A teoria dos conjuntos e os fundamentos da matemática - Soluções

March 25, 2025

Contents

Chapter 1

História e Motivação

Exercício 1. *Exiba uma bijeção entre o conjunto dos números inteiros e os naturais.*

Solução: Defina a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ por $f(n) = -\frac{n}{2}$ se n é par e por $f(n) = \frac{n+1}{2}$ se n é ímpar. f é uma bijeção. $\square$

Exercício 2. *Prove que qualquer subconjunto infinito dos números naturais é enumerável.*

Solução: Lembre: dizemos que um conjunto X é *enumerável* se é finito ou é equipotente a $\mathbb{N}$, isto é, se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.

Todo conjunto finito é enumerável. Estão vamos olhar apenas o caso X ser infinito. Defina $f : \mathbb{N} \to X$ da seguinte maneira: $f(0)$ é o menor elemento de X; $f(1)$ é o segundo menor elemento de X; $f(2)$ é o terceiro menor elemento de X, e assim por diante. De maneira mais rigorosa, f é definida indutivamente por: $f(0) = \min X$; uma vez escolhidos, $f(0), f(1), \ldots, f(n)$, definimos $f(n+1) = \min(X \backslash \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\})$. Observe que f é crescente, logo injetiva. Também é sobrejetiva, pois do contrário, se existe um $x \in X \backslash f(\mathbb{N})$, então $x \in X \backslash \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Da maneira como construímos f concluímos que $x > f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e assim $f(\mathbb{N})$ é um conjunto limitado, logo finito. Como $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ é uma bijeção, $\mathbb{N}$ seria finito, um absurdo. Portanto $f : \mathbb{N} \to X$ é uma bijeção, logo X é enumerável. $\square$

Exercício 3. *Na bijeção que construímos entre os números naturais e os polinômios, encontre o polinômio associado ao número 30.*

Solução:

0	$\mapsto$	$-x-1$	11	$\mapsto$	$-x-2$	21	$\mapsto$	$-2x^2-2x-1$
1	$\mapsto$	$-x$	12	$\mapsto$	$-x+2$	22	$\mapsto$	$-2x^2-2x$
2	$\mapsto$	$-x+1$	13	$\mapsto$	$x-2$	23	$\mapsto$	$-2x^2-2x+1$
3	$\mapsto$	$x-1$	14	$\mapsto$	$x+2$	24	$\mapsto$	$-2x^2-2x+2$
4	$\mapsto$	x	15	$\mapsto$	$2x-2$	25	$\mapsto$	$-2x^2-x-2$
5	$\mapsto$	$x+1$	16	$\mapsto$	$2x-1$	26	$\mapsto$	$-2x^2-x-1$
6	$\mapsto$	$-2x-2$	17	$\mapsto$	$2x$	27	$\mapsto$	$-2x^2-x$
7	$\mapsto$	$-2x-1$	18	$\mapsto$	$2x+1$	28	$\mapsto$	$-2x^2-x+1$
8	$\mapsto$	$-2x$	19	$\mapsto$	$2x+2$	29	$\mapsto$	$-2x^2-x+2$
9	$\mapsto$	$-2x+1$	20	$\mapsto$	$-2x^2-2x-2$	30	$\mapsto$	$-2x^2-2$
10	$\mapsto$	$-2x+2$						

Portanto o polinômio associado ao número 30 é $-2x^2-2$. $\square$

Exercício 4. *Na bijeção que construímos entre os números naturais e os números algébricos, encontre o número natural associado ao número* $\sqrt{3}$

Solução: content $\square$

Exercício 5. *Suponha que, em um conjunto infinito, existe uma forma de representar cada elemento do conjunto com uma sequência finita de símbolos, dentre um conjunto finito de símbolos. Mostre que esse conjunto é enumerável e use esse resultado diretamente para mostrar que os conjuntos dos números racionais e dos números algébricos são enumeráveis.*

Solução: Seja $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ o conjunto de símbolos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S_n = \{(\tau_1, \ldots, \tau_n) : \tau_1, \ldots, \tau_n \in \Sigma\}$ e ponha $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. S é enumerável por ser uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis (finitos).[1] Seja X o conjunto infinito do exercício. A suposição de que cada elemento de X possa ser representado como uma sequência finita de símbolos significa que existe uma função $f : X \to S$. Esta função deve ser injetiva, pois não podemos usar a mesma sequência de símbolos para representar dois ou mais elementos distintos em X. Então $f : X \to f(X) \subset S$ é bijetiva e como $f(X)$ é enumerável, por ser um subconjunto de um conjunto enumerável conforme o Exercício 2, X é enumerável.

Todo número racional pode ser escrito como a/b, com $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Ambos a e b são escritos como uma sequência finita de símbolos (os algarismos de 0 a 9 e o sinal $+$ ou $-$). Pelo resultado demonstrado acima, $\mathbb{Q}$ é enumerável.

[1] [Lim16, p. 51]

Cada polinômio com coeficientes inteiros pode ser escrito como uma sequência finita de símbolos, logo o conjunto formado por esses polinômios é enumerável. O conjunto dos números algébricos é a união dos conjuntos das raízes de cada um desses polinômios. Como essa é uma união enumerável (o conjunto desses polinômios é enumerável) de conjuntos finitos (cada polinômio possui um número finito de raízes), o conjunto dos números algébricos é enumerável. $\square$

Exercício 6. *Imagine que o hotel de Hilbert, com uma quantidade infinita enumerável de quartos, todos ocupados, receba infinitos trens com infinitos vagões e cada vagão com infinitos passageiros (todas essas quantidades enumeráveis). Como o gerente pode alocar todos os atuais hóspedes em quartos separados?*

Solução: Cada passageiro tem uma identificação (p, q, r): $p =$ número do trem; $q =$ número do vagão; $r =$ número do assento. Cada hóspede no quarto n será realocado para o quarto $2n-1$, e cada passageiro com ID (p, q, r) será hospedado no quarto $2^p 3^q (2r-1)$.

Isto pode ser generalizado: hóspede $n \mapsto$ quarto $2n-1$; passageiro $(a_1, \ldots, a_m) \mapsto$ quarto $2^{a_1} 3^{a_2} \cdots p_{m-1}^{a_{m-1}} (2a_m - 1)$, em que $2, 3, \ldots, p_{m-1}$ são números primos. $\square$

Exercício 7. *Imagine, agora, um hotem maior ainda, com um quarto para cada número real, totalmente ocupado. Um ônibus igualmente gigantesco, com um passageiro para cada número real, chega ao hotel. Como o gerente pode fazer para rearranjar os hóspedes para acolher os novos visitantes, sempre em quartos separados?*

Solução:

- Hóspede $x \mapsto$ quarto $\arctan x$.
- Passageiro $y \mapsto$ quarto $y + \pi/2$ se $y \geq 0$ ou $y - \pi/2$ se $y < 0$.

Note que o hotel ficará com um quarto vago (o de número $-\pi/2$). $\square$

Chapter 2

A linguagem da Teoria dos Conjuntos

Exercício 1. *Usando a linguagem de primeira ordem da teoria de conjuntos, escreva fórmulas para representar as seguintes frases.*

(a) Não existe o conjunto de todos os conjuntos.

(b) Existe um único conjunto vazio.

(c) x é um conjunto unitário

(d) Existe um conjunto que tem como elemento apenas o conjunto vazio

(e) y é o conjunto dos subconjuntos de x

Solução:

(a) $\neg\exists x \forall y (y \in x)$ ou $\forall x \exists y (y \notin x)$.

(b) $\exists! x \forall y (y \notin x)$.

(c) $\exists! y (y \in x)$.

(d) $\exists x \forall y ((y \in x) \leftrightarrow y = \phi)$.

(e) $\forall z (z \in y \leftrightarrow \forall w (w \in z \to w \in x))$.

$\square$

Exercício 2. *Marque as ocorrências de variáveis livres nas fórmulas abaixo*

(a) $(\forall x (x = y)) \to (x \in y)$

(b) $\forall x((x = y) \rightarrow (x \in y))$

(c) $\forall x(x = x) \rightarrow (\forall y \exists Z((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow \neg(x \in y))$

(d) $\forall x \exists y(\neg(x = y) \wedge \forall z((x \in y) \leftrightarrow \forall w((w \in z) \rightarrow (w \in x))))$

(e) $(x = y) \rightarrow \exists(x = y)$

Solução:

(a) x e y

(b) y

(c) x

(d) Não há variáveis livres.

(e) x e y

$\square$

Exercício 3. *Escreva as subfórmulas de cada fórmula do exercício 2.*

Solução:

(a)
- $(\forall x(x = y)) \rightarrow (x \in y)$
- $(\forall x(x = y))$
- $(x = y)$
- $(x \in y)$

(b)
- $\forall x((x = y) \rightarrow (x \in y))$
- $(x = y) \rightarrow (x \in y)$
- $(x = y)$
- $(x \in y)$

(c)
- $\forall x(x = x) \rightarrow (\forall y \exists z(((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow \neg(x \in y)))$
- $\forall x(x = x)$
- $(x = x)$
- $\forall z \exists y(((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow \neg(x \in y))$
- $((x = y) \wedge (y = z))$
- $(x = y)$

- $(y = z)$
- $\neg(x \in y)$
- $(x \in y)$

(d)
- $(x = y) \to \exists y(x = y)$
- $(x = y)$
- $\exists y(x = y)$

$\square$

Chapter 3

Primeiros Axiomas

Exercício 1. *Usando o axioma da extensão, prove que* $\{\emptyset\}$ *e* $\{\{\emptyset\}\}$ *são conjuntos diferentes.*

Solução: O conjunto $\{\emptyset\}$ tem como único elemento $\emptyset$, enquanto $\{\{\emptyset\}\}$ tem como único elemento $\{\emptyset\}$. Como $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, segue do axioma da extensão que $\{\emptyset\}$ e $\{\{\emptyset\}\}$ são conjuntos distintos. $\square$

Exercício 2. *Para cada par de conjuntos abaixo, decida qual(is) dos símbolos* $\in$ *e* $\subset$ *torna(m) a fórmula verdadeira (assumindo que esses conjuntos existem). Lembre-se de que a resposta também pode ser ambos os símbolos ou nenhum deles. Justifique cada resposta.*

(a) $\{\emptyset\} \ldots \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(b) $\{\emptyset\} \ldots \{\{\emptyset\}\}$

(c) $\{1, 2, 3\} \ldots \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

(d) $\{1, 2, 3\} \ldots \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

(e) $\{1, 2\} \ldots \{1, \{1\}, 2, \{2\}, \{3\}\}$

(f) $\{\{1\}, \{2\}\} \ldots \{\{1, 2\}\}$

(a) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(b) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$.

(c) Não vale $\in$ nem $\subset$.

(d) $\{1, 2, 3\} \in \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$.

(e) $\{1,2\} \subset \{1,\{1\},2,\{2\},\{3\}\}$.

(f) Não vale $\in$ nem $\subset$.

Exercício 3. *Seja x o conjunto $\{\emptyset,\{\emptyset\},\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$.*

(a) Quantos elementos tem o conjunto x?

(b) Descreva todos os subconjuntos de x.

(c) Descreva, usando chaves e vírgula, o conjunto de todos os subconjuntos de x.

(d) Quantos elementos o conjunto dos subconjuntos de x possui?

(e) Prove que o conjunto x existe.

(a) 3 elementos.

(b) $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$.

(c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$.

(d) 8 elementos.

(e) **Solução 1:** Pelo axioma do vazio, existe $\emptyset$. Pelo axioma das partes, existe $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, e então $x = \mathcal{P}(\emptyset) \cup \{\mathcal{P}(\emptyset)\} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$ pelo Teorema 3.7. $\square$

Solução 2: Peguemos do conjunto ω, da definição 3.19, o elemento que é representante do número três, ou seja, $y = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} \in \omega$. Pelo Axioma da Extensão, $x = y$. $\square$

Exercício 4. *Prove que para todos conjuntos x e y*

(a) $x \subset x$;

(b) $x \in y$ se, e somente se, $\{x\} \subset y$;

(c) $\bigcup \mathcal{P}(x) = x$;

(d) se $x \subset y$, então $\bigcup x \subset \bigcup y$.

(a) **Solução:** Se x não é vazio, todo elemento de x é elemento de x, logo $x \subset x$. Se x é vazio, como $\emptyset$ está contido em qualquer conjunto pelo Teorema 3.4, temos que $\emptyset \subset \emptyset$. Em qualquer caso, $x \subset x$. $\square$

(b) **Solução:** Se $x \in y$, como x é o único elemento do conjunto $\{x\}$, temos que $\{x\} \subset y$. Reciprocamente, se $\{x\} \subset y$, então $x \in y$. $\square$

(c) **Solução:** Dado $u \in \bigcup \mathcal{P}(x)$, existe $v \in \mathcal{P}(x)$ tal que $u \in v$. Como $\mathcal{P}(x)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de x, $v \subset x$, logo $u \in x$. Portanto $\bigcup \mathcal{P}(x) \subset x$.

Reciprocamente, como $x \subset x$ pelo item (a), então $x \in \mathcal{P}(x)$, logo qualquer elemento $y \in x$ será elemento de $\bigcup \mathcal{P}(x)$, e assim $x \subset \bigcup \mathcal{P}(x)$.

Pelo axioma da extensão, $\bigcup \mathcal{P}(x) = x$. $\square$

(d) **Solução:** Dado $u \in \bigcup x$, existe $v \in x$ tal que $u \in v$. Como $x \subset y$, $v \in y$, logo $u \in \bigcup y$ e, portanto, $\bigcup x \subset \bigcup y$. $\square$

Exercício 5. *Escreva uma fórmula de primeira ordem, na linguagem da teoria dos conjuntos, com quatro variáveis livres, que represente o conjunto* $\{x, y, z\}$.

Solução: $\forall w((w \in u) \leftrightarrow ((w = x) \vee (w = y) \vee (w = z)))$. $\square$

Exercício 6. *Escreva os seguintes conjuntos, listando seus elementos entre chaves:*

(a) $\bigcup\{\{0,1\},\{\{1\}\},\{1,2\},\{\{1,2\}\}\}$*;*

(b) $\mathcal{P}(\{\emptyset,\{\emptyset\}\})$.

(a) $\{0,1,\{1\},2,\{1,2\}\}$.

(b) $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$.

Exercício 7. *Prove que não existe o conjunto de todos os conjuntos unitários.*

Dica: *Assuma, por absurdo, a existência do conjunto de todos os conjuntos unitários e prove a existência do conjunto de todos os conjuntos.*

Solução 1: Suponha que existe x tal que $\forall y(\{y\} \in x)$. Então $\{x\} \in x$. Como $x \in \{x\}$, temos uma contradição com o Teorema 3.14. Portanto $\nexists x \forall y(\{y\} \in x)$. $\square$

Solução 2: Suponha, por absurdo, que u seja o conjunto de todos os conjuntos unitários. Seja x um conjunto arbitrário, então $\{x\} \in u$ por hipótese e, pelo Axioma da União, teremos $x \in \bigcup x$. Isso faz de $\bigcup x$ o conjunto de todos os conjuntos, o que é um absurdo pelo Teorema 3.10. $\square$

Exercício 8. *Prove que para todo conjunto X existe o conjunto*

$$\{\{x\} : x \in X\}$$

Solução: Pelo axioma das partes, existe o conjunto $\mathcal{P}(X)$. Para cada $x \in X$, temos que $\{x\} \subset X$, logo $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$. Pelo axioma da separação, existe o conjunto $\{y \in \mathcal{P}(X) : \exists x((x \in X) \wedge (\{x\} = y))\}$, que, via axioma da extensão, é o conjunto procurado. $\square$

Exercício 9. *Sendo x um conjunto não vazio, prove que*

(a) $\forall y(y \in x \to (\bigcap x \subset y))$;

(b) $x \subset y \to \bigcap y \subset \bigcap x$.

(a) **Solução 1** Dados $y \in x$ e $z \in \bigcap x$, temos que $\forall w((w \in x) \to (z \in w))$. Em particular, $z \in y$, logo $\bigcap x \subset y$. $\square$

Solução 2 Seja x um conjunto qualquer não vazio e y um de seus elementos. Se $\bigcap x = \emptyset$ então $\bigcap x \subset y$ pelo Teorema 3.4. Caso contrário, escolha arbitrariamente um elemento z de $\bigcap x$, então z pertence a todos os elementos de x, desse modo, teremos $z \in y$ e, novamente, $\bigcap x \subset y$. $\square$

(b) Dado $z \in \bigcap y$, temos que z é elemento de qualquer $w \in y$. Como $x \subset y$, os elementos de x são também elementos de y, logo z é elemento de qualquer $w \in x$ em particular, portanto $z \in \bigcap x$. Desta forma $\bigcap y \subset \bigcap x$.

Exercício 10. *Escreva na linguagem da lógica de primeira ordem, sem abreviaturas, a seguinte fórmula:*

$$x \in \bigcup \bigcap (y \cup (w \backslash z)).$$

Solução: Faremos por partes. Dizer que $x \in \bigcup a$ para algum conjunto a significa que $\exists u((x \in u) \wedge (u \in a))$. Chame $a = \bigcap b$, sendo b um conjunto não vazio. Então $x \in a \leftrightarrow \forall v((v \in b) \to (x \in v))$. Desta forma, $x \in \bigcup \bigcap b$ significa

$$\exists u((x \in u) \wedge \forall v((v \in b) \to (u \in v))).$$

Faça $b = y \cup c$. Então $x \in c \leftrightarrow (x \in y) \vee (x \in c)$. Assim

$$x \in \bigcup \bigcap (y \cup c) \leftrightarrow \exists u((x \in u) \wedge \forall v(((v \in y) \vee (v \in c)) \to (u \in v))).$$

Por fim, faça $c = w\backslash z$. Então $x \in c \leftrightarrow (x \in w) \wedge \neg(x \in z)$. Portanto $x \in \bigcup\bigcap(y \cup (w\backslash z))$ significa

$$\exists u((x \in u) \wedge \forall v(((v \in y) \vee ((v \in w) \wedge \neg(v \in z))) \rightarrow (u \in v))).$$

□

Exercício 11. *Usando o axioma da regularidade, prove que:*

(a) não existem x, y, z tais que $x \in y, y \in z$ e $z \in x$;

(b) não existem w, x, y, z tais que $w \in x, x \in y, y \in z$ e $z \in w$.

Solução:

(a) Pelo axioma do par, existem $\{x, y\}$ e $\{y, z\}$. Tome $w = \{x, y\} \bigcup \{y, z\} = \{x, y, z\}$. Pelo axioma da regularidade, existe $u \in w$ tal que $u \cap w = \emptyset$. Se for $u = x$, então $y \notin x$ e $z \notin x$. Se for $u = y$, então $x \notin y$ e $z \notin y$. Se for $u = z$, então $x \notin z$ e $y \notin z$. Em qualquer caso, não podemos ter $x \in y$, $y \in z$ e $z \in x$ simultaneamente.

(b) Basta repetir o argumento acima para o conjunto $\{w, x, y, z\}$.

□

Exercício 12. *Prove que não existe x tal que $\mathcal{P}(x) = x$.*

Solução 1: Se $\mathcal{P}(x) = x$, como $x \subset x$, então $x \in \mathcal{P}(x)$, contradizendo o Corolário 3.15. □

Solução 2: Suponha que x seja um conjunto tal que $\mathcal{P}(x) = x$. Seja y um elemento qualquer de x, então também teremos $y \subset x$, dado que assumimos $\mathcal{P}(x) = x$, e portanto $x \cap y \neq \emptyset$, o que é um absurdo pelo Axioma da Regularidade. □

Exercício 13. *Escreva o conjunto $\mathcal{P}(3\backslash 1)$, utilizando apenas os seguintes símbolos: as chaves, a vírgula e o símbolo de conjunto vazio.*

Solução: $\mathcal{P}(3\backslash 1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$. □

Exercício 14. *Prove, a partir dos axiomas de Peano, os seguintes teoremas:*

(a) Todo número natural é diferente do seu sucessor.

(b) Zero é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural.

(a) **Solução 1:** Tese: $\forall n((n \in \omega) \wedge (n \neq n^+))$.

Para $n = 0$, $n^+ \neq 0$, pois 0 não é sucessor de nenhum número natural, logo a tese é verdadeira para $n = 0$.

Suponha que a tese é verdadeira para algum $n \in \omega$. Pelo axioma 3, n e n^+ devem ter sucessores distintos, isto é, $n^+ \neq (n^+)^+$. Isto mostra que a tese é verdadeira para n^+. Pelo axioma 5, a tese é verdadeira para todo n natural. $\square$

Solução 2: Usemos ω da definição 3.19 como modelo para $\mathbb{N}$. Pelo Teorema 3.20, ω satisfaz os Axiomas de Peano e, portanto, podemos aplicar o Princípio da Indução Finita. Por indução, verifiquemos que:

Caso Base: Pelo Axioma da Extensão temos que $\emptyset \neq (\emptyset \cup \{\emptyset\}) = \{\emptyset\} = \emptyset^+$.

Passo indutivo: Seja x um elemento qualquer de ω e suponha que $x \neq x^+$, então:

$$\begin{aligned}
&(x^+)^+ = x^+ \cup \{x^+\} \\
&= (x \cup \{x\}) \cup \{x^+\} \\
&= x \cup (\{x\} \cup \{x^+\}) \\
&= x \cup \{x, x^+\} \neq x \cup \{x\} = x^+
\end{aligned}$$

Com isso garantimos, pelo quinto Axioma de Peano, que todo número natural é diferente de seu sucessor.

$\square$

(b) **Solução 1:**

Tese:

$$\forall n\big((n \in \omega) \wedge \nexists m\big((m \in \omega) \wedge (m^+ = n)\big) \rightarrow (n = 0)\big).$$

Contrapositiva:

$$\forall n\big((n \neq 0) \rightarrow ((n \notin \omega) \vee \exists m\big((m \in \omega) \wedge (m^+ = n)\big))\big).$$

Demonstraremos a contrapositiva, por ser equivalente à tese. Para isso, precisaremos da seguinte proposição:

Proposição: Seja σ um subconjunto não vazio de ω. Se $0 \in \sigma$ e, para cada $n \in \sigma$, valer $n^+ \in \sigma$, então $\sigma = \omega$.

Prova da Proposição: Aplicando o axioma 5 à fórmula $P(\sigma) = (x \in \sigma)$, obtemos $\omega \subset \sigma$. Como $\sigma \subset \omega$, então $\sigma = \omega$.

Seja
$$\sigma = \{0\} \cup \{n \in \omega : \exists m((m \in \omega) \wedge (m^+ = n))\}.$$
Temos que $0 \in \sigma$ e, para cada $n \in \sigma$, $n^+ \in \sigma$. Pela proposição acima, $\sigma = \omega$.

Pelo axioma 4,
$$\{0\} \cap \{n \in \omega : \exists m((m \in \omega) \wedge (m^+ = n))\} = \emptyset.$$
Portanto, para qualquer $n \in \omega$ com $n \neq 0$,
$$\exists m((m \in \omega) \wedge (m^+ = n)).$$
Isto demonstra, por contraposição, a tese. □

Solução 2: Seja n um elemento de ω tal que $n \neq \emptyset$ e suponha que n não é sucessor de nenhum outro número natural de ω. Então, pelo Teorema 3.21, item e, temos os seguintes cenários:

1º – $\emptyset = n$: o que contradiz nossa hipótese.

2º – $\emptyset \in n$: então, pelo item b do Teorema 3.21, teremos os seguintes subcasos:

- $\emptyset^+ = n$: o que novamente contradiz nossa hipótese.
- $\emptyset^+ \in n$: então n existe graças a sucessivas aplicações[1] da **Definição 3.16**, e há um
$$m = (\cdots((\emptyset^+)^+)^+ \cdots)^+$$
tal que $m^+ = n$, contrariando nossa hipótese.

3º – $n \in \emptyset$: o que é um absurdo.

Como esgotamos todos os cenários e, em todos eles, chegamos a uma contradição, não pode haver n, além de $\emptyset$, em ω que não seja sucessor de nenhum outro número natural. □

Exercício 15. *Prove que:*

(a) para todo $n \in \omega$, $\emptyset \in n$ ou $\emptyset = n$;

[1] A ideia de aplicar uma mesma propriedade de forma sucessiva será formalizada no Capítulo 4 com o Teorema da Recursão.

(b) para todos $n, m \in \omega$, se $m \in n$, então $m \subset n$.

(a) Para $n = 0$, $n = \emptyset$, logo a tese é verdadeira.

Suponha ser verdade para n. Se $\emptyset = n$, então $\emptyset \in n^+ = n \cup \{n\}$. Se $\emptyset \in n$, então $\emptyset \in n^+$, e a tese é verdadeira para n^+

Pelo axioma 5, $\emptyset \in n$ ou $\emptyset = n$ para qualquer $n \in \omega$.

(b) Já feito na prova do Teorema 3.21, item (c).

Exercício 16. *A união de dois conjuntos indutivos é necessariamente um conjunto indutivo? Justifique sua resposta.*

Solução:

Resposta: Sim.

Justificativa: Sejam A e B dois conjuntos indutivos. Como $\emptyset \in A$ e $\emptyset \in B$, então $\emptyset \in A \cup B$. Se $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$, logo $x^+ \in A$ ou $x^+ \in B$, o que implica $x^+ \in A \cup B$. Isto mostra que $A \cup B$ é indutivo. $\square$

Chapter 4

Produto Cartesiano, Relações e Funções

Exercício 1. *content*

Solução: content $\square$

Exercício 2. *Prove que, se $A \subset C$ e $B \subset D$, então $A \times B \subset C \times D$.*

Solução: Se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, então pelo Exercício 1, $A \times B = \emptyset$ e temos trivialmente $A \times B \subset C \times D$. Suponha então que $A \times B \neq \emptyset$. Dado um par ordenado $(a, b) \in A \times B$, temos que $a \in A$ e $b \in B$. Uma vez que $A \subset C$ e $B \subset D$, então $a \in C$ e $b \in D$, logo $(a, b) \in C \times D$. Portanto $A \times B \subset C \times D$. $\square$

Exercício 3. *content*

Solução: content $\square$

Exercício 4. *Descreva todos os elementos de $\mathcal{P}(2 \times 2)$.*

Solução:

$$2 = \{0, 1\} \Rightarrow 2 \times 2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{P}(2 \times 2) \quad = \quad & \{\emptyset, \{(0,0)\}, \{(0,1)\}, \{(1,0)\}, \{(1,1)\}, \{(0,0), (0,1)\}, \\
& \{(0,0), (1,0)\}, \{(0,0), (1,1)\}, \{(0,1), (1,0)\}, \{(0,1), (1,1)\} \\
& \{(0,0), (0,1), (1,0)\}, \{(0,0), (0,1), (1,1)\}, \{(0,0), (1,0), (1,1)\} \\
& \{(0,1), (1,0), (1,1)\}, \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}\}
\end{aligned}$$

$\square$

Exercício 5. *content*

Solução: content $\square$

Exercício 6. *Prove que $x^0 = 1$, para todo conjunto x, e explique o que isso significa.*

Solução: x^0 é o conjunto das funções de $0 = \emptyset$ em x. Perceba inicialmente que $\emptyset \times x = \emptyset$ pelo Exercício 1, logo $\emptyset$ é uma relação. Afirmamos que essa relação é uma função. Com efeito, dizer que $\emptyset$ é função significa que se $a\emptyset b$ e $a\emptyset c$, então $b = c$. As afirmações $a\emptyset b$ e $a\emptyset c$ são ambas falsas, logo a sentença $((a\emptyset b) \wedge (a\emptyset c)) \to (b = c)$ é verdadeira (independente de $b = c$ ser verdadeiro ou falso). Portanto $\emptyset$ é uma função. Note que $\mathrm{dom}(\emptyset) = \emptyset$.

Afirmamos agora que $\emptyset$ é a única função cujo domínio é $\emptyset$. Com efeito, se $f : \emptyset \to x$ é uma função e $f \neq \emptyset$, então existe um par $(a, b) \in f$. Por definição de relação, $a \in \emptyset$ e $b \in x$, mas $a \in \emptyset$ é um absurdo. Logo $f = \emptyset$.

Portanto $x^0 = \{\emptyset\} = 1$. $\square$

Exercício 7. *content*

Solução: content $\square$

Exercício 8. *Para qual(is) das seguintes definições alternativas de pares ordenados o teorema 4.2 continua valendo? Justifique.*

(a) $(a, b) = \{a, \{b\}\}$*;*

(b) $(a, b) = \{\{a\}, \{b\}\}$*;*

(c) $(a, b) = \{\{a\}, \{\{b\}\}\}$*;*

(d) $(a, b) = \{\{0, a\}, \{1, b\}\}$*.*

Solução:

(a) Não vale, pois $(1, 1) = (\{1\}, 0) = \{1, \{1\}\}$.

(b) Não vale, pois $(a, b) = \{\{a\}, \{b\}\} = \{\{b\}, \{a\}\} = (b, a)$, e isto contraria o teorema se $a \neq b$.

(c) Não vale, pois $(1, 1) = (\{1\}, 0) = \{\{1\}, \{\{1\}\}\}$.

(d) Suponha que $(a, b) = (c, d)$. Então $\{\{0, a\}, \{1, b\}\} = \{\{0, c\}, \{1, d\}\}$. Se $a = b$, então $(a, b) = \{\{0, a\}, \{1, a\}\}$, logo $\{0, c\} = \{0, a\}$ (e $\{1, d\} = \{1, a\}$) ou $\{0, c\} = \{1, a\}$ (e $\{1, d\} = \{0, a\}$). No primeiro caso teremos $c = a$ e $d = a$, logo $d = b$. No segundo, não podemos ter $c = a$, pois assim teremos $0 = 1$. Então $c = 1$ e $a = 0$. Da mesma forma, $d = 0$ e $a = 1$. Disto concluímos que $a = 0$ e $a = 1$, um absurdo. Portanto este segundo caso não pode ocorrer. Assim só vale o primeiro caso, que é $c = a$ e $d = b(= a)$.

Suponha agora que $a \neq b$. Então $\{0, a\} = \{0, c\}$ e $\{1, b\} = \{1, d\}$, logo $a = c$ e $b = d$, ou $\{0, a\} = \{1, d\}$ e $\{1, b\} = \{0, c\}$, mas este segundo caso não pode ocorrer pois isto gerará a conclusão de que $0 = 1$, como visto acima.

Em ambos os casos esdudados, $a = c$ e $b = d$, logo o teorema é válido para esta definição de par ordenado.

□

Exercício 9. *content*

Solução: content □

Exercício 10. *Dê exemplo de uma função sobrejetora de ω em ω que não é injetora.*

Solução: Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, todo número natural $n \geq 2$ pode ser escrito como um produto de números primos $n = p_1 \cdots p_m$, e este produto é único a menos da ordem dos fatores. Esse teorema nos permite definir uma função $f : \omega \to \omega$ pondo $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e, para cada $n \geq 2$, $f(n) = m$, em que m é a quantidade de fatores primos na decomposição de n. f é sobrejetiva, pois, por exemplo, para cada $m \in \omega$, $f(2^m) = m$, mas f não é injetiva, pois, por exemplo, $f(2^m) = f(3^m)$ e $2^m \neq 3^m$ se $m \geq 1$. □

Exercício 11. *content*

Solução: content □

Exercício 12. *Seja X um conjunto e sejam x_0 e y_0 dois elementos distintos de X. Considere a relação em X:*

$$R = \{(x, y) \in X \times X : x = y\} \cup \{(x_0, y_0), (y_0, x_0)\}$$

(a) Prove que R é uma relação de equivalência em X.

(b) Descreva os elementos de X/R.

Solução:

(a) Devemos demonstrar que a relação R é reflexiva, simétrica e transitiva. Em linguagem de primeira ordem:

$$xRy \leftrightarrow (x = y) \vee (x = x_0 \wedge y = y_0) \vee (x = y_0 \wedge y = x_0).$$

Reflexividade: Para qualquer $x \in X$, $x = x$, logo xRx.

Simetria: Se xRy, temos os seguintes casos:

Caso 1. $x = y$: Então $y = x$, logo yRx;

Caso 2. $x = x_0$: Então $y = x_0$ ou $y = y_0$. Se $y = x_0$, teremos $y = x$, logo yRx. Se $y = y_0$, o par $(x_0, y_0) \in R$ pela definição de R. Como $(y_0, x_0) \in R$ por definição, temos que vale $y_0 R x_0$, logo yRx.

Caso 3. $x = y_0$: É análogo ao caso 2.

Transitividade: Se xRy e yRz, temos os casos

Caso 1. $x \neq x_0$ e $y \neq y_0$: Então $x = y$ e $y = z$, logo $x = z$ e, portanto, xRz.

Caso 2. $x = x_0$ e $y \neq y_0$: Se $x = x_0$, então $y = x_0$ ou $y = y_0$, mas pela hipótese deste caso, deve-se ter $y = x_0$. Como também yRz, então $y = z$ ou $y = y_0$ e $z = x_0$ (este caso está descartado), ou $y = x_0$ e $z = y_0$. Então $z = x_0$ (logo zRx que, por reflexividade, dá xRz) ou $z = y_0$ (que, pela definição de R, $x_0 R y_0$, logo xRz). Em qualquer caso xRz, que desejávamos.

Caso 3. $x \neq x_0$ e $y = y_0$: Análogo ao caso 2.

Caso 4. $x = x_0$ e $y = y_0$: Como yRz, então $z = y_0$ ou $z = x_0$. Em qualquer caso xRz pela definição de R.

Isto conclui a prova de que R é uma relação de equivalência.

(b) Lembre que $[x]_R = \{y \in X : xRy\}$. Dividimos novamente em casos.

Caso 1. $x \neq x_0$ e $x \neq y_0$: Então $xRy \leftrightarrow x = y$, logo $[x]_R = \{x\}$.

Caso 2. $x = x_0$ e $x \neq y_0$: Então $xRy \leftrightarrow (x = y) \vee (y = y_0)$, logo $[x]_R = \{x_0, y_0\}$.

Caso 3. $x \neq x_0$ e $x = y_0$: Então $xRy \leftrightarrow (x = y) \vee (y = x_0)$, logo $[x]_R = \{x_0, y_0\}$.

Em resumo, $X/R = \{\{x\} : x \in X \setminus \{x_0, y_0\}\} \cup \{\{x_0, y_0\}\}$.

$\square$

Exercício 13. *content*

Solução: content $\square$

Exercício 14. *Como fica uma relação de equivalência sobre $\emptyset$? Ela satisfaz o Teorema 4.28?*

Solução: Se R é uma relação sobre $\emptyset$, então $R \subset \emptyset \times \emptyset = \emptyset$, logo $R = \emptyset$. $\emptyset$ é uma relação de equivalência, já que não existem elementos de $\emptyset$ para desmentir esta afirmação. As classes de equivalência são todas vazias, ou melhor, $\forall x \in \emptyset([x]_\emptyset = \emptyset)$. Isto mostra que o item (b) do Teorema 4.28 não vale. Portanto $\emptyset$ não satisfaz o teorema. □

Exercício 15. *content*

Solução: content □

Exercício 16. *Dê exemplo ou prove que não existe.*

(a) Uma ordem total que não é uma boa ordem.

(b) Uma árvore que não é uma ordem total.

(c) Um reticulado que não é árvore.

(d) Uma árvore que é um reticulado mas não é totalmente ordenado.

Solução:

(a) $(\mathbb{Q}, \leq)$ é uma ordem total, mas não é bem ordenado, por exemplo o conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ não possui elemento mínimo.

(b) Considerando o conjunto $X = \{0, 1, 2\}$ e a ordem $\leq = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (0,2)\}$, $(X, \leq)$ é uma árvore, mas não é uma ordem total – por exemplo, não podemos comparar 1 com 2.

(c) O conjunto $X = \{0, 1, 2, 3\}$ com a ordem

$$\leq = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (0,1), (0,2), (0,3), (1,3), (2,3)\}$$

é um reticulado, mas não é uma árvore.

(d) Seja $(X, \leq)$ uma árvore que é também um reticulado. Dados $x, y \in X$, o conjunto $\{x, y\}$ possui um supremo, que chamaremos s. O conjunto $S = \{z \in X : z \leq s\}$ é bem ordenado. Então o conjunto $\{x, y\} \subset S$ possui um elemento mínimo, que deve ser x ou y, logo $x \leq y$ ou $y \leq x$. Portanto $(X, \leq)$ é totalmente ordenado. Isto mostra que não existe uma árvore que é um reticulado mas não é totalmente ordenada.

□

Exercício 17. *content*

Solução: content □

Exercício 18. *Prove que* $1+1=2$.

Solução:

$$\begin{aligned} 1+1 &= s(1)(1) = s(1)(0^+) = (s(1)(0))^+ = 1^+ \\ &= 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{\{0\}\} = \{0, \{0\}\} \\ &= \{0,1\} \\ &= 2. \end{aligned}$$

□

Exercício 19. *content*

Solução: content □

Exercício 20. *Use o teorema da recursão e as operações de adição e multiplicação para definir cada uma das seguintes funções de domínio* ω. *Em cada item, utilize a versão do teorema da recursão mais adequada.*

(a) a função $f(n) = 2^n$;

(b) o fatorial, isto é, $f(n) = n!$, *onde* $0! = 1$ *e* $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$;

(c) a sequência de Fibonacci, ou seja, a função $f : \omega \to \omega$ *tal que* $f(0) = f(1) = 1$ *e* $f(n+2) = f(n) + f(n+1)$.

Solução:

(a) Para cada n podemos escrever $f(n+1) = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2 \cdot f(n)$. Isto nos motiva a definir $g : \omega \to \omega$ por $g(x) = 2x$. Pelo Teorema da Recursão Finita, existe uma única função $f : \omega \to \omega$ tal que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = g(f(n)) = 2 \cdot f(n)$.

(b) Para cada n podemos escrever $f(n+1) = (n+1)! = (n+1) \cdot n! = (n+1) \cdot f(n)$. Isto nos motiva a definir $g : \omega \times \omega \to \omega$ por $g(x,y) = (x+1) \cdot y$. Pelo Teorema da Recursão Finita com Parâmetro, existe uma única função $f : \omega \to \omega$ tal que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = g(n, f(n)) = (n+1) \cdot f(n)$.

(c) Defina $g : \omega^{<\omega} \to \omega$ por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \operatorname{dom} x = 0 \vee \operatorname{dom} x = 1 \\ x(n-1) + x(n-2), & \text{se } \operatorname{dom} x = n > 1. \end{cases}$$

Pelo Teorema da Recursão Completa, existe uma única função $f : \omega \to \omega$ tal que $f(n) = g(f|n)$. Perceba que

$$f(0) = g(f|0) = 1 \qquad \text{e} \qquad f(1) = g(f|1) = 1,$$

pois, pela definição de g, $g(x) = 1$ se $\operatorname{dom} x = 0$ ou $\operatorname{dom} x = 1$. Para $n > 1$, pela definição de g, $f(n) = g(f|n) = f(n-1) + f(n-2)$. Isto mostra que a função descrita no exercício existe de fato.

$\square$

Chapter 5

Axioma da Escolha e suas Aplicações

Chapter 6

Conjuntos Equipotentes

Chapter 7

Ordinais

Chapter 8

Cardinais

Chapter 9

Ordens Parciais

Chapter 10

Noções de Teoria dos Modelos

Chapter 11

Modelos para ZFC

Chapter 12

Forcing

Bibliography

[Lim16] Elon Lages Lima. *Curso de análise*. 14 **edition**. **volume** 1. Rio de Janeiro: Impa, 2016.