Probabilidad y Estadística 2 MACC 2021-2
Taller 7

1. Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de una distribución uniforme en el intervalo $[0, \theta]$. Considere el estimador $\frac{n+1}{n} Y_{max}$ ¿El estimador propuesto es consistente?

2. Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2. Considere los siguientes tres estimadores para μ:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2), \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}Y_1 + \frac{Y_2 + \ldots + Y_{n-1}}{2(n-2)} + \frac{1}{4}Y_n, \quad \hat{\mu}_3 = \bar{Y}$$

   - Demuestre que cada uno de los tres estimadores es insesgado
   - Encuentre la eficiencia de $\hat{\mu}_3$ con respecto a $\hat{\mu}_2$ y $\hat{\mu}_1$, respectivamente.

3. Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2.
   - Si μ es desconocida y σ^2 es conocida, demuestre que $\bar{Y}$ es suficiente para μ
   - Si μ es conocida y σ^2 es desconocida, demuestre que $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu)^2$ es suficiente para σ^2
   - Si μ y σ^2 son desconocida, demuestre que $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ y $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ son conjuntamente suficientes para μ y σ^2 (luego $\bar{Y}$ y $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ son conjuntamente suficientes para μ y σ^2).

4. Suponga que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ constituyen una muestra aleatoria de una distribución de Poisson con media λ. Encuentre un estimador para λ a través del método de momentos.

5. Si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ denotan una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2, encuentre los estimadores de μ y σ^2 por medio del método de momentos.

6. Sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variables aleatorias uniformes independientes y distribuidas idénticamente en el intervalo $(0, 3\theta)$. Deduzca un estimador para θ a través del método de momentos.

7. Suponga que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ constituyen una muestra aleatoria de una distribución uniforme con función de densidad de probabilidad

$$f(y, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta+1}, & 0 \le y \le 2\theta + 1, \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

   a) Encuentre el MLE de θ