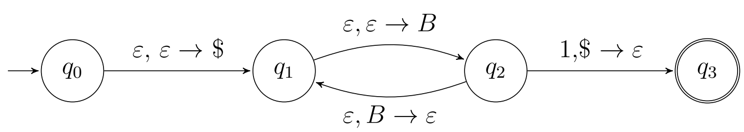
Teoría de la computación Periodo: 2021-2
Taller: Autómatas de pila Profesor: M. Artigiani

Ejercicio 1: Usando el procedimiento descrito en clase, encuentre el `PDA` equivalente a la siguiente `CFG`:

$$G = \{S \to 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon\}$$

Ejercicio 2: Escriba las reglas de la forma $A_{pq} \to aA_{rs}b$ que corresponden a la `CFG` que genera el lenguaje del siguiente `PDA`:



Ejercicio 3: Complete las partes faltantes de la demostración del siguiente teorema:

Teorema 1. *Sea $L = \{0^i 1^j 2^k : i \le j \le k\}$. No existe una `CFG` G tal que $L = L(G)$.*

Demostración. Supongamos por absurdo que existe una gramática independiente del contexto G tal que $L = L(G)$. Por el lema de bombeo existe una constante de bombeo p. Sea $s = 0^p 1^p 2^p$. Observe que $s \in L$ y que $|s| \ge p$. Entonces $s = uvxyz$ y se tienen las afirmaciones siguientes:

Afirmación 1. *Ni v ni y pueden contener más de un tipo de símbolo 0, 1 o 2 (p.ej., no pueden ser 01).*

Demostración de la afirmación 1.

Supongamos por absurdo que $v = 01$ (los demás casos son similares). Por la propiedad (i) del lema de bombeo se tiene que

($\to\leftarrow$). Por lo tanto ni v ni y contienen más de un tipo de símbolo.

$\square$

Afirmación 2. *Como y y v sólo tienen un tipo de símbolo, entonces se tienen tres casos. El primero es que el símbolo que y y v no contienen sea 0. En este caso se sigue que $0^p 1^r 2^s \in L(G)$ donde $r < p$ o $s < p$.*

Demostración de la afirmación 2.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $|v| > 0$. Entonces, por la propiedad (i) del lema de bombeo se tiene que

$\square$

Afirmación 3. *Si el símbolo que y y v no contienen es* 1*, entonces* $0^r 1^p 2^s \in L(G)$ *donde o bien* $r > p$*, o bien* $s < p$*.*

Demostración de la afirmación 3.

Por la propiedad (iii) del lema de bombeo se sigue que v e y constan del mismo signo (o bien 0 o bien 2). Supongamos sin pérdida de generalidad que $|v| > 0$. Entonces, por la propiedad (i) del lema de bombeo se tiene que

□

Afirmación 4. *Si el símbolo que y y v no contienen es* 2*, entonces* $a^r b^s c^p \in L(G)$ *donde o bien* $r > p$*, o bien* $s > p$*.*

Demostración de la afirmación 4.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $|v| > 0$. Entonces, por la propiedad (i) del lema de bombeo se tiene que

□

Por la afirmación 1 se sigue que y sólo puede cumplir alguno de los casos considerados por las afirmaciones 2, 3 y 4, y en todos ellos se sigue que existe $w \in L(G)$ tal que $w \notin L$ ($\rightarrow\leftarrow$). Por lo tanto, no existe una gramática independiente del contexto G tal que $L = L(G)$.

□

Ejercicio 4: Demuestre que el siguiente lenguaje no es independiente del contexto. Suponga que $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$L = \{ww \colon w \in \Sigma^*\}$$

Ejercicio 5: Demuestre que el siguiente lenguaje no es independiente del contexto. Suponga que $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ y que $N_a(w)$ es el número de ocurrencias del símbolo a en la cadena w:

$$L = \{w \in \Sigma^* \colon N_0(w) = N_1(w) = N_2(w)\}$$