# Taller 4 teórico

Friday, September 24, 2021 7:57 AM

1. Dado el siguiente problema de programación no lineal,

$$\min\ 2x^3 - 6x,$$

utilice el método de Newton unidimensional y $x_1 = 2$ como punto inicial para encontrar el valor de $x$ que minimiza la función.

$$\delta f(x) = 6x^2 - 6, \quad \delta\delta f(x) = 12x$$

(1)

$$x_1 = 2 - \frac{\delta f(2)}{\delta\delta f(2)}$$

$$= 2 - \frac{(24-6)}{24}$$

$$= \frac{5}{4}$$

(2)

$$x_2 = \frac{5}{4} - \frac{\delta f\left(\frac{5}{4}\right)}{\delta\delta f\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{9}{40}$$

$$= \frac{41}{40}$$

(3)

$$x_3 = \frac{41}{40} - \frac{\delta f\left(\frac{41}{40}\right)}{\delta\delta f\left(\frac{41}{40}\right)}$$

$$= \frac{41}{40} - \frac{81}{3280}$$

$$= \frac{3281}{3280}$$

(el mínimo está en $x=1$, vemos que cada vez más el valor tiende a $x=1$).

2. Dado el siguiente problema de programación no lineal,

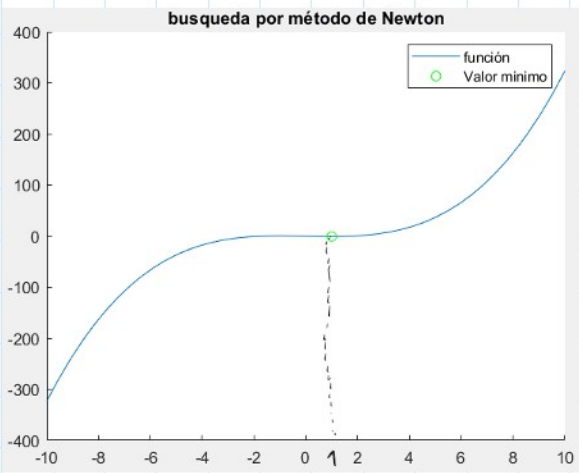
$$\min\ \frac{1}{3}x^3 - x,$$

utilice el método de Newton unidimensional con los puntos iniciales $x_a = 1/2$ y $x_b = -1/2$ para encontrar las raíces de la función. ¿Qué puede concluir sobre las soluciones encontradas?

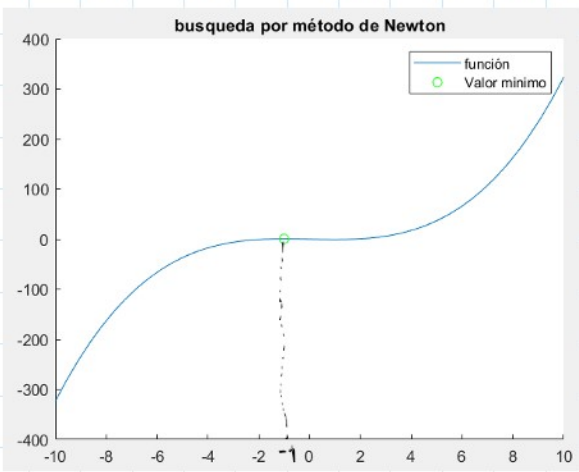
para $x_a = 1/2$

para $x_b = -1/2$

```
Iteración no. 0.
el valor de previo de x es: 0.5
El numerador df(xprev) es: -0.75
El denominador ddf(xprev) es: 1
el valor de nuevo de x es: 1.25
El error es de: 0.75
-------------------------------------------
Iteración no. 1.
el valor de previo de x es: 1.25
El numerador df(xprev) es: 0.5625
El denominador ddf(xprev) es: 2.5
el valor de nuevo de x es: 1.025
El error es de: 0.225
-------------------------------------------
Iteración no. 2.
el valor de previo de x es: 1.025
El numerador df(xprev) es: 0.050625
El denominador ddf(xprev) es: 2.05
el valor de nuevo de x es: 1.0003
El error es de: 0.024695
-------------------------------------------
Iteración no. 3.
el valor de previo de x es: 1.0003
El numerador df(xprev) es: 0.00060985
El denominador ddf(xprev) es: 2.0006
el valor de nuevo de x es: 1
El error es de: 0.00030483
-------------------------------------------
```




```
Iteración no. 0.
el valor de previo de x es: -0.5
El numerador df(xprev) es: -0.75
El denominador ddf(xprev) es: -1
el valor de nuevo de x es: -1.25
El error es de: 0.75
-------------------------------------------
Iteración no. 1.
el valor de previo de x es: -1.25
El numerador df(xprev) es: 0.5625
El denominador ddf(xprev) es: -2.5
el valor de nuevo de x es: -1.025
El error es de: 0.225
-------------------------------------------
Iteración no. 2.
el valor de previo de x es: -1.025
El numerador df(xprev) es: 0.050625
El denominador ddf(xprev) es: -2.05
el valor de nuevo de x es: -1.0003
El error es de: 0.024695
-------------------------------------------
Iteración no. 3.
el valor de previo de x es: -1.0003
El numerador df(xprev) es: 0.00060985
El denominador ddf(xprev) es: -2.0006
el valor de nuevo de x es: -1
El error es de: 0.00030483
-------------------------------------------
```




Ambos están en una región de silla bastante extensa y por ello es posible que ambos sean valores con grad. cero.

---

4. Dada la función,

$$f(x) = (x_1 + x_2 - 3)^2 + (x_1 - x_2 + 1)^2.$$

(a) Use el método de newton multidimensional a partir del punto $x_0 = (3, 5)$ para minimizar $f(x)$.

(b) Use el método de direcciones conjugadas para minimizar $f(x)$.

a) $\phi(x) = f(x_k) + \nabla f(x)' (x - x_k) + H(x_k)(x - x_k)$

$x_0 = [3 \quad 5]$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 + x_2 - 3) + 2(x_1 - x_2 + 1) \\ 2(x_1 + x_2 - 3) - 2(x_1 - x_2 + 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 + \cancel{2x_2}^{\,0} - 6 + 2x_1 - \cancel{2x_2}^{\,0} + 2 \\ \cancel{2x_1}_{\,0} + 2x_2 - 6 - \cancel{2x_1}_{\,0} + 2x_2 - 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4x_1 - 4 \\ 4x_2 - 8 \end{bmatrix}$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} 4(3) - 4 \\ 4(5) - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = x_0$$

$$H(x_0) = H(x)$$

$$x_1 = x_0 - H(x_0)^{-1} \nabla f(x_0)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

① Repetimos

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 - 4 \\ 4x_2 - 8 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} 4(1) - 4 \\ 4(2) - 8 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Verificación:

```
****************************************
        Iteración número 1
****************************************
El gradiente de f es:
 4*x1 - 4
 4*x2 - 8

El Hessiano de f es:
[ 4, 0]
[ 0, 4]

La inversa del Hessiano de f es:
[ 1/4,   0]
[   0, 1/4]

--------------------------------------
x_{k}:
 3
 5

Hessiana inversa evaluada en x{k}:
[ 1/4,   0]
[   0, 1/4]

Gradiente de f evaluado en x{k}:
  8
 12
```

```
 8
 12

x_{k+1}:
 1
 2


valor del gradiente en x_{k+1}
     0
```

b

(b) Use el método de direcciones conjugadas para minimizar $f(x)$.

Dada la función,

$$f(x) = (x_1 + x_2 - 3)^2 + (x_1 - x_2 + 1)^2.$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 - 4 \\ 4x_2 - 8 \end{bmatrix} \qquad c' = \begin{bmatrix} -4 & -8 \end{bmatrix}$$

son los coefs. que no tienen que ver con las vars. $x_i$

$$H(x) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

① escogemos $d_1$ arbitrario: $d_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

buscamos $d_2$ así:

$$d_1' H d_2 = 0 \quad , \quad d_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \cancel{(a)0}^{\,0} + 4b = 0$$

$$b = 0$$

Note que "a" puede ser cualquier cosa:

$$d_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pero $d_2$ no debe ser lin. dependiente de $d_1$, (sino el conj. pailia)

Ahora calcularemos los $\lambda$'s correspondientes:

$$\lambda_1 = -\left( \frac{c' d_1 + d_1' H x_0}{d_1' H d_1} \right), \quad x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -3$$

5. Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\min \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$
$$\text{s.a. } x^2 + y^2 = 16.$$

¿Existe algún punto irregular en las restricciones del problema?

Recordemos la definición de un punto regular:

$x^*$ es regular sii el rango de la matriz jacobiana de $h$ es el número de restricciones o en otras palabras:

Sea $x^*$ un punto t.q $h(x^*) = 0$ y $\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*)$ lin. indep, $x^*$ es un punto regular.

$$h_1(x, y) = x^2 + y^2 - 16 = 0$$

$$\nabla h_1(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \qquad y := \sqrt{-x^2 + 16}, \ -4 \leq x \leq 4$$

No hay ningún punto que no sea regular puesto que solo hay una restricción y esta siempre va a ser lin. indep. por "vacidad".

6. Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\min 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_3$$
$$\text{s.a. } 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 = 3$$

(a) Determine todos los puntos regulares para las restricciones del problema.

Recordemos la def de punto regular:

Sea $x^*$ un punto t.q $h(x^*) = 0$ y $\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*)$ lin. indep, $x^*$ es un punto regular.

$$\circledast \quad h_1(\vec{x}) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 4 = 0$$
$$\nabla h_1(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\circledast \quad h_2(\vec{x}) = 2x_1 + x_2 + 0x_3 - 3 = 0$$
$$\nabla h_2(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Veo que $\forall \vec{x}$ $\nabla h_1(\vec{x})$ y $\nabla h_2(\vec{x})$ son lin. indep.

Vea que $\forall \vec{x}$ $\nabla h_1(\vec{x})$ y $\nabla h_2(\vec{x})$ son lin. indep.

luego encontrar un punto regular ahora se reduce a encontrar $\vec{x}$ t.q $h_i(\vec{x}) = 0$, $i = 1, 2$.

$$① \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 4 = 0$$
$$② \quad 2x_1 + x_2 + 0x_3 - 3 = 0$$

hay 2 eqns y 3 incógnitas luego se debe asumir un valor $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$① \quad 2x_1 + 4x_2 + \alpha - 4 = 0$$
$$② \quad 2x_1 + x_2 + 0 - 3 = 0$$

Con ① - ② :

$$3x_2 + \alpha - 1 = 0$$
$$x_2 = -\frac{(\alpha - 1)}{3}$$

Reemplazando $x_2$ en ② :

$$2x_1 - \frac{(\alpha - 1)}{3} - 3 = 0$$
$$2x_1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{8}{3} = 0$$
$$2x_1 = \frac{\alpha}{3} + \frac{8}{3}$$
$$x_1 = \frac{\alpha}{6} + \frac{4}{3}$$

$$\vec{x} := \begin{bmatrix} \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{4}{3}\right) \\ -\frac{(\alpha - 1)}{3} \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(b) Encuentre el espacio tangente a la superficie S descrita por las restricciones en el punto regular $x^*$.

la definición de plano tangente es:

el plano tangente a una superficie en un punto regular $x^*$ es:

$$T(x^*) = \{ y : Dh(x^*) \cdot y = 0 \}$$

$T(x) \quad \{ \underbrace{y : Dh(x^*) \cdot y = 0}_{\text{Vectores perpendiculares al jacobiano en } x^*} \}$

$$Dh(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \nabla h_1(\vec{x})' \\ \nabla h_2(\vec{x})' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dado que $Dh(\vec{x})$ no está en función de $\vec{x}$

$$T(\vec{x}^*) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{y} = 0$$

$$① \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$$
$$② \quad 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 0$$

hay 2 eqns y 3 incógnitas por lo que se debe asumir algo

$x_3 = \alpha$ y con ① - ② :

$$3x_2 + \alpha = 0$$
$$x_2 = \frac{-\alpha}{3}$$

con $x_2$ en ② :

$$2x_1 - \frac{\alpha}{3} = 0$$
$$x_1 = \frac{\alpha}{6}$$

$$y := \begin{bmatrix} \alpha/6 \\ -\alpha/3 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

prueba:

$$\alpha \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -4/3 & +1 \\ 1/3 & -1/3 & +0 \end{bmatrix} \cdot \alpha$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \alpha = \vec{0}$$