Módulo 2: Método simplex

Departamento MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario

Primer Semestre de 2021

Agenda

Agenda

Método Simplex - Puntos

- Idea básica: reconocer optimalidad basado en condiciones locales
- No hay que enumerar todas las soluciones básicas factibles
- Problema lineal en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{min. } & c'x \\ \text{s.a. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$
- $b \in \mathbb{R}^m$, $b \geq 0$, $m \leq n$, $r(A) = m$

Método Simplex - Optimalidad

- Solución básica factible: $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$
- Valor de la función objetivo: $z_0 = \begin{bmatrix} c'_B & c'_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = c'_B B^{-1} b$
- $\{1, \ldots, n\} = I_B \cup I_N$
- $Ax = Bx_B + Nx_N = b$
- $\bar{b} = B^{-1}b$
- $Nx_N = \sum_{j \in I_N} a_j x_j$

Método Simplex - Optimalidad (cont.)

Región factible:

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
Bx_B + Nx_N &= b \\
x_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \\
x_B &= \bar{b} - B^{-1}\sum_{j\in I_N} a_j x_j \\
x_B &= \bar{b} - \sum_{j\in I_N} y_j x_j
\end{aligned}
$$

Método Simplex - Optimalidad (cont.)

Función objetivo:

$$
\begin{aligned}
z = c'x &= c'_B x_B + c'_N x_N \\
&= c'_B \left(\bar{b} - \sum_{j \in I_N} y_j x_j \right) + \sum_{j \in I_N} c_j x_j \\
&= z_0 + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j = z_0 + \sum_{j \in I_N} \bar{c}_j x_j
\end{aligned}
$$

- $z_0 = c'_B \bar{b}$
- $z_j = c'_B B^{-1} a_j$, $j \in I_N$
- $\bar{c}_j = c_j - z_j$: costo reducido

Método Simplex - Optimalidad (cont.)

- f.o.: $z = z_0 + \sum_{j \in I_N} \bar{c}_j x_j$
- Derivada direccional: $\frac{\partial z}{\partial x_j} = \bar{c}_j, j \in I_N$
- Si $z = z_0$, luego es óptima
- Si $\bar{c}_j \geq 0$, $\forall j \in I_N$: toda solución cumple con $z \geq z_0$

Condición de optimalidad

Si $\bar{c}_j \geq 0$, $\forall j \in I_N$: solución actual es óptima

Método Simplex - Optimalidad (cont.)

Ejemplo

$$\begin{aligned} \text{min. } & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a. } & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $c' = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Método Simplex - Optimalidad (cont.)

Ejemplo

- Solución básica factible: $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$
- ¿Es $\hat{x}$ una solución óptima del problema?
- Solución gráfica
- Considere $\tilde{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Método Simplex - Optimalidad (cont.)

Replantear el PL

$$\begin{aligned} \text{min. } & z = z_0 + \sum_{j \in I_N} \bar{c}_j x_j \\ \text{s.a. } & \sum_{j \in I_N} y_j x_j + x_B = \bar{b} \\ & x_j \geq 0, j \in I_N \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

- x_B como variables de holgura
- PL en el espacio de las variables no básicas
- n restricciones

Agenda

Visión geométrica del método Simplex

PL en el espacio de las variables no básicas

$$
\begin{aligned}
\text{min. } z &= z_0 + \sum_{j \in I_N} \bar{c}_j x_j \\
\text{s.a. } &\sum_{j \in I_N} y_j x_j \leq \bar{b} \\
&x_j \geq 0, j \in I_N
\end{aligned}
$$

- Región factible: intersección de n semi-espacios: m del tipo $\leq$, $n-m$ de no-negatividad
- Con cada restricción se puede asociar una variable: con las primeras m una básica, con las otras $n-m$ una no básica

Visión geométrica del método Simplex (cont.)

$$
\begin{aligned}
\text{min. } z = z_0 + \sum_{j \in I_N} \bar{c}_j x_j \\
\text{s.a. } \sum_{j \in I_N} y_j x_j \leq \bar{b} \\
x_j \geq 0, j \in I_N
\end{aligned}
$$

- $x_j = 0$ si la restricción se cumple con igualdad (punto en el hiperplano)
- $x_j > 0$ si la desigualdad se cumple estrictamente (punto a un lado del hiperplano)
- $\sum_{j \in I_N} y_j x_j \leq \bar{b}$: x_B igual o mayor que cero
- $x_j \geq 0, j \in I_N$: x_N igual o mayor que cero

Visión geométrica del método Simplex (cont.)

Ejemplo gráfico

$$
\begin{aligned}
\text{min. } & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{s.a. } & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
& x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Visión geométrica del método Simplex (cont.)

- Ejemplo gráfico
- Parado en el origen, fije $p-1$ ($p=n-m$) variables no básicas en cero y defina una dirección de movimiento (x_j)
- F.o. cambia a tasa $\frac{\partial z}{\partial x_j}=\bar{c}_j$
- Método simplex en cada iteración: LP en el espacio de las variables no-básicas actuales
- Simplex: casco convexo de $p+1$ puntos no coplanares en $\mathbb{R}^p$ (no en el mismo hiperplano)

Agenda

Método Simplex

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\text{min. } & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{s.a. } & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
& x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $c' = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cambio de base

- Solución básica factible x
- PL:

$$\begin{aligned} \text{min. } z &= z_0 + \sum_{j \in I_N} \bar{c}_j x_j \\ \text{s.a. } \sum_{j \in I_N} y_j x_j + x_B &= \bar{b} \\ x_j &\geq 0, j \in I_N \\ x_B &\geq 0 \end{aligned}$$

- Si $\bar{c}_j \geq 0$, $\forall j \in I_N$: x es óptima, $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix}$

Cambio de base (cont.)

- De lo contrario, escoja x_k: $\bar{c}_k < 0$, para un $k \in I_N$
- $x_j = 0$, $j \in I_N - \{k\}$:
  - $z = z_0 + \bar{c}_k x_k$
  - $x_B = \bar{b} - y_k x_k$
  - $\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$
  - $x_k \geq 0$
  - $y_{ik} \leq 0$? $y_{ik} > 0$?
  - Incrementar x_k hasta que algún $x_{B_i} = 0$ ($y_{ik} > 0$)

Cambio de base (cont.)

- $x_k = \min_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$: criterio de la razón mínima
- $r = \operatorname{argmin}_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right\}$
- Si x_B no es degenerada:
  - $\bar{b}_r > 0 \longrightarrow x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$
  - $z = z_0 + \bar{c}_k x_k \longrightarrow z < z_0$
  - La función objetivo mejora estrictamente

Cambio de base (cont.)

Cambio de solución básica factible/base:

- Sale x_{B_r}, entra x_k a la base
- $x_k : 0 \to \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
- $x_{B_r} : \bar{b}_r \to 0$
- A lo sumo m variables diferentes de 0
- Nueva base: $[a_{B_1} \dots a_{B_{r-1}}\ a_k\ a_{B_{r+1}} \dots a_{B_m}]$: linealmente independiente si y solo si $y_{rk} \neq 0$
- $\Rightarrow$ nueva solución básica factible

Cambio de base (cont.)

- Si $y_{ik} \leq 0$, x_k se puede incrementar ilimitadamente y la solución mantiene factibilidad
- Si $y_{ik} \leq 0$, $\forall 1 \leq i \leq m$?
- $\Rightarrow$ x_k se puede incrementar ilimitadamente y la solución mantiene factibilidad
- $\Rightarrow$ el problema no tiene óptimo finito

Agenda

Iteración simplex

Se tiene una solución básica factible

1. Determinar si la solución actual es óptima
2. Si no, escoger una variable candidata para entrar a la base (costo reducido negativo)
3. Determinar si, al entrar esta variable, el problema no tiene óptimo finito
4. De lo contrario, escoger la variable que sale de la base
5. Actualizar la base: nueva solución básica factible
6. Repetir hasta que la solución actual sea óptima o se encuentre que el problema no tiene óptimo finito

Método simplex

0. Se tiene una base inicial B, asociada a una solución básica factible
1. Resuelva $Bx_B = b$
   - $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$
   - $x_N = 0$
   - $z_0 = c_B' x_B$

Método simplex (cont.)

2. Resuelva $wB = c_B$
   - $\bar{c}'_N = c'_N - z'_N = c'_N - w'N = c'_N - c'_B B^{-1} N$
   - $\bar{c}_k = \text{mín}_{j \in I_N} \{\bar{c}_j\}$
   - Si $\bar{c}_k \geq 0$, STOP: solución básica factible actual es óptima
   - Si no, x_k es candidata para entrar a la base

Método simplex (cont.)

3. Resuelva $By_k = a_k$
   - $y_k = B^{-1}a_k$
   - Si $y_k \leq 0$, STOP: el problema no tiene óptimo finito
   - Si no, $r = \text{argmin}_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right\}$: prueba de la razón mínima
   - x_{B_r} sale de la base
   - Actualice la base:
     - $I_B \leftarrow I_B - \{B_r\} + \{k\}$.
     - $I_N \leftarrow I_N - \{k\} + \{B_r\}$
   - Vuelva al paso 1

Ejemplo - Óptimo finito

$$
\begin{aligned}
\text{min. } & x_1 + x_2 \\
\text{s.a. } & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Base inicial: $B = [a_1 \ a_2]$
- Gráfica para este problema

Método simplex - Ejemplo - Óptimo finito (cont.)

$$
\begin{aligned}
\text{min. } & x_1 + x_2 \\
\text{s.a. } & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\
& x_2 + x_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Datos del problema:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $c' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Método simplex - Ejemplo - Óptimo finito (cont.)

Iteración 1 - Paso 1:

- $I_B = \{1, 2\}$, $I_N = \{3, 4\}$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $z_0 = c'_B x_B = 3$

Método simplex - Ejemplo - Óptimo finito (cont.)

Iteración 1 - Paso 2:

- $w' = c'_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$
- $\bar{c}'_N = c'_N - z'_N = c'_N - w'N = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ no es óptima
- x_3 entra a la base, $\bar{c}_3 = -1 < 0$

Método simplex - Ejemplo - Óptimo finito (cont.)

Iteración 1 - Paso 3:

- $y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \text{mín}_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{i3}} : y_{i3} > 0 \right\} = \text{mín} \left\{ \frac{2}{1} \right\} = 2$
- x_1 sale de la base
- x_3 entra a la base, $x_3 = 2$, aporta -1 por unidad $\Rightarrow$ mejora en f.o. de -2

Método simplex - Ejemplo - Óptimo finito (cont.)

Iteración 2 - Paso 1:

- $I_B = \{3, 2\}$, $I_N = \{1, 4\}$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $z_0 = c'_B x_B = 1$

Método simplex - Ejemplo - Óptimo finito (cont.)

Iteración 2 - Paso 2:

- $w' = c'_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\bar{c}'_N = c'_N - z'_N = c'_N - w'N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ no es óptima
- x_4 entra a la base, $\bar{c}_4 = -1$

Método simplex - Ejemplo - Óptimo finito (cont.)

Iteración 2 - Paso 3:

- $y_4 = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \text{mín}_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{i4}} : y_{i4} > 0 \right\} = \text{mín} \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 1$
- x_2 sale de la base
- x_4 entra a la base, $x_4 = 1$, aporta -1 por unidad $\Rightarrow$ mejora en f.o. de -1

Método simplex - Ejemplo - Óptimo finito (cont.)

Iteración 3 - Paso 1:

- $I_B = \{3, 4\}$, $I_N = \{1, 2\}$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $z_0 = c'_B x_B = 0$

Método simplex - Ejemplo - Óptimo finito (cont.)

Iteración 3 - Paso 2:

- $w' = c'_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\bar{c}'_N = c'_N - z'_N = c'_N - w'N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ **óptima**, STOP

Método simplex - Ejemplo - Óptimos alternos

$$\begin{aligned} \text{min. } & -2x_1 - 4x_2 \\ \text{s.a. } & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Base inicial: $B = [a_1 \ a_4]$
- $I_N = \{2, 3\}$, $\bar{c}'_N = [0 \ 2]$
- Gráfica para este problema
- Óptimos alternos

Método simplex - Ejemplo - Óptimo no finito

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & -x_1 - 3x_2 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\
& -x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Base inicial: $B = [a_3 \ a_4]$
- Gráfica para este ejemplo
- Óptimo no finito