Programmation Linéaire
I. Modélisation et Résolution Graphique en 2D

Sandra U. Ngueveu

INP-ENSEEIHT / LAAS-CNRS
sandra.ngueveu@toulouse-inp.fr - ngueveu@laas.fr

2021/2022

Programmation Linéaire (PL)

Modèle Mathématique Linéaire

$$\min(\text{ou }\max)\ \ f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_{n-1}x_{n-1} + c_nx_n$$

sous les contraintes (s.c.)

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &\geq b_1\\
&\vdots\\
a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \ldots + a_{j,n-1}x_{n-1} + a_{j,n}x_n &= b_j\\
&\vdots\\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{m,n}x_n &\leq b_m\\
x_i \in \mathbb{R}, \qquad i &\in [1\ldots n]
\end{aligned}$$

où les c_i, b_j et a_{ji} sont des coefficients constants.

Programmation Linéaire (PL)

Modèle Mathématique Linéaire

- Les variables :
  - sont en nombre fini n (même s'il est très grand, de l'ordre du million)
  - ne peuvent prendre que des valeurs réelles
- Les contraintes sont linéaires, c'est à dire :
  - sont de type égalité (signe $=$) ou inégalité (signe $\leq$ ou $\geq$)
  - ont un terme de gauche correspondant à une combinaison linéaire des variables x_i
  - ont un terme de droite égal à une valeur réelle
- La fonction objectif est linéaire

Exemples de Programmes Linéaires

$$\max x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{aligned} 7x_1 + x_3 &\leq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ 3x_2 + 4x_3 &\leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\max x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\min -y_1 + y_3$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{aligned} y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1 + 2y_3 &\leq 3 \\ y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\in \mathbb{R} \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, &\quad \forall j \in [1, ..., n] \setminus \{i\} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ji} = 1, &\quad \forall j \in [1, ..., n] \setminus \{i\} \\ 0 \leq x_{ij} \leq 1, &\quad \forall i \in [1, ..., n], \forall j \in [1, ..., n] \end{aligned}$$

où n et les c_{ij} sont des constantes prédéfinies.

Mises en forme particulières

Forme matricielle : On peut noter

- $x = (x_1, x_2, ...x_n)^T$ le vecteur des variables
- $b = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$ celui des seconds membres des contraintes,
- $c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$ les coûts ou profits affectés aux variables
- et A la matrice $m \times n$ des a_{ij}.

Dans ce cas, les deux formes suivantes sont les plus courantes :

Forme Canonique

$$\begin{array}{ccc} \max c.x & ou & \min c.x \\ A.x \leq b & & A.x \geq b \\ x \geq 0 & & x \geq 0 \end{array}$$

Forme Standard

$$\begin{array}{c} \max c.x \\ A.x = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Comment passer d'une forme à l'autre ?

Un peu d'histoire

La Programmation Linéaire : une branche de la Recherche Opérationnelle

La R.O. apparaît en 1940 en Angleterre puis aux Etats-Unis à des fins de recherche militaire : il s'agit d'utiliser au mieux ses moyens militaires, à l'époques insuffisants (avions, forces antiaériennes (D.C.A.), moyens maritimes).

Naissance de la Programmation Linéaire

En 1947, D.B. Dantzig, venant de soutenir sa thèse et conseiller à l'US Air Force propose l'algorithme du simplexe pour résoudre les problèmes de planification des transports lors d'opérations militaires. Avant cela, ces problèmes étaient résolus à la main, sans possibilité de refaire les calculs en cas de changement de dernière minute. De plus, le concept de "fonction-objectif globale" n'existait pas ; les décisions étaient prises par des règles de bon sens sur la base de l'expérience des décideurs.

Méthodes de résolution

Le premier algorithme polynomial pour la programmation linéaire est dérivé de la méthode générale de l'ellipsoïde défini par A. Nemirovski (Prix John von Neumann 2003), D. B. Yudin et N. Shor en 1970. L. Khachiyan a ainsi construit un algorithme de l'ellipsoide adapté à la programmation linéaire en 1979 dont le mérite tient plus à la contribution en théorie de la complexité et à l'ouverture ainsi réalisée vers les méthodes polynomiales plutôt qu'en son efficacité pratique jugée médiocre. Une nouvelle avancée décisive a été réalisée en 1984 par N. Karmarkar [14], chercheur à IBM qui a proposé, pour la première fois, une méthode des points intérieurs dont il a démontré la complexité polynomiale dans le pire des cas.

La majorité des solutions logicielles actuelles sont construites autour de l'algorithme du simplexe et d'algorithmes des points intérieurs.

1 Contexte

2 Représentation, Interprétation et Résolution Graphique du cas 2D

$$\begin{aligned} &\max 3x_1 + 2x_2 \\ &\text{s.c. } 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ &\quad 2x_1 + 3x_2 \leq 42 \\ &\quad 3x_1 + x_2 \leq 24 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple : Représentation

Démarche

- Tracer la droite (D1) correspondant à l'égalité dérivée de la 1ère contrainte
- Que représentent les points sur la droite ?
- Quels sont les points qui satisfont la contrainte (1) ?
- Faire de même avec la contraintes (2)
- Quels sont les points qui satisfont à la fois les contraintes (1) et (2) ?
- Faire de même avec la contrainte (3)
- Faire de même avec le domaine de définition des variables
- Quels sont les points qui satisfont TOUTES les contraintes du PL ?

  Ces points constituent l'**ensemble des solutions réalisables du PL**.

Exemple : Interprétation

Ensemble des solutions réalisables

Polyèdre (convexe)

Points extremum versus points intérieurs

Exemple : Représentation (2)

- Tracer la droite correspond à une valeur de fonction-objectif de 0 ($z = 0$, ou $f(X) = 0$). Conclure.
- Idem pour $z = 1$.
- Idem pour $z = 3$.
- Identifier le gradient de la fonction-objectif. Conclure.
- Jusqu'où pousser la démarche ?

Récapitulatif de l'approche graphique

Approche Graphique 2D

- Tracer les axes d'abscisses et ordonnées en tenant compte du domaine de définition
- Tracer toutes les contraintes pour obtenir le polyèdre
- Tracer le vecteur-gradient correspondant à la fonction-objectif
- Trouver l'optimum s'il existe

Cas à n variables/dimensions

- Même idée à n dimensions (méthodes de gradient)
- Reste "dessinable" en 3D mais plus compliqué pour $n \geq 4$

Pour conclure ...

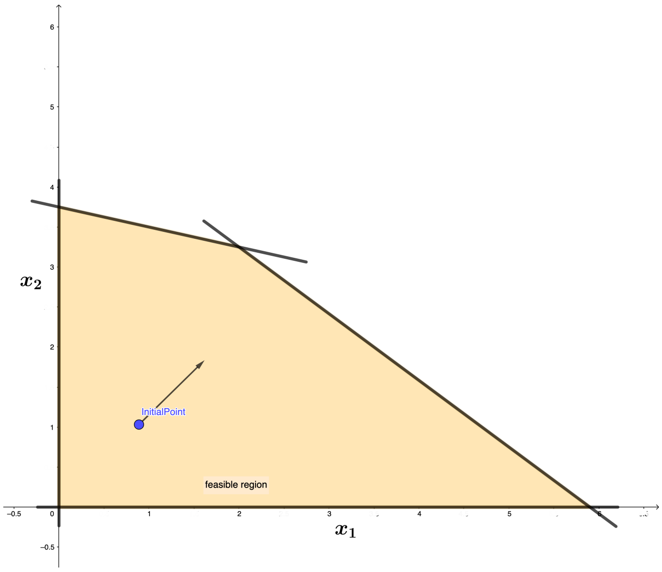
Intérêt/Force de la PL : Optimum local = Optimum global !

Limites : Pour être directement modélisable par PL, les actions/décisions modélisées par les variables doivent être :

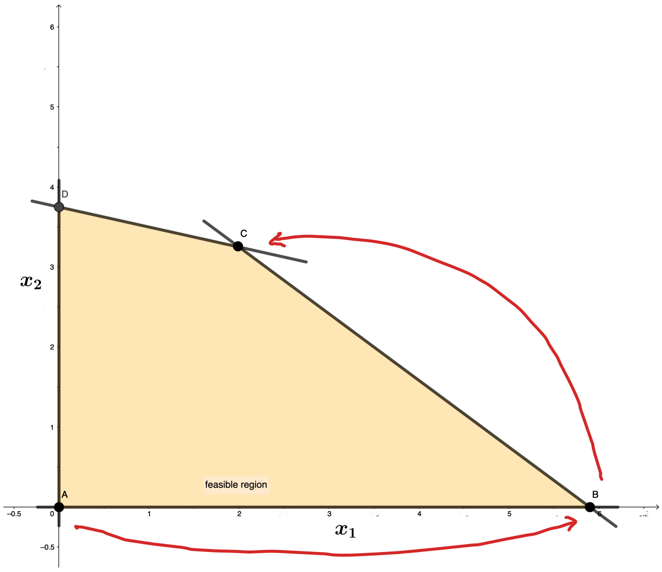
- additives
- proportionnelles
- divisibles

Possibilité d'utiliser des techniques de linéarisation pour modéliser quand même en PL des problèmes qui ne respectent pas a priori les conditions ci-dessus.

Deux grandes familles de méthodes de résolution de PL



Méthodes de points intérieur



Méthodes de simplexe

Résumé de ce qui a été vu

- Spécificités de la PL
- Modélisation mathématique
- Tracé, Interprétation et Résolution Graphique du cas 2D

Aperçu de la partie II

- Programmes linéaires à $n > 2$ variables : Résolution par Simplexe [1]

1. pré-requis : calculs matriciels, résolution de systèmes linéaires par pivot de Gauss

Programmation Linéaire

II. $n > 2$ dimensions: résolution par la méthode du Simplexe

Sandra U. Ngueveu

INP-ENSEEIHT / LAAS-CNRS
sandra.ngueveu@toulouse-inp.fr - ngueveu@laas.fr

2021/2022

Résolution de PL de $n > 2$ variables par Simplexe

Systèmes de m équations à n inconnues (rappel)

Soit un système de m équations à n inconnues. Si les m équations sont linéairement indépendantes, alors on sait qu'il admet :

- soit 0 solution, en particulier lorsque $m > n$
- soit une seule solution ($\Leftrightarrow m = n$)
- soit une infinité de solutions ($\Leftrightarrow m < n$)

Algorithm 1 Pivot de Gauss pour résoudre un système de n équations à n inconnues

POUR $i = 1$ à n **FAIRE**
    $pivot = a_{ii}$
    Diviser tous les termes de la ligne i par le pivot
    Mettre à 0 les termes a_{ki} de toutes les autres lignes $k \neq i$, par combinaison linéaire
FIN POUR

Application : résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

PL dont la solution est triviale

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{PL1}) & \max 3x_1 + 2x_2 \\ \quad \mathrm{s.c.} & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 42 \\ & 3x_1 + x_2 + x_5 = 24 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Solution Optimale Pas Evidente}$$

PL dont la solution est triviale

$$
\left.
\begin{array}{l}
(\text{PL2}) \quad \max 33 - \frac{5}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \\
\quad \text{s.c.} \\
\qquad x_1 + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 3 \\
\qquad x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 12 \\
\qquad x_5 - \frac{7}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 3 \\
\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
\right\} \Rightarrow
$$

Solution Optimale Triviale (*Laquelle*?)

PL dont la solution est triviale

$$
\left.
\begin{array}{l}
(\text{PL1}) \quad \max 3x_1 + 2x_2 \\
\quad \text{s.c.} \\
\qquad 2x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\
\qquad 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 42 \\
\qquad 3x_1 + x_2 + x_5 = 24 \\
\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
\right\} \Rightarrow \text{Solution Optimale Pas Evidente}
$$

$\Updownarrow$ En fait il s'agit du même problème !

$$
\left.
\begin{array}{l}
(\text{PL2}) \quad \max 33 - \frac{5}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \\
\quad \text{s.c.} \\
\qquad x_1 + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 3 \\
\qquad x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 12 \\
\qquad x_5 - \frac{7}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 3 \\
\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
\right\} \Rightarrow
$$

Solution Optimale Triviale (*Laquelle*?)

PL dont la solution est triviale

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{PL1}) & \max 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 42 \\ & 3x_1 + x_2 + x_5 = 24 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Solution Optimale Pas Evidente}$$

Comment passer de (PL1) à (PL2)

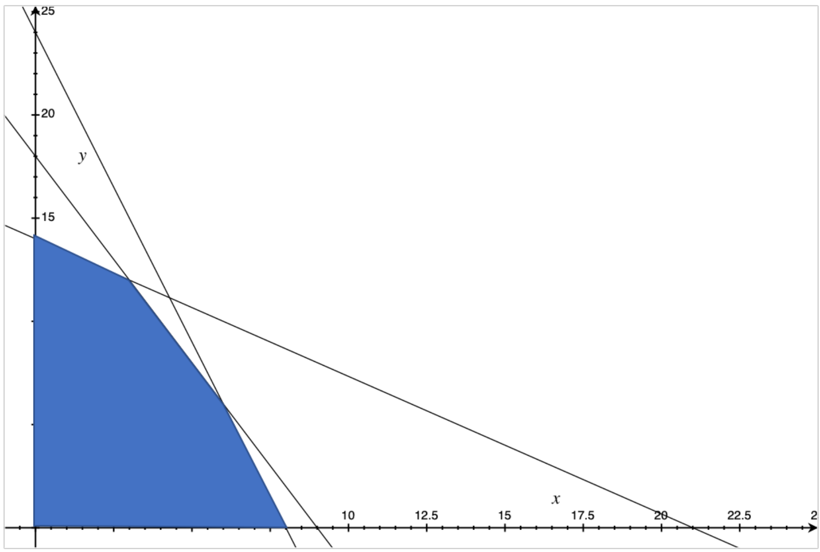
1. Remplacer la 1ère contrainte par $\frac{3}{4}L_1 - \frac{1}{4}L_2$
2. Remplacer la 2ème contrainte par $-\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2$
3. Remplacer la 3ème contrainte par $-\frac{7}{4}L_1 + \frac{1}{4}L_2 + L_3$
4. Faire disparaître x_1 et x_2 de la fonction-objectif (en remplaçant par x_3 et x_4 en se servant des contraintes-égalités)

Lien entre forme standard et sommets de polyèdre

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{PL}) & \max 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & \\ & 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 42 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{PLS}) & \max 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 42 \\ & 3x_1 + x_2 + x_5 = 24 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$



sommet de polyèdre $\Leftrightarrow$ $n - m$ variables nulles pour la forme standard

Il est alors intéressant de se rappeler que la solution optimale correspond à un sommet du polyèdre de la forme canonique (cf résolution graphique 2D)

Concepts de base

Propriété 1

Si toutes les contraintes sont exprimées sous forme d'égalités, il y a problème d'optimisation si et seulement si $m < n$ et que les m équations sont linéairement indépendantes (voir slide 3).

Dans ce cas (le seul que nous considérerons désormais) :

- On peut choisir m variables et exprimer ces variables en fonction des $n - m$ vars restantes. (En faisant comme s'il s'agissait d'un système de m équations à m inconnues)
- Un choix de ces m variables est une base et les m variables sont appelées variables de base.
- Les $n - m$ vars restantes sont appelées variables libres ou variables hors base.
- Si les valeurs des vars libres sont connues, alors on peut en déduire celles des vars de base
- Les solutions où toutes les variables libres sont nulles sont appelées solutions de base.

Propriété 2

Si un programme linéaire admet une solution optimale, alors il existe une solution optimale qui est une solution de base.

Tirant partie de cette propriété, le simplexe ne se concentre que sur des solutions de base.

Concepts de base

Principe

Le simplexe consiste à se déplacer de base réalisable en base réalisable de telle sorte que chaque solution de base soit meilleure que la précédente jusqu'à trouver une solution optimale.

Pour cela il faut :

- connaitre une première solution de base réalisable
- savoir passer d'une base à une autre
- savoir reconnaitre une solution de base optimale

La manipulation se fait à l'aide de tableaux :

$$\left.\begin{array}{l} \max 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} \\ 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 42 \\ 3x_1 + x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ \textit{modele initial} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \max 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 42 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ \textit{forme standard} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	2	1	1	0	0	18
x_4	2	3	0	1	0	42
x_5	3	1	0	0	1	24
z	-3	-2	0	0	0	0

tableau du simplexe

Connaitre une première solution de base réalisable

Propriété 3

Dans un tableau du simplexe, les colonnes des variables de base, plus la colonne $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, 1)^T$, doivent former une matrice identité $I^{\{m+1\}}$.

Les variables ajoutées lors de la transformation d'inéquations en équations sont souvent de bonnes candidates à la base initiale.

Connaitre une première solution de base réalisable

Remplissage du 1er tableau du simplex, à partir de la forme standard

- la ligne-objectif est remplie des coefs de la fonction-obj
- chaque colonne, sauf la dernière, correspond à une variable
- la dernière colonne contient les termes de droite (tjrs positifs)
- chaque ligne correspond à une contrainte et ne contient qu'une var de base (pour pouvoir former la matrice identité)
- on peut associer à chaque contrainte la var de base qu'elle contient

Savoir passer d'une base à une autre

Changer de base $\Leftrightarrow$ échanger des vars de base avec des vars actuellement libres.

Simplexe opère 1 chgmt par itération : 1 var est sortie de la base et remplacée par 1 var libre.

Savoir passer d'une base à une autre

Changer de base ⇔ échanger des vars de base avec des vars actuellement libres.

Simplexe opère 1 chgmt par itération : 1 var est sortie de la base et remplacée par 1 var libre.

Choix de la variable (libre) entrante x_e

- Seules sont candidates les vars dont les colonnes ont un terme **négatif** dans la ligne-objectif
  (Pourquoi ?)
- Choix empirique : choisir la colonne j ayant le coef le plus **négatif** dans la ligne-objectif

Méthode du simplexe (primal) et illustration

Savoir passer d'une base à une autre

Changer de base ⇔ échanger des vars de base avec des vars actuellement libres.

Simplexe opère 1 chgmt par itération : 1 var est sortie de la base et remplacée par 1 var libre.

Choix de la variable (de base) sortante x_s

- Pour garantir que la nouvelle base reste réalisable, seules sont candidates les vars de base ayant un coef positif dans la colonne de la var entrante déjà identifiée
- Règle du ratio : choisir la var de base (ligne) conduisant au plus petit ratio entre la colonne b et la colonne de la variable entrante

Savoir passer d'une base à une autre

Changer de base $\Leftrightarrow$ échanger des vars de base avec des vars actuellement libres.

Simplexe opère 1 chgmt par itération : 1 var est sortie de la base et remplacée par 1 var libre.

Application du changement de base

- Faire rentrer x_e et sortir x_s et faire ressortir la matrice identité pour les nvelles vars de base
- Exécution : appliquer des combinaisons linéaires entre la ligne de x_s et les autres lignes pour faire apparaître l'identité sur la nouvelle base

Savoir reconnaitre une solution de base optimale

Propriété

Lors du choix de la variable entrante, s'il n'existe aucun terme **négatif** dans la ligne-objectif, alors la solution courante est optimale.

Lire le tableau final du simplexe

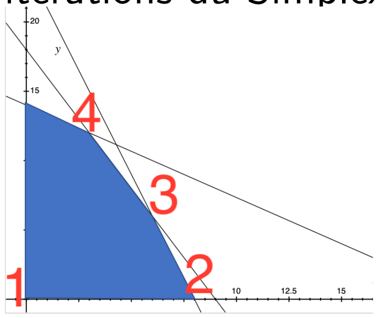
- valeur des variables de la solution optimale
- coût optimal

Application

Illustration 2D

Changements de base successifs au cours des itérations du Simplexe

$$
\text{(PLS)} \quad \left. \begin{array}{l} \max 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} \\ \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ \quad 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 42 \\ \quad 3x_1 + x_2 + x_5 = 24 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow
$$



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	2	1	1	0	0	18
x_4	2	3	0	1	0	42
x_5	3	1	0	0	1	24
z	-3	-2	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	2
x_4	0	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	26
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	8
z	0	-1	0	0	1	24

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	3	0	-2	6
x_4	0	0	-7	1	4	12
x_1	1	0	-1	0	1	6
z	0	0	3	0	-1	30

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	12
x_5	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	3
x_1	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	3
z	0	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	0	33

Pour aller plus loin

- Que faire s'il n'existe pas de solution de base évidente pour le problème (P) ?
  - Introduire des variables artificielles
    - Méthode de pénalisation
    - Méthode à 2 phases
- Cas particuliers
  - Multiples solutions
  - Solution non bornée
  - Dégénérescence
- Méthode du simplexe dual
- Analyse de sensibilité en programmation linéaire

Résumé de ce qui a été vu

- Résolution de PL à $n \geq 2$ variables par la méthode du Simplexe
- Cas particuliers et variantes