Tercer Parcial

21 de mayo de 2021

Indicaciones generales

- Este es un examen **individual** con una duración de **120 minutos: de 7:00 a 9:00 a.m.**.
- Puede tener **una** hoja manuscrita de resumen con fórmulas. Esta hoja debe estar marcada con el nombre del estudiante y entregarse con el parcial.
- No se permite el uso de libros o apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los **celulares deben estar apagados** durante todo el examen.
- La **cámara de su computador debe estar encendida** todo el tiempo durante la duración del examen.
- No se permite ausentarse del área de trabajo o recibir llamadas durante el examen.
- No se permite el uso de ningún tipo de dispositivo para buscar soluciones a los puntos del parcial ni para comunicarse con otras personas.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la **anulación** del examen.
- Las respuestas deben estar totalmente **justificadas**.

1. [25 ptos.] Considere el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min\ & 5x_1^2 + 2x_2 + x_2^2 \\ \text{s.a. } & x_1^2 + x_2^2 = 9 \\ & 5x_1 + 6x_2 \geq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   a) [10 ptos.] Usando KKT, encuentre los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones en el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. ¿El punto dado cumple con la condición necesaria de primer orden de KKT?

   Solución: Determinamos el gradiente de la función objetivo y de las restricciones

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 10x_1 \\ 2x_2 + 2 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\nabla g_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Planteamos la condición necesaria de primer orden:

$$\begin{aligned}
10x_1 + 2\lambda x_1 - 5\mu_1 - \mu_2 &= 0, \\
2x_2 + 2 + 2\lambda x_2 - 6\mu_1 - \mu_3 &= 0, \\
\mu_1(-5x_1 - 6x_2 + 9) - \mu_2 x_1 - \mu_3 x_2 &= 0, \\
\mu_i &\geq 0, \;\; i = 1, 2, 3 \\
x_1^2 + x_2^2 - 9 &= 0, \\
-5x_1 - 6x_2 + 9 &\leq 0, \\
-x_1 &\leq 0, \\
-x_2 &\leq 0.
\end{aligned}$$

Para el punto dado, que satisfacen las ecuaciones de factibilidad y además la restricción g_1 y g_2 son inactivas, entonces $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 0$. Así, las ecuaciones se reducen a las siguientes:

$$\begin{aligned}
10x_1 + 2\lambda x_1 &= 0, \\
2x_2 + 2 + 2\lambda x_2 - \mu_3 &= 0 \\
-\mu_3 x_2 &= 0
\end{aligned}$$

De este sistema de ecuaciones se verifica que $\mu_2 = 2$ y $\lambda = -5$. Luego el punto cumple con la condición necesaria de primer orden.

b) [15 ptos.] ¿Es el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\lambda = -4/3$ (multiplicador asociado a la restricción de igualdad) un mínimo local de este problema?

Solución: función objetivo y de las restricciones:

$$F(x) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad G_1(x) = 0, \quad G_2(x) = 0, \quad G_3(x) = 0.$$

Por lo tanto la segunda derivada del Lagrangiano respecto a x evaluada en $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ es

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22/3 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{bmatrix}.$$

El conjunto $J(\bar{x})$ es igual a $\{1, 3\}$, ya que $h(x) = 0$ y g_2 son restricciones activas en $\bar{x}$. Luego el conjunto $T(\bar{x})$ es igual a

$$\begin{aligned}
T(\bar{x}) &= \{y : \nabla h(\bar{x})' y = 0, \nabla g_2(\bar{x})' y = 0\} = \{y : \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix} y = 0, \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} y = 0\} \\
&= \{y : 6y_2 = 0, -y_1 = 0\} = \left\{ y : y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Ahora evaluamos el producto $y'L(\bar{x},\bar{\mu})y$ para $y \in T(\bar{x})$:

$$y'L(\bar{x},\bar{\mu})y = 0.$$

que es no negativo para todo $y \in T(\bar{x})$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), luego $\bar{x}$ satisface la condición necesaria de segundo orden para ser un mínimo local de este problema. Además, como $\tilde{J}(\bar{x}) = J(\bar{x})$, $\tilde{T}(\bar{x}) = T(\bar{x})$, luego $y'L(\bar{x},\bar{\mu})y = 0$ para todo $y \in \tilde{T}(\bar{x})$. Por lo tanto, el punto $\bar{x}$ satisface la condición suficiente de segundo orden y es un mínimo local de este problema.

2. [25 ptos.] Considere el problema

$$\begin{aligned} \min\ & (x_1-6)^2 + (x_2-2)^2 \\ \text{s.a. } & x_1 \le 4 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Realice la primera iteración del método de direcciones factibles para resolver el problema, usando como punto inicial $x_0 = (4,0)$.

Aunque es recomendable hacer un gráfico de apoyo, no puede usar el gráfico como argumento. Excepto para el caso donde sea necesario resolver problemas lineales asociados.

Solución: Información del problema,

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1-6) \\ 2(x_2-2) \end{bmatrix}, \quad \nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Dirección factible y de descenso $d_0 = (\overline{x} - x_0)$, donde

$$\begin{aligned} \min\ \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1 - 4 \\ \overline{x}_2 - 0 \end{bmatrix} = \min\ & -4\overline{x}_1 - 4\overline{x}_2 + 16 \\ \text{s.a. } & \overline{x}_1 \le 4 \\ & \overline{x}_2 \le 1 \\ & \overline{x}_1, \overline{x}_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Cuya solución es $\overline{x} = (4,1)$, luego la dirección de descenso es

$$d_0 = \begin{bmatrix} 4-4 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Actualizar $x_1 = x_0 + \alpha d_0$, donde α_0

$$\begin{aligned} \min\ & (4-6)^2 + (0+\alpha-2)^2 \\ \text{s.a. } & \alpha \le 1 \\ & \alpha \ge 0 \end{aligned}$$

Cuya solución es $\alpha = 1$, entonces, el valor de x_1 es

$$x_1 = \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$$

3. [25 ptos.] Considere el problema

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

Utilice el método de gradiente proyectado para resolver este problema, comenzando en el punto $(0,3)$ y con el espacio de trabajo W=$\{1\}$, es decir, asumiendo para la primera iteración un espacio de trabajo definido solo por la primera restricción.

Aunque es recomendable hacer un gráfico de apoyo, no puede usar el gráfico como argumento. Excepto para el caso donde sea necesario resolver problemas lineales asociados.

Solución: Información del problema,

$$Ax = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix}0\\-1\\3\end{bmatrix}, \quad \nabla f(x) = \begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix}, \quad \nabla f(x_0) = \begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}$$

Iteración 1:

Con el punto $x_0 = (0,3)$ y un espacio de trabajo W=$\{1\}$, tenemos que

$$P = I - \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Entonces, $d = -P\nabla f(x_0)$,

$$d_0 = -\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\nabla f(x_1) = -\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-6\end{bmatrix}$$

Dado que $d \neq 0$, se calcula el tamaño del paso,

$$\alpha_1 = \text{máx}\{\alpha : x_0 + \alpha d_0 \in \Omega\} = \text{máx}\left\{\alpha : \begin{bmatrix}0 \geq 0\\ 3-6\alpha \geq 1\\ 3-6\alpha \leq 3\end{bmatrix}\right\} = \text{máx}\left\{0 \leq \alpha \leq 1/3\right\} = 1/3$$

Luego,

$$\alpha_2 = \text{mín}\{f(x_k + \alpha d_k) : 0 \leq \alpha \leq \alpha_1\} = \text{mín}\{(3-6\alpha)^2 : 0 \leq \alpha \leq 1/3\} = 1/3$$

Por lo tanto, se define un nuevo punto,

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 1/3 \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iteración 2:

El punto $x_1 = (0, 1)$ define un espacio de trabajo W={1,2}, luego

$$P = I - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}' \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

Entonces, $d = -P\nabla f(x_0) = 0$. Se calcula μ,

$$\mu = -\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}' \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dado que $d = 0$ y $\mu \geq 0$, el punto $x_1 = (0, 1)$ es el punto óptimo.

4. [25 ptos.] Considere el problema

$$\begin{aligned} &\min \ -x_1x_2 \\ &\text{s.a. } x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0 \end{aligned}$$

Usando el método de penalización, con una función de penalidad cuadrática, encuentre el multiplicador de Lagrange óptimo para el problema.

Solución: Función de penalidad

$$P(x) = \begin{cases} (x_1 + 2x_2 - 4)^2, & g(x) > 0 \\ 0, & g(x) \leq 0 \end{cases}$$

El problema restringido es

$$q(k, x) = \begin{cases} -x_1x_2 + k(x_1 + 2x_2 - 4)^2, & g(x) > 0 \\ -x_1x_2, & g(x) \leq 0 \end{cases}$$

Resolvemos el segundo problema, donde las condiciones necesarias para el óptimo conducen a

$$\frac{\partial q(x, \mu)}{\partial x_1} = -x_2 + 2k(x_1 + 2x_2 - 4) = 0$$

$$\frac{\partial q(x, \mu)}{\partial x_2} = -x_1 + 4k(x_1 + 2x_2 - 4) = 0$$

Entonces $x_1 = \dfrac{2}{1 - \frac{1}{8k}}$ y $x_2 = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{8k}}$. Cuando $k \to \infty$, converge a la solución. $x^* = (2, 1)$.

El multiplicador será $\mu = 2k(\text{máx}\{0, g(x)\})$,

$$\lambda = 2k(x_1 + 2x_2 - 4) = 2k\left(\frac{2}{1-\frac{1}{8k}} + \frac{2}{1-\frac{1}{8k}} - 4\right) = 2k\left(\frac{32k}{8k-1} - 4\right) = \frac{8k}{8k-1}$$

El Lagrangiano óptimo estará dado por $\text{lím}_{k\to\infty} \dfrac{8k}{8k-1} = 1$