ENSEEIHT 2ième année Sciences du Numérique (LMB)

Contrôle de Graphes - Vendredi 15 janvier 2021 – 08h00 – Riadh DHAOU, Gentian JAKLLARI

(Aucun document n'est autorisé à part une feuille A4)

Durée : 1 heure 30 - Nombre de pages : 2 pages

Exercice 1 : Connexité et graphes réguliers

Soit G un graphe non-orienté simple d'ordre *2p*. On support que le degré de chaque sommet est au moins égal à p.

Q1) Démontrer que ce graphe est connexe.

Un graphe G_R est dit régulier s'il est simple et si tous ses sommets ont le même degré. On s'intéresse dans cet exercice aux graphes réguliers dont les sommets sont de degré 3.

Q2) Que dire du nombre de sommets d'un tel graphe G_R? Existe-t-il un graphe simple, d'ordre 7, dont la suite des degrés est (3, 3 ,3 ,3 ,3 ,3 ,3) ?

Q3) Démontrer que, $\forall p \geq 2$, il existe un graphe régulier d'ordre *2p* dont les sommets sont de degré 3.

Exercice 2 : Dominos et Parcours de graphes

Un domino est une pièce rectangulaire contenant un certain nombre de points (i) près d'une extrémité, et un certain nombre de points (j) près de l'autre extrémité. Appelons le domino de type [i, j].

Q1) Est-il possible de disposer 10 dominos, types [1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [3, 4], [3, 5], [4, 5], de bout-en-bout et que le nombre de points sur les extrémités en contact des dominos adjacents est toujours égal?

Q2) Répétez la question ci-dessus dans le cas plus général, quand il y a $\binom{n}{2}$ dominos avec ($n \geq 2$), avec toutes les combinaisons types [i, j] possibles avec $1 \leq i \leq j \leq n$.

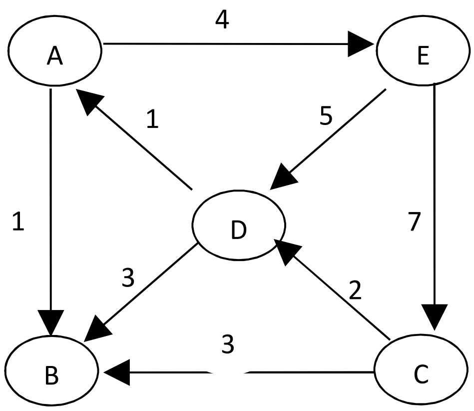
Exercice 3 : Coloration de Graphes

Un graphe non orienté G a une largeur w si les sommets peuvent être disposés dans une séquence v_1, v_2, v_3, . . . , v_n de telle sorte que chaque sommet v_i est relié par une arête au maximum aux w sommets précédents. (Le sommet v_j précède v_i si $j<i$.) Utilisez le raisonnement par récurrence pour prouver que tout graphe dont la largeur est au maximum w est (w + 1) - colorable.

Exercice 4 : Plus courts chemins et arbres couvrants

Utiliser l'algorithme de ***Dijkstra*** pour obtenir tous les plus courts chemins en partant du sommet A

Q1) Donner l'arbre des plus courts chemins, en partant du sommet A, pour le graphe suivant :



Q2) Soit G’ un graphe non orienté obtenu à partir du graphe G en remplaçant les arcs par des arêtes.

Donner un arbre couvrant de poids minimal pour ce graphe G’ et déterminer son poids. Cet arbre est-il unique ?

Corrigé

Exercice 1)

1)

Supposons par l'absurde que ce graphe ne soit pas connexe, et soient x, y deux sommets tels qu'il n'existe pas de chaine liant x à y. Alors, x a au moins p voisins, et il en est de même pour y. Mais les voisins de x sont forcément tous distincts des voisins de y : sinon, il existerait une chaine de longueur 2 joignant x à y. Le graphe comprend donc au moins $1+1+p+p=2p+2$ sommets (x, y, les voisins de x, les voisins de y). On obtient donc une contradiction puisque le graphe est d'ordre $2p$

2)

1. Non. Il n’existe pas de graphe régulier d’ordre 7 avec des sommets de degré 3. En effet, la somme des sommets d’un graphe est paire.
2. Le nombre de sommets est supérieur ou égal à 4 (chaque sommet est relié à 3 autres). De plus, le nombre de sommets doit être pair. En effet, on part de l'équation $\sum_{x \in G} deg(x)=2m$

Où m est le nombre d'arêtes. Si n est le nombre de sommets du graphe, on obtient $3n=2m$, ce qui impose n pair.

3)

D'abord pour $p=2$, le résultat est vrai : il suffit de considérer le graphe complet à 4 sommets. Pour $p \geq 3$, on partage l'ensemble des sommets en 2, d'une part $\{a_1,\dots,a_p\}$, d'autre part $\{a_{p+1},\dots,a_{2p}\}$. Les arêtes sont les suivantes :

- a_1 est relié à a_{p+1}, a_{p+2} et a_{p+3};
- a_2 est relié à a_{p+2}, a_{p+3} et a_{p+4};
- ……
- a_{p-2} est reliés à a_{2p-2}, a_{2p-1} et a_{2p};
- a_{p-1} est relié à a_{2p-1}, a_{2p} et a_{p+1};
- a_p est relié à a_{2p}, a_{p+1} et a_{p+2}.

On obtient bien un graphe d'ordre $2p$ dont tous les sommets sont de degré 3.

Exercice 2)

Soit G le graphe d'ordre 5 sont les sommets sont 1, 2, 3, 4, 5, et les arêtes représentent les types de dominos (par exemple, i est adjacent à j, quand il y a un domino de type [i, j] ou [j, i]).

Clairement G = K5, le graphe complet d'ordre 5 (tous les paires de sommets sont adjacents). La question est de savoir si une chaine Eulérienne existe (graphe Eulérien ou semi-Eulérien) dans G. Comme tous les sommets on un dégré paire alors le graphe est Eulérien, la réponse est oui.

Par exemple, une chaine Eulérienne qui visite les sommets dans l'ordre suivant 1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1 existe. Ce qui revient à placer les dominos dans l'ordre suivant

[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], [5, 1], [1, 3], [3, 5], [5, 2], [2, 4], [4, 1]

NB. Donner cet ordre comme une réponse répond à la question. Donner la justification sous forme de modélisation par un graphe est un bonus.

Q2)

De même que dans la partie (a), nous formons Kn, le graphe complet sur n sommets, qui est régulière de degré n− 1 (tous les sommets de degré n− 1). Par conséquent une solution existe certainement si n - 1 est pair, c'est-à-dire si n est impair, puisque tout les sommets ont un degré pair et une Chaine d'Euler existe, donnant un arrangement des dominos de la manière requise.

Si n est 2, il n'y a qu'un seul domino, et le résultat est trivialement vrai – l'arrangement est une ligne contenant juste ce domino. Cela correspond au fait que K2 a 2 sommets de degré impair, donc une chaine Eulerienne existe.

Si n est pair mais supérieur à 2, Kn a plus de 2 sommets de degré impair, il n'y a donc pas de chaine Eulérienne, et les dominos ne peuvent pas être disposés dans la manière demandée.

Exercice 3)

Il suffit de réaliser que le sommet v_n a un degré inférieur ou égal à w, puisque tous les sommets qui lui sont adjacents le précèdent dans la séquence $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$. La récurrence est donc une variation plus simple de la solution de l'exercice 5.4.8. (Théorème des 5 couleurs).

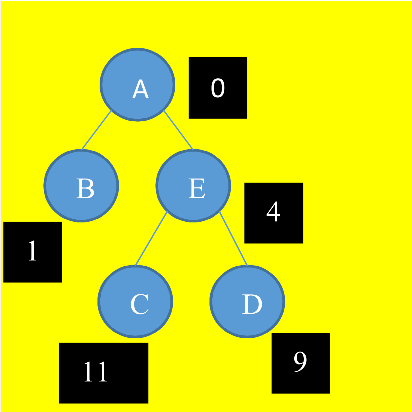
Exercice 4)

Q1) Soit S l'ensemble des sommets marqués (pour lesquels nous avons trouvé le plus court chemin) et R sont complément par rapport à l'ensemble des sommets du graphe.

Le tableau suivant donne l'évolution de l'état des marques associées à chaque sommet (la marque mi désigne la longueur du plus court chemin allant de A vers le sommet i).

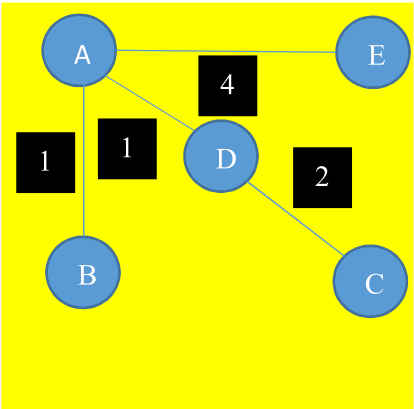
S\R	A	B	C	D	E
Φ	0	∞	∞	∞	∞
{A}		1	∞	∞	4
{A, B}			∞	∞	4
{A, B, E}			11	9	

{A, B, D, E}			11		
{A, B, C, D, E}					



L’arbre des plus courts chemins est donné ci-dessus.

Q2)



L’arbre couvrant de poids minimum est unique et de Coût 8.