Entrega 2
Proyecto Optimización

Alejandra Archbold, David Alsina, Andrey Lizarazo

Octubre 2021

1. Introducción

1.1. Planteamiento del problema de optimización:

A continuación detallaremos las variables y restricciones del problema:

- $\vec{X}$: Vector de las cantidades a cultivar en hectáreas, donde cada X_i, corresponde a la cantidad a cultivar de una planta en específico, *(hay n cultivos posibles para plantar)*.

Ahora los parámetros son:

- $\vec{I}$: Vector de ingresos por hectárea cultivada de cada cultivo i.
- $\vec{C}$: Vector de costos por hectárea cultivada de tipo de cultivo i.
- b_i: Corresponde a un factor que da prioridad o no a un determinado cultivo. (Este factor toma en consideración el criterio de selección del usuario, es decir, en un caso hipotético si el usuario considera que cierto cultivo no es apropiado para ocupar gran parte del área se le dará un valor bajo, basado en su experiencia, u otros factores que se consideren relevantes).

Así el sistema planteado queda:

$$\begin{aligned}
\textbf{Max } & \vec{I}\cdot\vec{X} - \vec{C}\cdot\vec{X} \\
\textbf{s.a. } & \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \textit{Area total cultivable} \\
& X_i \leq \frac{b_i}{n}\cdot \textit{Area total cultivable} \\
& X_i \geq 0, \quad i = 1, ..., n
\end{aligned}$$

Observe que cada coeficiente b_i es dado por el usuario pero debe cumplir ciertas restricciones básicas que son:

- $b_i \geq 1$, este umbral permite garantizar la participación de todos los cultivos que se opcionan como plantables.

- $\sum_{i=1}^{n} b_i > n$, esta restricción sobre la suma de los coeficientes b_i está con el fin de que sea posible llegar a cultivar toda la región cultivable, *(note que esta condición de completar toda el área cultivable también se puede alcanzar con suficiencia si* $\sum_{i=1}^{n} b_i = n$ *pero en el caso en que todos los* b_i *son* 1 *el problema se vuelve trivial).*

2. Resultados Lineales

2.1. Caso 1:

Valores iniciales:

- *Íngresos:* [18 10 5 21], *Costos:* [5 4 2 4], por lo tanto el vector de coeficientes de la función de costo es igual $\boldsymbol{c} = [13\ 6\ 3\ 17]^T$.
- Area total: 20
- Cantidad de cultivos: $n = 4$

Factores de prioridad por cultivo:

- Maíz: $b_1 = 1{,}2$
- Frijol: $b_2 = 1$
- Papa: $b_3 = 1$
- Albahaca: $b_4 = 1{,}2$

Luego, el vector de restricciones es igual a $[6\ 5\ 5\ 6\ 20]^T$.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Formato canónico:} & \\
\text{Maximizar} & 13x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 17x_4 \\
\text{sujeto a} & x_1 \leq 6 \\
 & x_2 \leq 5 \\
 & x_3 \leq 5 \\
 & x_4 \leq 6 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Formato estándar:} & \\
\text{Maximizar} & 13x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 17x_4 \\
\text{sujeto a} & x_1 + x_5 = 6 \\
 & x_2 + x_6 = 5 \\
 & x_3 + x_7 = 5 \\
 & x_4 + x_8 = 6 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0
\end{array}
$$

Solución:

Índices obtenidos de la Fase 1:

Índices básicos: [1 2 3 4 5], *Índices no básicos:* [6 7 8].

Resultados de la Fase 2:

El vector solución x es: $[6 \quad 5 \quad 3 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0]$

El vector de costos reducidos es: $[3 \quad 10 \quad 14]$

Los índices básicos finales son: $[1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 7]$

Finalmente el valor de la función objetivo con el vector solución es 219, es decir, los beneficios de la empresa agricultora son iguales a 219 unidades arbitrarias.

2.2. Caso 2:

Valores iniciales:

- *Íngresos:* [50 35 28 10], *Costos:* [42 14 15 7], por lo tanto el vector de coeficientes de la función de costo es igual $\boldsymbol{c} = [8\ 21\ 13\ 3]^T$.
- Area total: 20
- Cantidad de cultivos: $n = 4$

Factores de prioridad por cultivo:

- Maíz: $b_1 = 3$
- Frijol: $b_2 = 1{,}7$
- Papa: $b_3 = 0{,}8$
- Albahaca: $b_4 = 1{,}2$

Luego, el vector de restricciones es igual a $[15\ 8{,}5\ 4\ 6\ 20]^T$.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Formato canónico:} & \\
\text{Maximizar} & 8x_1 + 21x_2 + 13x_3 + 3x_4 \\
\text{sujeto a} & x_1 \leq 15 \\
 & x_2 \leq 8{,}5 \\
 & x_3 \leq 4 \\
 & x_4 \leq 6 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Formato estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 8x_1 + 21x_2 + 13x_3 + 3x_4 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_5 = 15 \\ & x_2 + x_6 = 8{,}5 \\ & x_3 + x_7 = 4 \\ & x_4 + x_8 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{array}$$

Solución:

Índices obtenidos de la Fase 1:

Índices básicos: [1 2 3 4 5], *Índices no básicos:* [6 7 8].

Resultados de la Fase 2:

El vector solución x es: [7,5 8,5 4 0 7,5 0 0 6]

El vector de costos reducidos es: [13 5 5]

Los índices básicos finales son: [1 2 3 5 8]

Finalmente el valor de la función objetivo con el vector solución es 295.5, es decir, los beneficios de la empresa agricultora son iguales a 295.5 unidades arbitrarias.

3. Tentativa de planteamiento no lineal

A continuación se mostrará las restricciones y variables del problema no lineal:

- $\vec{X}$: En este caso representa la cantidad de árboles x_i del tipo de árbol i a cultivar. En ese sentido, si tenemos árboles de mango por ejemplo, se van a representar como $X_1 =$ "numero de árboles de mango".

- r_i : Representa el radio que abarca un árbol por sus raíces en mts, tomando en cuenta esto, en el radio asignado a un respectivo árbol no se podría plantar otro, ya que ese espacio esta designado para las raíces del árbol en cuestión y para su toma de nutrientes. Por otro lado, entorno al circulo del árbol donde no se puede plantar otro, hay un anillo de maleza el cual se tiene pensado para que ayude a mantener los bichos distraídos y de esa manera no perjudicar el cultivo. Este anillo va a tener un ancho r_i, que depende del tipo de árbol i.

- $H(\vec{X})$: Esto representa una función logarítmica de ingresos. Estos ingresos son de Humus que es materia orgánica degradada a su último estado de descomposición por efectos de microorganismos, que se encuentra químicamente estabilizada, por lo que regula la dinámica de la nutrición vegetal en el suelo (factorhumus, s.f.). La función tentativamente es de la forma :

$$\vec{v} \cdot \begin{bmatrix} ln(x_1) \\ ln(x_2) \\ ln(x_3) \\ ln(x_4) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \cdot ln(x_i) \tag{1}$$

donde el vector $\vec{v}$ es $[a\ b\ c\ d]$ donde cada una de estas variables a, b, c, d son constantes que significan que el hummus que proviene de los desechos relacionados al tipo de árbol i es mayor en cantidad. En este sentido $ln(x_i)$ significa la cantidad de ingresos provenientes del hummus dada una cantidad x_i de desechos de un árbol.

- $\vec{I}$: Vector de ingresos por hectárea cultivada de cada árbol i.
- $\vec{C}$: Vector de costos por hectárea cultivada de tipo de árbol i.

$$\textbf{Max } (\vec{I} - \vec{C}) \cdot \vec{X} + H(\vec{X})$$

$$\textbf{s.a. } \sum_{i=1}^{n} x_i \left(r_i + \frac{r_i}{10}\right)^2 \pi = \text{ Área total (Ocupada por los tipos de cultivo } i\text{)}$$

$$x_i \geqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x_i \leqslant \frac{b_i \cdot (\text{Área total})}{n\pi \left(r_i + \frac{r_i}{10}\right)^2} \quad i = 1, \ldots, n$$