Taller 5

Sunday, October 17, 2021 1:07 PM

Nombres: Juan José Caballero
David Alsina

Temas: Ley débil de los grandes números, teorema del límite central

1. Se quiere estimar la estatura media h (en metros) de una población usando n muestras independientes $X_1, \ldots, X_n$ seleccionadas aleatoriamente de la población. Se usa la media muestral M_n para estimar h y un estimativo grueso de que la desviación estándar de la altura en la población (y por ende de cada muestra) es de un metro.

   a) Determine el tamaño n mínimo para que la desviación estándar de M_n sea de a lo sumo 1 centímetro.

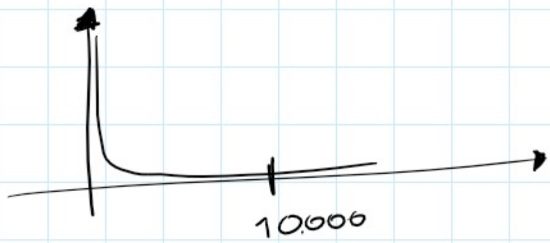
$$M_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S(X_i) = 1mt$$

$$S^2 = 1Mt^2$$

$$E(M_n) = \mu = h$$

$$Var(M_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1Mt^2}{n}$$



$$std = 1mt \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$0.01\cancel{mt} \geq 1\cancel{mt} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$0.01 \geq \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$(0.01)^2 \geq \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{(0.01)^2} \leq n$$

$$10000 \leq n$$

b) Determine el tamaño n que hace que la desigualdad de Chebyshev garantice que el estimador M_n está a lo sumo a 5 centímetros de diferencia de h con probabilidad de por lo menos 0.99.

$$\hookrightarrow P(|M_n - h| \leq 0.05mt) \geq 0.99$$

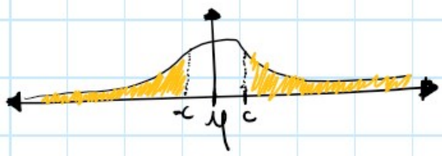
Desigualdad de chebyshev

sea X V.a con media μ y var σ^2, entonces

Desigualdad de Chebyshev

sea X V.a con media μ y var σ^2, entonces

$$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}, \forall c>0.$$



en términos del problema: $|M_n - h| \leq 0.05\,mt$

$$P(|M_n - \mu| \leq 0.05mt) \geq 0.99$$

$$1 - P(|M_n - \mu| \geq 0.05mt) \geq 0.99$$

$$-1 + P(|M_n - \mu| \geq 0.05mt) \leq -0.99$$

$$P(|M_n - \mu| \geq 0.05mt) \leq 0.01$$

Ahora que ya tenemos una expresión de la forma de la desigualdad de Chebyshev

Vea que $C = 0.05\,mt$, $\frac{\sigma^2}{n\,C^2} = 0.01$

despejando n es:

$$\frac{\sigma^2}{n\,C^2} = 0.01$$

$$\frac{1\cancel{mt^2}}{n \cdot (0.05)^2 \cancel{mt^2}} = 0.01$$

$$\frac{20}{n} = 0.01$$

$$n = \frac{20}{0.01}$$

$$n = 2000$$

$$0.01$$

$$\boxed{n = 2000}$$

c) Determine cómo cambian sus resultados anteriores si la desviación estándar de la población se estima en 10 centímetros.

c.a

$$std = (0.1\,mt)\cdot\sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$0.01\,\cancel{mt} \geq (0.1\,\cancel{mt})\cdot\sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$0.1 \geq \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$0.01 \geq \frac{1}{n}$$

$$n(0.01) \geq 1$$

$$\boxed{n \geq 100}$$

c.b

$$C = 0.05\ mt \quad , \quad \frac{\sigma^2}{n\,C^2} = 0.01$$

$$0.01 = \frac{(0.1)^2\,\cancel{mt^2}}{n\cdot(0.05)^2\,\cancel{mt^2}}$$

$$1 = \frac{1}{n\,(0.05)^2}$$

$$(0.05)^{-2} = n$$

$$\boxed{400 = n}$$

→ en ambos casos el n necesario disminuye.