Agenda

1. Visión geométrica de PL
2. Soluciones básicas

Espacios Vectoriales

- Un espacio vectorial es un conjunto no vacío de objetos, llamados vectores, en el que se han definido dos operaciones: la suma y el producto por un escala.
- $V \subset R^n$ es un **subespacio lineal** si es cerrado bajo adición y multiplicación por un escalar:
  - Si $a, b \in V$, entonces $a + b \in V$
  - Si $a \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha a \in V$
  - El vector 0 siempre está en V
- **Independencia lineal**: $\alpha_1 \nu_1 + \cdots + \alpha_k \nu_k = 0$
- Un conjunto $\{\nu_1, \ldots, \nu_k\}$ es linealmente dependiente si y solo si alguno de los vectores es combinación lineal de los otros.

Espacios Vectoriales

Ejemplos:

- Son $\{(2,-1,3),(-6,3,-9)\}$ LI?
- Son $\{(2,-1,3),(3,-1,4)\}$ LI?

Espacios Vectoriales

- W $= \textbf{span}[\nu_1, \dots, \nu_k] = \{x : x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu_i\}$
- Span de cualquier conjunto de vectores se le llama el subespacio generado por $\{\nu_1 + \cdots + \nu_k\}$.
- Si ν es combinación lineal de $\{\nu_1, \dots, \nu_k\}$, entonces $\text{span}[\nu_1, \dots, \nu_k] = \text{span}[\nu_1, \dots, \nu_k, \nu]$
- Una **base** de un subespacio V es un conjunto de vectores $\{\nu_1, \dots, \nu_k\}$ linealmente independientes tales que span $W = [\nu_1, \dots, \nu_k] = V$.
- Todas las bases de V tienen el mismo número de vectores, al que se le llama la dimensión de V.

Hiperplanos

- **Hiperplano:** el conjunto H de todos los puntos $x = [x_1, \ldots, x_n]$ que satisfacen la ecuación $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = \alpha$, donde $u_i, \alpha \in \mathbb{R}$, y al menos un $u_i \neq 0$
- $H = \{x \in \mathbb{R}^n : u'x = \alpha\}$
- u es la normal del hiperplano (gradiente)
- $\dim(H)$ es $n - 1$
- Si el hiperplano contiene al origen, es un subespacio $H = \{x \in \mathbb{R}^n : u'x = 0\}$
- H divide $\mathbb{R}^n$ en dos **semi-espacios**:
  - Semi-espacio positivo: $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : u'x \geq \alpha\}$
  - Semi-espacio negativo: $H_- = \{x \in \mathbb{R}^n : u'x \leq \alpha\}$

Ejemplos de hiperplanos

- En $\mathbb{R}^2$: líneas (dim=1)
- En $\mathbb{R}^3$: planos (dim=2)

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a. } & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Curvas de nivel de función objetivo: hiperplanos
- Restricciones: hiperplanos

Conjuntos convexos

- Un conjunto $\Omega \subset R^n$ es un **conjunto convexo** si $\forall x_1, x_2 \in \Omega$ y $\alpha \in (0,1)$, $(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \in \Omega$
- Todas las combinaciones lineales convexas o segmentos de linea están en el conjunto
- Intersección de una colección de conjuntos convexos es un conjunto convexo
- $\Rightarrow$ Intersección de una colección de semi-espacios es un conjunto convexo
- $\Rightarrow$ Región factible en PL: conjunto convexo

Politopos, poliedros e hiperplanos de soporte

- **Politopo**: *conjunto* que puede ser expresado como la intersección de un número *finito* de semi-espacios ($Ax \leq b$ $x \geq 0$ - región factible)
- **Poliedro**: politopo *acotado no vacío*
- **Hiperplano de soporte:**
  - Sea y un punto en la frontera de un *conjunto convexo*
  - Hiperplano de soporte H: pasa por y y todos los puntos del conjunto quedan en uno solo de los semi-espacios generados por H
- **Facetas** de un poliedro de dimensión k:
  - Faceta es una cara de dimensión $k - 1$
  - Una arista es una cara de dimensión uno
  - Un vértice es una cara de dimensión cero

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\min\ & -x_1 - 3x_2 \\
\text{s.a. } & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Gráfico región factible, curvas de nivel, óptimo.
- Hiperplanos de soporte
- Caras

Hiperplanos de soporte

- Región factible acotada no vacía: poliedro $M \subset \mathbb{R}^n$
- H: hiperplano de soporte de M
- Óptimo: intersección de $c'x = \beta$ (hiperplano de soporte) y la región factible M (poliedro)

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\min \ & -x_1 - 3x_2 \\
\text{s.a. } & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Gráfico región factible, curvas de nivel, óptimo
- Solución óptima única
- Infinitas soluciones óptimas: min $-x_1 - x_2$
- Sin óptimo finito: s.a. $-2x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 - x_2 \leq 2$, $x_1, x_2 \geq 0$
- Sin solución: región factible vacía

Agenda

1. Visión geométrica de PL

2. Soluciones básicas

Programas lineales en forma estándar

$$\begin{aligned} \min\ & c'x \\ \text{s.a. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$, $b \geq 0$
- Problemas en otros formatos se pueden poner en forma estándar
- $Ax \leq b$: adicionar variables de holgura
- $Ax \geq b$: adicionar variables de exceso

Programas lineales en forma estándar

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \max \ & -5x + 5y + z - 15 \\ \text{s.a. } & x - y + 3z \geq -3 \\ & 2x - 3y + z \leq 8 \\ & x + 2y - 2z \geq 5 \\ & -y + z = -4 \\ & x \geq 0, y \leq 0 \end{aligned}$$

Programas lineales en forma estándar

Sustitución de variables libres. Ejemplo:

$$\begin{aligned} \max\ & x + 3y + 4z \\ \text{s.a. } & x + 2y + z = 5 \\ & 2x + 3y + z = 6 \\ & y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned}$$

Soluciones básicas

- Problema lineal en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{max. } & c'x \\ \text{s.a. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $b \geq 0$, $m \leq n$, $r(A) = m$
- $A = [B \quad N]$
- $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (m cols. lin. ind.), $N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$
- $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$

Soluciones básicas (cont.)

- $Ax = b \to Bx_B + Nx_N = b$
- $Bx_B = b$ tiene solución única: $x_B = B^{-1}b$
- $x_N = 0 \to x = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}$: solución básica (factible si $x_B \geq 0$)
- $x = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}$: solución básica con respecto a la base B
- Variables básicas y columnas básicas
- Solución básica degenerada
- Solución básica **factible** ($x \geq 0$)

Soluciones básicas (cont.)

Ejemplo:

- Región factible:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Región factible en formato estándar:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Soluciones básicas? básicas factibles?

Soluciones básicas (cont.)

- Adicione $x_1 + 2x_2 \leq 6$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
- Solución básica degenerada

Propiedades de las soluciones básicas

- Teorema fundamental de Programación Lineal:
  En un PL en forma estándar
  - Si existe una solución *factible*, existe una solución **básica** *factible*
  - Si existe una solución *factible óptima*, existe una solución **básica** *factible óptima*
- Resultado del Teorema: para resolver un PL es suficiente con examinar las soluciones básicas factibles
- Número de soluciones básicas factibles $\leq \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Visión geométrica

Teorema

Sea $\Omega = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$. x *es un punto extremo de* Ω *si y solo si* x *es una solución básica factible de* $Ax = b$, $x \geq 0$

- Resultado del Teorema: Para resolver un PL es suficiente con examinar los puntos extremos del poliedro Ω
- Es suficiente con examinar las soluciones básicas factibles

Propiedades de las soluciones básicas (cont.)

Cambio de base.
Ejemplo:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

- $A = [a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Solución factible: $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Solución básica factible?