

## \* Defs. sobre mínimos:

Def (mínimo local):

→ dado  $x^* \in \Omega$ , si  $\exists \varepsilon > 0$  t.q.  $f(x) \geq f(x^*)$ ,  
 $\forall x \in \Omega \cap \{x^*\} : \|x - x^*\| < \varepsilon$ , entonces  $x^*$  es un  
 mínimo local.

→ dado  $x \in \Omega$ , si  $\exists \varepsilon > 0$  y  $\forall x \in \Gamma$ ,  $\Gamma = \{x \in \Omega : \|x - x^*\| < \varepsilon\}$   
 se tiene  $f(x) \geq f(x^*) \Rightarrow x^*$  es mín. local.

Def (mín. global):

dado  $x^* \in \Omega$ , si  $f(x) \geq f(x^*)$ ,  $\forall x \in \Omega$ ,  
 entonces  $x^*$  es mín. global.

Notación:

$x^*$  mínimo global:

- $f(x^*) = \min_{x \in \Omega} \{f(x)\}$
- $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \Omega} \{f(x)\}$

## \* Defs. direcciones factibles:

Def. (dir. factible)

→ dado  $d \in \mathbb{R}^n$  y  $d \neq 0$ , si para  $x \in \Omega$   
 $\exists \alpha_0 > 0$  tal que  $(x + \alpha d) \in \Omega$ ,  $\forall \alpha \in [0, \alpha_0]$ ,  
 $\Rightarrow d$  es una dirección factible.

Def. (derivada direccional)

Def. (derivada direccional)

→ Dada una dirección factible  $d$  en  $x \in \Delta$  la derivada direccional de  $f(x)$  en dicha dirección es:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta d} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} \\ = d' \cdot \nabla f(x)$$

⊛ Condiciones Necesarias 1º orden y 2º orden

→ Cond. Necesarias 1º ord.

(Caso restringido)

• Sea  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1$ .  
tiene 1ª derivada

Si  $x^*$  es un mínimo local de  $f$  en  $\Delta$

$\Rightarrow \forall d$  factible en  $x^*$ :

$$d' \nabla f(x^*) \geq 0$$

(Caso irrestricto)

• Sea  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1$ .  
tiene 1ª derivada

Si  $x^*$  es un mínimo local de  $f$  en  $\Delta$  y es un punto interior

$$\Rightarrow \nabla f(x^*) = 0$$

→ Cond. Necesaria 2º ord.

(Caso restringido)

tiene 2da derivada.  
 $\Delta$  es un

(Caso restringido)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$ . Si  $x^*$  es un mínimo local de  $f$  en  $\Omega$ , y  $d$  una dir. factible en  $x^*$  t.q.  $d' \nabla f(x^*) = 0$ , entonces:

$$d' H(x^*) d \geq 0$$

(Caso irrestringido)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$ . Si  $x^*$  es un mínimo local de  $f$  en  $\Omega$  y  $x^*$  es un punto interior

$$\Rightarrow \nabla f(x^*) = 0 \text{ y } H(x^*) \text{ es semi def. positiva}$$

Matriz def. positiva

- Det. de las menores principales es mayor que cero
- todos los eigenval. son positivos

- $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x' A x \geq 0$
- todos los eigenval. son no negativos.

→ Condición suficiente de 2do orden

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$  y  $x^*$  un punto interior de  $\Omega$ . si:

$$(1) \nabla f(x^*) = 0$$

$$(2) H(x^*) \succ 0$$

entonces  $x^*$  es un mínimo local estricto en  $f$  en  $\Omega$ .



Conjuntos convexos

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es convexo si

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Omega$$

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Omega$$

$$\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad \forall \lambda \in (0,1)$$



**funciones convexas**

Def ( **función convexa** )

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función convexa si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(\hat{x})$$

la función entre  $x$  y  $\hat{x}$  está siempre por debajo de su interpolación.

si es  $<$   
y no  $\leq$  es estrictamente convexa.

• Vea que si  $f$  es convexa, entonces  $f$  es continua en el interior.

• Si  $f \in C^2$ ,  $f$  es convexa estricta sii  $H$  es semidef. positiva

• todo mínimo local de  $f$  en  $\Omega$  (convexo) es mín. global.

Def ( **función cóncava** )

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es cóncava si  $f = -g$  es convexa.

• Si  $f \in C^2$ ,  $f$  es cóncava estricta sii  $H$  es semidef. negativa

## ⊗ funciones casi convexas :

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$  es casi convexa si:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) \leq \max \{f(x), f(\hat{x})\}$$

$$(\forall x, \hat{x}) \in I, \lambda \in (0,1)$$

los valores de la función desde  $x$  hasta  $\hat{x}$  están por debajo de la función evaluada en uno de los extremos

### • (Teoremitas)

→ Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función estricta casi convexa en  $[a, b]$  y sean  $\lambda, \mu \in [a, b]$ , con  $\lambda < \mu$ .

entonces:

- si  $f(\mu) < f(\lambda) \Rightarrow f(\mu) \leq f(x), \forall x \in [a, \lambda]$
- si  $f(\lambda) < f(\mu) \Rightarrow f(\lambda) \leq f(x), \forall x \in [\mu, b]$