74 David Abrea

Parcial 2 opti

Friday, October 1, 2021 7:03 AM

2. [20 ptos.] Sea $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ definida en todo $\mathbb{R}^2$. Muestre que si $f \in \mathcal{C}^1$, la función es convexa.

5

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vea que dado que H es def. positiva, f es convexa.

No corresponde a lo preguntado

3. [20 ptos.] Dada la siguiente función,

$$f(x) = 2x_1^2 + (x_2+1)^2 + 4x_1x_2, \quad \boxed{\Omega = \{f(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}}$$

Determine si el punto $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un mínimo local para f.

17

primer cuadrante.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 4x_2 \\ 2(x_2+1) + 4x_1 \end{bmatrix} \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vea que dado que Ω no es todo $\mathbb{R}^2$ 5

Se usa esta versión de la CNPO:

$$d = \begin{bmatrix} \lambda \\ \theta \end{bmatrix} : \lambda \geq 0, \theta \geq 0$$

$$d' \nabla f(x^*) \geq 0$$

$$[\lambda \ \theta] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \boxed{2\theta \geq 0}$$

cumple la CNPO

10

Ahora con la CNSO:

2 ¿$\forall d$?

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\lambda \quad \theta] \left(\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \theta \end{bmatrix} \right) \geq 0$$

$$[\lambda \quad \theta] \begin{bmatrix} 4\lambda + 4\theta \\ 4\lambda + 2\theta \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\boxed{\lambda(4\lambda + 4\theta) + \theta(4\lambda + 2\theta) \geq 0}$$

Por la def. de λ y θ cumple la CNSO.

Dado que se cumple la CNPO y la CNSO x^* es un mínimo local.

5. [30ptos.] Considere la función

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

a) [10 ptos.] Muestre que $d = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es una dirección de descenso para f en $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Calculemos por definición de dir. de descenso:

si $\nabla f(\hat{x})' d < 0 \Rightarrow d$ es de descenso.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 + 4x_1 + 2x_2 \\ -1 + 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

✓ 10

$$\nabla f(\hat{x})' d < 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1 < 0$$

b) [20 ptos.] Realice dos iteraciones del método de descenso del gradiente para encontrar el valor de x que minimiza la función, con el punto inicial de búsqueda $x_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Nota: Puede usar la derivada de la función $f(x + \lambda d)$ para encontrar λ.

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \qquad x_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 + 4x_1 + 2x_2 \\ -1 + 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

iter 1

$$d = -\nabla f(x_a) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vamos a hallar lambda al minimizar $f(x_a + \lambda d)$

$$f(x_a + \lambda d) = f(\lambda d) = f\left(\begin{bmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-\lambda) - (\lambda) + \cancel{2\lambda^2 - 2\lambda^2} + \lambda^2$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda \quad \rightarrow \text{esto es una parábola}$$

$$\frac{d(f(\lambda d))}{d\lambda} = 2\lambda - 2 = 0$$

$$2\lambda = 2$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \text{punto que minimiza}$$

✓

$$x_b = x_a + 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

✓

$$x_b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

iter 2

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 + 4x_1 + 2x_2 \\ -1 + 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$d = -\nabla f(x_b) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & +2 \\ -1 & -2 & +2 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

Vamos a hayar lambda al minimizar $f(x_a + \lambda d)$

$$f(x_b + \lambda d) = f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= f\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 \\ \lambda + 1 \end{bmatrix}\right) = (\cancel{\lambda} - 1) - (\cancel{\lambda} + 1) + 2(\lambda - 1)^2$$

$$+ 2(\lambda - 1)(-\lambda + 1) + (\lambda + 1)^2$$

$$= -2 + 2(\lambda - 1)^2 + 2(-\lambda^2 + 2\lambda - 1) + (\lambda + 1)^2$$

$$= -2 + 2[\lambda^2 - 2\lambda + 1] - 2\lambda^2 + 4\lambda - 2 + [\lambda^2 - 2\lambda + 1]$$

$$= \cancel{-2} + \cancel{2\lambda^2} \cancel{-4\lambda} + \cancel{2} - \cancel{2\lambda^2} \cancel{+4\lambda} - 2 + \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 1, \quad \frac{\partial(\lambda^2 - 2\lambda - 1)}{\partial \lambda} = 2\lambda - 2 = 0$$

$$2\lambda = 2$$

$$\lambda = 1$$

erro de calculo

$$x_c = x_b + \lambda d = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

18

1. [10 ptos.] Usted dispone de 200 metros lineales de cerca para construir un corral rectangular donde la longitud del *largo* del corral es de x^2 metros. Plantee un problema de programación no lineal sin restricciones unidimensional para hallar el valor de x que maximiza el área del corral que se puede construir utilizando la cerca disponible.

ancho desconocido

4

$$2x^2 + 2(\overbrace{K}^{\text{ancho}}) \leq 200$$

$$2x^2 = 200 - 2K, \quad x = \sqrt{100 - K}$$

max? o entonces de x

$$\overbrace{\sqrt{100 - K}}^{\text{largo}} \cdot \overbrace{K}^{\text{Ancho}} = K \cdot (100 - K)^{1/2} \quad] \overbrace{f(K)}^{\text{función de Area}}$$

al derivar $f(K)$ deberíamos poder encontrar un máximo o mínimo y con la segunda derivada de $f(K)$ podríamos verificar la rta.

(observe que la estrategia aquí fue usar el máximo de cerca posible al asumir $2x^2 = 200 - 2K$, Note también que es absurdo que K sea 100 o más.

---

4. [20 ptos.] Dado el siguiente problema de programación no lineal,

$$\min \quad x^3 - x^2 - x$$

Utilice el método de ajuste cuadrático con los puntos iniciales $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 4$ para encontrar el mínimo de la función en $\mathbb{R}^+$. Realice al menos dos iteraciones, indicando claramente el procedimiento realizado.

$$f(x) = x^3 - x^2 - x$$

$$\lambda = [\,0 \quad 2 \quad 4\,], \quad \text{recuerde } b_{ij} = \lambda_i^2 - \lambda_j^2$$

$$a_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$$

$$\hat{\lambda}_{min} = \frac{\overbrace{b_{23} f_1}^{-12(0)} + \overbrace{b_{31} f_2}^{16(2)} + \overbrace{b_{12} f_3}^{-4(44)}}{2(\underbrace{a_{23} f_1}_{-2(0)} + \underbrace{a_{31} f_2}_{4(2)} + \underbrace{a_{12} f_3}_{-2(44)})}$$

$$= \frac{76(2) - 4(44)}{2(8 - 2(44))} = 0,9$$

−

dado que $\hat{\lambda}_{min} < \lambda_2$

tenemos : que λ ahora es $[0 \quad 0,9 \quad 2]$

Ahora $\hat{\lambda}_K$

$b_{ij} = \lambda_i^2 - \lambda_j^2$

$a_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$

$$\hat{\lambda}_{min} = \frac{\overbrace{b_{23}f_1}^{-3.9(0)} + \overbrace{b_{31}f_2}^{4(\ )} + \overbrace{b_{12}f_3}^{0.9^2(\ )}}{2(\underbrace{a_{23}}_{-1.1(0)}f_1 + \underbrace{a_{31}f_2}_{2(\ )} + \underbrace{a_{12}}_{-0,9(\ )}f_3)}$$

$$\hat{\lambda}_{min} = 0,73$$

− 20