Primer Parcial

26 de febrero de 2021

Indicaciones generales

- Este es un examen **individual** con una duración de **120 minutos: de 7:00 a 9:00**.
- Puede tener **una** hoja manuscrita de resumen con fórmulas. Esta hoja debe estar marcada con el nombre del estudiante y entregarse con el parcial.
- No se permite el uso de libros o apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar apagados durante todo el examen.
- La cámara de su computador debe estar encendida todo el tiempo durante la duración del examen.
- No se permite el uso de ningún tipo de dispositivo para buscar soluciones a los puntos del parcial ni para comunicarse con otras personas.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen.
- Las respuestas deben estar totalmente **justificadas**.

1. [20 ptos.] En la elaboración de un producto P se requiere de una sustancia S. La cantidad de P que se obtiene en el proceso de transformación es menor o igual que el doble de la cantidad de sustancia S utilizada. Por otro lado, la diferencia entre las cantidades de producto P obtenido y de sustancia S utilizada no supera los 2 gramos, mientras que la suma no sobrepasa los 6 gramos. Además se utiliza por lo menos 1 gramo de S y se elabora al menos 1 gramo de P. El precio de la sustancia S en el mercado es de 40 pesos/gramo, y el precio del producto P es de 50 pesos/gramo.

   Plantee este problema como un programa lineal donde se maximice el beneficio neto (ingresos menos egresos) de la actividad de transformación.

   Solución: Variables: x_P cantidad de gramos del producto P elaborado, y x_S cantidad de gramos de sustancia S utilizada.

$$\begin{aligned} \max\ & 50x_P - 40x_S \\ \text{s.a. } & x_P - 2x_S \leq 0, \\ & x_P - x_S \leq 2, \\ & x_S - x_P \leq 2, \\ & x_P + x_S \leq 6, \\ & x_P, x_S \geq 1 \end{aligned}$$

2. [20 ptos.] Dado el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a. } & x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 2 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Responda las siguientes preguntas breve y claramente. **Justifique** adecuadamente.

a) [10 ptos.] Escriba este problema en formato estándar. ¿Es posible tener x_1 y x_2 como variables básicas al mismo tiempo (en la misma base)?

Solución: Problema en formato estándar,

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a. } & x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

con matriz A y vector b dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Las columnas $[a_1\ a_2]$ no pueden formar una base debido a que no son linealmente independientes.

b) [10 ptos.] La solución óptima a este problema es $x^* = [1\ 0\ 0]$ y el valor de la función de la función objetivo en este punto es $z^* = 1$. El valor de las variables duales asociadas a las restricciones es $w' = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \end{bmatrix}$. Suponga que el lado derecho de la segunda restricción crece en una unidad tal que $b' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$, ¿En cuánto cambiaría el valor de la función objetivo debido al cambio en b?

Solución: La solución óptima del problema sería $z^* = 1 + 1/2 = 3/2$

3. [30 ptos.] Dado el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \min\ & 10x_1 + x_2 \\ \text{s.a. } & x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 46x_2 - 2x_4 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Utilice el método de las dos fases para encontrar una solución básica factible inicial si existe.

Solución: Adicionamos las variables artificiales $x_5,\ x_6$, y planteamos el problema para minimizar estas variables:

$$\begin{aligned} &\min\ x_5 + x_6 \\ &\text{s.a. } x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ &\quad 2x_1 + 46x_2 - 2x_4 + x_5 = 12 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

con matriz A, vector b y vector c' dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 46 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad c' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, $I_B = \{5, 6\}$ y $I_N = \{1, 2, 3, 4\}$. La base inicial es $B = I$, y $B^{-1} = I$. Por lo tanto $x_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$. Para determinar los costos reducidos calculamos los vectores $w' = c'_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, y $z' = w'N = \begin{bmatrix} 3 & 47 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Los costos reducidos son iguales a $c'_N - z' = \begin{bmatrix} -3 & -47 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, luego x_2 es candidata a entrar a la base.

Se calculan los costo reducidos con $y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 46 \end{bmatrix}$. Luego, $r = \min\ \left\{\frac{2}{1}, \frac{12}{46}\right\} = 6/23$. Entonces x_6 es candidata para salir de la base.

La nueva base es $B = [a_2,\ a_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 46 & 0 \end{bmatrix}$, y $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/46 \\ 1 & -1/46 \end{bmatrix}$. Por lo tanto $x_B = \begin{bmatrix} 6/23 \\ 40/23 \end{bmatrix}$. Para determinar los costos reducidos calculamos los vectores $w' = c'_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/46 \end{bmatrix}$, y $z' = w'N = \begin{bmatrix} 22/23 & 4 & 47/23 & -1/46 \end{bmatrix}$. Los costos reducidos son iguales a $c'_N - z' = \begin{bmatrix} -22/23 & -4 & -47/23 & 47/46 \end{bmatrix}$, luego x_3 es candidata a entrar a la base

Se calculan los costo reducidos con $y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. Luego, $r = \min\ \left\{\frac{40}{92}\right\} = 40/92$. Entonces x_5 es candidata para salir de la base.

La nueva base es $B = [a_2,\ a_3]$. Esta es la base para iniciar la fase 2.

Nota: Se evaluará la primera iteración completa y el planteamiento de la segunda.

4. [30 ptos.] Dado el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} &\min\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ &\text{s.a. } -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 2 \\ &\quad 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \geq 1 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

a) [10 ptos.] Formule el problema dual asociado.

Solución: El problema dual es

$$\begin{aligned} \max\ & 2w_1 + w_2 \\ \text{s.a.}\ & -w_1 + 2w_2 \leq 2 \\ & w_1 + 2w_2 \leq 6 \\ & w_1 - 2w_2 \leq 2 \\ & -w_1 - 2w_2 \leq -2 \\ & w_1, w_2 \geq 0. \end{aligned}$$

b) [20 ptos.] A partir de la solución óptima del problema dual, $w^* = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$, obtenga la solución del problema primal dado.

Solución: Se evalúan las condiciones de holgura complementaria:
$A = [a_1\ a_2\ a_3\ a_4] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, y $c = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.
Entonces,
$\left(2 - \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) x_1 = 0$, $\left(6 - \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) x_2 = 0$,
$\left(2 - \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) x_3 = 0$, y $\left(-2 - \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) x_4 = 0$.
Donde, $2 - (-4 + 2) > 0$ implica que $x_1 = 0$ y $-2 - (-4 - 2) > 0$ implica que $x_4 = 0$.
Además,

$$4 \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - 2 \right) = 0, \text{ y } 1 \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - 1 \right) = 0.$$

Donde $x_2 + x_3 = 2$ y $2x_2 - 2x_3 = 1$.
Al resolver este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas encontramos que $x_2 = 5/4, x_3 = 3/4$. La solución del problema primal es $x^* = [0\ 5/4\ 3/4\ 0]$.