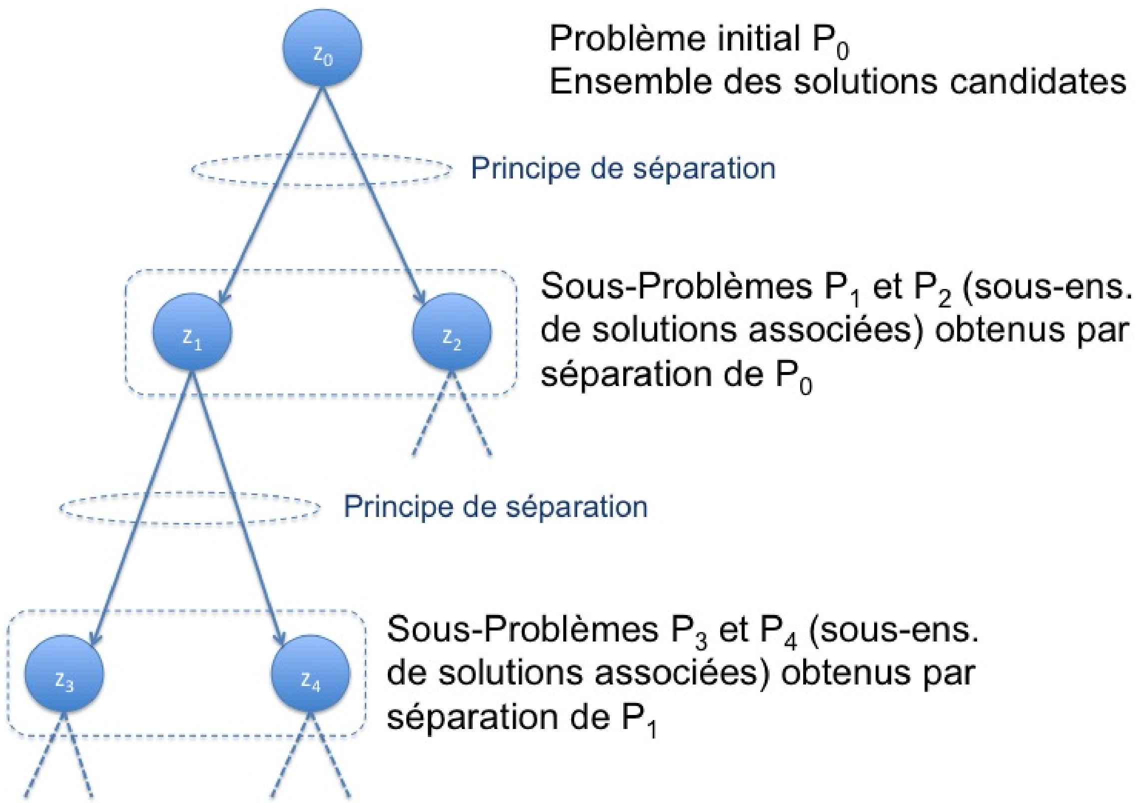
2 Arbre de décision / Arborescence

3 *Branch-and-bound*

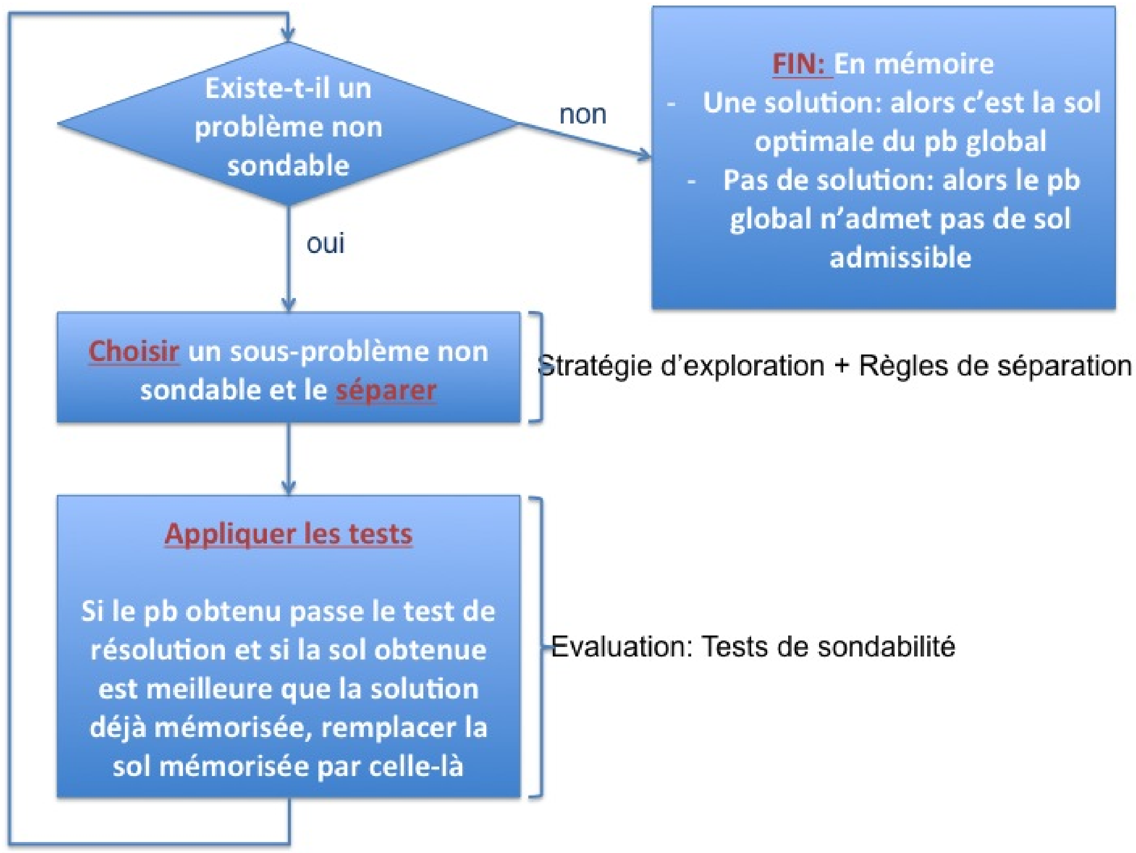
4 Règles à respecter pour un algorithme correct

5 Exemples d'applications

Branch-and-Bound pour PLNE



Branch-and-Bound pour PLNE



Branch-and-Bound pour PLNE

Principe :

- Séparer progressivement le problème en sous-problèmes traitables (aussi appelés "sondables")

Objectif

- Enumérer intelligemment l'espace des solutions
- Hiérarchiser les sous-problèmes sous forme d'arbre
- "tuer" des branches/nœuds au plus tôt lors de l'exploration de l'arbre

3 composantes :

- Règle de Séparation
- Tests de Sondabilité (souvent basés sur des bornes)
  - Test Admissibilité, Test Optimalité, Test Résolution
- Stratégie d'exploration

Exemple de B&B pour résoudre le problème du sac à dos

$$(PS) \max 42x_1 + 40x_2 + 12x_3 + 25x_4 \tag{7}$$

s.c.

$$7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10 \tag{8}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \tag{9}$$

1. Règle de séparation
   - choisir la 1ère variable fractionnaire x_k dans l'ordre décroissant du ratio
   - 2 sous-problèmes : $x_k = 0$ et $x_k = 1$
2. Tests de sondabilité : basés sur les bornes supérieures (BS)
   - Test d'Admissibilité : réussi si la capacité restante est négative
   - Test d'Optimalité : réussi si BS est pire que la meilleure solution connue de (PS)
   - Test de Résolution : réussi si la solution optimale de (FPS) est entière
3. Stratégie d'exploration
   - priorité au noeud ayant la plus grande BS

1 Relaxations et calculs de bornes

2 Arbre de décision / Arborescence

3 *Branch-and-bound*

4 Règles à respecter pour un algorithme correct

5 Exemples d'applications

Principe de Séparation

- Aucune solution ne doit être perdue ou ajoutée
  - l'union des ss-pbs reforme le pb de départ
- Souvent un choix heuristique validé par des tests numériques
  - choix glouton (ex : le plus petit arc libre pour PVC)
  - choix le plus informant (ex : la var présente dans le plus grd nbre de contraintes)
  - ...
- Le but est :
  - soit de précipiter la découverte d'une nouvelle solution
  - soit de détecter au plus vite des contradictions prouvant qu'un nœud est vide
- Une séparation poussée à l'extrême revient à fragmenter en ss-ens à une solution, donc nbre exponentiel de nœuds explorés (énumération complète). Pour éviter cela, on évite de séparer le nœud-père en "trop" de nœuds fils et on compte sur les tests TA,TO,TR pour réduire l'arborescence en identifiant au plus tôt les nœuds qui ne valent pas la peine d'être séparés à nouveau.

Par convention, les nœuds sont souvent numérotés dans l'ordre de leur création.

Stratégie d'Exploration

Il s'agit de définir l'ordre suivant lequel les nœuds seront étudiés

PSEP

- Priorité au nœud qui donne la meilleure borne (BS en maximisation, BI en minimisation)
- Avantage : Les sol réalisables trouvées sont tt de suite de très bonne qualité
- Inconvénient : Requiert plus de mémoire (liste des nœuds non séparés)

PSES

- Priorité toujours "à gauche" (1er des noeuds-fils nouvellement créés)
- Avantage : Requiert moins d'espace mémoire, Trouve plus vite une solution réalisable
- Inconvénient : Globalement moins rapide que PSEP

Autres

- Probabilité sur le choix de la prochaine branche à explorer
- ...

Les tests numériques et les contraintes technologiques (espace mémoire, ...) permettent de valider/invalider le choix d'une stratégie d'exploration par rapport à une autre.

Tests de Sondabilité

Un nœud est sondable si on peut répondre "OUI" à un des 3 tests suivants :

TA : Test d'admissibilité = montrer que (mq) il n'y a pas de solution admissible

- ex1 : si contrainte du type $\geq b_i$, alors évaluer un majorant G_i^k du membre de gauche. Si $G_i^k < b_i$ alors même dans le meilleur des cas on ne pourra pas valider cette contrainte, donc inutile de continuer sur cette branche, "tuer" le nœud correspondant
- ex2 : raisonnement inverse si contrainte du type $\leq b_i$
- ex3 : mq une relaxation du problème est déjà infaisable

TO : Test d'optimalité = mq la sol optimale ne peut pas être au sein de ce nœud

- mq les coûts des sols du nœud seront toujours pires que celui d'une solution déjà connue
- ex : calcul de BINF (E_i) à comparer avec le coût d'une solution déjà connue (préalablement obtenue par le même B&B ou un autre algorithme)

TR : Test de résolution = mq le sous-problème se résoud de manière triviale

- sous-problème à une seule variable
- sous-problème polynomial

Tests de Sondabilité

Actions

- Un nœud sondable peut être éliminé.
- Un nœud non sondable doit être séparé en plusieurs ss-pbs suivant la règle de séparation prévue.

Un *branch-and-bound* efficace trouve un compromis entre la qualité des résultats fournis par les tests et l'investissement accepté en temps et volumes de calculs, car ces calculs doivent être faits pour chaque nœud exploré.

Branch-and-bound classique pour PLNE généraux

1. Règle de séparation
   - choisir une variable x_k ayant la valeur la plus fractionnaire notée v^* dans la solution optimale de la relaxation
   - 2 sous-problèmes : $x_k \leq \lceil v^* \rceil$ et $x_k \geq \lfloor v^* \rfloor$
2. Tests de sondabilité : basés sur la résolution de la relaxation linéaire (RL) du noeud courant pour obtenir des bornes
   - Test d'Admissibilité : réussi si (RL) est infaisable
   - Test d'Optimalité : réussi si la solution de LR est pire que la meilleure solution connue
   - Test de Résolution : réussi si la solution optimale de LR est entière
3. Stratégie d'exploration
   - priorité au noeud ayant la meilleure borne

1 Relaxations et calculs de bornes

2 Arbre de décision / Arborescence

3 *Branch-and-bound*

4 Règles à respecter pour un algorithme correct

5 Exemples d'applications

Application 1 : Méthode arborescente de Dakin

$$(\mathrm{P})\ \max f(x) = 4x_1 + 3x_2 \tag{10}$$

s.c.

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12 \tag{11}$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 9x_i \in \{0,1\} \quad \mathrm{i} = 1,2 \tag{12}$$

Résoudre (P) par *branch-and-bound* à l'aide des paramètres suivants :

1. Critère de séparation :
   - variable la plus fractionnaire
2. Tests de Sondabilité
   - TA : réussi si la relaxation linéaire (RL) n'a pas de solution admissible
   - TO : réussi si la solution de la RL est pire que la meilleure solution connue
   - TR : réussi si la solution de la RL est entière
3. Stratégie d'Exploration
   - priorité au sous-problème non sondable de meilleure borne

Arborescence résultante visible sur la figure 2.4 en page 41 du livre de C. Prins

Application 2

$$(\mathrm{P})\ \min f(x) = 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + x_5 \tag{13}$$

s.c.

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 - 4x_5 + 2 \geq 0 \tag{14}$$
$$-2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 \geq 0 \tag{15}$$
$$-x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 \geq 0 \tag{16}$$
$$x_i \in \{0,1\} \quad \mathrm{i} = 1, ..., 5 \tag{17}$$

Résoudre (P) par *branch-and-bound* à l'aide des paramètres suivants :

1. Critère de séparation :
   - variable de plus grand coefficient dans $f(x)$
   - 2 sous-problèmes : var = 1 ou var = 0
2. Tests de Sondabilité
   - TA : éval des contraintes en majorant le membre de gauche ($= G_i^k$)
   - TO : éval d'une borne ($= E_k$) de la fction-obj, comparaison avec sol si connue
   - TR : si le sous-problème obtenu est trivial à résoudre
3. Stratégie d'Exploration
   - PSEP : priorité au sous-problème non sondable de meilleure borne
   - PSES : priorité au sous-problème "à gauche"

* **Résolution par P.S.E.S. :**

Mémorisation :

~~$x_3=1$ $x_2=1$ $x_1=1$ $x_4=0$ $x_5=0$ $f=22$~~

$x_3=1$ $x_2=1$ $x_1=0$ $x_4=0$ $x_5=0$ $f=17$

0

Min $f(x)=5x_1+7x_2+10x_3+3x_4+x_5$ $E_0=0$

$x_1-3x_2+5x_3+x_4-4x_5+2 \geq 0$ $G_1^0 = 1+5+1+2 = 9$
$-2x_1+6x_2-3x_3-2x_4+2x_5 \geq 0$ $G_2^0 = 6+2 = 8$
$-x_2+2x_3-x_4-1 \geq 0$ $G_3^0 = 2-1 = 1$
$x_i \in \{0,1\}$ $i = 1,\ldots,5$

$x_3=1$ → **1**

Min $f(x)=5x_1+7x_2+3x_4+x_5+10$ $E_1=10$

$x_1-3x_2+x_4-4x_5+7 \geq 0$ $G_1^1 = 2+7 = 9$
$-2x_1+6x_2-2x_4+2x_5-3 \geq 0$ $G_2^1 = 8-3 = 5$
$-x_2-x_4+1 \geq 0$ $G_3^0 = 0+1 = 1$
$x_i \in \{0,1\}$

$x_3=0$ → **2**

Min $f(x)=5x_1+7x_2+3x_4+x_5$ $E_2=0$

$x_1-3x_2+x_4-4x_5+2 \geq 0$ $G_1^2 = 2+2 = 4$
$-2x_1+6x_2-2x_4+2x_5 \geq 0$ $G_2^2 = 8$
$-x_2-x_4-1 \geq 0$ $G_3^2 = 0-1=-1$
$x_i \in \{0,1\}$

S → TA

$x_2=1$ → **3**

Min $f(x)=5x_1+3x_4+x_5+17$ $E_3=17$

$x_1+x_4-4x_5+4 \geq 0$ $G_1^3 = 2+4 = 6$
$-2x_1-2x_4+2x_5+3 \geq 0$ $G_2^3 = 5$
$-x_4 \geq 0$ $G_3^3 = 0$
$x_i \in \{0,1\}$

$x_2=0$ → **4**

Min $f(x)=5x_1+3x_4+x_5+10$ $E_4=10$

$x_1+x_4-4x_5+7 \geq 0$ $G_1^4 = 2+7 = 9$
$-2x_1-2x_4+2x_5-3 \geq 0$ $G_2^4 = 2-3 = -1$
$-x_4+1 \geq 0$ $G_3^4 = 0+1 = 1$
$x_i \in \{0,1\}$

S → TA

$x_1=1$ → **5**

Min $f(x)=+3x_4+x_5+22$ $E_5=22$

$+x_4-4x_5+5 \geq 0$ $G_1^5 = 1+5 = 6$
$-2x_4+2x_5+1 \geq 0$ $G_2^5 = 2+1 = 3$
$-x_4 \geq 0$ $G_3^5 = 0$
$x_i \in \{0,1\}$

$x_1=0$ → **6**

Min $f(x)=+3x_4+x_5+17$ $E_6=17$

$+x_4-4x_5+4 \geq 0$ $G_1^6 = 5$
$-2x_4+2x_5+3 \geq 0$ $G_2^6 = 5$
$-x_4 \geq 0$ $G_3^6 = 0$
$x_i \in \{0,1\}$

$x_4=1$ → **7**

Min $f(x)=+x_5+25$ $E_7=25$

$-4x_5+6 \geq 0$ $G_1^7 = 6$
$+2x_5-1 \geq 0$ $G_2^7 = 1$
$-1 \geq 0$ $G_3^7 = -1$
$x_i \in \{0,1\}$

S → TA

$x_4=0$ → **10**

Min $f(x)=+x_5+17$ $E_{10}=17$

$-4x_5+4 \geq 0$ $G_1^{10} = 4$
$+2x_5+3 \geq 0$ $G_2^{10} = 5$
$0 \geq 0$ $G_3^{10} = 0$
$x_i \in \{0,1\}$

S → TR
$(x_5=0)$

$x_4=0$ → **8**

Min $f(x)=+x_5+22$ $E_8=22$

$-4x_5+5 \geq 0$ $G_1^8 = 5$
$+2x_5+1 \geq 0$ $G_2^8 = 3$
$-x_4 \geq 0$ $G_3^8 = 0$
$x_i \in \{0,1\}$

S → TR
$(x_5=0)$

$x_4=1$ → **9**

Min $f(x)=+x_5+20$ $E_9=20$

$-4x_5+5 \geq 0$ $G_1^9 = 5$
$+2x_5-1 \geq 0$ $G_2^9 = 3$
$-1 \geq 0$ $G_3^9 = -1$
$x_i \in \{0,1\}$

S → TA

* **Résolution par P.S.E.P. :**

Mémorisation :

$x_3=1$ $x_2=1$ $x_1=0$ $x_4=0$ $x_5=0$ $f=17$

0

Min $f(x)=5x_1+7x_2+10x_3+3x_4+x_5$ $\quad E_0=0$

$x_1-3x_2+5x_3+x_4-4x_5+2 \geq 0$ $\quad G_1^0 = 1+5+1+2=9$
$-2x_1+6x_2-3x_3-2x_4+2x_5 \geq 0$ $\quad G_2^0 = 6+2=8$
$-x_2+2x_3-x_4-1 \geq 0$ $\quad G_3^0 = 2-1=1$
$x_i \in \{0,1\}$ $\quad i=1,\ldots,5$

$x_3=1$ $\quad$ $x_3=0$

1

Min $f(x)=5x_1+7x_2+3x_4+x_5+10$ $\quad E_1=10$

$x_1-3x_2+x_4-4x_5+7 \geq 0$ $\quad G_1^1 = 2+7=9$
$-2x_1+6x_2-2x_4+2x_5-3 \geq 0$ $\quad G_2^1 = 8-3=5$
$-x_2-x_4+1 \geq 0$ $\quad G_3^0 = 0+1=1$
$x_i \in \{0,1\}$

2

Min $f(x)=5x_1+7x_2+3x_4+x_5$ $\quad E_2=0$

$x_1-3x_2+x_4-4x_5+2 \geq 0$ $\quad G_1^2 = 2+2=4$
$-2x_1+6x_2-2x_4+2x_5 \geq 0$ $\quad G_2^2 = 8$
$-x_2-x_4-1 \geq 0$ $\quad G_3^2 = 0-1=-1$
$x_i \in \{0,1\}$

$S \rightarrow$ TA

$x_2=1$ $\quad$ $x_2=0$

3

Min $f(x)=5x_1+3x_4+x_5+17$ $\quad E_3=17$

$x_1+x_4-4x_5+4 \geq 0$ $\quad G_1^3 = 2+4=6$
$-2x_1-2x_4+2x_5+3 \geq 0$ $\quad G_2^3 = 5$
$-x_4 \geq 0$ $\quad G_3^3 = 0$
$x_i \in \{0,1\}$

4

Min $f(x)=5x_1+3x_4+x_5+10$ $\quad E_4=10$

$x_1+x_4-4x_5+7 \geq 0$ $\quad G_1^4 = 2+7=9$
$-2x_1-2x_4+2x_5-3 \geq 0$ $\quad G_2^4 = 2-3=-1$
$-x_4+1 \geq 0$ $\quad G_3^4 = 0+1=1$
$x_i \in \{0,1\}$

$S \rightarrow$ TA

$x_1=1$ $\quad$ $x_1=0$

5

Min $f(x)=+3x_4+x_5+22$ $\quad E_5=22$

$+x_4-4x_5+5 \geq 0$ $\quad G_1^5 = 1+5=6$
$-2x_4+2x_5+1 \geq 0$ $\quad G_2^5 = 2+1=3$
$-x_4 \geq 0$ $\quad G_3^5 = 0$
$x_i \in \{0,1\}$

$S \rightarrow$ TO

6

Min $f(x)=+3x_4+x_5+17$ $\quad E_6=17$

$+x_4-4x_5+4 \geq 0$ $\quad G_1^6 = 5$
$-2x_4+2x_5+3 \geq 0$ $\quad G_2^6 = 5$
$-x_4 \geq 0$ $\quad G_3^6 = 0$
$x_i \in \{0,1\}$

$x_4=0$

8

Min $f(x)=+x_5+17$ $\quad E_8=17$

$-4x_5+4 \geq 0$ $\quad G_1^8 = 4$
$+2x_5+3 \geq 0$ $\quad G_2^8 = 5$
$0 \geq 0$ $\quad G_3^8 = 0$
$x_i \in \{0,1\}$

$S \rightarrow$ TR
$(x_5=0)$

$x_4=1$

7

Min $f(x)=+x_5+20$ $\quad E_7=20$

$-4x_5+5 \geq 0$ $\quad G_1^7 = 5$
$+2x_5-1 \geq 0$ $\quad G_2^7 = 3$
$-1 \geq 0$ $\quad G_3^7 = -1$ $\quad 17$
$x_i \in \{0,1\}$

$S \rightarrow$ TA

Résumé de ce qui a été vu

Branch-and-Bound

- Règles de Séparation
- Tests de sondabilité (TA, TO, TR)
- Stratégies d'exploration
- Exemples d'application

Pour aller plus loin

- Complexité
  - Comment identifier la complexité d'un problème
  - Méthodes de réduction polynomiale
- Résolution de problèmes polynomiaux
- Programmation dynamique
- Inégalités valides et méthodes de coupes