1 Задача 1

Пусть для определенности исходный массив — a. Заведем 2 массива — dp и $last$ длины n и будем считать результат на префиксе, тогда ответ будет лежать в $dp[n]$. Пусть $last[a[1]] = 1$ и $dp[1] = 1$, так как последовательность на префиксе длины 1 всего одна. Будем пересчитывать значения так:
Идем от $i = 2$ до n, в массиве $last[k]$ будем хранить последнее вхождение числа k на префиксе.
Есть 2 случая:

1. Число $a[i]$ мы встретили впервые. Тогда количество подпоследовательностей на префиксе будет — $2 \cdot dp[i-1] + 1$, так как мы можем либо взять подпоследовательности из $dp[i-1]$ без изменения, либо дописать к ним в конец $a[i]$, либо взять само $a[i]$ как подпоследовательность.

2. У нас уже были вхождения числа $a[i]$. Тогда число $a[i]$ как подпоследовательность мы брать не должны, так как оно уже было посчитано. Присвоим $dp[i]$ значение $2 \cdot dp[i-1]$, в нем некоторые подпоследовательности будут посчитаны дважды: а именно подпоследовательности $dp[last[a[i]] - 1]$, так как приписывая им в конец $a[last[a[i]]]$ или $a[i]$ мы получаем одинаковые подпоследовательности, так как $a[i] = a[last[a[i]]]$. Тогда функция для $dp[i]$ такая:

$$dp[i] = \begin{cases} 2 \cdot dp[i-1] + 1, \ last[a[i]] = -1 \\ 2 \cdot dp[i-1] - dp[last[a[i]] - 1], \ last[a[i]] \neq -1 \end{cases}$$

Ответом будем $dp[n]$.

2 Задача 2

Докажем в обе стороны:

1. Длина максимального подпалиндрома не меньше НОП:
   Предположим обратное: пусть длина максимального подпалиндрома меньше НОП. Пусть ind_c — массив индексов НОП в текущем массиве, ind_r — массив индексов НОП элементов развернутого массива в исходном, m — длинна НОП. Тогда рассмотрим 3 случая:

   (a) Все элементы ind_r находятся правее ind_c, тогда элементы исходного массива с индексами $ind_c[1]...ind_c[m], ind_r[1]...ind_r[m]$ — подпалиндром длины $2m$.

   (b) Все элементы ind_r находятся левее ind_c, аналогично элементы исходного массива с индексами $ind_r[1]...ind_r[m], ind_c[1]...ind_c[m]$ — подпалиндром длины $2m$.

   (c) Массивы ind_c и ind_r пересекаются. Тогда, если $ind_r[1]$ находится правее первой половины ind_c, то мы сможем составить подпалиндром длины m из элементов $ind_c[1]...ind_c[\frac{m}{2}], ind_r[\frac{m}{2}+1]...ind_r[m]$, если же он не правее первой половины, то в ind_r будем идти до $\frac{m}{2}$ и искать элемент который правее первой половины и аналогично строить подпалиндром.
   Если дошли до $\frac{m}{2}$ элемента массива и он все еще стоит не правее половины элементов массива, то мы может построить подпалиндром длины m так — берем элементы исходного массива
   $ind_r[1]...ind_r[\frac{m}{2}], ind_c[\frac{m}{2}+1]...ind_c[m]$.

Таким образом доказали, что длина максимального подпалиндрома не меньше длины НОП.

2. Длина максимального подпалиндрома не больше НОП: Предположим обратное: пусть длина максимального подпалиндрома больше нашей НОП, но в силу того, что палиндром равен самому себе развернутому, тогда он будет как в a, так и в a^r, а значит будем общей подпоследовательностью обоих массивов большей данной нам НОП — противоречие.

Доказали, что длина максимального подпалиндрома не больше m и не меньше $m \implies$ длина максимального подпалиндрома равна m.

3 Задача 3

Пусть для определенности исходный массив — a. Заведем массивы dp_1, dp_2, ind_1 и ind_2 длины n. Будем считать НВП в dp_1 и в $ind_1[i]$ записывать индекс куда в dp_1 был записан элемент исходного массива на своей итерации. Посчитаем в dp_2 наибольшую убывающую подпоследовательность в перевернутом исходном массиве, и аналогично посчитаем ind_2, в индексах исходного массива, то есть на итерации i будем писать в $ind_2[n-i+1]$. Создадим массив $res[1...n]$ и заполним его нулями. Будем идти от $i = 1$ до n, если $ind_1[i] + ind_2[i] - 1$ равно длине НВП исходного массива, то $a[i]$ содержится в одной из НВП, так как у $a[i]$ есть $ind_1[i] - 1$ отсортированных элементов слева, и $ind_2[i] - 1$ отсортированных элементов справа. Тогда элементы у которых $ind_1[i] + ind_2[i] - 1$ не равно длине НВП — не содержатся ни в одной НВП, если у элемента выполняется данное равенство — запишем $res[ind_1[i]] + +$. Повторно пройдем по массиву и для элементов у которых выполняется равенство будем смотерть на значение $res[ind_1[i]]$, если оно равно 1, то на $ind_1[i]$ месте в НВП может стоять только этот элемент, а значит — он входит во все НВП, если же $res[ind_1[i]] > 1$, то элемент будет входить хотя бы в одну НВП.