Apuntes

$$\min \; c'x$$
$$\text{s.a} \quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

m restricciones (filas)
n variables (columnas)

$A \quad m\begin{bmatrix} & n & \end{bmatrix}_{m \times n}$

- ✓ $Ax \leq b$: adicionar variables de holgura.
- ✓ $Ax \geq b$: adicionar variables de exceso.

- Si $Ax \leq b$

  $Ax + V_h = b$

- Si $Ax \geq b$

  $Ax - V_e = b$

Simplex

Condición de optimalidad: Si $\bar{c}_j \geq 0, \; \forall j \in I_N$.

$\bar{b} = B^{-1} b = x_B \qquad Ax = B x_B + N x_N = b.$

$z_0 = c'_B \bar{b} = c'_B x_B$

f.o: $z = z_0 + \sum_{j \in I_N} \bar{c}_j x_j$

Derivada direccional : $\dfrac{\partial z}{\partial x_j} = \bar{c}_j, \; j \in I_N$

$\bar{c}'_N = c'_N - c'_B \cdot B^{-1} N$

$y_k = B^{-1} a_k. \qquad y_k \leq 0$ STOP: el problema no tiene óptimo finito.

razón mínima $\dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \; . \; y_{ik} > 0 \right\}$

Fase 1 $\rightarrow$ Índices, sol. básica factible.

Fase 2 $\rightarrow$ Sol óptima.

Var. Artificiales: $Ax + X_a = b. \longrightarrow z_0 = 0.$

Regla de Bland (ciclaje)

var $\longrightarrow$ base : Entre todas las variables no básicas con costo reducido negativo, escoja la de menor índice

base $\longrightarrow$ var : Entre todas las var. básicas candidatas a salir (empatadas en la razón mínima), escoja la de menor índice

Dualidad débil

x_0: sol. factible primal

w_0: sol. factible dual

$c'x_0 \geq w_0'b$

Dualidad fuerte

$w'b = c_B' B^{-1} b = c_B' x_B = c'x = w.$

Teorema. Para una pareja de problemas P y D, una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta.

- ✓ P y D tienen sol. óptimas x^* y w^* tales que $c'x^* = b'w^*$.
- ✓ Un problema no tiene óptimo finito y el otro no es factible.
- ✓ Ambos problemas son no factibles.

Holgura Complementaria.

Un par de sol. factibles x y w para los problemas P y D, respectivamente son óptimas si y sólo si:

a) $(c' - w'A)x = 0$ $\qquad (c_j - w^{*\prime} a_j) x_j^* = 0, \quad j = 1, \dots, n$

b) $w'(Ax - b) = 0.$ $\qquad w_i^*(a^i x^* - b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m$

Si $w_1^* > 0 \Rightarrow a^i x^* = b_i$

Si $a^i x^* > b_i \Rightarrow w_i^* = 0$

Si $x_j^* > 0 \Rightarrow w^{*\prime} a_j = c_j$

Si $w^{*\prime} a_j < c_j \Rightarrow x_j^* = 0$

Parcial 1

1) Cada jugo a 600

Cada 1T = 1000 L

$600 \times 1000 = 60000 \rightarrow 60$ mil.

$$\text{Máx} \quad (60\text{mil} - 4100)X_1 + (60\text{mil} - 1600)X_2 + (600\text{mil} - 1030 + C_m)X_3$$

Cond 1: $3X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 41$

Cond 2: $6X_1 + 4X_2 \geq 5$

Cond 3: $X_1 + X_2 + X_3 \leq 40$

Melon = 4100

Durazno = 1600

Manzana = 1030 + C_m

2) a) Falso, se puede estimar el número el cual sería $\frac{n!}{m!(n-m)!}$

b) Si hay ciclaje por la razón mínima, se está repitiendo el mismo valor de función objetivo.

En este caso $\bar{C} \geq 0$ no es condición necesaria de optimalidad

Aplicamos regla de Bland o regla lexicográfica para escoger qué índice asociado a X debe salir.

En este sentido, escoger la de menor índice para continuar con el Simplex

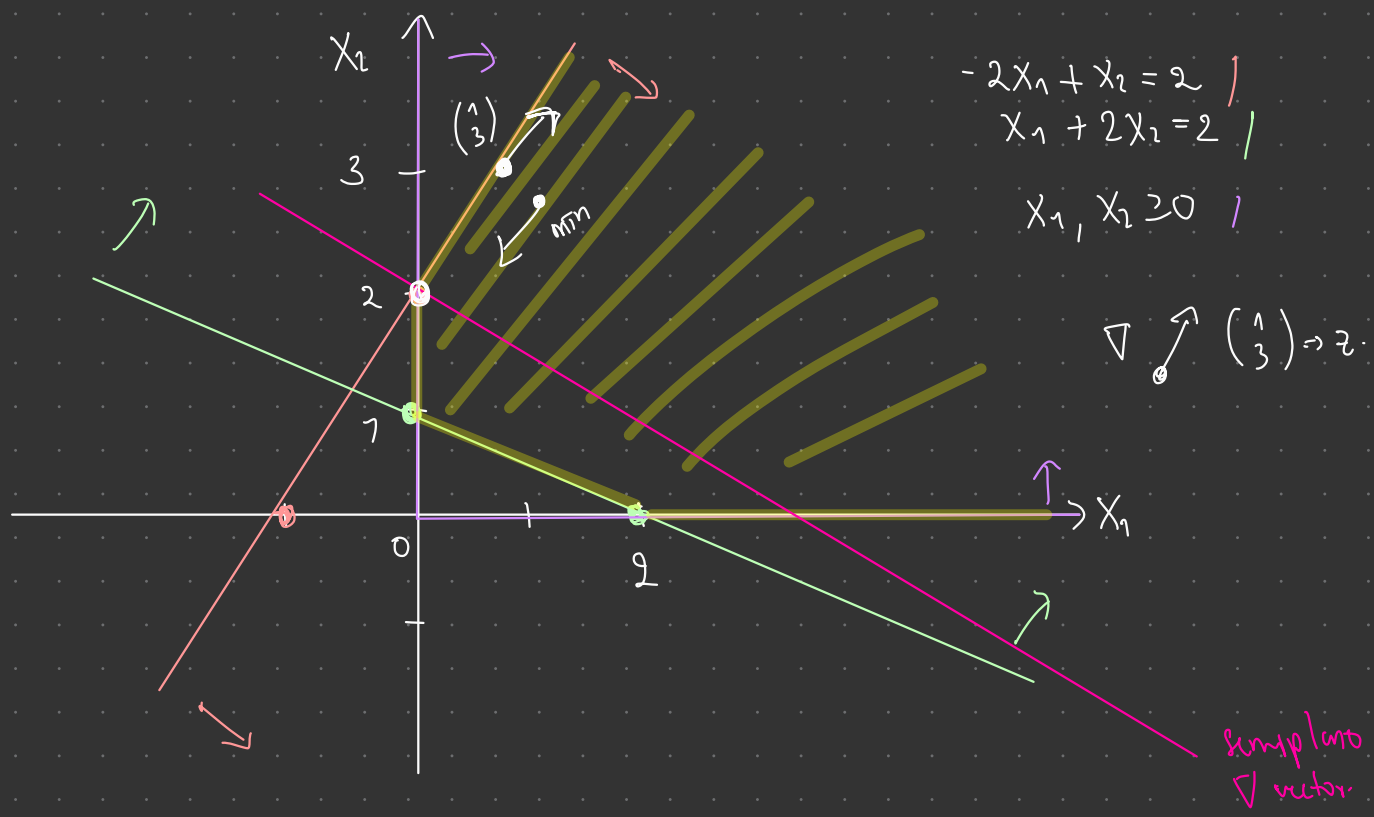
c) Sí cambia porque ahora la restricción es más o menos relajada por lo cual la sol. factible óptima puede ser aun mayor (para maximización) o menor (para minimización) con la nueva restricción.

3)

$$\text{Min } x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad -2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

a)



Sol. básicas factibles (no finito) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \infty$

Sol. óptima (vector) $= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) F.S.

$$\text{Min } x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a.} \quad -2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Fase 1

$$\text{Min} \quad x_5 + x_6$$

$$\text{s.a.} \quad -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Iter 1)

$I_B = \{5, 6\}$

$I_N = \{1, 2, 3, 4\}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad c' = [\underbrace{0\ 0\ 0\ 0}_{C_N}\ \underbrace{1\ 1}_{C_B}]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c'_N = c'_N - c'_B B^{-1} N$$

$$= [0\ 0\ 0\ 0] - [1\ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c'_N = [1\ -3\ -1\ -1]$$

x_2 entra a la base.

$$y_2 = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \min \left\{ \frac{2}{1} , \frac{2}{2} \right\} = 1$$

x_6 sale de la base

Iter 2)

$I_B = \{5, 2\}$ $\qquad$ $C'_B = [1 \ 0]$

$I_N = \{1 \ 3 \ 4 \ 6\}$ $\qquad$ $C'_N = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C'_N = [0 \ 0 \ 0 \ 1] - [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C'_N = \begin{array}{cccc} [2.5 & -1 & 0.5 & 1.5] \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

x_3 entra a la base

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t = \min \left(\frac{1}{1} \right) = 1$$

— sale x_5

Iter 3)

$$I_B = \{2, 3\}$$

$$I_N = \{1, 4, 5, 6\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

no importa c'_N.

$z = 0$.

Fase 2

$$\text{Min } x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a. } -2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

1) $I_B = \{2, 3\}$

$I_N = \{1, 4\}$

$x_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

$c_N' = [-0.5 \quad 1.5]$

Entra x_1 a la base.

$y_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2.5 \end{pmatrix}$ $\quad \epsilon = \min(1)$

$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ $\quad x_2$ sale

2) $I_B = \{1, 3\}$ $\quad B^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$I_N = \{2, 4\}$

$x_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad c_N' = [1 \quad 1]$ STOP.

$z = 2$

4) P: $\min\ 4x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 4x_4$

$$\text{s.a}\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \geq 1$$

$$x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

a) D: $\text{Máx}\ w_1 + 2w_2$

$$\begin{aligned} -2 + w_2 &\leq 4 \\ 4 - 4w_2 &\leq 10 \\ -w_1 + 6w_2 &\leq 17 \\ w_1 + w_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

$$w_1, w_2 \geq 0.$$

b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$c' = [4\ 10\ 17\ 4]$

$w'^* = [1\ 3]$

óptimo. $w^{*\prime} b = [1\ 3]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 7$

$\star\ (c_j - w'^* a_j)\, x_j = 0 \qquad j = 1, \dots, 4$

$j = 1$: $\left(4 - (1\ 3)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) x_1^* = 0$

$(4 - 1)\, x_1^* = 0 \qquad x_1^* = 0$ ✓

$j = 2$: $\left(10 - (1\ 3)\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right) x_2^* = 0$

$(10 - (-8))\, x_2^* = 0 \qquad x_2^* = 0$ ✓

j_3: $\left(17 - (1\ 3)\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}\right) x_3^* = 0$

$(17 - 17)\, x_3^* = 0 \qquad x_3^* = ?$

j_3: $\left(4 - (1\ 3)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) x_4^* = 0$

$x_4^* = ?$

$\star$ $(w_i^* (a^i x^* - b_i) = 0)$

$i = 1$, como $w_1^* \neq 0$

$a^1 x^* = b_1$

$(-2\ \ 4\ \ -1\ \ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\x_3^*\\x_4^*\end{pmatrix} = 1 \qquad -x_3^* + x_4^* = 1 \quad (1)$

$i = 2$, como $w_2^* \neq 0$

$a^2 x^* = b_2$

$(1\ \ -4\ \ 6\ \ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\x_3^*\\x_4^*\end{pmatrix} = 2 \qquad 6x_3^* + x_4^* = 2 \quad (2)$

(1) y (2): $x_4^* = 1 + x_3^*$

$6x_3^* + 1 + x_3^* = 2$

$7x_3^* = 1$

$x_3^* = 1/7 \qquad x_4^* = \frac{8}{7}$

Luego $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/7 \\ 8/7 \end{pmatrix}$

$$c' x^* = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 17 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/7 \\ 8/7 \end{pmatrix} = 7$$

Por lo tanto $w^{*\prime} b = c' x^*$ (Dualidad fuerte).