1 Задача 1

Пусть для определенности первая куча записана в массиве a. Положим во вторую кучу пару: значение корня первой кучи и ее индекс в массиве a, а так же ее детей с соответствующими индексами. Вторая куча — куча по первому элементу пары. Пусть корень второй кучи — пара значение b, i. Теперь совершим $k-1$ таких действий: будем класть во вторую кучу сыновей вершины i из первой кучи, а затем удалять корень второй кучи. Тогда после $k-1$ итерации мы удалим $k-1$ минимальных элементов, и значение корня второй кучи и будет k-й порядковой статистикой.

Докажем корректность: мы хотим, чтобы на i-й итерации мы удаляли i-й минимальный элемент. Докажем по индукции: на первой итерации все верно, так как мы удалим корень, рассмотрим i-ю итерацию: пусть до нее были удалены $i-1$ минимумов, тогда был удален и ее отец, так как он меньше нее, а значит она была добавлена в кучу и будет удалена на i-й итерации $\implies$ алгоритм корректен.

2 Задача 2

Будем хранить в каждой вершине переменную int $change$, которая сначала будет равна нулю. При совершении операции $changeKeys$ h x будем прибавлять к $change$ корня значение x — это очевидно работает за $O(1)$.

Создадим функцию $push$, которая будем принимать вершину. Она устроена таким образом — прибавим к $change$ сынов вершины наше значение $change$, прибавим самому значению вершины $change$ и обнулим $change$ у вершины.

Теперь в остальных функциях перед тем как будем обращаться к элементу будем делать от него $push$ — это не изменит ассимп-

тотику, так как $push$ работает за $O(1)$.
Докажем корректность: во всех функциях мы обращаемся к вершинам кучи последовательно, тоесть мы не можем обратиться к сыну вершины не обратившись к самой вершине — тогда за счет операции $push$ значение в вершине к которой мы обратимся всегда будет верно, а прибавление на потомках произойдет, так как мы протолкнули наш $change$.

3 Задача 3

Пусть для определенности нам дан массив a длинны n. Найдем $\frac{n}{2}$-ю порядковую статистику массиве a за $O(n)$. Постоим две кучи за $O(n)$: в первую поместим нашу порядковую статистику и все элементы левее(меньше него) — это обратая куча(элемент в корне больше всех элементов поддерева), а во вторую все элементы правее(больше него). Тогда в первой куче у нас $\frac{n}{2}$ минимальных элементов, а во второй куче — $\frac{n}{2}$ максимальных. Наши функции будут работать так:

1. $medianElement$
   Наша медиана — $\frac{n}{2}$-я порядковая статистика — корень первой кучи, просто вернем его. Работает за $O(1)$.

2. $deleteMedian$
   Наша медиана — корень первой кучи. Удалим корень первой кучи и сольем ее сыновей. Это работает за $O(\log n)$. Теперь у нас есть два варианта:

   (a) Количество элементов стало четно и новая медиана лежит во второй куче — положим корень второй кучи в первую($O(\log n)$), удалим его из второй и сольем ее сыновей($O(\log n)$).

(b) Если количество элементов стало нечетно и новая медиана лежит в первой куче — ничего не будем делать.

Общая ассимптотика — $O(\log n)$.

3. *insert x*

   Поймем в какую кучу надо добавлять элемент:

   (a) Если x меньше либо равно корня первой кучи, добавим его в первую кучу и:

      i. Если количество элементов стало четно и, следовательно, медиана лежит в первой куче — ничего не будем делать

      ii. Если количество элементов стало нечетно и, следовательно, медиана лежит в первой куче, но она не корень — положим корень первой кучи во вторую($O(\log n)$), удалим его из первой и сольем его детей($O(\log n)$).

   (b) Если x больше корня первой кучи, добавим его во вторую кучу и:

      i. Если количество элементов стало четно и, следовательно, медиана лежит во второй куче — положим корень второй кучи в первую($O(\log n)$), удалим его из второй и сольем его детей($O(\log n)$).

      ii. Если количество элементов стало нечетно и, следовательно, медиана лежит в первой куче — ничего не будем делать.