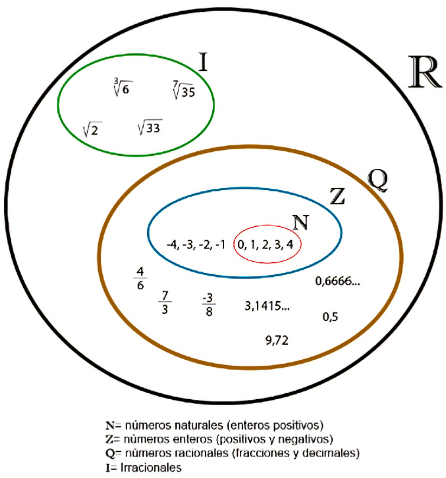
Los Números Imaginarios Son Reales

Para nadie es un secreto que las matemáticas están entre las ciencias de estudio más importantes para el ser humano, pero también sabemos que dada su naturaleza de ciencia exacta nosotros no inventamos su funcionamiento, por el contrario lo descubrimos, planteamos teoremas y los demostramos o refutamos, por esto mismo podemos decir que las matemáticas siempre han existido, solo que antes no conocíamos su existencia, o no teníamos visión completa del campo que vemos hoy en dia.

La matemática ha ido apareciendo en nuestra historia según la hemos ido necesitando, es así como poco a poco hemos descubierto la maravilla que esconden los números, y han llegado a salvarnos dándonos soluciones a problemas que aparentemente no tenían soluciones, es así como empezamos conociendo únicamente los números naturales, que sirvieron para empezar a contar y se estima que se usan desde el antiguo egipto, pero luego necesitamos realizar operaciones básicas como suma y resta, aquí nos encontramos en un problema dado que si consideramos operaciones como *(7 - 8)* el resultado no estaría definido entre los números naturales, y es de este modo que nacen los números enteros.



De este modo hemos ido expandiendo nuestros conocimientos sobre los números, lo racionales nacen al intentar operaciones como la siguiente división *(7/2)*, de este modo los irracionales nacen con operaciones como la raíz cuadrada de 2, luego unimos el conjunto de los números irracionales y el de los números racionales, y el conjunto que obtuvimos lo llamamos números reales creyendo que estábamos ya ante el panorama completo de todos los números que pudiesen existir.

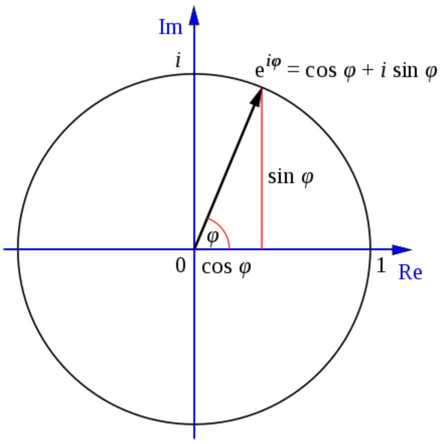
No podíamos estar más equivocados, dado que luego de unos años tuvimos un nuevo problema, necesitamos usar la operación de raíz cuadrada sobre números negativos "La primera referencia escrita de la raíz cuadrada de un número negativo la encontramos en la obra Stereometría de Herón de Alejandría (Grecia Aprox. 10-75) alrededor de la mitad del siglo I."(n.n,2006) , y es así como inicia la historia de los números imaginarios.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las raíces negativas empezaron a verse más a menudo cuando aparecieron las ecuaciones de segundo grado, estas ecuaciones tienen siempre 2 raíces, y la fórmula para hallar estas incluyen una raíz cuadrada dentro de la cual encontramos una resta que nos puede producir un número negativo, en caso de que esto suceda se denomina la ecuación como un factor cuadrático irreducible, sin embargo muchas personas empezaron a dejar las raíces de la ecuación en términos de raíces cuadradas negativas, lo que empezó a generar interés y nos llevó a la necesidad de encontrar un número que pudiera dar solución a estas operaciones, siendo este el primer intento de expandir los números reales.

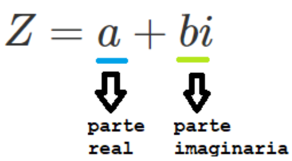
> El cuadrado de un número, positivo o negativo, es positivo; la raíz cuadrada de un número positivo tiene dos valores, uno positivo y otro negativo; no existe raíz cuadrada de un número negativo ya que un número negativo no es un cuadrado. (n.n., 2006)



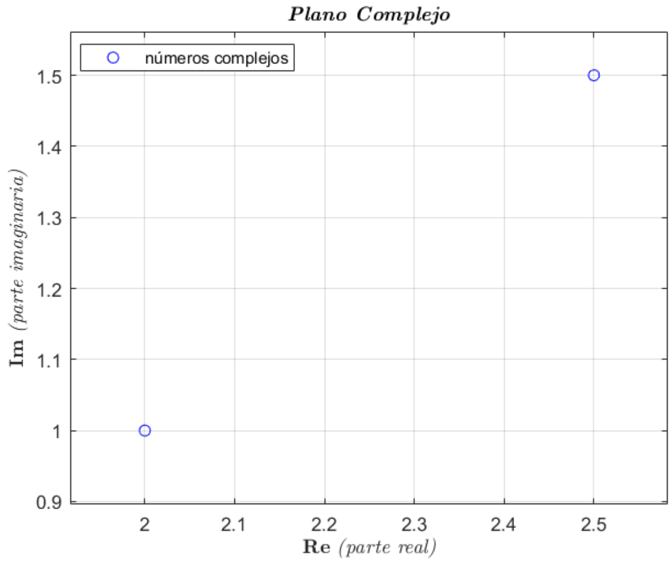
Con esta explicación se solventó este problema durante unos años, explicando que la raíz de un número negativo simplemente no está definida, por que no existe un número que al multiplicarse por sí mismo nos de como resultado un número negativo, estábamos ante un conjunto de números que para nosotros era invisible, fue allí cuando como por arte de magia nació el numero i "Euler fué el primero en usar la notación $i=\sqrt{-1}$, haciendo además un uso fundamental de los números complejos al relacionar la exponencial con las funciones trigonométricas por la expresión: $e^{i\varphi} = cos(\varphi) + i\, sen(\varphi)$". (n.n. , 2006)

Uniendo el conjunto de números imaginarios con el conjunto de números reales, obtenemos los números complejos, que hasta el momento es cerrado bajo todas las operaciones algebraicas que conocemos (raíz, potencia, multiplicación, división, suma, resta), por esto podemos decir que el cálculo en números complejos siempre terminará dentro de los números complejos.

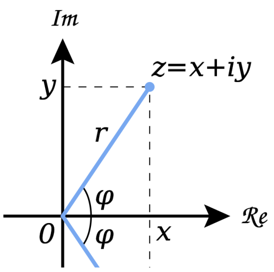
Ahora con el fin de llegar a entender con otros ojos los números complejos podemos ver acercarnos a través de esta interpretación gráfica de un número complejo, la forma inicial de entender un número complejo es como la suma de una parte real y una parte imaginaria:



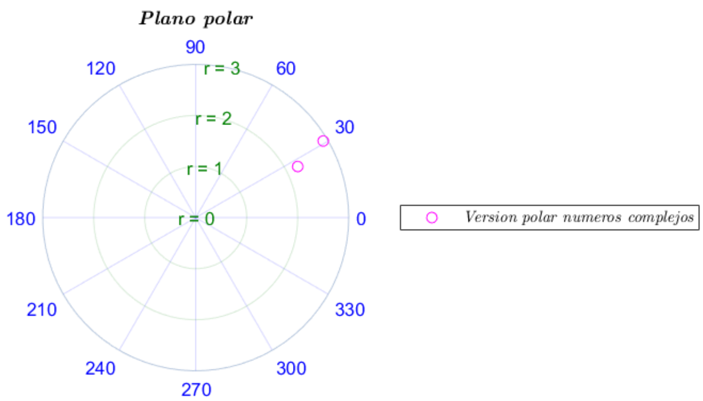
Por ejemplo los números *(2 + i)* y *(2.5 + 1.5i)* se representarían en el plano complejo así *(observe que la parte real corresponde a lo que normalmente conocemos como el eje* ***x****, y en el eje* ***y*** *está la parte imaginaria)*:



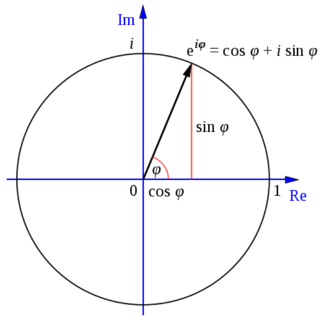
Lo anterior es muy curioso de ver a primer contacto porque los números complejos necesitan un plano en lugar de una recta para ser representados, y esta es una idea a la que podemos no estar adaptados, sin embargo partiendo de esta intuición gráfica de un plano; Podemos avanzar un poco más en esta idea y dejar de ver estos números complejos de una forma cartesiana para pasar a verlos de una forma <u>polar</u>, es decir pasar de ver los números como una ubicación en el eje ***real*** que después sube ***i*** unidades en el eje imaginario, a verlos como tomar un **'ángulo'** φ**,** y avanzar en dicha dirección ***r*** unidades de magnitud.



Esta idea se ilustra para los mismos números complejos de antes *(2 + i)* y *(2.5 + 1.5i):*



Con esta intuición gráfica podemos ver que primero gracias a la expresión $e^{i\varphi} = cos(\varphi) + i\, sen(\varphi)$ mencionada anteriormente podemos llegar a entender a los números complejos de una forma <u>*polar*</u> que tiene aplicaciones bastante útiles, en particular note que $e^{i\varphi} = cos(\varphi) + i\, sen(\varphi)$ genera puntos complejos en torno a un círculo unitario *(de radio 1) y que si se tiene* $r \cdot e^{i\varphi} = r\,(\,cos(\varphi) + i\, sen(\varphi)\,)$ al variar ***r*** y el ***ángulo*** **φ,** se puede generar todo el espacio complejo.



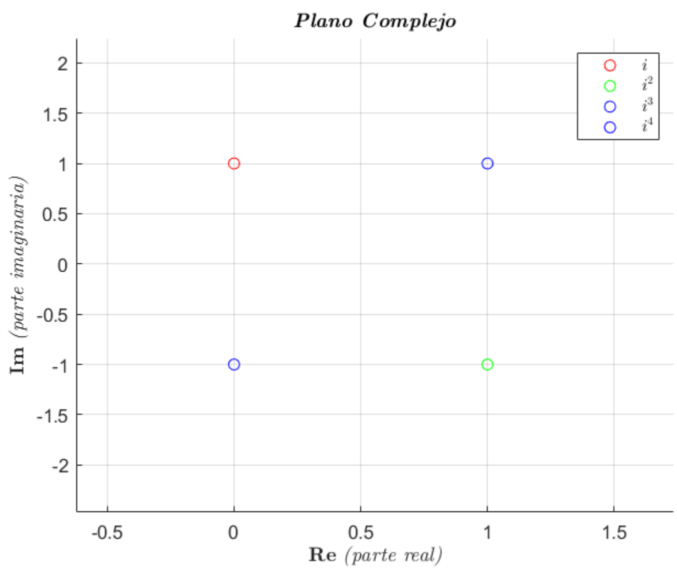
Hasta el momento todo lo que hemos comentado ha sido de una forma más intuitiva y gráfica/geométrica, ya que consideramos que para nuestro propósito final *(mostrar que los números imaginarios están presentes en la realidad, son muy útiles y no una cosa incomprensible)*, es más conveniente que dedicarnos a analizar el tema de forma algebraica para entender los conceptos necesarios para llegar a la aplicación estrella que pronto trataremos, *la transformada/serie de fourier*. Sin embargo para apoyar la idea anterior de rotación y entender también el potencial que pueden tener los números complejos para representar movimientos y rotaciones.

ejemplo:

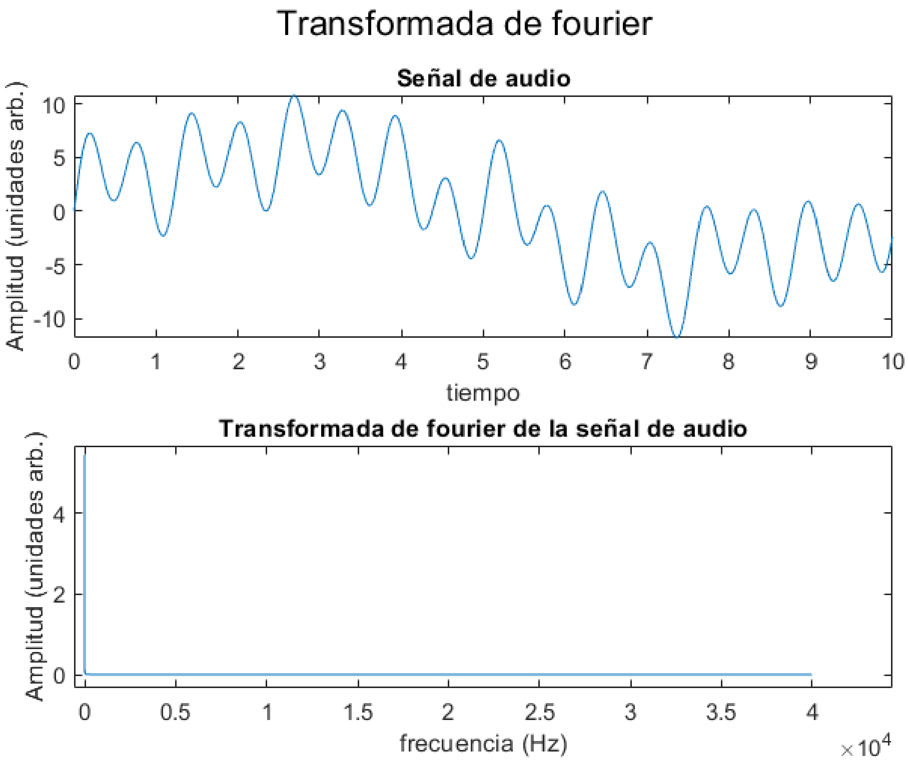
$$z_1 = 0 + i, \ \textit{ahora observemos los valores que toma } z_1\textit{:}$$

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot i &= i \cdot (0 + i) = i^2 = -1 \\
z_1 \cdot i^2 &= i^2 \cdot (0 + i) = i^3 = (-1)i = -i \\
z_1 \cdot i^3 &= i^3 \cdot (0 + i) = i^4 = (-1)(-1) = 1 \\
z_1 \cdot i^4 &= i^4 \cdot (0 + i) = i^5 = (1)i = i
\end{aligned}
$$

Gráficamente lo anterior fue:



Note entonces que multiplicar por un número complejo se traduce en una rotación y en un escalamiento del punto, esto es muy útil en diversos campos pero ahora mismo vamos a observar la utilidad del concepto de la ***transformada de fourier,*** esta transformación permite mover señales del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, es decir me permite pasar de entender una señal en función del tiempo a poder ver qué tanto de una frecuencia dada tiene una señal.



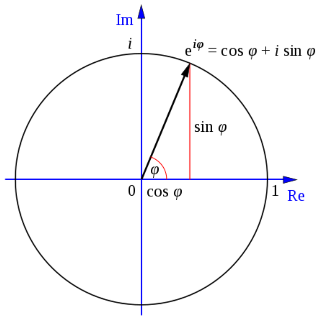
note que la forma de ver la señal pasó de una caótica (la señal original) a una mucho más sencilla (la magnitud de la transformada de fourier de la señal original), aquí se puede decir que la señal está compuesta de

La fórmula para obtener los coeficientes de fourier es:

$$\underbrace{X(j\omega)}_{\text{coeficientes de la transformada de fourier para un w dado}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t)}_{\text{señal original en funcion del tiempo}}\underbrace{e^{-j\omega t}}_{\text{exponencial compleja en funcion del tiempo}}dt.$$

Tengamos en cuenta que aquí j es otra notación para i, el número complejo. y ω es una frecuencia angular, es decir $\omega = 2\pi f$.

básicamente esta expresión observa qué tan bien una exponencial compleja explica el movimiento de la señal en función del tiempo, analizando la expresión vea que si *(una exponencial compleja que rota a frecuencia* ω *en sentido horario, recuerde:* $e^{-i\omega t} = cos(\omega t)\ -\ i\, sen(\omega t)$*)* la señal y $e^{-i\omega t}$ van en el mismo sentido en el instante ***t*** su multiplicación tiende a ser de mayor magnitud y si se hace la suma para cada instante ***t*** de todo el periodo de tiempo de la señal voy a poder tener un número complejo que me está diciendo que tan bien se ha ajustado dicha $e^{-i\omega t}$ a la señal con esta idea en mente es más claro qué es lo que está sucediendo dentro de dicha expresión.



La transformada de fourier tiene la ventaja de que es invertible, es decir yo puedo pasar del dominio del tiempo al de la frecuencia y después volver a mi señal en el tiempo, y esto tiene implicaciones tremendamente útiles.

Aunque esta idea parezca algo abstracta tiene muchas aplicaciones entre ellas el poder ecualizar audio *(muy importante en la industria de la música),* ya que el ecualizar audio es básicamente tomar la muestra de audio, pasarla a frecuencias y empezar a amplificar o reducir los coeficientes de la transformada de fourier, para finalmente reconstruir la señal de audio a partir de estos coeficientes en frecuencia que han sido modificados y así quedar con una señal de audio que suene mejor, o que suene más cool para una canción dada. Además con estos coeficientes de la transformada de fourier y otros filtros más puede llegar a extraerse características principales de la voz de una persona a través de los MFCC y así reconocer por ejemplo la voz de una persona y distinguirme de la voz de otras personas, de hecho es basado en esto que funcionan los asistentes de voz que reconocen comandos de voz y a hablantes, Shazam *(que es una app que dado un fragmento de audio es capaz de reconocer qué canción es)* funciona usando la transformada de fourier.

Con todo lo anterior hemos mostrado que los números complejos son necesarios *(cumplen la cerradura bajo raíz, potencia, multiplicación, división, suma, resta),* que tienen una interpretación geométrica y una facilidad asociada para representar ciertas rotaciones o deformaciones, las cuales vuelven a este conjunto de números uno muy interesante y útil, y finalmente pudimos entender un poco qué hace la transformada de fourier y vimos que tiene aplicaciones inesperadas y muy muy amplias que ayudan a hacer a día de hoy un mundo mejor, así decimos que los números complejos son reales.

Fuentes de las imágenes:

Las imágenes que no se encuentran en los siguientes links son imágenes de producción propia con código en matlab: [link del código]

https://calculo-diferencial-a-nivel-medio-superior.fandom.com/es/wiki/Numeros_Reales_Carlos_Ya%C3%B1ez?file=Numeros-Reales.png

https://sites.google.com/site/upaepmate/home/ecuaciones-cuadraticas

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complejo