UG - Optimisation

Rappel. Algorithme des Regions de confiance (RC)

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ on cherche x tq $\|\nabla f(x)\| \leq \varepsilon \|\nabla f(x_0)\|$

on definit un ~~de~~ modele $s \to m_k(s)$ autour de x_k, supposé valide dans $\{s, \|s\|_2 \leq \Delta_k\}$, la RC de rayon Δ_k.

le modèle est $s \to f(x_k) + \nabla f(x_k)^T s + \frac{1}{2} s^T H_k s$ une matrice qui approche $\nabla^2 f(x_k)$

la qualite du modèle dans le RC est jugée au travers

de $f_k = \dfrac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{m_k(0) - m_k(s_k)}$ $f(x_k)$

$\begin{cases} \text{si } f_k \geq \mu_2 \text{ it. tres réussie } \Delta_{k+1} = \geq \Delta_k \\ \text{si } f_k \in [\mu_1, \mu_2[\text{ it. réussie } \Delta_{k+1} = \Delta_k \end{cases}$

et $x_{k+1} = x_k + s_k$

si $f_k < \mu_1$, iteration ratée : $\Delta_{k+1} = \frac{1}{2}\Delta_k$, $x_{k+1} = x_k$

Sa minimization "approximativement" $s \to m_k(s)$ sur $B(s_k, \Delta_k)$ au sens

où $m_k(0) - m_k(s_k) \geq \boxed{\frac{1}{2} \|\nabla f(x_k)\| \min\left(\Delta_k, \frac{\|\nabla f(x_k)\|_2}{\|H_k\|_2}\right)}$ decroissance de Cauchy.

cette décroissance est detenue par exemple en rodnaul.

$$\min_{\substack{t > 0 \\ t\|g_k\| \leq \Delta_k}} m_k(-t \cdot g_k)$$

on a que $m_k(s^*) \leq m(s_k^{*})$, donc

$$m_k(0) - m_k(s^*) \geq m_k(0) - m_k(s_k) \geq \frac{1}{2}\|g_k\| \min\left(\Delta_k, \frac{\|g_k\|_2}{\|H_k\|_2}\right).$$

on peut utiliser aussi le pas de Steihaug-Toint, issu de la méthode de Gradiant Conjugué.

On sintéresera à la méthode de GC pour le ss. ~~prong~~ problème

$$\min_{\|s\| \leq \Delta_k} f_k + g_k^T s + \frac{1}{2} s^T H_k s$$

Dans GC, on considère $K_j = \text{vect}(g_k, H_k g_k, H_k^{j-1} g_k)$

$K_1 = \text{vect}(g_k)$

et on cherche par des formules explicites

S_j solution de $\min_{s \in \mathcal{X}_j} m_k(s)$ $\nearrow$ 1° la solution s^* existe on l'accepte si elle est dans $B_k(x_k, \Delta_k)$

$\searrow$ 2° $\inf m_k(s) = -\infty$. $s \in \mathcal{X}_j$ on tronque S_j

Dans les 2 cas défavorables où $\inf_{s \in \mathcal{X}_j} m_k(s) = -\infty$ ou alors s^k sort de la RC, on cherche α tq $\|s_k + \alpha d_j\|_2^2 = \Delta_k^2$

Suite de la preuve de ~~conv~~ convergence de l'algo RC.

On suppose ⓐ $\inf f(x) > -\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$

ⓑ $\exists K_M$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|\nabla^2 f(x)\|_2 \leq K_M \geq 0$

ⓒ $\exists K_m$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|H_k\|_2 \leq K_m \geq 0$

ⓓ S_k vérifie la décroissance de CY.

Lemme : $\exists K_1 > 0$ tq $\Delta_k \leq K_1 \|g_k\|_2$, alors $|1 - \rho_k| \leq 1 - \mu_2$

conséquence : tq $\|\nabla f(x_k)\|_2 > \varepsilon$, on peut pas avoir $\Delta_k < K_2 \varepsilon$ avec $K_2 = \frac{K_1}{2}$

sinon soit j le premier telque $\Delta_j < K_2 \varepsilon$; $j-1$ était alors une itération ratée.

donc $\Delta_{j-1} < K_1 \varepsilon$, donc $j-1$ est une iteration des réussi.

donc $\Delta_j > \Delta_{j-1}$, contradiction avec $\Delta_k = \frac{\Delta_{j-1}}{2}$

aussi il existe $K_2 > 0$, telque tant que $\|\nabla f(x_k)\| > \varepsilon$, $\Delta_k > K_2 \varepsilon$

Théorème : sous la hypothèse ⓐⓑⓒⓓ, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k$ tq $\|\nabla f(x_k)\|_2 < \varepsilon$

Par contradiction : suppose que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|\nabla f(x_k)\| > \varepsilon$, ~~et on a~~ $\Delta_k > K_2 \varepsilon$

① Il est impossible de n'avoir que des itération ratée. sinon $\Delta_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$, et on a $\Delta_k > K_2 \varepsilon$

② l'algorithme des RC a donc des iterations reussies

③ soit $\mathcal{G}$ l'ensemble $\{k$, l'iteration k est reussie$\}$. Il ne peut pas de cardinal fini. Sinon, à partir de la dernière, toutes les its ratée

④ Il existe donc une infinite d'iterations dans $\mathcal{G}$.

alors pour $N \in \mathbb{N}$,

$f(x_0) - f(x_N) = \sum_{1 \leq k \leq N} (f(x_{k-1}) - f(x_k))$

$\geq \sum m_{k-1}(0) - m_{k-1}(S_{k-1})$