Examen Final

1 de junio de 2021

Indicaciones generales

- Este es un examen **individual** con una duración de **120 minutos: de 11:00 a.m a 1:00 p.m.**
- Sólo se permite el uso de calculadoras como medio electrónico. Los celulares deben estar apagados durante todo el examen.
- Las cámaras deben estar activas durante todo el examen.
- Puede usar una única hoja con apuntes. El uso de libros u otro recurso "analógico" diferente no está permitido.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva a la anulación del examen.
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- Al finalizar, suba a eaulas un **único** archivo .pdf con su solución. En caso de problemas con la plataforma envíe su archivo por el chat privado de Teams a martin.andrade@urosario.edu.co.
- ¡Suerte y ánimo!

1. (**20 pts**) Sean X y Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < x + y < 1, \\ 0 & \text{d.l.c} \end{cases}$$

   - Determine el valor de la constante c.
   - Determine la función de densidad condicional X dado que $Y = y$, donde $0 < y < 1$.
   - Determine el valor esperado condicional de X dado que $Y = y$, donde $0 < y < 1$.
   - Determine la covarianza de X e Y.
   - ¿Son X y Y independientes? Justifique

2. (**10 pts**) La función generadora de momentos de X está dada por $M_X(s) = e^{2e^s - 2}$ y la de Y por $M_Y(s) = \left(\frac{3}{4}e^s + \frac{1}{4}\right)^{10}$. Si X e Y son independientes, determine:

   - $P(X + Y = 1)$
   - $\mathbb{E}((X+Y)^2)$

3. (**15 pts**) Un jugador apuesta en un juego que consiste en lanzar 3 dados de forma simultánea. Sus ganancias son inversamente proporcionales al número de seises obtenidos. El jugador juega 100 veces y recibe los siguientes resultados:

Número de 6´s	Número de observaciones
0	47
1	35
2	15
3	3

Realice una prueba χ^2 con $\alpha = 0.05$ para determinar si hay suficiente evidencia para afirmar que los dados no son justos.

4. (**5 pts**) Suponga que X e Y son ambas variables aleatorias Bernoulli. Demuestre que X e Y son independientes si y solo si $Cov(X, Y) = 0$.