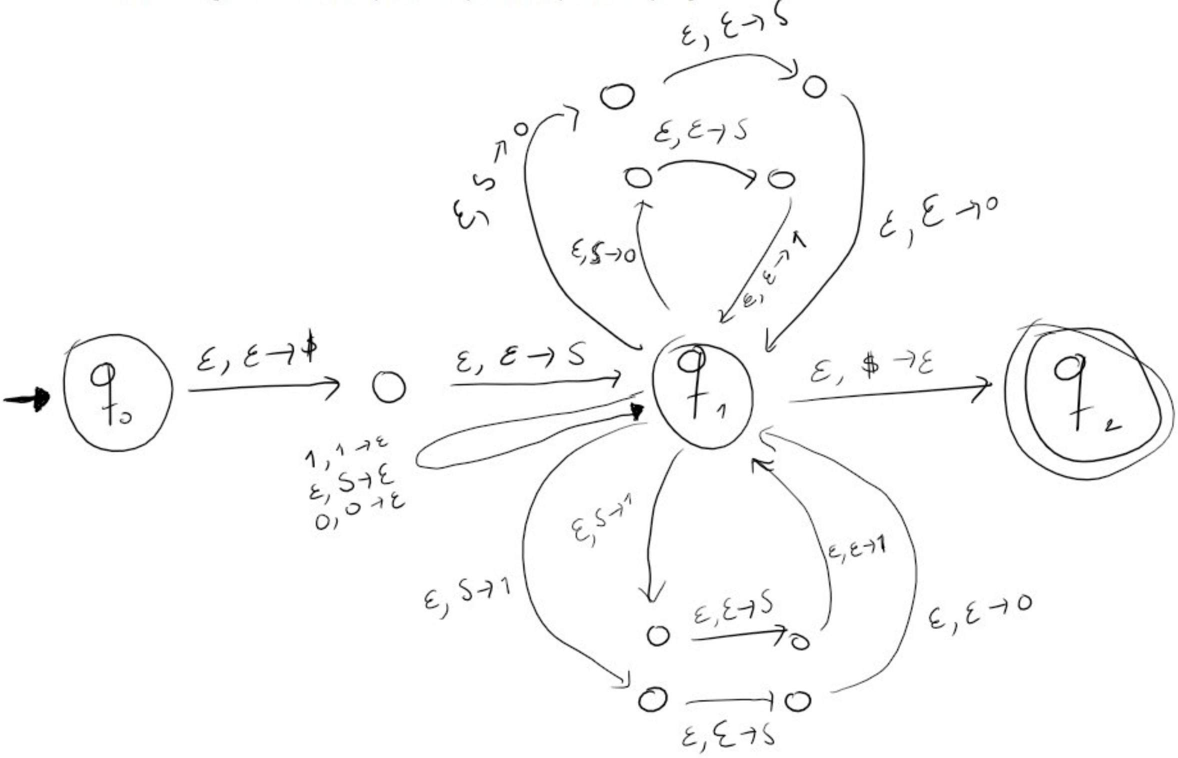
Taller 9

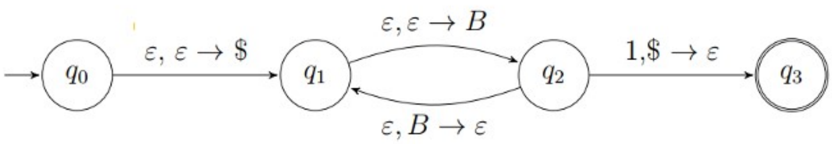
Sunday, September 26, 2021 8:18 AM

Ejercicio 1: Usando el procedimiento descrito en clase, encuentre el PDA equivalente a la siguiente CFG:

$$G = \{S \to 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon\}$$



Ejercicio 2: Escriba las reglas de la forma $A_{pq} \to aA_{rs}b$ que corresponden a la CFG que genera el lenguaje del siguiente PDA:



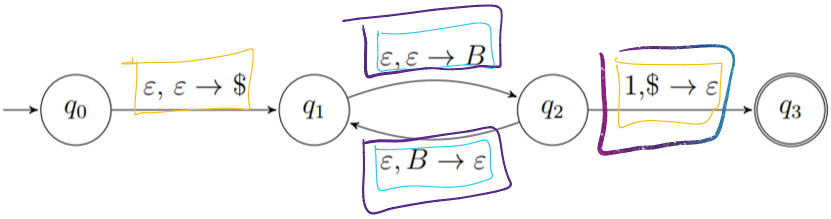
Check de condiciones del lema 1

- Vea que este autómata tiene un único estado de aceptación luego no se necesita simplificar por ese lado.
- Note también que el PDA vacía la pila antes de aceptar.

aceptor.

⊙ y vea que cada transición añade un símbolo al stack o lo quita, pero no ambos.

Ahora siguiendo el algoritmo:



$A_{pq} \to a A_{rs} b$

$A_{q_0q_3} \longrightarrow \varepsilon A_{q_1q_2} \varepsilon$

$A_{q_1q_2} \longrightarrow \varepsilon A_{q_2} A_{q_1} \varepsilon$

$A_{q_2q_1} \longrightarrow \varepsilon A_{q_1} A_{q_2} \varepsilon \mid 1\, q_2 q_3 \varepsilon$

$A_{q_2q_3} \to \varepsilon$

$A_{q_0q_3} \Rightarrow \varepsilon A_{q_1q_2} \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \varepsilon A_{q_2q_1} \varepsilon\varepsilon \Rightarrow \varepsilon\varepsilon 1 A_{q_2q_3} \varepsilon\varepsilon\varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon\varepsilon 1 \varepsilon \varepsilon\varepsilon\varepsilon \Rightarrow 1$

Teorema 1. *Sea $L = \{0^i 1^j 2^k : i \leq j \leq k\}$. No existe una **CFG** G tal que $L = L(G)$.*

Demostración. Supongamos por absurdo que existe una gramática independiente del contexto G tal que $L = L(G)$. Por el lema de bombeo existe una constante de bombeo p. Sea $s = 0^p 1^p 2^p$. Observe que $s \in L$ y que $|s| \geq p$. Entonces $s = uvxyz$ y se tienen las afirmaciones siguientes:

Afirmación 1. *Ni v ni y pueden contener más de un tipo de símbolo 0, 1 o 2 (p.ej., no pueden ser 01).*

Demostración de la afirmación 1.

Supongamos por absurdo que $v = 01$ (los demás casos son similares). Por la propiedad (i) del lema de bombeo se tiene que

($\to\leftarrow$). Por lo tanto ni v ni y contienen más de un tipo de símbolo. ☐

($\to\leftrightarrow$). Por lo tanto ni v ni y contienen más de un tipo de símbolo. □

V y Y se pueden bombear, asuma que $z = u = \varepsilon$, así $v = 01$, $x = \varepsilon$, $y = 2$

Se cumple:

$$|vy| = 3 > 0$$

Ahora si tenemos $s = uv^i x y^i z$

Note que $v = 01$ al ser bombeada daña el patrón. ($\Rightarrow\Leftarrow$) ■

Afirmación 2. *Como y y v sólo tienen un tipo de símbolo, entonces se tienen tres casos. El primero es que el símbolo que y y v no contienen sea 0. En este caso se sigue que $0^p1^r2^s \in L(G)$ donde $r < p$ o $s < p$.*

Demostración de la afirmación 2.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $|v| > 0$. Entonces, por la propiedad (i) del lema de bombeo se tiene que □

observe que dado que V o Y contienen un solo tipo de símbolo, (1 o 2), entonces va a haber una cantidad cte de ceros ya que no está ni en V ni en Y. con lo que al a desinflar $s = uv^0xy^0z = uxz$ dado que V tenía variables entonces hay menos 1's o 2's.

EJERCICIO 4: Demuestre que el siguiente lenguaje no es independiente del contexto.

EJERCICIO 4: Demuestre que el siguiente lenguaje no es independiente del contexto. Suponga que $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$L = \{ww : w \in \Sigma^*\}$$

Lema de bombeo para CFLs

Sea A un lenguaje independiente del contexto. Luego existe un número p (la *longitud de bombeo*), tal que, si s es una palabra en A de longitud por lo menos p, entonces s se puede dividir en 5 pedazos: $s = uvxyz$, tales que

1. para todos $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$;
2. $|vy| > 0$;
3. $|vxy| \leq p$.

Asuma por absurdo que L es una CFG. Luego existe p (longitud de bombeo) t.q.

$s \geq |p|$, piense en s de la forma ww, con $w = 0^p 1^p$, $s = 0^p 1^p 0^p 1^p$, vea que s se puede partir en $uvxyz$, con $|vy| > 0$ y en particular $|vxy| \leq p$ recuerde que $|s| = 4p$, con lo que forzosamente $v = 0$, $x = 0$, $y = 0$ y al inflar v^i y^i de $s = uv^ixy^iz$, hay más ceros de un lado.

$0^r 1^p 0^p 1^p \quad r > p$

EJERCICIO 5: Demuestre que el siguiente lenguaje no es independiente del contexto. Suponga que $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ y que $N_a(w)$ es el número de ocurrencias del símbolo a en la cadena w:

$$L = \{w \in \Sigma^* \colon N_0(w) = N_1(w) = N_2(w)\}$$

Lema de bombeo para CFLs

Sea A un lenguaje independiente del contexto. Luego existe un número p (la *longitud de bombeo*), tal que, si s es una palabra en A de longitud por lo menos p, entonces s se puede dividir en 5 pedazos: $s = uvxyz$, tales que

1. para todos $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$;
2. $|vy| > 0$;
3. $|vxy| \leq p$.

Supongamos por absurdo que L es una CFL.
ergo $\exists\, s / |w| \geq p$, $s = uvxyz$, por lema $|vy| > 0$, también $0 < |vxy| \leq p$, considere una palabra particular de L, $s = 0^p 1^p 2^p$

así $|s| = 3p \geq p$, así con $s = uv^ixy^iz$, puesto que hay almenos 1 elemento en vxy y no pueden ser los 3 (0's, 1's y 2's) cuando bombee $v^i y^i$ la cantidad $N_i(w)$, $i = 0, 1, 2$ se va a desbalancear $(\Rightarrow\Leftarrow)$ $\blacksquare$