Módulo 6: Optimización con Restricciones

Departamento MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario

Primer Semestre de 2021

Agenda

1. Problemas con restricciones de igualdad
   - Condición de primer orden - Lagrange
   - Condiciones de segundo orden

Condición de primer orden - Lagrange

Teorema

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *con* $m \leq n$, *con* $f, h \in \mathcal{C}$. *Sea* x^* *un mínimo local de* f *s.a.* $h(x) = 0$ *y* x^* *un punto regular. Entonces* $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$:

$$Df(x^*) + \lambda^{*\prime} Dh(x^*) = 0'$$

Condición de primer orden - Lagrange (cont.)

- Si x^* es un mínimo local, $\nabla f(x^*)$ es una combinación lineal de los gradientes de las restricciones en este punto:

$$\nabla f(x^*) = -Dh(x^*)'\lambda^* = -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla h_i(x^*)$$

- λ^*: vector de multiplicadores de Lagrange

Condición de primer orden - Lagrange (cont.)

- Lagrangiano $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$l(x, \lambda) = f(x) + \lambda' h(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(x)$$

- Condición de Lagrange: condición necesaria de primer orden para problema no restringido $\min l(x, \lambda)$
- $Dl(x, \lambda) = [D_x l(x, \lambda),\ D_\lambda l(x, \lambda)] = 0$
- $D_x l(x, \lambda) = Df(x) + \lambda' Dh(x) = 0$
- $D_\lambda = h(x) = 0$ (factibilidad)

Condición de primer orden - Lagrange (cont.)

Para determinar posibles mínimos:

- Resuelva el sistema de $m+n$ ecuaciones y $m+n$ incógnitas:

$$Df(x) + \lambda' Dh(x) = 0'$$

$$h(x) = 0$$

- Las soluciones cumplen con condición necesaria de primer orden (Lagrange)

Condición de primer orden - Lagrange - Ejemplo 1

$$\min\ 4x_1 + x_2^2$$
$$\text{s.a. } x_1^2 + x_2^2 = 9$$

- $h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0$
- $\nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$
- x es regular si $x \neq 0 \Rightarrow$ todo x factible es regular
- $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$

Condición de primer orden - Lagrange - Ejemplo 1

Condición de primer orden:

$$\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla h_1(x) = 0$$
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = 0$$

y

$$h_1(x) = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 9$$

Que se traduce en:

$$4 + 2\lambda_1 x_1 = 0$$
$$2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 9$$

Condición de primer orden - Lagrange - Ejemplo 1

Se deduce que

$$2x_2(1+\lambda_1) = 0 \Longleftrightarrow x_2 = 0 \text{ o } \lambda_1 = -1$$

Puntos que cumplen la CNPO:

- $x_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \lambda_A = -\frac{2}{3}$
- $x_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \lambda_B = \frac{2}{3}$
- $x_C = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}, \ \lambda_C = -1$
- $x_D = \begin{bmatrix} 2 \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix}, \ \lambda_D = -1$

Condición de primer orden - Lagrange - Ejemplo 1

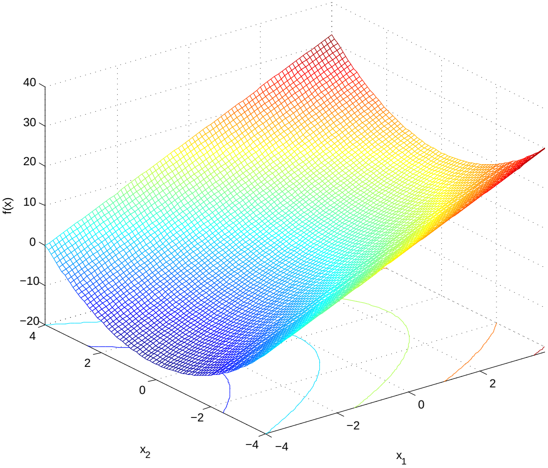
Al evaluar la función objetivo en estos puntos encontramos que

- $f(x_A) = 12$
- $f(x_B) = -12$
- $f(x_C) = 13$
- $f(x_D) = 13$

Entre los candidatos, x_B provee el menor valor de función objetivo

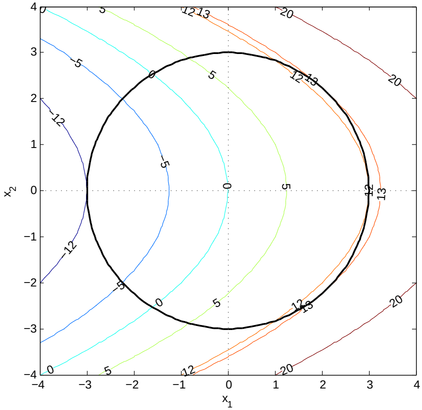
Condición de primer orden - Lagrange - Ejemplo 1

$\min\ 4x_1 + x_2^2$ s.a. $x_1^2 + x_2^2 = 9$



Condición de primer orden - Lagrange - Ejemplo 1

$\min\ 4x_1 + x_2^2$ s.a. $x_1^2 + x_2^2 = 9$



Condición de primer orden - Lagrange - Ejemplo 2

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_3 + 2x_2^2 \\ \text{s.a. } & x_1 + 2x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_3 = 6 \end{aligned}$$

- $h_1(x) = x_1 + 2x_2 - 3 = 0,\ \nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $h_2(x) = 4x_1 + 3x_3 - 6 = 0,\ \nabla h_2(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
- Todo $x \in \mathbb{R}^3$ es regular

Condición de primer orden - Lagrange - Ejemplo 2

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Condición de primer orden:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla h_1(x) + \lambda_2 \nabla h_2(x) &= 0 \\ h_1(x) &= 0 \\ h_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

Que se traduce en:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + \lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2\lambda_1 &= 0 \\ 3 + 3\lambda_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Condición de primer orden - Lagrange - Ejemplo 2

Resolviendo encontramos que el punto que satisface la CNPO es

$$x^* = \begin{bmatrix} 4 \\ -1/2 \\ -10/3 \end{bmatrix}, \ \lambda^* = -\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio:

Se requiere construir un corral de aves rectangular de 40 m^2. Si la cerca a los largo de los lados horizontales cuesta \$5 por m, y para los lados verticales cuesta \$8 por m. ¿Cuáles son las dimensiones del corral que minimizan el coto total de construcción?

Condiciones de segundo orden

- Lagrangiano: $l(x, \lambda) = f(x) + \lambda' h(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(x)$
- $L(x, \lambda)$: Hesiana de $l(x, \lambda)$ con respecto a x
- $L(x, \lambda) = H(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j H_j(x)$
- $H(x)$: Hesiana de $f(x)$
- $H_j(x)$: Hesiana de $h_j(x)$

Condición *necesaria* de segundo orden

Teorema

Sea x^* un mínimo local de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sujeto a $h(x) = 0$, con $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, $f, h \in \mathcal{C}^2$. Si x^* es un punto regular, entonces $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$:

1. $Df(x^*) + \lambda^{*\prime} Dh(x^*) = 0$
2. $y' L(x^*, \lambda^*) y \geq 0$, $\forall y \in T(x^*)$

- $T(x^*)$: espacio tangente a S (superficie de las restricciones) en x^*
- $L(x^*, \lambda^*)$ semidefinida positiva en $T(x^*)$

Condición *suficiente* de segundo orden

- $L(x^*, \lambda^*)$ definida positiva entonces $L(x^*, \lambda^*)$ es definida positiva en $T(x^*)$
- $y'L(x^*, \lambda^*)y > 0$, $\forall y \in T(x^*)$
- x^* es un mínimo local estricto de f

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 1

$$\min \ 4x_1 + x_2^2$$
$$\text{s.a. } x_1^2 + x_2^2 = 9$$

- $\nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$, $H_1(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$, $H(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 1

Espacio tangente a S en x:

$$\begin{aligned} T(x) &= \{y : Dh(x)y = 0\} \\ &= \left\{y : \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0\right\} \\ &= \{y : 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2 = 0\} \end{aligned}$$

Escogemos $x_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_B = \frac{2}{3}$, cuyo espacio tangente asociado es

$$T(x_B) = \{y : -6y_1 = 0\} = \left\{ y = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 1

Calculamos la Hesiana del lagrangiano en x_B:

$$\begin{aligned} L(x_B, \lambda_B) &= H(x_B) + \lambda_B H_1(x_B) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 10/3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$L(x_B) \succ 0 \Rightarrow L(x_B)$ definida positiva en $T(x_B) \Rightarrow x_B$ cumple CNSO y CSSO (es mínimo local)

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 1

Ahora con $x_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_A = -\frac{2}{3}$, cuyo espacio tangente asociado es

$$T(x_A) = \{y : 6y_1 = 0\} = \left\{ y = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Calculamos la Hesiana del lagrangiano en x_A:

$$\begin{aligned} L(x_A, \lambda_A) &= H(x_A) + \lambda_A H_1(x_A) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 1

$L(x_A, \lambda_A)$ no es definida positiva. Calculamos $y' L(x_A, \lambda_1^A) y$ para $y \in T(x_A)$

$$\begin{aligned} y' L(x_A, \lambda_1^A) y &= \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{3} \alpha^2 \end{aligned}$$

- $y' L(x_A, \lambda_1^A) y = \frac{2}{3}\alpha^2 \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x_A$ cumple CNSO
- $y' L(x_A, \lambda_1^A) y = \frac{2}{3}\alpha^2 > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \Rightarrow x_A$ cumple CSSO (es mínimo local)

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 2

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_3 + 2x_2^2 \\ \text{s.a. } & x_1 + 2x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_3 = 6 \end{aligned}$$

- $h_1(x) = x_1 + 2x_2 - 3 = 0$, $\nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $H_1(x) = 0$
- $h_2(x) = 4x_1 + 3x_3 - 6 = 0$, $\nabla h_2(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $H_2(x) = 0$
- $x^* = \begin{bmatrix} 4 \\ -1/2 \\ -10/3 \end{bmatrix}$, $\lambda^* = -\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ cumple CNPO

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 2

$$H(x) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espacio tangente a S en x (y en x^*):

$$\begin{aligned} T(x) &= \{y : Dh(x)y = 0\} \\ &= \left\{ y : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -4/3 \end{bmatrix} \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 2

Calculamos la Hesiana del lagrangiano en x (y en x^*):

$$\begin{aligned} L(x) &= H(x) + \lambda_1 H_1(x) + \lambda_2 H_2(x) \\ &= H(x) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Evaluamos $y' L(x^*) y$, para $y \in T(x^*)$:

$$y' L(x^*) y = \alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -4/3 \end{bmatrix} = \alpha^2$$

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 2

- $y'L(x^*)y = \alpha^2 \geq 0$, para todo $y \in T(x^*)$
- $\Rightarrow x^*$ cumple con la CNSO
- $y'L(x^*)y = \alpha^2 > 0$, para todo $y \in T(x^*)$, $y \neq 0$
- $\Rightarrow x^*$ cumple con la CSSO (mínimo local estricto de f s.a. $h(x) = 0$)

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 3

$$\min \ 3x_1$$
$$\text{s.a. } x_1^2 + x_2^2 = 9$$

- Todo punto factible es regular
- $\nabla f(x) + \lambda \nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$
- $H(x) = 0, \ H_1(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 3

Posibles soluciones que cumplen la CNPO:

- $x_2 = 0$, $x_1 = \pm 3$, $\lambda = \pm 1/2$
- $x_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_A = -1/2$
- $L(x_A, \lambda_A) = H(x_A) + \lambda_A H_1(x_A) = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

El espacio tangente a S en x_A es

$$T(x_A) = \{y : \nabla h_1(x_A)' y = 0\} = \left\{ y = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 3

Evaluamos las condiciones de segundo orden:

$$y'L(x_A, \lambda_A)y = -\alpha^2$$

- $-\alpha^2 \leq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\Rightarrow x_A$ no cumple CNSO ni CSSO

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 3

Otra solución que cumple la CNPO:

- $x_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_B = 1/2$
- $L(x_B, \lambda_B) = H(x_B) + \lambda_B H_1(x_B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

El espacio tangente a S en x_B es

$$T(x_B) = \{y : \nabla h_1(x_B)' y = 0\} = \left\{ y = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 3

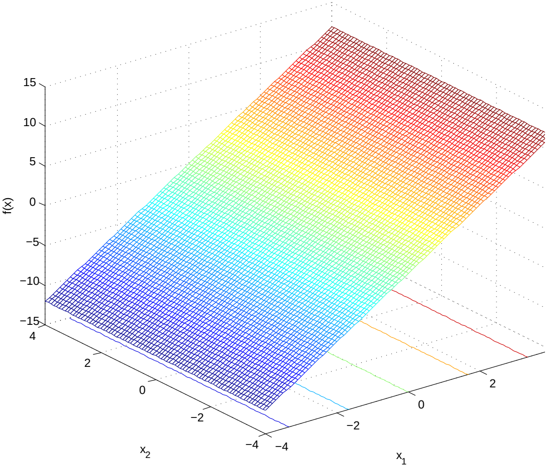
Evaluamos las condiciones de segundo orden:

$$y' L(x_B, \lambda_B) y = \alpha^2$$

- $\alpha^2 \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: cumple CNSO
- $\alpha^2 > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$: cumple CSSO
- $\Rightarrow x_B$ mínimo local

Condiciones de segundo orden - Ejemplo 3

$\min\ 3x_1$ s.a. $x_1^2 + x_2^2 = 9$



Condiciones de segundo orden - Ejemplo 3

$\min\ 3x_1$ s.a. $x_1^2 + x_2^2 = 9$