Parcial 2

Wednesday, September 29, 2021 9:57 AM

por: David Alsina

$\to$ 30 pts

2. (**25 pts**) Sean X y Y variables aleatorias independientes, donde X es exponencial con parámetro 3, y Y es Poisson con parámetro 2.

   a) Encuentre el segundo momento de X

   b) Encuentre la función generadora de momento de $2X + Y$

a X es exp con $\lambda = 3$

- la fgm de una exponencial es:

$$M(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$$

- el primer momento de X es:

$$\frac{\delta M(s)}{\delta s} = \frac{\lambda}{(\lambda - s)^2}\Bigg|_{s=0}$$

- el 2do momento es:

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\lambda}{(\lambda - s)^2}\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{2\lambda}{(\lambda - s)^3}\Bigg|_{s=0} = E(X^2) = \frac{2\lambda}{\lambda^3}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} = \left(\frac{2}{3^2}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{9}}}$$

b la FGM de $Z = 2X + Y$ $\to$ exp, $\to$ poisson

$$M_Z(s) = E(e^{sZ}) = E(e^{s(2X+Y)})$$

$$= E(e^{s(2X)} \cdot e^{sY}) \to \text{dado que son indep.}$$

$$= E\left(e^{s(2x)} \cdot e^{sY}\right) \rightarrow \text{dado que ...}$$

$$= E\left(e^{s(2x)}\right) \cdot E\left(e^{sY}\right)$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 2s} \cdot e^{\lambda_2 (e^s - 1)}$$

$$= \frac{3}{3-2s} \cdot e^{2(e^s - 1)}$$

3. (**30 pts**) Un dado de lanza n veces. Sea X el número de 3's observados y Y el número de 6's observados. Encuentre $Cov(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.

vea que el dado es justo

entonces la cantidad de 6's que yo saque no me van a afectar la cantidad de 3's que saque.

X: # de 3's observados

$$f_{X|N=n}(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \; p = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Y: # de 6's observados

$$f_{Y|N=n}(y) = \begin{cases} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, \; p = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

$$= \underbrace{E(XY)}_{} - (np)^2$$

Asumiendo que el dado es justo y por lo tanto no tiene "memoria" y en consecuencia X, Y indeps

$$= E(X) E(Y) - (np)^2$$

$$= E(X)E(Y) - (np)^2$$
$$= (np)^2 - (np)^2 = 0$$

Ahora analice $\rho(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X) \cdot var(Y)}}$

Puesto que $cov(X,Y) = 0$, $\rho = 0$

de todos modos $var(X) = var(Y) = n \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = n \cdot \frac{5}{36}$

4. (**30 pts**) Un tren llega a las estación a una hora que se distribuye uniformemente entre las 8:00 a.m. y las 12:00 a.m., espera los pasajeros que vuelven, la duración de ingreso de los pasajeros se distribuye con una función de exponencial con parámetro $\lambda(y) = 1/y$, donde y es la duración del intervalo entre las 8:00 a.m. y el momento en que llega el tren, en horas.

   a) Determine el valor del tiempo que el tren espera un día cualquiera. → esperado

   b) ¿Cuál es la hora esperada a la que regresa el tren?

a) W: hora de llegada del tren

$$f_W(w) \begin{cases} \dfrac{1}{12-8} = \dfrac{1}{4}, & \text{si } w \in (8, 12] \end{cases}$$

$T|W$: duración del ingreso de los pasajeros dada la hora de llegada del tren.

$\lambda \to w - 8$ (duración del intervalo entre la hora de llegada y las 8,) este sí o sí es positivo

$$f_{T|W=w}(T|W=w) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} = \dfrac{1}{w-8} e^{-\frac{1}{w-8} \cdot x}, & x > 0,\ w \in (8, 12] \\ 0, & d/c \end{cases}$$

Son equivalentes ya que w determina λ y solo a λ

[illegible] $E(E(\ldots|\lambda))$

$$E(T) = E(E(Y|\omega)) = E(E(y|X))$$

$$= E\left(\frac{1}{\lambda}\right) = E(\omega - 8)$$

$$= \int_{8}^{12} (\omega - 8)\cdot \frac{1}{4}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^2}{2} - 8x\right)\Bigg|_{8}^{12}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(-24 - (-32)\right)$$

$$= 8$$

b) ¿Cuál es la hora esperada a la que regresa el tren?

b

$E(\omega) = 10$ am] hora de llegada esperada

duración del regreso de los pasajeros esperada: 10 (supongo que las unidades están en horas)

10 am + 8 h = 18 h (formato militar)

1. (**10 pts**) Sea X una variable de poisson. Sea $b > 0$, muestre que $\frac{\lambda}{b} \geq \sum_{i=b}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$

X: poisson , $x \in \mathbb{N}^*$

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} , & x \in \mathbb{N}^* \\ 0 , & d/c \end{cases}$$

Analicemos $\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}}$ esto es la CDF de la poisson

$\frac{\lambda}{b} \geq \sum_{i=b}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ → esto me dice que $\frac{\lambda}{b}$ es más grande que calcular la CDF desde b

esta forma de la desigualdad me recuerda a markov o Chebyshev

Con la desigualdad de Markov

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \to \frac{\lambda}{a}$$

$$\sum_{i=a}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \leq \frac{\lambda}{a} , \quad \text{sea } a = b$$