最优解的一阶条件（KKT条件）

考虑如下一般形式的约束优化问题：← 只要有一个约束条件，该问题就是约束优化问题

(P) $\min f(x)$, ← 目标函数

s.t. $g_i(x) \le 0,\ i = 1 \dots m$ ← m个不等式约束

$h_i(x) = 0,\ i = 1 \dots n$ ← n个等式约束

记可行集为 ← 可行集是满足等式约束和不等式约束的所有x的集合

$$S(\xi) = \{x \mid g_i(x) \le 0,\ i=1\dots m;\ h_i(x)=0,\ i=1\dots n\}.$$

假设问题P中的函数 $f(x)$，$g_i(x)$，$h_i(x)$ 均连续可微 可求梯度，

假设 x^* 是问题P的局部最优解，且 x^* 处某个"适当的条件"(constraint qualification)，则存在 λ，μ 使得

$\in R^m$ $\in R^n$

$$\text{KKT}\begin{cases} \underbrace{\nabla f(x^*)}_{\nabla\text{目标函数}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \overbrace{\lambda_i}^{\ge 0} \nabla g_i(x^*)}_{(\lambda_i * \nabla\text{不等式约束})\text{求和}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overbrace{\mu_i}^{\text{无约束，可+可−}} \nabla h_i(x^*)}_{(\mu_i * \nabla\text{等式约束})\text{求和}} = 0 \\ \lambda_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \left.\begin{array}{l} g_i(x^*) \le 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{array}\right\} \text{意为局部最优解满足以上约束} \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

λ_i，μ_i 这两个系数我们称为"Lagrangian"乘子