Solucion taller3

Sunday, September 19, 2021 6:39 PM

Integrantes: David Alvira, Dana Acosta, Juan J. caballero

2. Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

a) Determine la covarianza de X y Y.

Recuerde que $\operatorname{cov}(x,y) = E(x,y) - E(x)E(y)$

por lo que necesitamos primero las funciones de densidad de prob.:

$$f_x(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \frac{3}{2}\cdot\int_0^1 x^2+y^2\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\cdot\left(x^2+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$f_y(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx = \frac{3}{2}\cdot\int_0^1 x^2+y^2\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x^3}{3} + y^2x\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}+y^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3y^2}{2}$$

Ahora obtendremos los valores esperados de las marginales:

$$E(x) = \int^1 x\cdot f(x)\,d_x = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x\,dx$$

$$E(x) = \int_0 x \cdot f(x)\,dx = \int_0 \ldots$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$E(y) = \int_0^1 y \cdot f(y)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}y + \frac{3y^3}{2}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{8}y^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Así $E(x)\cdot E(y) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$

Ahora sólo falta $E(x,y)$ que es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)\,xy\,dx\,dy = \frac{3}{2}\cdot\int_0^1\int_0^1 x^3y + xy^3\,dx\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\int_0^1 \frac{x^4}{4}\cdot y + \frac{x^2}{2}\cdot y^3\Big|_0^1 dy = \frac{3}{2}\cdot\int_0^1 \frac{y}{4} + \frac{y^3}{2}\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{y^2}{8} + \frac{y^4}{8}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{3}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{8} = \frac{3}{8} = E(x,y)$$

$$\therefore\ \boxed{Cov(x,y)} = E(x,y) - E(x)\cdot E(y)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{25}{64} = \boxed{-\frac{1}{64}}$$

b) Determine el coeficiente de correlación de X y Y.

b) Determine el coeficiente de correlación de X y Y.

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)\cdot \operatorname{var}(y)}}$$

Vea que tenemos $\operatorname{cov}(x,y)$
Solo faltan las varianzas, las obtendremos

$$\operatorname{Var}(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

falta $E(x^2)$

$$\int_0^1 x^2\cdot\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{3x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \left(\frac{3}{10}x^5 + \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{3}{10}+\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{15}$$

$$\operatorname{Var}(y) = E(y^2) - E(y)^2$$

$$E(y^2) = \int_0^1 y^2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3y^2}{2}\right)dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2}+\frac{3y^4}{2}\,dy$$

$$= \left(\frac{3}{10}+\frac{1}{6}\right)\Big|_0^1$$

$$= 7/15$$

$$\therefore \operatorname{Var}(x) = \left(\frac{7}{15}-\left(\frac{5}{8}\right)^2\right) = \operatorname{var}(y)$$

$$= 73/960$$

finalmente

$$\rho = \frac{\overset{-\frac{1}{64}}{\operatorname{Cov}(x,y)}}{\sqrt{(73/960)^2}} = -\frac{15}{73} = -0{,}205$$