Módulo 6: Optimización con Restricciones

Departamento MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario

Primer Semestre de 2021

Agenda

1. Problemas con restricciones de igualdad
   - Introducción
   - Plano tangente

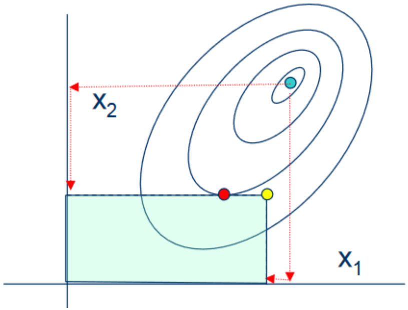
Introducción

- En la toma de decisiones hay relaciones entre la variables y las limitaciones de las mismas

$$
\begin{aligned}
\min \ & f(x) \\
\text{s.a. } & h(x) = 0 \\
& g(x) \leq 0
\end{aligned}
$$

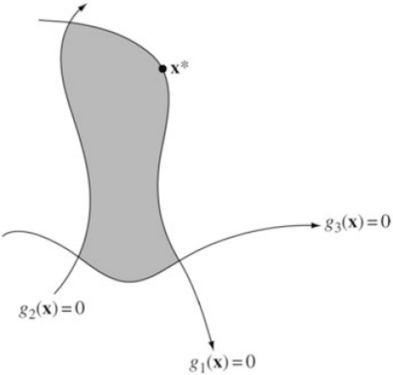
Restricciones

- Las restricciones limitan el espacio de búsqueda
- Se pueden perder algunos de los criterios de optimalidad como que el gradiente es nulo en el óptimo



Restricciones

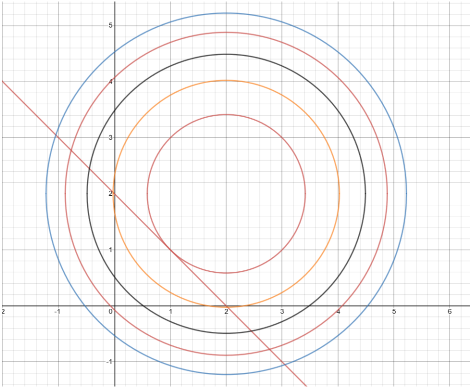
- Una restricción activa restringe el espacio de factibilidad



Restricciones

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 - 2 = 0 \end{aligned}$$



Restricciones

$x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

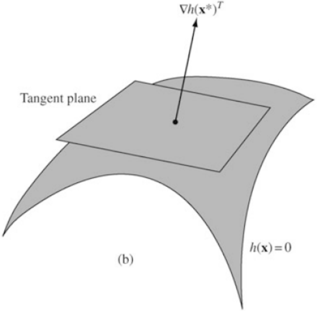
$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &\text{s.a. } x \in \Omega \end{aligned}$$

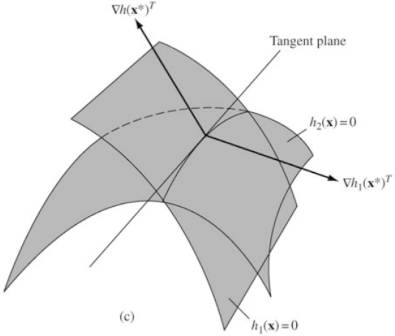
$h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, $m \leq n$,

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &\text{s.a. } h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Plano tangente

- Colección de todas las rectas tangentes a la superficie





Definiciones

- Un punto x^* que satisface $h(x^*) = 0$ es un punto **regular** de las restricciones si los gradientes $\nabla h_1(x^*), \ldots, \nabla h_m(x^*)$ son linealmente independientes
- El Jacobiano de h en x^* es $Dh(x^*) = \begin{bmatrix} Dh_1(x^*) \\ \vdots \\ Dh_m(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla h_1(x^*)' \\ \vdots \\ \nabla h_m(x^*)' \end{bmatrix}$
- x^* es regular si y solo si $r(Dh(x^*)) = m$

Definiciones (cont.)

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_3 + 2x_2^2 \\ \text{s.a. } & x_1 + 2x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_3 = 6 \end{aligned}$$

Definiciones (cont.)

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_3 + 2x_2^2 \\ \text{s.a. } & x_1 + 2x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_3 = 6 \end{aligned}$$

- $h_1(x) = x_1 + 2x_2 - 3 = 0$, $\nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Definiciones (cont.)

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_3 + 2x_2^2 \\ \text{s.a.}\ & x_1 + 2x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_3 = 6 \end{aligned}$$

- $h_1(x) = x_1 + 2x_2 - 3 = 0$, $\nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $h_2(x) = 4x_1 + 3x_3 - 6 = 0$, $\nabla h_2(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Definiciones (cont.)

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_3 + 2x_2^2 \\
\text{s.a. } & x_1 + 2x_2 = 3 \\
& 4x_1 + 3x_3 = 6
\end{aligned}
$$

- $h_1(x) = x_1 + 2x_2 - 3 = 0,\ \nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $h_2(x) = 4x_1 + 3x_3 - 6 = 0,\ \nabla h_2(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
- Todo $x^* \in \mathbb{R}^3$ es regular

Definiciones (cont.)

- Las restricciones de este problema describen una superficie $S = \{x \in R^n : h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0\}$
- El plano tangente a la superficie S en el punto regular x^* es el conjunto $T(x^*) = \{y : Dh(x^*)y = 0\}$

Definiciones (cont.)

Ejemplo:

- $\nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\nabla h_2(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
- Espacio tangente a S en x (y en x^*):

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \{y : Dh(x)y = 0\} \\
&= \left\{ y : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \left\{ y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -4/3 \end{bmatrix} \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$