1. ¿Es $f(x) = 4 + 3x$ convexa en $\mathbb{R}$? ¿Es cóncava en $\mathbb{R}$?

2. ¿Es $f(x) = x^2 - 2x$ convexa en $\mathbb{R}$?

3. ¿Es $f(x) = x^3$ convexa en $\mathbb{R}$? ¿Es convexa en $\mathbb{R}_+$?

4. ¿Es $f(x) = (x-3)^2 - 2$ convexa en $\mathbb{R}$?

5. ¿Sobre qué región de $\mathbb{R}$ es $f(x) = x^2(x^2-1)$ convexa? ¿Es estrictamente convexa sobre esta región?

6. Determine cuáles de las siguientes funciones son convexas, cóncavas o ninguna.

   (a)
   $$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

   (b)
   $$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1 + 3x_2$$

   (c)
   $$f(x_1, x_2) = x_1 e^{-(x_1+3x_2)}$$

   (d)
   $$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1 - 10x_2$$

7. Demuestre si la siguiente función, definida sobre el conjunto S,
   $$f(x_1, x_2) = 10 - 3(x_2 - x_1^2)^2$$
   es cóncava o no.

   (a) Considere $S = \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$

   (b) Considere $S = \{(x_1, x_2) : x_1^2 \geq x_2\}$

8. Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f(x) = x'Ax$ donde
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \theta \end{bmatrix}.$$
   Determine la Hesiana de f (en cualquier punto de $\mathbb{R}^3$). ¿Para qué valores de θ es f estrictamente convexa?

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función dada por $f(x) = x' \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} x + x' \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 6$.

   (a) Determine el gradiente y la matriz Hesiana de f en el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Encuentre la derivada direccional de f en el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en la dirección *unitaria* de máximo incremento.

(c) Encuentre un punto que satisfaga la condición necesaria de primer orden para un mínimo local para f. ¿Satisface este punto la condición necesaria de segundo orden para un mínimo local?

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función dada por $f(x) = x' \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + x' \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 7$.

(a) Encuentre la derivada direccional de f en el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en la dirección $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Encuentre todos los puntos que satisfagan la condición necesaria de primer orden para un mínimo local para f.

(c) Tiene f algún mínimo local? Si lo tiene, cuál(es) es(son)? Si no lo tiene, explique por qué.

11. Dado el siguiente problema de minimización,

$$\text{mín } f(x) = 3x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 2x_2$$

(a) Encuentre la derivada direccional de f en el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en la dirección $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Encuentre todos los puntos que satisfagan la condición necesaria de primer orden para un mínimo local para f.

(c) Determine el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen la condición necesaria de segundo orden para un mínimo local. ¿Tiene esta función mínimos locales?

12. Suponga que tiene n números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Encuentre el número $\bar{x} \in \mathbb{R}$ que minimiza la suma de diferencias al cuadrado entre los números dados y $\bar{x}$. Es decir, determine una expresión para $\bar{x}$ en términos de los números dados.

13. Se quiere minimizar la función $f(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = 4x_1^2 - x_2^2$.

(a) ¿Satisface el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ la condición necesaria de primer orden?

(b) ¿Satisface el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ la condición necesaria de segundo orden?

(c) ¿Es el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ un mínimo local para este problema?

(d) Encuentre todos los puntos que satisfagan la condición necesaria de primer orden para un mínimo local para f.

(e) ¿Tiene f algún mínimo local? Si lo tiene, cuál(es) es(son)? Si no lo tiene, explique por qué.

14. Se quiere minimizar la función $f(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = 5x_2$.

    (a) ¿Satisface el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ la condición necesaria de primer orden?

    (b) ¿Satisface el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ la condición necesaria de segundo orden?

    (c) ¿Es el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ un mínimo local para este problema?

    (d) Encuentre todos los puntos que satisfagan la condición necesaria de primer orden para un mínimo local para f.

    (e) ¿Tiene f algún mínimo local? Si lo tiene, cuál(es) es(son)? Si no lo tiene, explique por qué.