## Profesores: Cécile Gauthier - José Morillo

- 1. ¿Es f(x) = 4 + 3x convexa en  $\mathbb{R}$ ? ¿Es cóncava en  $\mathbb{R}$ ?
- 2. ¿Es  $f(x) = x^2 2x$  convexa en  $\mathbb{R}$ ?
- 3. ¿Es  $f(x) = x^3$  convexa en  $\mathbb{R}$ ? ¿Es convexa en  $\mathbb{R}_+$ ?
- 4. ¿Es  $f(x) = (x-3)^2 2$  convexa en  $\mathbb{R}$ ?
- 5. ¿Sobre qué región de  $\mathbb{R}$  es  $f(x)=x^2(x^2-1)$  convexa? ¿Es estrictamente convexa sobre esta región?
- 6. Determine cuáles de las siguientes funciones son convexas, cóncavas o ninguna.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1 + 3x_2$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 e^{-(x_1 + 3x_2)}$$

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1 - 10x_2$$

7. Demuestre si la siguiente función, definida sobre el conjunto S,

$$f(x_1, x_2) = 10 - 3(x_2 - x_1^2)^2$$

es cóncava o no.

- (a) Considere  $S = \{(x_1, x_2) : -1 \le x_1 \le 1, -1 \le x_2 \le 1\}$
- (b) Considere  $S = \{(x_1, x_2) : x_1^2 \ge x_2\}$
- 8. Considere la función  $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$  f(x) = x'Ax donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \theta \end{bmatrix}.$$

Determine la Hesiana de f (en cualquier punto de  $\mathbb{R}^3$ ). ¿Para qué valores de  $\theta$  es f estrictamente convexa?

- 9. Sea  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  una función dada por  $f(x) = x' \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} x + x' \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 6$ .
  - (a) Determine el gradiente y la matriz Hesiana de f en el punto  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Profesores: Cécile Gauthier - José Morillo

- (b) Encuentre la derivada direccional de f en el punto  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  en la dirección unitaria de máximo incremento.
- (c) Encuentre un punto que satisfaga la condición necesaria de primer orden para un mínimo local para f. ¿Satisface este punto la condición necesaria de segundo orden para un mínimo local?
- 10. Sea  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  una función dada por  $f(x) = x' \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + x' \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 7$ .
  - (a) Encuentre la derivada direccional de f en el punto  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  en la dirección  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .
  - (b) Encuentre todos los puntos que satisfagan la condición necesaria de primer orden para un mínimo local para f.
  - (c) Tiene f algún mínimo local? Si lo tiene, cuál(es) es(son)? Si no lo tiene, explique por qué.
- 11. Dado el siguiente problema de minimización,

$$\min f(x) = 3x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 2x_2$$

- (a) Encuentre la derivada direccional de f en el punto  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  en la dirección  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .
- (b) Encuentre todos los puntos que satisfagan la condición necesaria de primer orden para un mínimo local para f.
- (c) Determine el conjunto de puntos  $x \in \mathbb{R}^2$  que satisfacen la condición necesaria de segundo orden para un mínimo local. ¿Tiene esta función mínimos locales?
- 12. Suponga que tiene n números reales  $x_1, x_2, \ldots, x_n$ . Encuentre el número  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  que minimiza la suma de diferencias al cuadrado entre los números dados y  $\bar{x}$ . Es decir, determine una expresión para  $\bar{x}$  en términos de los números dados.
- 13. Se quiere minimizar la función  $f(x): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  donde  $f(x) = 4x_1^2 x_2^2$ .
  - (a) ¿Satisface el punto  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  la condición necesaria de primer orden?
  - (b) ¿Satisface el punto  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  la condición necesaria de segundo orden?
  - (c) ¿Es el punto  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  un mínimo local para este problema?
  - (d) Encuentre todos los puntos que satisfagan la condición necesaria de primer orden para un mínimo local para f.
  - (e) ¿Tiene f algún mínimo local? Si lo tiene, cuál(es) es(son)? Si no lo tiene, explique por qué.

Profesores: Cécile Gauthier - José Morillo

- 14. Se quiere minimizar la función  $f(x): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  donde  $f(x) = 5x_2$ .
  - (a) ¿Satisface el punto  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  la condición necesaria de primer orden?
  - (b) ¿Satisface el punto  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  la condición necesaria de segundo orden?
  - (c) ¿Es el punto  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  un mínimo local para este problema?
  - (d) Encuentre todos los puntos que satisfagan la condición necesaria de primer orden para un mínimo local para f.
  - (e) ¿Tiene f algún mínimo local? Si lo tiene, cuál(es) es(son)? Si no lo tiene, explique por qué.