Parcial 2

Wednesday, September 29, 2021 9:57 AM

por: David Alsina

55/100

30 pts

2. (**25 pts**) Sean X y Y variables aleatorias independientes, donde X es exponencial con parámetro 3, y Y es Poisson con parámetro 2.

30

a) Encuentre el segundo momento de X

b) Encuentre la función generadora de momento de $2X + Y$

(a) X es exp con $\lambda = 3$

- la fgm de una exponencial es:

$$M(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$$

- el primer momento de X es:

$$\frac{\delta M(s)}{\delta s} = \left.\frac{\lambda}{(\lambda - s)^2}\right|_{s=0}$$

- el 2do momento es:

$$\left.\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\lambda}{(\lambda - s)^2}\right)\right|_{s=0} = \left.\frac{2\lambda}{(\lambda - s)^3}\right|_{s=0} = E(X^2) = \frac{2\lambda}{\lambda^3}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} = \left(\frac{2}{3^2}\right) = \underline{\frac{2}{9}}$$

(b) la FGM de $Z = 2X + Y$ ($X \to$ exp, $Y \to$ poisson)

$$M_Z(s) = E(e^{sZ}) = E(e^{s(2X+Y)})$$

$$= E(e^{s(2X)} \cdot e^{sY}) \to \text{dado que son indep.}$$

$$= E\left(e^{s(2x)} \cdot e^{sy}\right) \rightarrow \text{dado que } \ldots$$

$$= E\left(e^{s(2x)}\right) \cdot E\left(e^{sy}\right)$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 2s} \cdot e^{\lambda_2 (e^s - 1)}$$

$$= \frac{3}{3-2s} \cdot e^{2(e^s - 1)}$$

3. (**30 pts**) Un dado de lanza n veces. Sea X el número de 3's observados y Y el número de 6's observados. Encuentre $Cov(X,Y)$ y $\rho(X,Y)$.

5

vea que el dado es justo

entonces la cantidad de 6's que yo saque no me van a afectar la cantidad de 3's que saque.

X: # de 3's observados

$$f_{X|N=n}(x) = \left\{ \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad p = \frac{1}{6} \right.$$

Y: # de 6's observados

$$f_{Y|N=n}(y) = \left\{ \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, \quad p = \frac{1}{6} \right.$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

$$= \underbrace{E(XY)}_{} - (np)^2$$

~~Asumiendo que el dado es justo y por lo tanto no tiene "memoria" y en consecuencia X, Y indeps~~

$$= E(X)E(Y) - (np)^2$$

$$= E(x)E(y) - \cancel{(np)^2}$$
$$= (np)^2 - (np)^2 = 0$$

NO

Son independientes

Ahora analice $\rho(x,y) = \dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{var}(x)\cdot \mathrm{var}(y)}}$

Puesto que $\mathrm{cov}(x,y) = 0$, $\rho = 0$

de todos modos $\mathrm{var}(x) = \mathrm{var}(y) = n\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right) = n\cdot\frac{5}{36}$

4. (**30 pts**) Un tren llega a las estación a una hora que se distribuye uniformemente entre las 8:00 a.m. y las 12:00 a.m., espera los pasajeros que vuelven, la duración de ingreso de los pasajeros se distribuye con una función de exponencial con parámetro $\lambda(y) = 1/y$, donde y es la duración del intervalo entre las 8:00 a.m. y el momento en que llega el tren, en horas.

10

a) Determine el valor del tiempo que el tren espera un día cualquiera. → esperado

b) ¿Cuál es la hora esperada a la que regresa el tren?

a) W: hora de llegada del tren

$$f_W(w) \begin{cases} \frac{1}{12-8} = \frac{1}{4}, & \text{si } w \in (8,12] \end{cases}$$

$T|W$: duración del ingreso de los pasajeros dada la hora de llegada del tren.

$w - 8$ (duración del intervalo entre la hora de llegada y las 8,) este sí o sí es positivo

$$f_{T|W=w}(T|W=w) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{w-8} e^{-\frac{1}{w-8}\cdot x}, & x > 0,\ w \in (8,12] \\ 0, & \text{d/c} \end{cases}$$

Son equivalentes ya que w determina λ y solo a λ

$$E(T) = E(E(Y|w)) = E(E(y|\lambda))$$

$$= E\left(\frac{1}{\lambda}\right) = E(w-8)$$

$$= \int_{8}^{12} (w-8)\cdot\frac{1}{4}\,dw$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^2}{2} - 8x\right)\Big|_{8}^{12}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(-24 - (-32)\right)$$

$$= 8$$

b) ¿Cuál es la hora esperada a la que regresa el tren?

(b)

$E(w) = 10$ am] hora de llegada esperada

duración esperada del regreso de los pasajeros: 10 (supongo que las unidades están en horas)

10 am $+ 8$ h $= 18$ h (formato militar)

1. (10 pts) Sea X una variable de poisson. Sea $b > 0$, muestre que $\frac{\lambda}{b} \geq \sum_{i=b}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$

10

X: poisson, $x \in \mathbb{N}^*$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{d/c} \end{cases}$$

Analicemos $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ } esto es la CDF de la poisson

$\frac{\lambda}{b} \geq \sum_{i=b}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ } → esto me dice que $\frac{\lambda}{b}$ es más grande que calcular la CDF desde b

esta forma de la desigualdad me recuerda a markov o Chebyshev

Con la desigualdad de Markov

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \Big\} \rightarrow \frac{\lambda}{a}$$

$$\sum_{i=a}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \leq \frac{\lambda}{a}, \quad \text{sea } a = b \; \blacksquare$$