# Quatrième partie

# LTL – logique temporelle linéaire

# Plan

# Logiques temporelles

## Objectif

Exprimer des propriétés portant sur les exécutions des systèmes.

Spécification non opérationnelle : pas de relation de transition explicite, pas de notion d'états initiaux.
Une logique est définie par :

- une syntaxe : opérateurs de logique classique plus des opérateurs temporels pour parler du futur et du passé.
- une sémantique : domaine des objets (appelés modèles) sur lesquels on va tester la validité des formules, plus l'interprétation des opérateurs.

# Plan

# Linear Temporal Logic

♪♪♪

## Modèles

Une formule LTL se rapporte toujours à une trace donnée $\sigma$ d'un système : les traces constituent les modèles de cette logique.

Note : plutôt que d'*état*, on parle souvent d'*instant* pour désigner les éléments d'une trace.

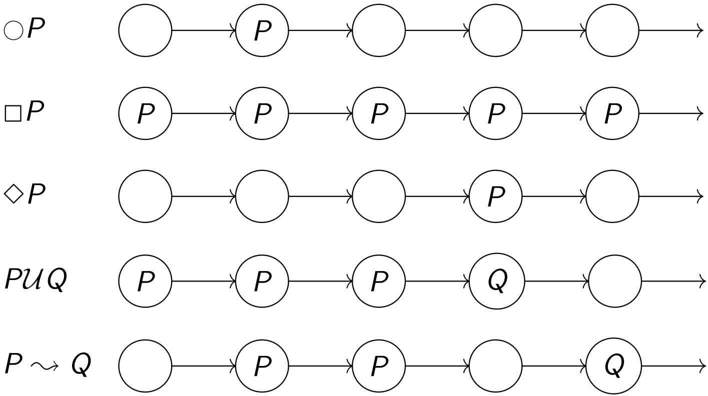
# Syntaxe de la LTL

♪♪♪

| formule | nom | interprétation |
|---|---|---|
| $s$ | | le premier état de la trace est $s$ |
| $\neg P$ | | |
| $P \vee Q$ | | |
| $P \wedge Q$ | | |
| $\bigcirc P$ | next | $P$ est vrai à l'instant suivant |
| $\square P$ | always | $P$ est toujours vrai |
| | | i.e. à tout instant à partir de l'instant courant |
| $\diamond P$ | eventually | $P$ finit par être vrai (dans le futur) |
| $P \mathcal{U} Q$ | until | $Q$ finit par être vrai, et en attendant $P$ reste vrai |
| $P \leadsto Q$ | leadsto | quand $P$ est vrai, alors $Q$ l'est plus tard |

Dans les approches symboliques, l'opérateur $\bigcirc$ représentant l'instant suivant peut être remplacé par des variables primées qui représentent la valeur des variables du système dans l'état suivant.

# Intuition sémantique



# Opérateurs minimaux ♪♪♪

Les opérateurs minimaux sont $\bigcirc P$ et $P \mathcal{U} Q$ :

- $\Diamond P \triangleq \mathit{True}\, \mathcal{U} P$
- $\Box P \triangleq \neg \Diamond \neg P$
- $P \leadsto Q \triangleq \Box(P \Rightarrow \Diamond Q)$

# Syntaxe alternative

## Syntaxe alternative

On trouve fréquemment une autre syntaxe :

$\Box \leftrightarrow$ G (globally)

$\Diamond \leftrightarrow$ F (finally)

$\bigcirc \leftrightarrow$ X (next)

## Opérateurs complémentaires

- Opérateur waiting-for (ou unless ou weak-until)
  $P \mathcal{W} Q \triangleq \Box P \vee P \mathcal{U} Q$
  $Q$ finit peut-être par être vrai et en attendant $P$ reste vrai
- Opérateur release
  $P \mathcal{R} Q \triangleq Q \mathcal{U}(P \wedge Q)$
  $Q$ reste vrai jusqu'à ce que $P$ le devienne.

# Opérateurs du passé

| formule | nom | interprétation |
|---|---|---|
| $\circleddash P$ | previously | $P$ est vrai dans l'instant précédent |
| $\boxminus P$ | has-always-been | $P$ a toujours été vrai jusqu'à l'instant courant |
| $\diamondminus P$ | once | $P$ a été vrai dans le passé |
| $P \mathcal{S} Q$ | since | $Q$ a été vrai dans le passé et $P$ est resté vrai depuis la dernière occurrence de $Q$ |
| $P \mathcal{B} Q$ | back-to | $P$ est vrai depuis la dernière occurrence de $Q$, ou depuis l'instant initial si $Q$ n'a jamais été vrai |

Guère d'utilité en pratique. . .

# Sémantique (système) ♪♪♪

On note $(\sigma, i)$ pour le suffixe $\langle s_i \rightarrow s_{i+1} \rightarrow \ldots \rangle$ d'une exécution $\sigma = \langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow \ldots \rangle$.

## Vérification par un système

Un système $\mathcal{S}$ vérifie (valide) la formule $F$ ssi toutes les exécutions de $\mathcal{S}$ la valident à partir de l'instant initial :

$$\frac{\forall \sigma \in Exec(\mathcal{S}) : (\sigma, 0) \models F}{\mathcal{S} \models F}$$

# Sémantique (opérateurs logiques)

Sémantique standard des opérateurs logiques

$$\frac{(\sigma, i) \models P \quad (\sigma, i) \models Q}{(\sigma, i) \models P \wedge Q}$$

$$\frac{(\sigma, i) \models P}{(\sigma, i) \models P \vee Q} \qquad \frac{(\sigma, i) \models Q}{(\sigma, i) \models P \vee Q}$$

$$\frac{\neg\ (\sigma, i) \models P}{(\sigma, i) \models \neg P}$$

## Sémantique (opérateurs temporels) ♪♪♪

$$\frac{\sigma_i = s}{(\sigma, i) \models s}$$

$$\frac{(\sigma, i+1) \models P}{(\sigma, i) \models \bigcirc P}$$

$$\frac{\exists k \geq 0 : (\sigma, i+k) \models Q \wedge \forall k', 0 \leq k' < k : (\sigma, i+k') \models P}{(\sigma, i) \models P \mathcal{U} Q}$$

# Sémantique (opérateurs temporels dérivés) ♪♪♪

$$\frac{\exists k \geq 0 : (\sigma, i + k) \models P}{(\sigma, i) \models \Diamond P}$$

$$\frac{\forall k \geq 0 : (\sigma, i + k) \models P}{(\sigma, i) \models \Box P}$$

$$\frac{\forall k \geq 0 : ((\sigma, i + k) \models P \Rightarrow \exists k' \geq k : (\sigma, i + k') \models Q)}{(\sigma, i) \models P \leadsto Q}$$

# Réduction à la logique pure

- La logique temporelle linéaire possède une expressivité telle qu'elle peut représenter exactement n'importe quelle spécification opérationnelle décrite en termes de système de transitions, d'où :
- vérifier qu'un système de transitions $\mathcal{M}$ possède la propriété temporelle $F_{\mathcal{S}pec}$ :

$$\mathcal{M} \models F_{\mathcal{S}pec}$$

- revient à déterminer la validité de :

$$F_{\mathcal{M}} \Rightarrow F_{\mathcal{S}pec}$$

où $F_{\mathcal{M}}$ est une formule représentant exactement les exécutions du modèle $\mathcal{M}$ (i.e. ses états initiaux, ses transitions, ses contraintes d'équité).

# Plan

# Exemple 1

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[r] & s_1 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

| | pas d'équité | équité faible $(s_0, s_1)$ |
|---|---|---|
| $s_0 \wedge \bigcirc s_0$ | | |
| $s_0 \wedge \bigcirc(s_0 \vee s_1)$ | | |
| $\Box(s_0 \Rightarrow \bigcirc s_0)$ | | |
| $\Box(s_0 \Rightarrow \bigcirc(s_0 \vee s_1))$ | | |
| $\Box(s_1 \Rightarrow \bigcirc s_1)$ | | |
| $\Diamond(s_0 \wedge \bigcirc s_1)$ | | |
| $\Box s_0$ | | |
| $\Diamond \neg s_0$ | | |
| $\Diamond \Box s_1$ | | |
| $s_0 \mathcal{W} s_1$ | | |
| $s_0 \mathcal{U} s_1$ | | |

# Exemple 1

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[r] & s_1 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

| | pas d'équité | équité faible $(s_0, s_1)$ |
|---|---|---|
| $s_0 \wedge \bigcirc s_0$ | $n\ (s_0 \rightarrow {s_1}^{\omega})$ | $n$ |
| $s_0 \wedge \bigcirc(s_0 \vee s_1)$ | $o$ | $o$ |
| $\Box(s_0 \Rightarrow \bigcirc s_0)$ | $n\ (s_0 \rightarrow {s_1}^{\omega})$ | $n$ |
| $\Box(s_0 \Rightarrow \bigcirc(s_0 \vee s_1))$ | $o$ | $o$ |
| $\Box(s_1 \Rightarrow \bigcirc s_1)$ | $o$ | $o$ |
| $\Diamond(s_0 \wedge \bigcirc s_1)$ | $n\ ({s_0}^{\omega})$ | $o$ |
| $\Box s_0$ | $n\ (s_0 \rightarrow {s_1}^{\omega})$ | $n$ |
| $\Diamond \neg s_0$ | $n\ ({s_0}^{\omega})$ | $o$ |
| $\Diamond\Box s_1$ | $n\ ({s_0}^{\omega})$ | $o$ |
| $s_0 \mathcal{W} s_1$ | $o$ | $o$ |
| $s_0 \mathcal{U} s_1$ | $n\ ({s_0}^{\omega})$ | $o$ |

# Exemple 2

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & s_0 \arrow[r, bend left] & s_1 \arrow[l, bend left] \arrow[loop above] \arrow[r] & s_2 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

| | pas d'équité | faible $(s_1, s_2)$ | forte $(s_1, s_2)$ |
|---|---|---|---|
| $\Box\Diamond\neg s_1$ | | | |
| $\Box(s_1 \Rightarrow \Diamond s_2)$ | | | |
| $\Diamond\Box(s_1 \vee s_2)$ | | | |
| $\Box(s_1 \mathcal{U} s_2)$ | | | |
| $\Box(s_0 \Rightarrow s_0 \mathcal{U} s_1)$ | | | |
| $\Box(s_0 \mathcal{U}(s_1 \vee s_2))$ | | | |
| $\Box(s_1 \Rightarrow s_1 \mathcal{U} s_2)$ | | | |
| $\Diamond(s_1 \mathcal{U} s_2)$ | | | |
| $\Diamond(s_1 \mathcal{W} s_2)$ | | | |
| $\Box\Diamond(s_1 \mathcal{U}(s_0 \vee s_2))$ | | | |

# Exemple 2

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & s_0 \arrow[r, bend left] & s_1 \arrow[l, bend left] \arrow[loop above] \arrow[r] & s_2 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

| | pas d'équité | faible $(s_1, s_2)$ | forte $(s_1, s_2)$ | ♪♪♪ |
|---|---|---|---|---|
| $\Box\Diamond\neg s_1$ | $n\ (s_0 \to {s_1}^\omega)$ | $o$ | $o$ | ♪♪♪ |
| $\Box(s_1 \Rightarrow \Diamond s_2)$ | $n\ (s_0 \to {s_1}^\omega)$ | $n\ ((s_0 \to s_1)^\omega)$ | $o$ | ♪♪♪ |
| $\Diamond\Box(s_1 \vee s_2)$ | $n\ ((s_0 \to s_1)^\omega)$ | $n$ | $o$ | ♪♪♪ |
| $\Box(s_1 \mathcal{U} s_2)$ | $n\ (s_0 \to \ldots)$ | $n$ | $n$ | ♪♪♪ |
| $\Box(s_0 \Rightarrow s_0 \mathcal{U} s_1)$ | $o$ | $o$ | $o$ | ♪♪♪ |
| $\Box(s_0 \mathcal{U}(s_1 \vee s_2))$ | $o$ | $o$ | $o$ | ♪♪♪ |
| $\Box(s_1 \Rightarrow s_1 \mathcal{U} s_2)$ | $n\ (s_0 \to {s_1}^\omega)$ | $n\ ((s_0 \to s_1)^\omega)$ | $n\ (s_0 \to s_1 \to s_0 \to s_1 \to {s_2}^\omega)$ | ♪♪♪ |
| $\Diamond(s_1 \mathcal{U} s_2)$ | $n\ (s_0 \to {s_1}^\omega)$ | $n\ ((s_0 \to s_1)^\omega)$ | $o$ | ♪♪♪ |
| $\Diamond(s_1 \mathcal{W} s_2)$ | $n\ ((s_0 \to s_1)^\omega)$ | $n$ | $o$ | ♪♪♪ |
| $\Box\Diamond(s_1 \mathcal{U}(s_0 \vee s_2))$ | $n\ (s_0 \to {s_1}^\omega)$ | $o$ | $o$ | ♪♪♪ |

# Sûreté/vivacité – *Safety/Liveness*

On qualifie de

- Sûreté : rien de mauvais ne se produit
  = propriété qui s'invalide sur un préfixe fini d'une exécution :
  $\Box P$, $\Box(P \Rightarrow \Box P)$, $P\mathcal{W}Q\ldots$
- Vivacité : quelque chose de bon finit par se produire
  = propriété qui peut toujours être validée en étendant le préfixe d'une exécution :
  $\Diamond P$, $P \leadsto Q\ldots$
- Certaines propriétés combinent vivacité et sûreté :
  $P\mathcal{U}Q$, $\Box P \wedge \Diamond Q\ldots$
  - Réponse : $\Box\Diamond P$
  - Persistance : $\Diamond\Box P$

# Invariance, stabilité

## Invariance

Spécifier un sur-ensemble des états accessibles d'un système :

$$\mathcal{S} \models \Box P$$

où $P$ est un prédicat d'état.

## Stabilité

Spécifier la stabilité d'une situation si elle survient :

$$\mathcal{S} \models \Box(P \Rightarrow \Box P)$$

où $P$ est un prédicat d'état.

# Possibilité

♪♪♪

## Possibilité

Spécifier qu'il est possible d'atteindre un certain état vérifiant $P$ dans une certaine exécution :
Impossible pour $P$ arbitraire, mais pour $P$ un prédicat d'état :

$$\mathcal{S} \not\models \Box\neg P$$

Attention à la négation : $\neg\Box P = \Diamond\neg P$ mais $\mathcal{S} \not\models \Box P \not\Rightarrow \mathcal{S} \models \Diamond\neg P$

# Négation

## Négation : danger !

Pour $\sigma$ exécution : $\sigma \models \neg P \equiv \sigma \not\models P$

Pour $\mathcal{S}$ système : $\mathcal{S} \models \neg P \Rightarrow \mathcal{S} \not\models P$ mais pas l'inverse !

$\mathcal{S} \not\models Q$ signife qu'il existe au moins une exécution qui invalide $Q$ ($=$ qui valide $\neg Q$), mais pas que toutes les exécutions le font.
En LTL, on peut avoir $\mathcal{S} \not\models Q \wedge \mathcal{S} \not\models \neg Q$ :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & s_0 \arrow[loop above] \arrow[r] & s_1 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

$$\frac{{s_0}^{+} \rightarrow {s_1}^{\omega} \not\models \Box s_0}{\mathcal{S} \not\models \Box s_0} \qquad \frac{{s_0}^{\omega} \not\models \Diamond \neg s_0}{\mathcal{S} \not\models \Diamond \neg s_0}$$

# Combinaisons

## Infiniment souvent – Réponse

Spécifier que $P$ est infiniment souvent vrai dans toute exécution :

$$\mathcal{S} \models \Box\Diamond P$$

## Finalement toujours – Persistance

Spécifier que $P$ finit par rester définitivement vrai :

$$\mathcal{S} \models \Diamond\Box P$$

Note : $\Box\Box P = \Box P$ et $\Diamond\Diamond P = \Diamond P$

# Client/serveur

## Réponse

Spécifier qu'un système (jouant le rôle d'un serveur) répond toujours ($Q$) à un requête donnée ($P$) :

$$\mathcal{S} \models \Box(P \Rightarrow \Diamond Q)$$

Souvent nommé leads-to :

$$\mathcal{S} \models P \leadsto Q$$

## Stabilité d'une requête

Spécifier que la requête $P$ d'un système (jouant le rôle d'un client) est stable tant qu'il n'y a pas de réponse favorable $Q$ :

$$\mathcal{S} \models \Box(P \Rightarrow P \mathcal{W} Q)$$

# Équité des transitions – *Fairness* ♪♪♪

Rappel informel :

faible : continûment faisable → infiniment souvent fait

forte : infiniment souvent faisable → infiniment souvent fait

## Équité faible des transitions

Soit $r \subseteq R$. Les transitions $r$ sont en équité faible dans $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{S} \models \Diamond\Box dom(r) \Rightarrow \Box\Diamond r$$
$$\mathcal{S} \models \Box\Diamond\neg dom(r) \vee \Box\Diamond r$$

## Équité forte des transitions

Soit $r \subseteq R$. Les transitions $r$ sont en équité forte dans $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{S} \models \Box\Diamond dom(r) \Rightarrow \Box\Diamond r$$
$$\mathcal{S} \models \Diamond\Box\neg dom(r) \vee \Box\Diamond r$$

(une transition $s \to s'$ est équivalente à $s \wedge \bigcirc s'$, et un ensemble de transition $\{t_1, t_2, \ldots\}$ est équivalent à $t_1 \vee t_2 \vee \ldots$)

# Spécification d'un système de transitions

Si on utilise une description en intention, et si l'on remplace l'utilisation de l'opérateur $\bigcirc$ par les variables primées, alors on peut spécifier toutes les exécutions permises par un système $\langle S, I, R\rangle$ :

$$\mathcal{S} \models I \wedge \Box R$$

L'utilisation de variables primées n'est pas nécessaire mais simplifie les formules.
Par exemple $P(x, x')$ est équivalent à la formule :
$\forall v : x = v \Rightarrow \bigcirc P(v, x)$
qui nécessite une quantification sur une variable.

# Limites de l'expressivité

Tout n'est pas exprimable en LTL :

- Possibilité arbitraire : si $P$ devient vrai, il est toujours possible (mais pas nécessaire) que $Q$ le devienne après.
- Accessibilité d'un état : depuis l'état initial, il est possible d'atteindre cet état.
- Réinitialisabilité : quelque soit l'état, il est possible de revenir dans un des états initiaux.

(ces propriétés sont exprimables en Computational Tree Logic (CTL), à venir)

## Conclusion ♪♪♪

La logique temporelle linéaire (LTL) permet d'exprimer, abstraitement, des propriétés sur les exécutions d'un système

### Logiques modales

La LTL est un cas particulier de logique modale.
Autres interprétations :

- $\square$ = nécessité, $\diamond$ = possibilité
- logique de la croyance : « je crois que $P$ est vrai »
- logique épistémique : « $X$ sait que $P$ »
- logique déontique : « $P$ est obligatoire/interdit/permis »
- ...