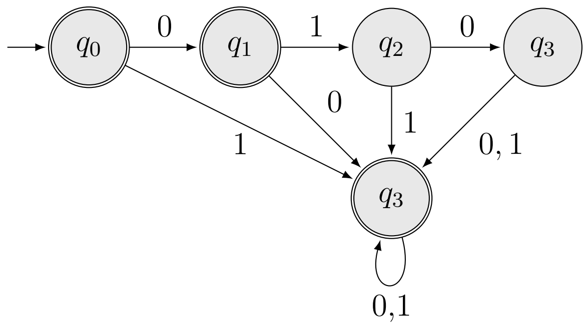
Solución Primer Parcial

23 de agosto de 2021

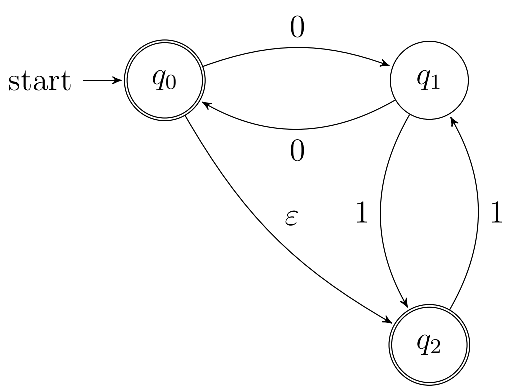
1. Dibuje el diagrama de transiciones de un DFA que acepte el siguiente lenguaje:

$$L = \{w \in \Sigma^* \colon w \text{ es cualquier cadena excepto 01 y 010}\}$$

Solución: Por ejemplo



2. Mediante el procedimiento visto en clase, encuentre y dibuje el diagrama de transiciones del DFA equivalente al siguiente NFA:



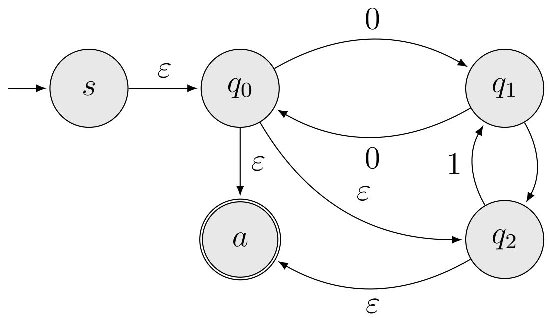
Solución: La función δ' es la siguiente

	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
$\{q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$

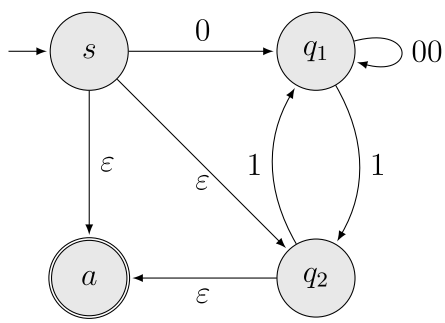
Nótese que los últimos 4 se encuentran uniendo las apropiadas transiciones anteriores. El estado inicial es $E(\{q_0\}) = \{q_0, q_2\}$. Los estados finales son todos los que contienen q_0 y q_2. El diagrama de estados se puede dibujar utilizando la información anterior.

3. Use el procedimiento basado en GNFA para encontrar la expresión regular del NFA del punto anterior.

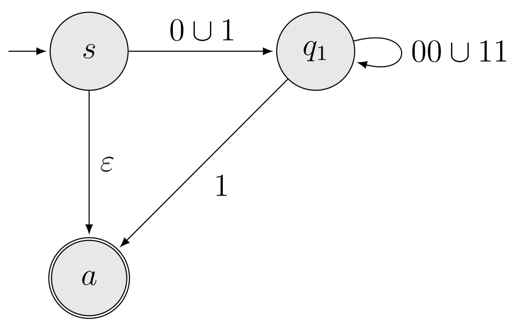
   Primero introducimos un nuevo estado inicial y un nuevo estado final con transición ε desde cada estado que antes era final al nuevo estado final.



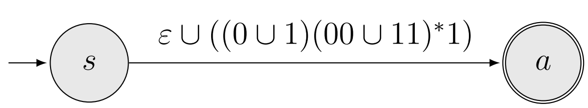
   Quitamos q_0:



   Quitamos q_2:



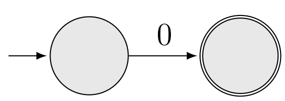
   Quitamos q_1:



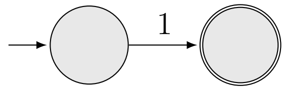
4. Use el procedimiento del Teorema de Kleene para encontrar un NFA para la expresión regular $(00^*(1 \cup 0)1)^*$.

Solución: Vamos por pasos.

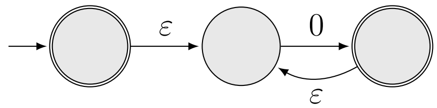
0:



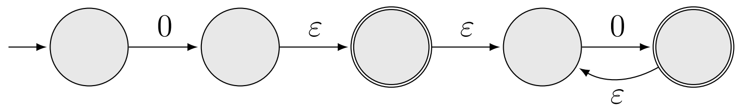
1:



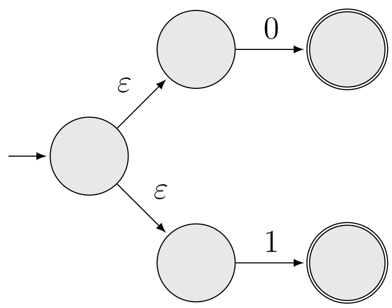
0^*:



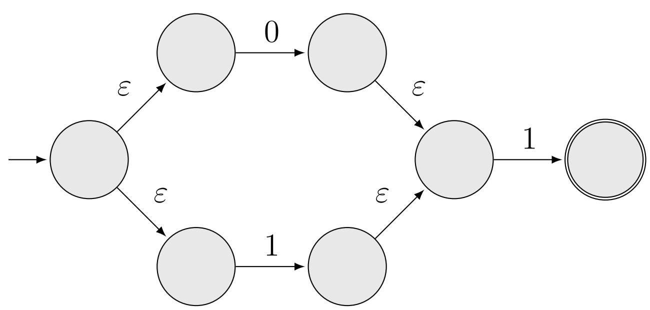
00^*:



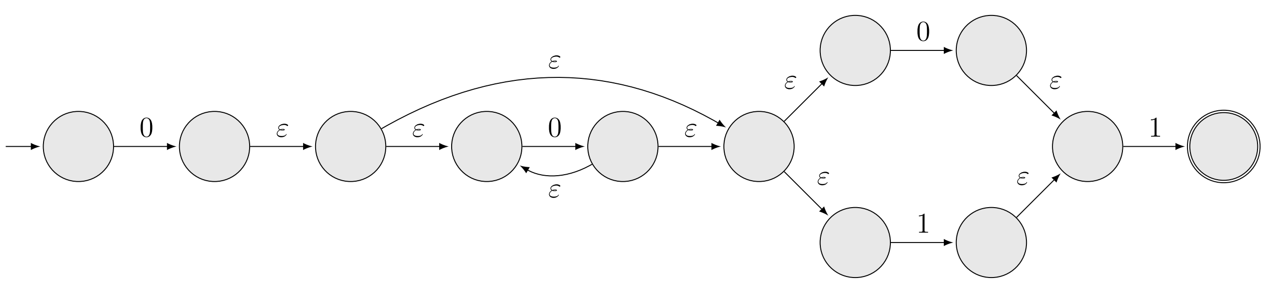
$0 \cup 1$:



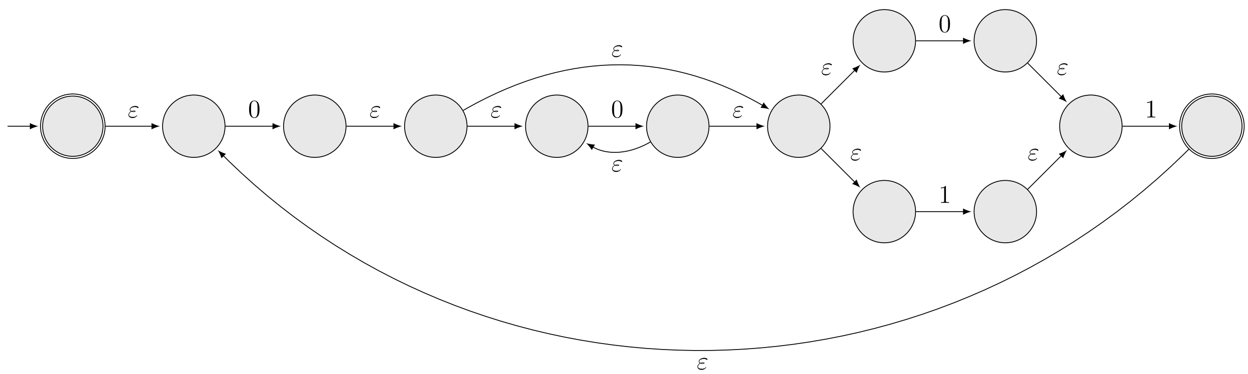
$(0 \cup 1)1$:



$00^*(0 \cup 1)1$:



$(00^*(0 \cup 1)1)^*$:



5. Use el lema de bombeo para demostrar que el siguiente lenguaje no es regular:

$$L = \{ww^R \colon w \in \Sigma^*\}$$

Donde $w^R = w_n \dots w_1$ si $w = w_1 \dots w_n$.

Solución: Supongamos, para buscar una contraddicción que L sea regular. Luego, por el Lema de Bombeo, existe p longitud de bombeo.

Consideramos la palabra $w = 1^p001^p \in L$. Se tiene $|w| = 2p + 2 \geq p$. Sea xyz una descomposición de w que satifsfaga las conclusiones del Lema de Bombeo. Nótese que la condición $|xy| \leq p$ implica que xy sea una porción, no vacía de la subpalabra 1^p. Además, la condición $|y| > 0$ nos dice que y contiene necesariamente por lo menos un 1. Finalmente, la palabra $xyyz$ es de la forma 1^n001^p, con $n > p$ y, por esta razón, $xyyz \notin L$. De la contraddicción sigue que L no es regular.

6. Sea M un DFA con n estados. Demuestre que si M acepta una cadena w tal que $n \leq |w|$, entonces $L(M)$ es infinito.

Solución: Sea $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ una palabra de $L(M)$. Por definición, esto significa que existe una cadena de estados $r_0, r_1, \dots, r_n$ tales que $r_0 = q_0$ es el estado inicial de M, r_n es un estado final de M y, para todos $i = 1, \dots, n$ tenemos $\delta(r_{i-1}, w_i) = r_i$.

Ahora, siendo $|w| = n$, con n la cantidad de estados de M el Principio del palomar nos asegura que entre los $n+1$ estados $r_0, \dots, r_n$ hay por lo menos un estado repetido. Llamamos esto estado repetido q y sean $r_j = q, \dots, r_k = q$ los estados entre las dos visitas a q. Nótese que $k > j$. En particular, la subcadena $y = w_{j+1} \cdots w_k \neq \varepsilon$. Si llamamamos $x = w_1 \cdots w_j$ y $z = w_{k+1} \cdots w_n$, eventualmente vacías, la discusión anterior demuestra que xy^iz es una palabra aceptada por M para todos $i \in \mathbb{N}$. Es decir: el lenguaje $L(M)$ es infinito.