Corrigé

1 (Bi)simulation forte

Exercice 1

1. Oui
2. Montrons que la relation suivante est une relation de simulation

$$R \triangleq \{\langle s_0, t_0\rangle, \langle s_1, t_1\rangle, \langle s_2, t_1\rangle, \langle s_3, t_2\rangle\}$$

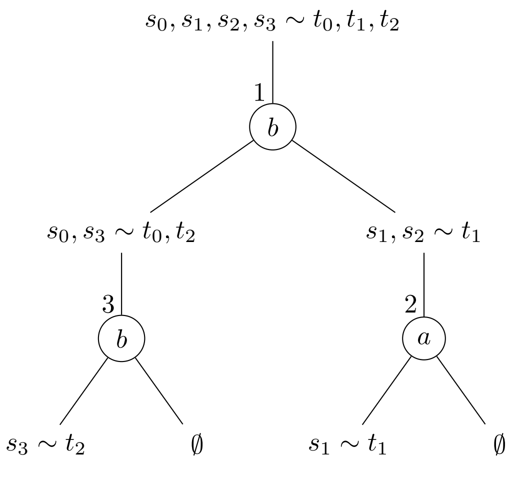
$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, "b"'] & t_0 \arrow[d, "b"] \\ s_1 \arrow[r, dash] & t_1 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} s_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, "b"'] & t_0 \arrow[d, "b"] \\ s_2 \arrow[r, dash] & t_1 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} s_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, "a"'] & t_1 \arrow[d, "a"] \\ s_3 \arrow[r, dash] & t_2 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} s_3 \arrow[r, dash] \arrow[d, "b"'] & t_2 \arrow[d, "b"] \\ s_3 \arrow[r, dash] & t_2 \end{tikzcd}.$$

   D'autre part, tout état initial de $\mathcal{S}$ (ici s_0) est simulé par un état initial de $\mathcal{T}$ ($\langle s_0, t_0\rangle \in R$) donc $\mathcal{S}$ est simulé par $\mathcal{T}$.
3. Oui
4. Montrons que la relation suivante est une relation de simulation

$$R \triangleq \{\langle t_0, s_0\rangle, \langle t_1, s_1\rangle, \langle t_2, s_3\rangle\}$$

$$\begin{tikzcd} t_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, "b"'] & s_0 \arrow[d, "b"] \\ t_1 \arrow[r, dash] & s_1 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} t_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, "a"'] & s_1 \arrow[d, "a"] \\ t_2 \arrow[r, dash] & s_3 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} t_2 \arrow[r, dash] \arrow[d, "b"'] & s_3 \arrow[d, "b"] \\ t_2 \arrow[r, dash] & s_3 \end{tikzcd}.$$

   D'autre part, tout état initial de $\mathcal{T}$ (ici t_0) est simulé par un état initial de $\mathcal{S}$ ($\langle t_0, s_0\rangle \in R$) donc $\mathcal{T}$ est simulé par $\mathcal{S}$.
5. Non
6. Calculons la plus grande relation de bisimulation entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$



   La plus grande relation de bisimulation entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ est donc $R \triangleq \{\langle s_3, t_2\rangle, \langle t_2, s_3\rangle, \langle s_1, t_1\rangle, \langle t_1, s_1\rangle\}$. L'état initial s_0 de $\mathcal{S}$ n'y est bisimilaire à aucun état initial de $\mathcal{T}$ donc $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ ne sont pas bisimilaires.

2 (Bi)simulation faible

Exercice 2

1. Oui
2. Montrons que la relation suivante est une relation de simulation faible

$$R \triangleq \{\langle s_0, t_0\rangle, \langle s_1, t_0\rangle, \langle s_2, t_1\rangle, \langle s_3, t_3\rangle, \langle s_4, t_4\rangle\}$$

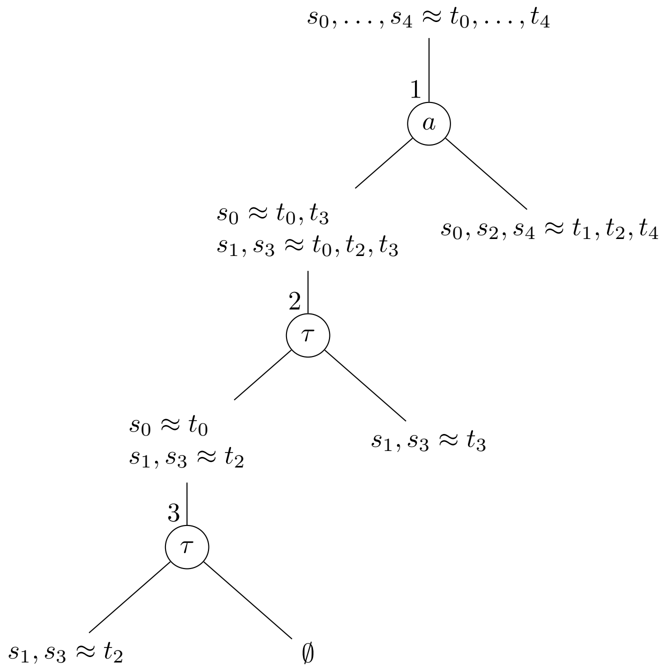
$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, "\tau"'] & t_0 \arrow[d, Rightarrow] \\ s_1 \arrow[r, dash] & t_0 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} s_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, "\tau"'] & t_0 \arrow[d, Rightarrow] \\ s_2 \arrow[r, dash] & t_1 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} s_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, "a"'] & t_0 \arrow[d, Rightarrow, "a"] \\ s_3 \arrow[r, dash] & t_3 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} s_2 \arrow[r, dash] \arrow[d, "b"'] & t_1 \arrow[d, Rightarrow, "b"] \\ s_3 \arrow[r, dash] & t_3 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} s_3 \arrow[r, dash] \arrow[d, "a"'] & t_3 \arrow[d, Rightarrow, "a"] \\ s_4 \arrow[r, dash] & t_4 \end{tikzcd}.$$

   D'autre part, tout état initial de $\mathcal{S}$ (ici s_0) est simulé par un état initial de $\mathcal{T}$ ($\langle s_0, t_0\rangle \in R$) donc $\mathcal{S}$ est faiblement simulé par $\mathcal{T}$.
3. Oui
4. Montrons que la relation suivante est une relation de simulation faible

$$R \triangleq \{\langle t_0, s_0\rangle, \langle t_1, s_0\rangle, \langle t_2, s_3\rangle, \langle t_3, s_3\rangle, \langle t_4, s_4\rangle\}$$

$$\begin{tikzcd} t_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, "\tau"'] & s_0 \arrow[d, Rightarrow] \\ t_1 \arrow[r, dash] & s_0 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} t_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, "a"'] & s_0 \arrow[d, Rightarrow, "a"] \\ t_2 \arrow[r, dash] & s_3 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} t_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, "b"'] & s_0 \arrow[d, Rightarrow, "b"] \\ t_3 \arrow[r, dash] & s_3 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} t_2 \arrow[r, dash] \arrow[d, "\tau"'] & s_3 \arrow[d, Rightarrow] \\ t_3 \arrow[r, dash] & s_3 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} t_3 \arrow[r, dash] \arrow[d, "a"'] & s_3 \arrow[d, Rightarrow, "a"] \\ t_4 \arrow[r, dash] & s_4 \end{tikzcd}.$$

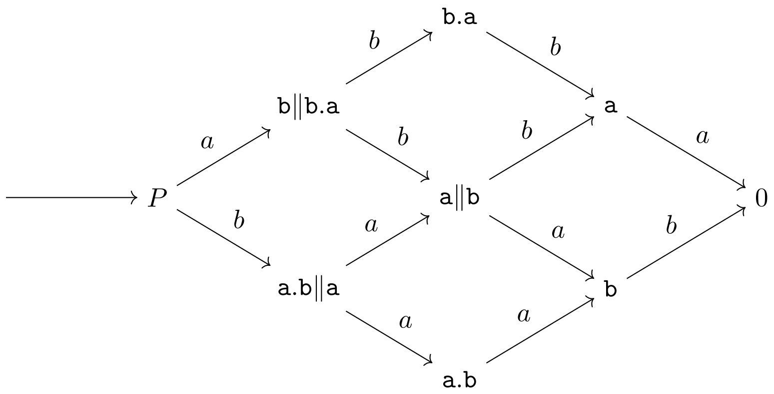
   D'autre part, tout état initial de $\mathcal{T}$ (ici t_0) est simulé par un état initial de $\mathcal{S}$ ($\langle t_0, s_0\rangle \in R$) donc $\mathcal{T}$ est faiblement simulé par $\mathcal{S}$.
5. Non
6. Commençons à calculer la plus grande relation de bisimulation faible entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$

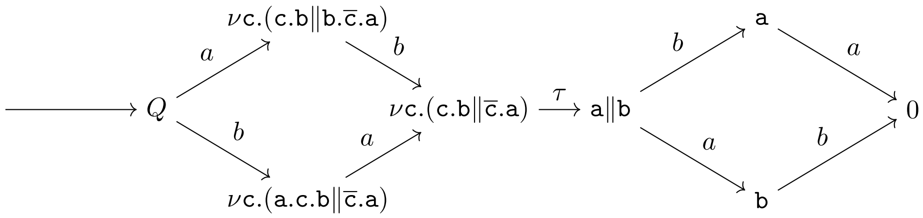


   Le calcul n'est pas terminé mais on sait déjà que, dans la plus grand erelation de bisimulation faible entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$, l'état initial s_0 de $\mathcal{S}$ n'est bisimilaire à aucun état initial de $\mathcal{T}$. Ainsi $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ ne sont pas bisimilaires.

3 Calcul de processus CCS

Exercice 3 (Systèmes de transitions)





3.1 Modélisation

Exercice 4 (Utilisateurs)

1.
$$\begin{array}{ll} \mathit{Utilisateur}_i & \triangleq \overline{\texttt{req}}_i.\mathit{SessionUtilisateur}_i \\ \mathit{SessionUtilisateur}_i & \triangleq \texttt{all}_i.\overline{\texttt{lib}}_i + \texttt{nil}_i \end{array}$$

2.
$$\mathit{Utilisateurs} \quad \triangleq \tau.(\mathit{Utilisateur}_1 \| \mathit{Utilisateurs}) + \tau.(\mathit{Utilisateur}_2 \| \mathit{Utilisateurs})$$

Exercice 5 (Allocateur, exercice bonus)

1.
$$\begin{array}{ll} \mathit{Alloc} & \triangleq \texttt{req}_1.\overline{\texttt{test}}_1.\mathit{SessionAlloc} + \texttt{lib}_1.\overline{\texttt{plus}}_1.\mathit{Alloc} \\ \mathit{SessionAlloc} & \triangleq \texttt{zero}_1.\overline{\texttt{nil}}_1.\mathit{Alloc} + \texttt{nonzero}_1.\overline{\texttt{moins}}_1.\overline{\texttt{all}}_1.\mathit{Alloc} \end{array}$$

2.
$$\mathit{Protocole} \quad \triangleq \nu\,\texttt{plus}.\nu\,\texttt{moins}.\nu\,\texttt{test}.\nu\,\texttt{zero}.\nu\,\texttt{nonzero}.(\mathit{Alloc} \| C_1^{n,n})$$

3. On définit Alloc_2 de manière similaire à Alloc

$$\begin{array}{ll} \mathit{Alloc}_2 & \triangleq \texttt{req}_2.\overline{\texttt{test}}_2.\mathit{SessionAlloc}_2 + \texttt{lib}_2.\overline{\texttt{plus}}_2.\mathit{Alloc}_2 \\ \mathit{SessionAlloc}_2 & \triangleq \texttt{zero}_2.\overline{\texttt{nil}}_2.\mathit{Alloc}_2 + \texttt{nonzero}_2.\overline{\texttt{moins}}_2.\overline{\texttt{all}}_2.\mathit{Alloc}_2 \end{array}$$

ce qui permet de définir un allocateur pour les deux types de blocs simplement en mettant Alloc et Alloc_2 en parallèle (sans oublier le deuxième compteur)

$$\mathit{Protocole} \quad \triangleq \mathit{Alloc} \| C_1^{n,n} \| \mathit{Alloc}_2 \| C_2^{n,n}$$

4.
$$\begin{array}{ll} \mathit{Alloc} & \triangleq \texttt{req}_1.\overline{\texttt{test}}_1.\mathit{SessionAlloc} + \texttt{lib}_1.\overline{\texttt{test}}_1.\mathit{SessionAlloc}'' \\ \mathit{SessionAlloc} & \triangleq \texttt{zero}_1.\overline{\texttt{test}}_2.\mathit{SessionAlloc}' + \texttt{nonzero}_1.\overline{\texttt{moins}}_1.\overline{\texttt{all}}_1.\mathit{Alloc} \\ \mathit{SessionAlloc}' & \triangleq \texttt{zero}_2.\overline{\texttt{nil}}_1.\mathit{Alloc} + \texttt{nonzero}_2.\overline{\texttt{moins}}_2.\overline{\texttt{plus}}_1.\overline{\texttt{all}}_1.\mathit{Alloc} \\ \mathit{SessionAlloc}'' & \triangleq \texttt{zero}_1.\overline{\texttt{plus}}_1.\mathit{Alloc} + \texttt{nonzero}_1.\overline{\texttt{moins}}_1.\overline{\texttt{plus}}_2.\mathit{Alloc} \end{array}$$