Parcial 3

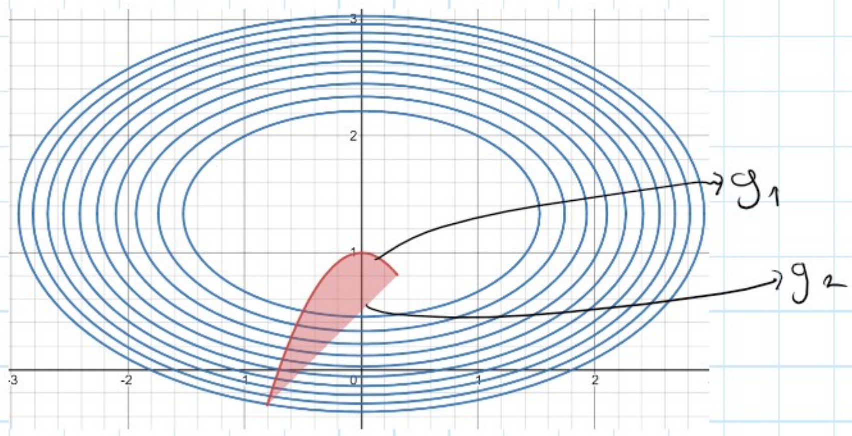
Friday, November 19, 2021 7:08 AM

1. [30 ptos.] Considere el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min\ & (x_1+2)^2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 \\ \text{s.a. } & 2x_1^2 + x_2 \le 1 \longrightarrow g_1 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 1 \le 0 \longrightarrow g_2 \end{aligned}$$

¿Es el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ un mínimo local de este problema?

Aunque es recomendable hacer un gráfico de apoyo, no puede usar el gráfico como argumento de sus respuestas a menos que se indique lo contrario.



Para verificar que es un mínimo local veamos si se cumple CNPO y CNSO de KKT:

$g_1: \ 2x_1^2 + x_2 - 1 \le 0, \quad \nabla g_1' = [\,4x_1 \quad 1\,]$

$g_2: \ 2x_1 - 2x_2 + 1 \le 0, \quad \nabla g_2' = [\,2 \quad -2\,]$

$f: \ (x_1+2)^2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 8x_2, \quad \nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 - 8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 - 8 \end{bmatrix}^t + [\,\mu_1 \quad \mu_2\,] \begin{bmatrix} 4x_1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 - 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x_1\mu_1 + 2\mu_2 \\ \mu_1 - 2\mu_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_1\mu_1 + 2\mu_2 \\ 6x_2 + \mu_1 - 2\mu_2 - 8 \end{bmatrix} = 0$$

Vea que en $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ g_1 está activa

$\mu_1 \neq 0$

$\mu_2 = 0$

$$\begin{cases} \cancel{2x_1}^{\,0} + 4\cancel{x_1}^{\,0}\mu_1 + 2\cancel{\mu_2}^{\,0} = 0 \\ 6\cancel{x_2}^{\,6} + \mu_1 - 2\cancel{\mu_2}^{\,0} - 8 = 0 \quad \Rightarrow \mu_1 = 2 \\ \text{Vea que } \mu^{*\prime} \cdot g(x) \geq 0 \\ \text{Y también } \mu^{*\prime} \geq 0 \end{cases}$$

Luego $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ cumple CNPO ✓

Falta ver CNSO:

Para ello necesitamos el espacio tangente a $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vea que en $\vec{x}$ solo está activa g_1

Vea que en $\vec{x}$ solo está activa g_1

luego $y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$

$y = y_2 = 0$

$y = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$

falta L:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \overbrace{2}^{\mu_1} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\nabla g_1' = \begin{bmatrix} 4x_1 & 1 \end{bmatrix}$
$\nabla g_2' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$
$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 - 8 \end{bmatrix}$

$$L = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

finalmente

$$6 \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha^2 > 0$$

$\therefore \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{x}$ es un mínimo local

---

2. [20 ptos.] Considere el problema

$$\begin{aligned} &\text{máx } 2x_1 - x_2 \\ &\text{s.a. } x_2 \leq (x_1 - 3)(x_1 - 1)(x_1 + 1)(x_1 + 3) \\ &\quad\quad x_1 \geq -3 \\ &\quad\quad x_1 \leq 3 \end{aligned}$$

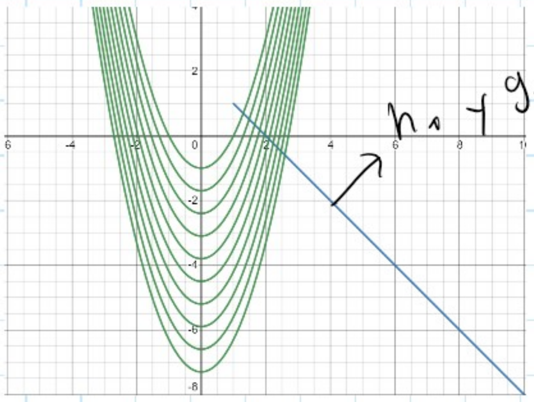
Sin resolver el problema de optimización, estudie las condiciones de KKT para los puntos $\hat{x} = (0, 9)$ y $\overline{x} = (1, 0)$. ¿Qué puede decir de estos puntos? (¿Con lo visto en el curso qué es lo más preciso que puede afirmar?)

3. [30 ptos.] Considere el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} &\min\ x_1^2 - x_2 \\ &\text{s.a. } x_1 + x_2 = 2 \longrightarrow h_1 \\ &\quad -x_1 + 1 \leq 0 \longrightarrow g_1 \end{aligned}$$

Utilice el método de gradiente proyectado para resolver este problema, comenzando en el punto $(2, 0)$.

Aunque es recomendable hacer un gráfico de apoyo, no puede usar el gráfico como argumento. Excepto para el caso donde sea necesario resolver problemas lineales asociados.



en el punto $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ solo h_1 está activa

$$W = \{h_1\}, \quad A_w = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = P \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -2.5 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular x_1:

$$\alpha_1 = \max \{\alpha : x_k + \alpha d_k \in \Omega\}$$

$$\max \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5\alpha \\ -2.5\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5\alpha + 2 \\ -2.5\alpha \end{bmatrix} \in \Omega$$

Para hayar este α_1:

$$\min\ f(x_0 + \alpha d_1) = (2.5\alpha + 2)^2 - (-2.5\alpha)$$

$$= \underbrace{6.25\alpha^2 + 12.5x + 4}_{f_1}$$

$$\frac{d f_1}{d\alpha} = 12.5\alpha + 12.5 = 0$$

$$\alpha = -1$$

4. [20 ptos.] Considere el problema

$$\min x_1^2 + 3x_2^2$$
$$\text{s.a. } x_1 + 2x_2 \geq 3 \rightarrow -x_1 - 2x_2 + 3 < 0$$

Use el método de penalización para encontrar la solución óptima para el problema.

ρ_1

$$\min \underbrace{x_1^2 + 3x_2^2 + \max(0, (-x_1 - 2x_2 + 3)^2) \cdot \rho}_{q}$$

$$\nabla q = \begin{bmatrix} ① \; 2x_1 + 2\rho(-x_1 - 2x_2 + 3)(-1) \\ ② \; 6x_2 + 2\rho(-x_1 - 2x_2 + 3)(-2) \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \text{en el min}$$

$$① = ②$$

$$2x_1 - 2\rho(-x_1 - 2x_2 + 3) = 6x_2 - 4\rho(-x_1 - 2x_2 + 3)$$
$$2x_1 = 6x_2 - 2\rho(-x_1 - 2x_2 + 3)$$
$$2x_1 = 6x_2 + 2\rho x_1 + 4x_2\rho - 6\rho$$
$$2x_1(1 - \rho) = 6x_2 + 4x_2\rho - 6\rho$$
$$x_1 = \frac{3x_2 + 2x_2\rho - 3\rho}{(1-\rho)}$$

$$x_2 = \frac{-\rho x_1 + 3\rho + x_1}{2\rho + 3}$$

evaluando en x_1 ② :

$$6x_2 - 4\rho\left(-\frac{3x_2 + 2x_2\rho - 3\rho}{(1-\rho)} - 2x_2 + 3\right) = 0$$

$$\frac{6x_2}{4\rho} = \left(-\frac{3x_2 + x_2\rho - 3\rho}{(1-\rho)} - 2x_2 + 3\right)$$

$$x_2 = \frac{6\rho(2\rho - 1)}{8\rho^2 - 7\rho - 3} \times \frac{\frac{1}{\rho^2}}{\frac{1}{\rho^2}}$$

$$\lim_{\rho \to \infty} x_2 = \frac{3}{2}$$

x_1 en ② :

con x_2 en (2):

$$6\left(\frac{3}{2}\right) + 2\rho\left(-x_1 - 2\left(\frac{3}{2}\right)+3\right)(-2) = 0$$

$$9 + \left(-2\rho x_1 \cancel{- 6\rho + 6\rho}^{0}\right)(-2) = 0$$

$$+4\rho x_1 = -9$$

$$x_1 = \frac{-9}{4\rho}$$

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{-9}{4\rho} = 0 = x_1$$