Módulo 7: Algoritmos de optimización con Restricciones

Departamento MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario

Segundo Semestre de 2021

Agenda

Introducción

$$\min \ f(x)$$
$$\text{s.a. } g_j(x) \leq 0, \ \forall j \in J$$

Con $f, g, h \in C^1(\Omega)$. Consideraremos Ω al conjunto de puntos factibles.

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0 \ \forall j \in J\}$$

Dos tipos de funciones de penalización:

- Función de penalidad exterior
- Función de penalidad interior

Introducción

El problema NL se reescribe como un problema no restringido:

$$\min\ f(x) + \sum_{j\in J} \mu_j g_j(x)$$
$$\text{s.a. } x \in \Omega$$

Se introduce la función de penalidad

$$\min\ f(x) + \rho_k P(x), \quad x \in S$$

Donde:

- $S = \{g_j(x) \leq 0\ \forall j \in J\}$
- ρ_k es una sucesión

Introducción

Minimizar f sobre R^n, con una penalización a los puntos que no están en S. $P : \mathbb{R}^n \to R$

- P es continua
- $P(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $P(x) \to 0$, cuando x se acerca al limite de S (Penalidad)
- $P(x) \to \infty$, cuando x se acerca al limite de S (Barrera)

Ejemplo

$$\min x$$

$$\text{s.a. } x \geq 1$$

- $q(\rho_k, x) = \{x + \rho_k \max \{0, 1 - x\}\}$
- No hay penalización si $x \in \Omega$

Introducción

Ejemplo

$$\min\ (x-7)^2$$
$$\text{s.a. } x \geq 10$$

- $q(\rho_k, x) = \{(x-7)^2 + \rho_k \max\{0, 10-x\}^2\}$

Método de penalidad

El problema NL se reescribe como un problema no restringido:

$$\min\ f(x) + \sum_{j \in J} \rho_{k,j} \ \max\ \{0, g_j(x)\}^p\}$$

Donde:

- A medida que ρ_k crece, se genera una secuencia de valores mínimos que recae en la región no factible
- $q(\rho_k, x_k) \leq q(\rho_{k+1}, x_{k+1})$
- $P(x_k) \geq P(x_{k+1})$
- $f(x_k) \leq f(x_{k+1})$
- $\rho_k \to \infty$ el limite de la secuencia es la solución al problema

Método de penalidad

Funciones de penalización:
Si $\Omega = \{x : h_j(x) = 0; j \in J\}$ pueden considerarse las funciones:

- $P(x) = \sum_{j\in J} h_j^2(x)$
- $P(x) = \sum_{j\in J} \mid h_j(x) \mid$

Si $\Omega = \{x : g_i(x) \leq 0; i \in I\}$ pueden considerarse las funciones:

- $P(x) = \sum_{i\in I} (\text{máx}\{0, g_j(x)\})^2$

Algoritmo - método de penalidad

Dado ρ_1

Paso 1: Encontrar x_k^*

$$\min\ f(x_k^*) + \rho_k \sum_{j \in J} \max\ \{0, g_j(x_k^*)\}^p\}$$

Paso 2:

if x_k^* satisface las restricciones **then**

Stop.

else

$\rho_{k+1} = \alpha \rho_k$, con $\alpha > 1$

Repetir

end if

k=k+1

Método de penalidad

Ejemplo

$$\min\ x_1^2 + 2x_2^2$$
$$\text{s.a. } x_1 + x_2 - 1 \geq 0$$

Ejemplo 2

$$\min\ x_1 + x_2$$
$$\text{s.a. } x_1^2 - x_2 \geq 2$$

Método de barrera

Los métodos de barrera se aplican exclusivamente a problemas con restricciones de desigualdad.

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{s.a. } g_i(x) \leq 0,\ \forall i \in I \end{aligned}$$

El problema NL se reescribe como un problema no restringido:

$$\min\ f(x) + \sum_{j \in J} C_j B_j$$

Donde:

- Interior del conjunto factible $int(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x)\} \neq \emptyset$

Método de barrera

Se reemplazo por una función de la forma $f(x) + \mu B(x)$, donde $B(x)$ definida para $x \in int(\Omega)$,

- B es continua
- $B(x) \geq 0 \; \forall x \in int(\Omega)$
- Si $\{x_k\} \subset \Omega$, $g_j(x) < 0$, para algún $j \in \{1, ..., p\}$ $\lim_{k\to\infty} g_j(x_k) = 0$ entonce $\lim_{k\to\infty} B(x_k) = \infty$
- A medida que C_k decrece, se genera una secuencia de valores mínimos que recae en la región factible
- $C_k \to 0$ el limite de la secuencia es la solución al problema

Algunas funciones de barrera:

- $B(x) = -\sum_{j\in J} \frac{1}{g_j(x)}$ (Función de barrera inversa)
- $B(x) = -\sum_{j\in J} ln(-g_j(x))$ (Función de barrera logarítmica)

Método de barrera

Ejemplo 1

$$\min\ 1 - x$$
$$\text{s.a. } x \leq 1$$

Ejemplo 2

$$\min\ x_1^2 + 2x_2^2$$
$$\text{s.a. } x_1 + x_2 - 1 \geq 0$$

Convergencia

Lema (Lema de penalización)

Propiedades básicas de los métodos de penalización.

- $P(x_k) \geq P(x_{k+1})$
- $f(x_k) \leq f(x_{k+1})$
- *Función extendida* $q(x_k) \leq q(x_{k+1})$
- $f(x^*) \geq q(\mu_k, x_k) \geq f(x_k)$

Convergencia

Theorem

Sea $\{x_k\}$ una secuencia generada por el método de penalización. Entonces, cualquier punto en el limite de la secuencia es una solución al problema original.

La propiedades y teorema para el método de barrera son virtualmente las mismas que las del método de penalización.

Multiplicadores de Lagrange

Lemma

El método de penalidad se aplica al problema

$$\begin{aligned} &min\ f(x) \\ &s.a.\ g_i(x) \leq 0,\ \forall i \in I \end{aligned}$$

usando una función de penalidad $P(x) = \gamma(g^+(x))$ *con* $\gamma \in C^1$ *y* $y_i = 0$, $\nabla\gamma_i = 0$. *La secuencia* $\{x_k\}$ *generada por el método, define* $\lambda_k = C\nabla\gamma(g^+(x_k))$. *Si* $x_k \to x^*$, *y esta solución es un punto regular, entonces* $\lambda_k = \lambda^*$, *el multiplicador de Lagrange asociado al problema.*

Restricciones de desigualdad: $\lambda_k = 2C(max\{0, g_i(x_k)\})$
Restricciones de igualdad: $\lambda_k = 2Ch_i(x_k)$

Multiplicadores de lagrange

Ejemplo

$$\min\ x_1^2 + 2x_2^2$$
$$\text{s.a. } x_1 + x_2 - 1 \geq 0$$