Módulo 6: Optimización con Restricciones

Departamento MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario

Primer Semestre de 2021

Agenda

Introducción

$x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{s.a. } x \in \Omega \end{aligned}$$

- $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$
- $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, p$

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{s.a. } h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m \\ &\qquad g_j(x) \leq 0, j = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

Introducción (cont.)

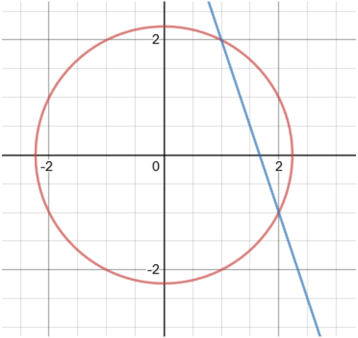
$x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ \text{s.a. } & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Restricciones activas - Ejemplo

$$\min\ (x_1 - 3)^2 - (x_2 - 3)^2$$
$$\text{s.a. } x_1^2 + x_2^2 \leq 5$$
$$3x_1 + x_2 \leq 5$$

Región factible:



Definiciones

- Sea x^* un punto factible: $h(x^*) = 0$, $g(x^*) \leq 0$. $J(x^*)$ es el conjunto de restricciones activas en x^*: $J(x^*) = \{j : g_j(x^*) = 0\}$
- Un punto factible x^* es un punto **regular** si los gradientes $\nabla h_1(x^*), \ldots, \nabla h_m(x^*)$ y $\nabla g_j(x^*)$, para $j \in J(x^*)$, son linealmente independientes

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1^2 - 3x_2 \\
\text{s.a.}\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\
& x_1 + x_2 \leq 1
\end{aligned}
$$

- $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0$, $\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$
- $g_2(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$, $\nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ -3 \end{bmatrix}$

Ejemplo (cont.)

$$\min\ 2x_1^2 - 3x_2$$
$$\text{s.a. } x_1^2 + x_2^2 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 \leq 1$$

- $x_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $J(x_A) = \{\} \Rightarrow x_A$ interior
- $x_B = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$, $J(x_B) = \{1\}$, $\nabla g_1(x_B) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B$ regular
- $x_C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $J(x_C) = \{1, 2\}$, $\nabla g_1(x_C) = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\nabla g_2(x_C) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ x_C regular

Condición de primer orden - Karush-Kuhn-Tucker

Teorema

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *con* $m \leq n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f, h, g \in \mathcal{C}^1$. *Sea* x^* *un mínimo local de* f *s.a.* $h(x) = 0$, $g(x) \leq 0$ *y* x^* *un punto regular. Entonces* $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ *y* $\mu^* \in \mathbb{R}^p$*:*

1. $Df(x^*) + \lambda^{*\prime} Dh(x^*) + \mu^{*\prime} Dg(x^*) = 0$
2. $\mu^* \geq 0$
3. $\mu^{*\prime} g(x^*) = 0$

Condición de primer orden - KKT (cont.)

- x^* factible: $h(x^*) = 0$ y $g(x^*) \leq 0$
- Condición 3:

$$\mu^{*\prime} g(x^*) = \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* g_j(x^*) = 0$$

Para las restricciones no activas $(g_j(x^*) < 0)$ se cumple que $\mu_j^* = 0$

Condición de primer orden - KKT (cont.)

- $\nabla f(x^*)$ comb. lineal de los gradientes de las restricciones de igualdad y de las restricciones activas en x^*:

$$\nabla f(x^*) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) - \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla g_j(x^*)$$

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j \in J(x^*)} \mu_j^* \nabla g_j(x^*)$$

Condición de primer orden - KKT (cont.)

- $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$: $l(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda' h(x) + \mu' g(x)$
- Condición necesaria de primer orden para problema no restringido $\min l(x, \lambda, \mu)$
- $Dl(x, \lambda, \mu) = [D_x l(x, \lambda, \mu),\ D_\lambda l(x, \lambda, \mu),\ D_\mu l(x, \lambda, \mu)] = 0$
- $D_x l(x, \lambda, \mu) = Df(x) + \lambda' Dh(x) + \mu' Dg(x) = 0$
- $D_\lambda l(x, \lambda, \mu) = h(x) = 0$ (factibilidad - restricciones de igualdad)

Condición de primer orden - KKT - Ejemplo 1

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1^2 - 3x_2 \\ \text{s.a. } & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

- $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0,\ \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$
- $g_2(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0,\ \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ -3 \end{bmatrix}$

Condición de primer orden - KKT - Ejemplo 1 (cont.)

Condición de primer orden:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2\mu_1 x_1 + \mu_2 &= 0 \\
-3 + 2\mu_1 x_2 + \mu_2 &= 0 \\
\mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) + \mu_2(x_1 + x_2 - 1) &= 0 \\
\mu_1 &\geq 0 \\
\mu_2 &\geq 0 \\
x_1^2 + x_2^2 &\leq 5 \\
x_1 + x_2 &\leq 1
\end{aligned}
$$

Condición de primer orden - KKT - Ejemplo 1 (cont.)

Posibles soluciones:

- $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 0 \Rightarrow -3 = 0$: NO
- $\mu_1 = 0,\ x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow \mu_2 = 3, x_1 = -3/4, x_2 = 7/4,\ x_1^2 + x_2^2 \leq 5$: Cumple CNPO
- $\mu_2 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 = 5 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \pm\sqrt{5} > 1$: NO factible
- $x_1 + x_2 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 = 5$
  - $\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ \mu_1 = -1/6 < 0$: NO cumple CNPO
  - $\Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ \mu_1 = -11/6 < 0$: NO cumple CNPO

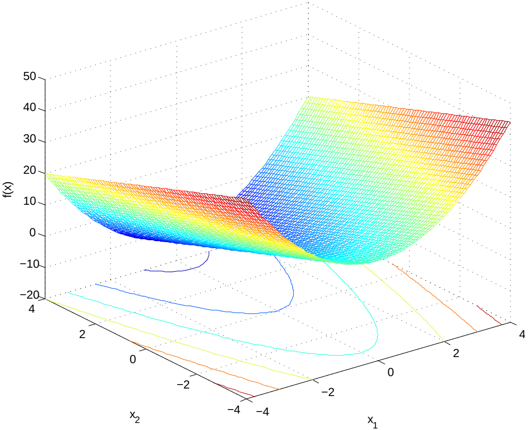
Condición de primer orden - KKT - Ejemplo 1 (cont.)

Único punto factible que cumple CNPO: $x^* = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 7/4 \end{bmatrix}$, $\mu^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

- $f(x^*) = -33/8$
- Restricción g_1 no activa (no lineal)
- Restricción g_2 activa (lineal)
- x^* es regular

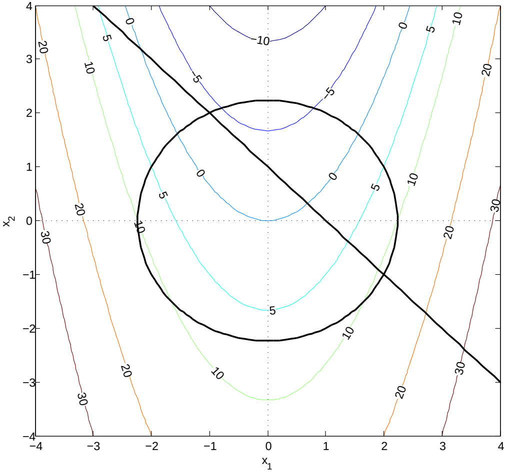
Condición de primer orden - KKT - Ejemplo 1 (cont.)

$$\min\ 2x_1^2 - 3x_2 \text{ s.a. } x_1^2 + x_2^2 \leq 5,\ \ x_1 + x_2 \leq 1$$



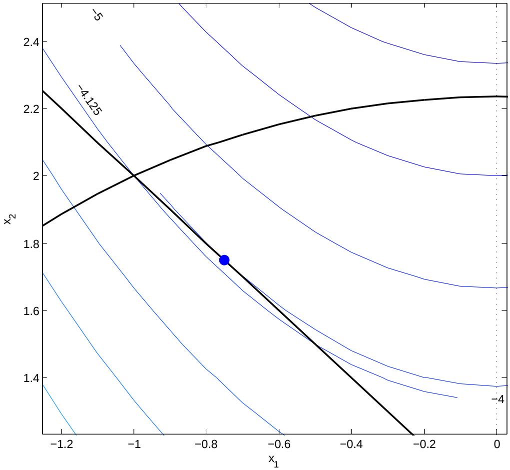
Condición de primer orden - KKT - Ejemplo 1 (cont.)

$$\min\ 2x_1^2 - 3x_2 \text{ s.a. } x_1^2 + x_2^2 \leq 5,\ x_1 + x_2 \leq 1$$



Condición de primer orden - KKT - Ejemplo 1 (cont.)

$$\min\ 2x_1^2 - 3x_2 \text{ s.a. } x_1^2 + x_2^2 \leq 5,\ \ x_1 + x_2 \leq 1$$



Definiciones

- Espacio tangente a la superficie formada por las restricciones de igualdad y las restricciones activas en x^*:

$$T(x^*) = \{y : Dh(x^*)y = 0,\ Dg_j(x^*)y = 0, j \in J(x^*)\}$$

- $l(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j(x)$
- $L(x, \lambda, \mu)$: Hesiana de $l(x, \lambda, \mu)$ con respecto a x
- $L(x, \lambda, \mu) = H(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j H_j(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j G_j(x)$
- $H(x), H_j(x), G_j(x)$: Hesianas de f, h_j y g_j, respectivamente

Condición *necesaria* de segundo orden - KKT

Teorema

Sea x^* un mínimo local de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sujeto a $h(x) = 0$, $g(x) \leq 0$ con $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $m \leq n$, $f, h, g \in \mathcal{C}^2$. Si x^* es un punto regular, entonces $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ y $\mu^* \in \mathbb{R}^p$:

1. $Df(x^*) + \lambda^{*\prime} Dh(x^*) + \mu^{*\prime} Dg(x^*) = 0$, $\mu^* \geq 0$, $\mu^{*\prime} g(x^*) = 0$
2. $y' L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y \geq 0$, $\forall y \in T(x^*)$

- $L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ semidefinida positiva en $T(x^*)$

Otras definiciones

- $\tilde{J}(x^*, \mu^*) = \{j : g_j(x^*) = 0, \mu_j^* > 0\}$: conjunto de restricciones de desigualdad activas en x^* y con variable dual asociada diferente de cero
- $\tilde{T}(x^*, \mu^*) = \{y : Dh(x^*)y = 0,\ Dg_j(x^*)y = 0, j \in \tilde{J}(x^*, \mu^*)\}$: espacio tangente a la superficie formada por las restricciones de igualdad y las restricciones activas en el punto x^* y con variable dual asociada diferente de cero

Condición *suficiente* de segundo orden - KKT

Teorema

Sea x^* un punto tal que $h(x^*) = 0$, $g(x^*) \leq 0$ (factible) con $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f, h, g \in \mathcal{C}^2$. Si $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ y $\mu^* \in \mathbb{R}^p$:

1. $Df(x^*) + \lambda^{*\prime} Dh(x^*) + \mu^{*\prime} Dg(x^*) = 0$, $\mu^* \geq 0$, $\mu^{*\prime} g(x^*) = 0$
2. $y' L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y > 0$, $\forall y \in \tilde{T}(x^*, \mu^*)$, $y \neq 0$

Entonces x^* es un mínimo local estricto de f en la región factible

- $L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ definida positiva en $\tilde{T}(x^*, \mu^*)$

Condiciones de segundo orden - KKT - Ejemplo 1

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1^2 - 3x_2 \\ \text{s.a. }\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

- $H(x) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G_1(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $G_2(x) = 0$
- Punto que cumple CNPO: $x^* = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 7/4 \end{bmatrix}$, $\mu^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $L(x, \mu) = \begin{bmatrix} 4 + 2\mu_1 & 0 \\ 0 & 2\mu_1 \end{bmatrix}$
- $L(x^*, \mu^*) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Condiciones de segundo orden - KKT - Ejemplo 1 (c.)

Restricciones activas en x^*: $J(x^*) = \{2\}$

Espacio tangente $T(x^*)$:

$$
\begin{aligned}
T(x^*) &= \{y : \nabla g_2(x^*)y = 0\} \\
&= \left\{ y : \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \right\} \\
&= \{y : y_2 = -y_1\} = \left\{ y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

Evaluando la CNSO:

$$y' L(x^*, \mu^*) y = 4\alpha^2 \geq 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow x^*$ cumple CNSO

Condiciones de segundo orden - KKT - Ejemplo 1 (c.)

Dado que $\mu_2^* \neq 0$, $\tilde{J}(x^*, \mu^*) = J(x^*) = \{2\} \Rightarrow \tilde{T}(x^*, \mu^*) = T(x^*)$

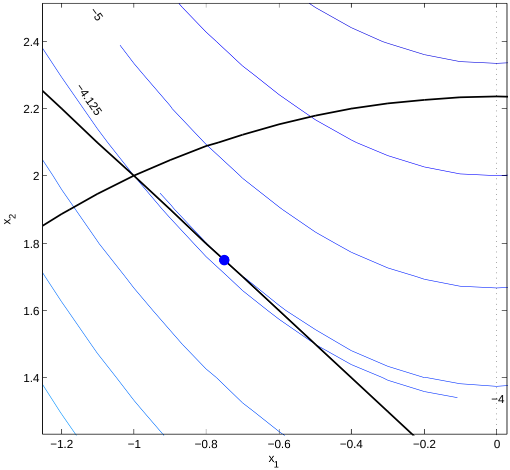
Evaluando la CSSO:

$$y' L(x^*, \mu^*) y = 4\alpha^2 > 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$$

$\Rightarrow x^*$ cumple CSSO

Condiciones de segundo orden - KKT - Ejemplo 1 (c.)

$$\min\ 2x_1^2 - 3x_2 \text{ s.a. } x_1^2 + x_2^2 \leq 5,\ \ x_1 + x_2 \leq 1$$



Condiciones de segundo orden - KKT - Ejemplo 2

$$\min\ 3x_1$$
$$\text{s.a. } x_1^2 + x_2^2 \geq 1$$

- $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \geq 0$, $\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$, $G_1(x) = 2I$
- $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $H(x) = 0$
- Restricción $\geq$
- Todo punto factible regular

Condiciones de segundo orden - KKT - Ejemplo 2 (c.)

Condición necesaria de primer orden:

$$
\begin{aligned}
3 + 2\mu_1 x_1 &= 0 \\
2\mu_1 x_2 &= 0 \\
\mu_1 &\leq 0 \\
\mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) &= 0 \\
x_1^2 + x_2^2 &\geq 1
\end{aligned}
$$

Condiciones de segundo orden - KKT - Ejemplo 2 (c.)

Posibles soluciones:

- $\mu_1 = 0$: NO cumple CNPO
- $x_1^2 + x_2^2 = 1$: $x_2 = 0$, $x_1 = \pm 1$
  - $x_1 = 1$: $\mu_1 = -3/2$, Cumple CNPO
  - $x_1 = -1$: $\mu_1 = 3/2 > 0$, NO cumple CNPO

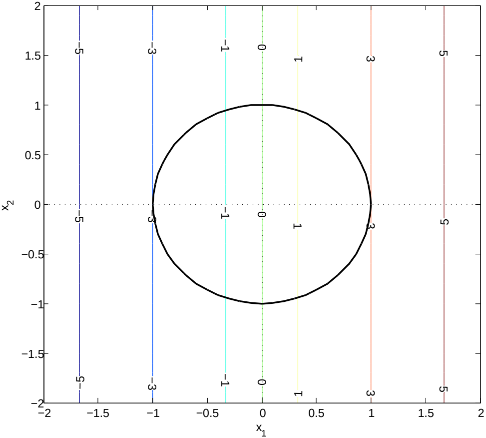
Condiciones de segundo orden - KKT - Ejemplo 2 (c.)

- Punto que cumple CNPO: $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mu^* = -3/2$.
- Restricciones activas en x^*: $J(x^*) = \{1\}$
- $H(x) = 0$, $H_1(x) = 2I$
- $L(x^*, \mu^*) = 2\mu_1^* I = -3I$
- $T(x^*) = \left\{ y = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Evaluando CNSO: $y' L(x^*, \mu^*) y = -3\alpha^2 \leq 0, \alpha \in \mathbb{R}$: NO cumple CNSO

Condición de segundo orden - KKT - Ejemplo 2 (c.)

$\min 3x_1$ s.a. $x_1^2 + x_2^1 \geq 1$



Condiciones de segundo orden - KKT - Ejemplo 3

$$\begin{aligned} \min \ & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a. } & x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 1 \\ & x_1^2 - x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

- $h_1(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0$, $\nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_2 + 2x_1 \end{bmatrix}$, $H_1(x) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
- $g_1(x) = x_1^2 - x_2 \leq 0$, $\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $G_1(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$, $H(x) = 2I$

Condiciones de segundo orden - KKT - Ejemplo 3 (c.)

Condición necesaria de primer orden:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2\lambda_1(x_1 + x_2) + 2\mu_1 x_1 &= 0 \\
2x_2 + 2\lambda_1(x_1 + x_2) - \mu_1 &= 0 \\
\mu_1 &\geq 0 \\
\mu_1(x_1^2 - x_2) &= 0 \\
x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 &= 1 \\
x_1^2 - x_2 &\leq 0
\end{aligned}
$$

Condiciones de segundo orden - KKT - Ejemplo 3 (c.)

Posibles soluciones:

- $\mu_1 = 0$, $\lambda_1 = 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, NO factible
- $\mu_1 = 0$: $x_1 = x_2 = \pm 1/2$, $\lambda_1 = -1/2$
  - $x_1 = x_2 = 1/2$: cumple CNPO
  - $x_1 = x_2 = -1/2$: $x_1^2 > x_2$, NO factible

Condiciones de segundo orden - KKT - Ejemplo 3 (c.)

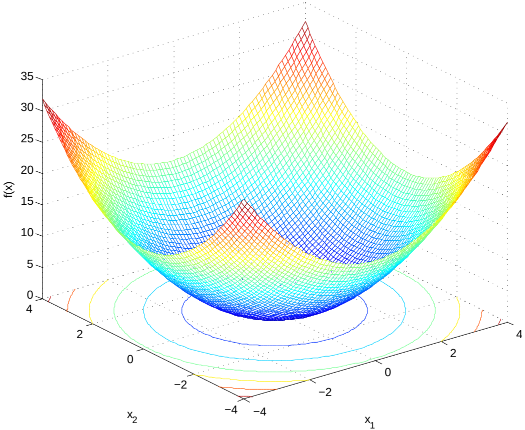
- Punto que cumple CNPO: $x^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\lambda_1^* = -1/2$, $\mu_1^* = 0$.
- Restricciones activas en x^*: $J(x^*) = \{\}$
- $\nabla h_1(x^*) = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \neq 0$: x^* regular
- $H(x^*) = 2I$, $H_1(x^*) = \begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$, $G_1(x^*) = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$
- $L(x^*, \mu^*) = 2I - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$

Condiciones de segundo orden - KKT - Ejemplo 3 (c.)

- $T(x^*) = \left\{ y : \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \left\{ y = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$
- Evaluando CNSO: $y' L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y = 4\alpha^2 \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: Cumple CNSO
- $\tilde{J}(x^*, \mu^*) = J(x^*) \Rightarrow \tilde{T}(x^*, \mu^*) = T(x^*)$
- Evaluando CSSO: $y' L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y = 4\alpha^2 > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$: Cumple CSSO

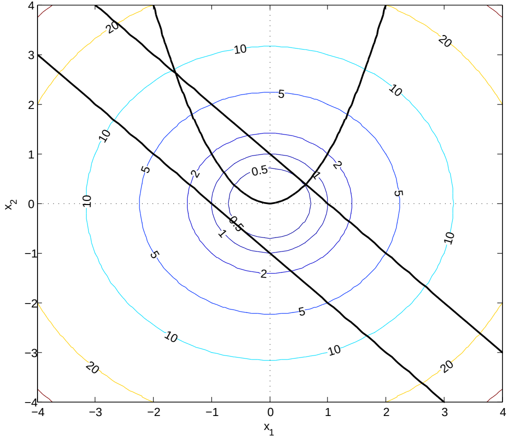
Condición de segundo orden - KKT - Ejemplo 3 (c.)

$$\min\ x_1^2 + x_2^2 \text{ s.a. } x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 1,\ x_1^2 - x_2 \leq 0$$



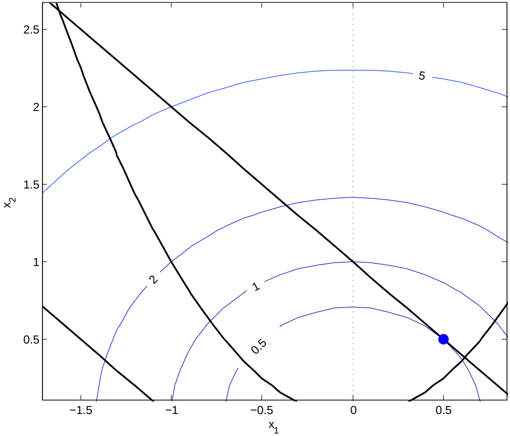
Condición de segundo orden - KKT - Ejemplo 3 (c.)

$$\min\ x_1^2 + x_2^2 \text{ s.a. } x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 1,\ \ x_1^2 - x_2 \leq 0$$



Condición de segundo orden - KKT - Ejemplo 3 (c.)

$$\min\ x_1^2 + x_2^2 \text{ s.a. } x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 1,\ x_1^2 - x_2 \leq 0$$



Caso $g(x) \geq 0$ - Cond. primer orden

Teorema

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *con* $m \leq n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f, g \in \mathcal{C}^1$. *Sea* x^* *un mínimo local de* f *s.a.* $h(x) = 0$, $g(x) \geq 0$ *y* x^* *un punto regular.*
Entonces $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ *y* $\mu^* \in \mathbb{R}^p$*:*

1. $Df(x^*) + \lambda^{*\prime} Dh(x^*) + \mu^{*\prime} Dg(x^*) = 0$
2. $\mu^* \leq 0$
3. $\mu^{*\prime} g(x^*) = 0$

Caso $g(x) \geq 0$ - Cond. *necesaria* segundo orden

Teorema

Sea x^* *un mínimo local de* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sujeto a* $h(x) = 0$, $g(x) \geq 0$ *con* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $m \leq n$, $f, h, g \in \mathcal{C}^2$. *Si* x^* *es un punto regular, entonces* $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ *y* $\mu^* \in \mathbb{R}^p$*:*

1. $Df(x^*) + \lambda^{*\prime} Dh(x^*) + \mu^{*\prime} Dg(x^*) = 0$, $\mu^* \leq 0$, $\mu^{*\prime} g(x^*) = 0$
2. $y' L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y \geq 0$, $\forall y \in T(x^*)$

Caso $g(x) \geq 0$ - Cond. *suficiente* segundo orden

Teorema

Sea x^* *un punto tal que* $h(x^*) = 0$, $g(x^*) \geq 0$ *(factible) con* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f, h, g \in \mathcal{C}^2$. *Si* $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ *y* $\mu^* \in \mathbb{R}^p$*:*

1. $Df(x^*) + \lambda^{*\prime} Dh(x^*) + \mu^{*\prime} Dg(x^*) = 0$, $\mu^* \leq 0$, $\mu^{*\prime} g(x^*) = 0$
2. $y' L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y > 0$, $\forall y \in \tilde{T}(x^*, \mu^*)$, $y \neq 0$

Entonces x^* *es un mínimo local estricto de* f *en la región factible*

Agenda

Sensibilidad

$x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ \text{s.a. } & h(x) = b \\ & g(x) \leq c \end{aligned}$$

- Condición necesaria de primer orden para problema no restringido en el óptimo mín $l(x^*, \lambda^*, \mu^*)$
- $l(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*) + \lambda^{*\prime} h(x^*) + \mu^{*\prime} g(x^*)$
- $\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial b} = -\lambda^*$, $\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial c} = -\mu^*$

Sensibilidad - Ejemplo

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 - x_2 \\ \text{s.a. } & x_1 + x_2 = 2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 6 \\ & -x_1 + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

- $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$
- Sensibilidad $x_1 + x_2 = 3$

Sensiblidad - Ejemplo (c.)

Condición necesaria de primer orden:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + \lambda + 2\mu_1 x_1 - \mu_2 &= 0 \\
-1 + \lambda + 2\mu_1 x_1 &= 0 \\
\mu_1, \mu_2 &\geq 0 \\
\mu_1(x_1 + x_2 - 3) + \mu_2(1 - x_1) &= 0 \\
x_1 + x_2 - 3 &= 0 \\
x_1^2 + x_2^2 - 6 &\leq 6 \\
-x_1 + 1 &\leq 0
\end{aligned}
$$

- $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 3$