Hoja de formulas

Saturday, September 18, 2021 10:25 AM

⊛ Sobre la varianza

$$var(x) = \sum_{x} (x - E(x))^2 \cdot P_x(x)$$

- Propiedades:

1. $var(x) \geq 0$
2. $var(a) = 0$, $a \in \mathbb{R}$ y es cte.
3. $var(aX) = a^2 \, var(X)$.
4. $var(x+y) = var(x) + var(y) + 2\,Cov(x,y)$
5. $var(Y) = E(var(Y|X)) + var(E(Y|X))$

⊛ Sobre el valor Esperado

Def: $E(x) = \sum_{x} x \cdot P_x(x)$

$\int_{x} x \cdot f_x(x)\, dx$

- propiedades:

1. $E(c) = c$, c es cte.
2. $E(cX) = c\,E(X)$.
3. Si $X \geq 0 \Rightarrow E(x) \geq 0$
4. Si $X \leq Y \Rightarrow E(x) \leq E(Y)$
5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq E(x) \leq b$
6. $Y = a + bx \Rightarrow E(Y) = a + b\,E(X)$
7. Si x, y indep. $\Rightarrow E(x,y) = E(x) \cdot E(Y)$

(*) Sobre distribuciones derivadas

Método 1:

Calcular la PDF de $Y = g(X)$ de una v.a. continua X.

1. Calcular la CDF de F_Y así:

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = \int_{\{x \mid g(x) < y\}} f(x)\,dx$$

2. derive $F_Y(y)$ para obtener $f_Y(y)$.

Método 2 (cuando Y es f. lineal de una v.a.):

Sea X continua con PDF $f_X(x)$, y sea $Y = aX + b$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

DM: $Y = aX + b \Rightarrow F_Y(y) = P(aX + b \leq y)$

$$= P(aX \leq y - b)$$
$$= P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right)$$
$$= F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Ahora se deriva para obtener $f_Y(y)$: por regla de la cadena sale:

por regla de la cadena sale:

$$f_Y(y) = \frac{d F_Y(y)}{dy} = \frac{1}{a} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Método 3 (Caso de función Monótona):

- Dado que g es estrictamente monótona, tiene una función inversa h, vea entonces que:

$$y = g(x) \Leftrightarrow x = h(y) \equiv x = h(g(x))$$

Asumiendo que h es diferenciable, entonces la PDF de Y en la región donde $f_Y(y) > 0$ es:

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot \left| \frac{dh}{dy}(y) \right|$$

Dm:

dado g monótona estricta y $Y = g(x)$ calculemos la acumulada de Y:

$$\begin{aligned} F_Y &= P(g(x) \le y) \\ &= P(h(g(x)) \le h(y)) \quad \text{g tiene inversa dado que es monótona estricta.} \\ &= P(X \le h(y)) \\ &= F_X(h(y)) \end{aligned}$$

Ahora se puede diferenciar F_Y para obtener f_Y

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy}(y) = f_X(h(y)) \cdot \frac{dh}{dy}(y)$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy}(y) = f_X(h(y)) \cdot \frac{dh}{dy}(y)$$

(el caso donde g y $\therefore$ h, son decrecientes se trata análogamente)

Método 4 (caso multivariado):

el truco de obtener la acumulada y después diferenciar aplica también aquí.

Método 5 (Suma de variables a. indep. - Convolución):

- Caso discreto, sea $Z = X + Y$, donde X y Y son independientes

$$p_Z(z) = P(X + Y = z) = \sum_{\{x, y \mid x + y = z\}} p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$= \underline{\sum_x p_X(x) \cdot p_Y(z - x)}$$

] Convolución de X y Y

- Caso continuo, sea $Z = X + Y$, donde X y Y son indep. y cont.

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)\, dx$$

Si $Z = X - Y$

Si $Z = X - Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_{-Y}(z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(x-z)\, dx$$

DM:

Para obtener f_Z, con $Z = X + Y$, primero se obtendrá $f_{X,Z}$, para después integrar con respecto a x y quedar con f_Z:

$$\begin{aligned} P(Z \leq z \mid X = x) &= P(X + Y \leq z \mid X = x) \\ &= P(x + Y \leq z) \\ &= P(Y \leq z - x) = F_Y(z-x) \end{aligned}$$

Recordemos que por la regla de la mutiplicación:

$$\begin{aligned} f_{Z,X}(z,x) &= f_{Z|X}(z|x) \cdot f_X(x) \\ &= f_X(x) \cdot \underbrace{f_Y(z-x)}_{\text{Se obtiene al diferenciar respecto a } z,\ P(Z \leq z \mid X = x)} \end{aligned}$$

finalmente:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx$$

Funciones derivadas conocidas (fórmulas):

- Sea X una v.a. exponencial y $Y = aX + b$, por el método 2 $f_Y(y)$:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \Bigg\} \quad f_Y(y) = \frac{\lambda}{|a|} e^{-\lambda(y-b)/a}$$

para $x \geq 0$ | para $(y-b)/a \geq 0$

- Sea X una v.a. normal con media μ y varianza σ^2 y sea $Y = aX + b$, con a y b escalares y $a \neq 0$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$\therefore \quad f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2 / 2\sigma^2\right\}$$

$$= \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}\right\}$$

f_Y es normal con media $a\mu + b$ varianza $a^2\sigma^2$.

- $Z = X - Y$, X y Y son exponenciales

$$F_Z = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda z} & , z \geq 0 \\ \frac{1}{2} e^{\lambda z} & , z < 0 \end{cases}$$

$$f_Z = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda z} & , z \geq 0 \\ \frac{\lambda}{2} e^{\lambda z} & , z < 0 \end{cases}$$

o también: $f_Z(z) = \frac{\lambda}{2} \cdot e^{-\lambda|z|}$ → exponencial de 2 lados, Laplace PDF

- Sea $Z = X + Y$ donde X y Y son normales independientes, con convolución se tiene que:

$$\frac{1}{\quad} \quad \left\{ \frac{(z - \mu_x - \mu_y)^2}{\quad} \right.$$

independientes, con convolución de

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \exp\left\{ -\frac{(z - \mu_x - \mu_y)^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)} \right\}$$