Taller 5

Sunday, October 17, 2021 1:07 PM

Nombres: Juan José Caballero
David Alsina

Temas: Ley débil de los grandes números, teorema del límite central

1. Se quiere estimar la estatura media h (en metros) de una población usando n muestras independientes $X_1, \ldots, X_n$ seleccionadas aleatoriamente de la población. Se usa la media muestral M_n para estimar h y un estimativo grueso de que la desviación estándar de la altura en la población (y por ende de cada muestra) es de un metro.

   a) Determine el tamaño n mínimo para que la desviación estándar de M_n sea de a lo sumo 1 centímetro.

$$M_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S(X_i) = 1mt$$

$$E(M_n) = \mu = h \qquad S^2 = 1Mt^2$$

$$Var(M_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1Mt^2}{n}$$

$$std = 1mt \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$0.01\cancel{mt} \geq 1\cancel{mt} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$0.01 \geq \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$(0.01)^2 \geq \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{(0.01)^2} \leq n$$

$$10000 \leq n$$

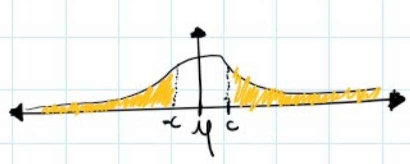
   b) Determine el tamaño n que hace que la desigualdad de Chebyshev garantice que el estimador M_n está a lo sumo a 5 centímetros de diferencia de h con probabilidad de por lo menos 0.99.

$$\hookrightarrow P(|M_n - h| \leq 0.05mt) \geq 0.99$$

Desigualdad de chebyshev

sea X V.a con media μ y var σ^2, entonces

$$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}, \ \forall c>0.$$



en términos del problema: $|M_n - h| \leq 0.05mt$

$$P(|M_n - \mu| \leq 0.05mt) \geq 0.99$$

$$1 - P(|M_n - \mu| \geq 0.05mt) \geq 0.99$$

$$-1 + P(|M_n - \mu| \geq 0.05mt) \leq -0.99$$

$$P(|M_n - \mu| \geq 0.05mt) \leq 0.01$$

Ahora que ya tenemos una expresión de la forma de la desigualdad de Chebyshev

Vea que $C = 0.05mt$, $\dfrac{\sigma^2}{nc^2} = 0.01$

ver que $C = 0.05\,mt$, $\frac{\sigma^2}{n C^2} = 0.01$

despejando n es:

$$\frac{\sigma^2}{n C^2} = 0.01$$

$$\frac{1 mt^2}{n \cdot (0.05)^2 \cancel{mt^2}} = 0.01$$

$$\frac{20}{n} = 0.01$$

$$n = \frac{20}{0.01}$$

$$\boxed{n = 2000}$$

c) Determine cómo cambian sus resultados anteriores si la desviación estándar de la población se estima en 10 centímetros.

c.a

$$std = (0.1\,mt) \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$0.01\,\cancel{mt} \geq (0.1\,\cancel{mt}) \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$0.1 \geq \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$0.01 \geq \frac{1}{n}$$

$$n(0.01) \geq 1$$

$$\boxed{n \geq 100}$$

c.b

$$C = 0.05\,mt \quad , \quad \frac{\sigma^2}{n C^2} = 0.01$$

$$0.01 = \frac{(0.1)^2 \cancel{mt^2}}{n \cdot (0.05)^2 \cancel{mt^2}}$$

$$1 = \frac{1}{n (0.05)^2}$$

$$(0.05)^{-2} = n$$

$$\boxed{400 = n}$$

→ en ambos casos el n necesario disminuye.

Ekisdé

2. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de veces que cabecea un estudiante hasta quedarse dormido en clase. Cada vez que el estudiante cabecea tiene una probabilidad de quedarse dormido igual a $p = \frac{1}{8}$.

a) Calcule la media y la varianza de X.

Por la forma en que se define X es geométrica con parámetro, $p = \frac{1}{8}$:

$$p_X(x) = \begin{cases} (1-p)^{k-1} \cdot (p) \; , \; k \geq 0 \; , 0 \leq p \leq 1 \end{cases}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} (1-p)^{k-1}(p), & k \geq 0, \ 0 \leq p \leq 1 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

poniendo los datos del problema en la eqn:

$$E(X) = 8, \quad Var(X) = 56$$

b) Aplique la desigualdad de Markov para obtener una cota para la probabilidad del evento $X \geq 16$.

La desigualdad de Markov dice: si una v.a. $X \geq 0$, entonces $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$, $\forall a > 0$.

$$P(X \geq 16) \leq \frac{E(X)}{16} \rightarrow 8 \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$$

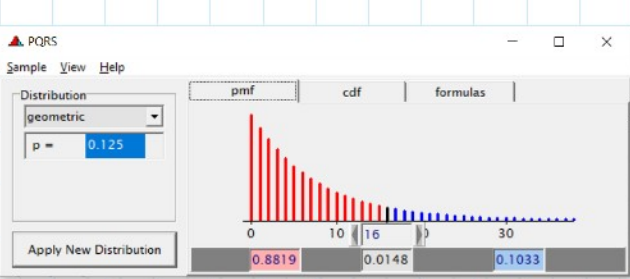
c) Ahora obtenga una cota para la probabilidad de este evento utilizando la desigualdad de Chebyshev.

Desigualdad de chebyshev

Sea X v.a. con media μ y var σ^2, entonces

$$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

queremos obtener una cota para la probabilidad de $X \geq 16$



$$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

$$P(X-\mu \geq c) + P(X-\mu \leq -c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

$$P(X \geq c+\mu) + P(X \leq -c+\mu) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

$$P(X \geq c+8) + P(X \leq -c+8) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

$$P(X \geq 16) + P(X \leq -8+8) \leq \frac{\sigma^2}{8^2}$$

$$P(X \geq 16) + P(X \leq 0) \leq \frac{\sigma^2}{64}$$

$$P(X \geq 16) + 0.125 \leq \frac{\sigma^2}{64}$$

$$P(X \geq 16) \leq \frac{\sigma^2}{64} - 0.125 \approx \frac{56}{64} - \frac{1}{8}$$

$$P(X \geq 16) \leq 0.75$$

d) Calcule $P(X \geq 16)$. ¿Cuál desigualdad da la mejor cota para la probabilidad del evento $X \geq 16$?

d) Calcule $P(X \geq 16)$. ¿Cuál desigualdad da la mejor cota para la probabilidad del evento $X \geq 16$?

$$P(X \geq 16) = 1 - P(X < 16)$$
$$= 1 - P(X \leq 15)$$
$$= 1 - (1 - (1-p)^{15})$$
$$= (1-p)^{15} = (1 - \tfrac{1}{8})^{15}$$
$$= \left(\tfrac{7}{8}\right)^{15}$$
$$= 0.134933$$

es mejor aprox la de la desigualdad de markov.

---

3. Se quiere estimar la estatura media h (en metros) de una población usando n muestras independientes $X_1, \ldots, X_n$ seleccionadas aleatoriamente de la población. Se usa la media muestral M_n para estimar h y un estimativo grueso de que la desviación estándar de la altura en la población, y por ende de cada muestra, es de un metro.

tal cual lo mismo que el 1 + D

a) Determine el tamaño n mínimo para que la desviación estándar de M_n sea de a lo sumo un centímetro.

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad E(M_n) = h$$

$$Var(M_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1mt^2}{n}$$

$$std = \sqrt{\frac{1mt^2}{n}}$$
$$std = \frac{1mt}{\sqrt{n}} \leq 0.01\,mt$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0.01$$
$$\sqrt{n} > 100$$
$$n > (100)^2$$
$$n > 10.000,$$ n es como mínimo 10.001

---

4. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. con distribución uniforme en el intervalo $[-1, 1]$. Para cada uno de los siguientes casos muestre que la sucesión $Y_1, Y_2, \ldots$ converge en probabilidad a algún límite e identifique el límite.

a) $Y_n = X_n/n$

$$X_i \rightarrow \text{unif en } [-1, 1]$$

$$\text{Si } \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to \infty} P(|Y_n - a| \geq \varepsilon) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right)$$

Analicemos solo $\lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{n} = 0$, luego $a = 0$ y $\lim_{n \to \infty} P(|Y_n - a| < \varepsilon)$

Analicemos solo $\lim_{n\to\infty} \frac{\Lambda_n}{n} = 0$, luego $a = 0$ y $\lim_{n\to\infty}$ ...

así n converge a cero.

b) $Y_n = (X_n)^n$, primero analicemos que sucede con $\lim_{n\to\infty} (X_n)^n$

dado que la magnitud de $|X_n| \leq 1$ hay 2 casos $|X_n| = 1$ en cuyo caso $a = 1$ o $|X_n| < 1$ (que es mucho más posible en cuyo caso $a = 0$, cuando $n \to \infty$ la posibilidad de que $|X_n| = 1$ se hace minúscula por lo que

$$\lim_{n\to\infty} P(|(X_n)^n - 0| \geq \varepsilon) = 0.$$

c) $Y_n = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$, lo que sucede con $\lim_{n\to\infty} X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$ es que también tiende a cero ya que es poco probable que todos los valores sean 1 ó -1 y es mucho más probable que $|x_i| < 1$ con lo que Y_n converge a cero y Y_n converge en probabilidad a cero.

d) $Y_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$ $\rightsquigarrow$ Al ser $n \to \infty$ es cada vez más probable que un x_i esté en el extremo del intervalo por lo que $Y_n = 1$ si $n \to \infty$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - a| \geq \varepsilon) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\max\{x_1, \ldots, x_n\} - 1| \geq \varepsilon) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} P(0 \geq \varepsilon) = 0$$

---

5. Antes de empezar a jugar en la ruleta de un casino usted decide observar el comportamiento de la misma. Se observan 100 rondas, cada una de las cuales resulta en un número entre el 1 y el 36, y cuenta el número de rondas en que el resultado es impar. Si el resultado es mayor a 55 usted decide que la ruleta no es justa. Suponiendo que la ruleta es justa, encuentre una aproximación a la probabilidad de que usted tome una decisión equivocada.

$$p = \frac{1}{2}$$

X: # de impares que salen

$$E(X) = 100\left(\frac{1}{2}\right) = 50$$
$$Var(X) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 25$$

X es binomial y se puede aproximar a una normal

Así:

$$P\left(Z_n \geq \frac{55 - 50}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$P\left(Z_n \geq \frac{5}{5 \cdot 100}\right) = P\left(Z_n \geq \frac{1}{100}\right)$$

$$= 0.496$$

$$= 0{,}496$$

puede estar muy equivocado

---

6. En un día cualquiera su computador falla con probabilidad 0.05, la cual es independiente de otros días. Usted está interesado en la probabilidad de tener al menos 45 días sin fallas en los siguientes 50 días.

   quiero al menos 45 de 50 días sin problemas

   a) Utilice una aproximación basada en el teorema del límite central para determinar esta probabilidad.