Programmation Linéaire en Nombres Entiers
I. Définition et principes généraux

Sandra U. Ngueveu

INP-ENSEEIHT / LAAS-CNRS
sandra.ngueveu@toulouse-inp.fr - ngueveu@laas.fr

2021/2022

Différences entre les cas continus et discrets

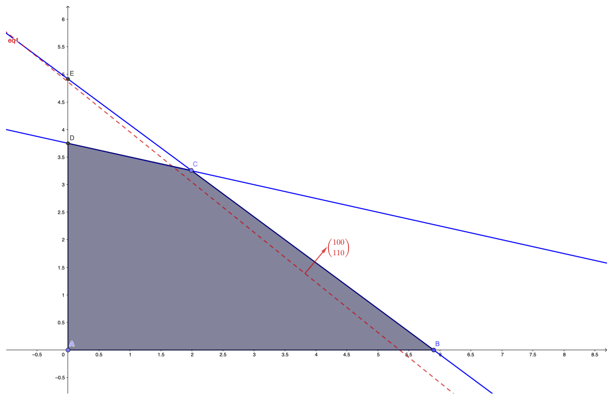
Problème (P1) = Fabrication de ciment avec nouvelles durées
Problème (P2) = (P1) + nouvelles règles :

- les ciments A and B doivent être stockés dans des sacs séparés d'1kg
- chaque sac utilisé doit être plein à la fin de la journée

$$(P2)\min 100x_A + 110x_B \qquad (1)$$

s.t.

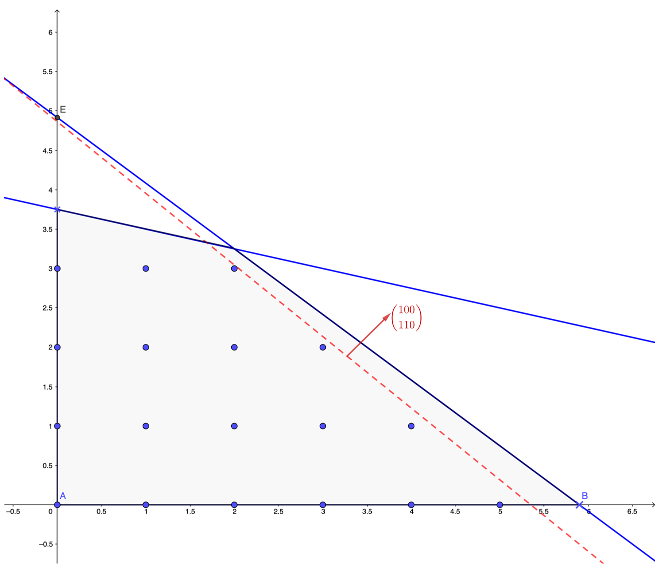
$$100x_A + 120x_B \leq 590 \qquad (2)$$
$$50x_A + 200x_B \leq 750 \qquad (3)$$
$$x_A, x_B \in \mathbb{N} \qquad (4)$$



- La solution optimale de (P1) n'est pas réalisable pour (P2)
- La localisation de la solution optimale de (P2) n'est pas évidente

Problem (P2) : fabrication et stockage de ciment

Représentation graphique de (P2)



ensemble de solutions réalisables ?

polyhèdre (convexe) ?

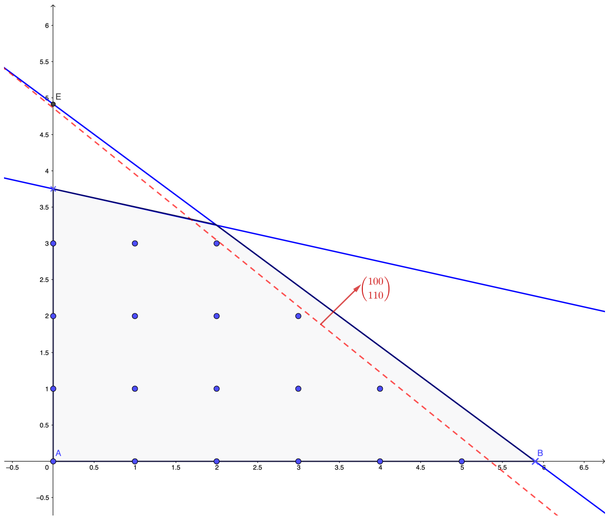
point extrémum vs points intérieurs ?

solution optimale ?

Arrondir les solutions de PL aux entiers les plus proches ?

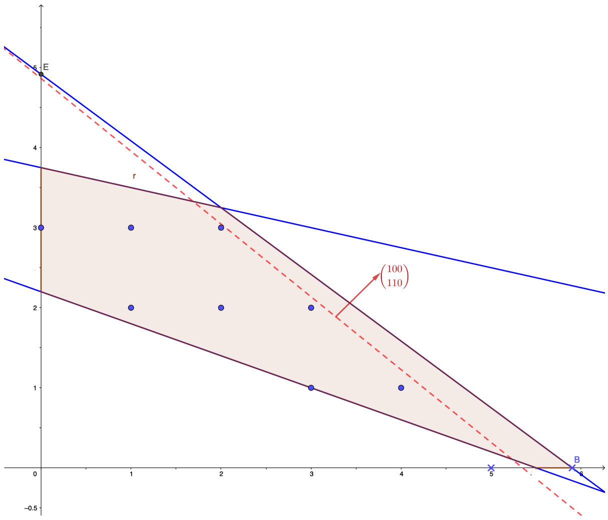
Pourquoi ne pas résoudre la relaxation linéaire PL et arrondir la solution fractionnaire pour obtenir la solution entière requise ?

l'optimalité ne serait pas garantie



Problème (P2)

la faisabilité ne serait pas garantie



Problème (P3) $=$ (P2) $\cup\{x_1 + 5x_2 \geq 11\}$

Problèmes combinatoires

Soient :

- S un ensemble fini
- f une fonction qui attribue un coût $f(s)$ à chaque élément $s \in S$

Un problème combinatoire consiste à trouver l'élément s_0 de S qui minimise f.

Problèmes combinatoires

Problèmes combinatoires

Soient :

- S un ensemble fini
- f une fonction qui attribue un coût $f(s)$ à chaque élément $s \in S$

Un problème combinatoire consiste à trouver l'élément s_0 de S qui minimise f.

Cela revient à résoudre le problème :

$$\min f(s) \tag{5}$$

sous les contraintes (s.c.)

$$s \in S \tag{6}$$

où S est un ensemble discret

Sandra U. Ngueveu (N7 - LAAS) R.O. - support de prise de notes - 2A SN 2021/2022 7 / 22

Problèmes combinatoires

Cette définition est plus large qu'il n'y paraît au premier abord car elle englobe également :

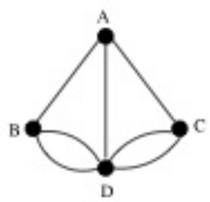
- les problèmes de maximisation, car $\min f <=> \max(-f)$
- les problèmes de calcul d'une valeur optimale
- les problèmes de décision ou d'existence dont on attend une réponse du type "oui ou "non"

Elle peut être adaptée au cas multi-objectif, stochastique, robustesse ou dynamique.

Pourquoi l'énumération est hors de question ?

L'ensemble des solutions réalisables est fini. Ne pourrait-on pas tout simplement tous les énumérer pour identifier la meilleure ?

Le problème du voyageur de commerce



- Pour 3 sommets, combien de solutions réalisables ?
- Pour 5 sommets, combien de solutions réalisables ?
- Pour 20 sommets, combien de solutions réalisables ?
- Combien de temps pour trouver la meilleure solution pour 20 sommets avec un processeur capable d'évaluer 1 millions de solutions par secondes ?
- Combien de processeurs en parallèle faudrait-il pour garder un temps de calcul similaire si un sommet supplémentaire est ajouté ? deux sommets supplémentaires ?