Taller 3

Wednesday, September 15, 2021 8:16 PM

1

	Y		
X	1	3	5
0	1/6	0	1/6
2	0	1/6	0
4	1/6	1/6	1/6

a) det. la cov. de x y Y

$$cov(x,y) = E(x,y) - E(x)E(y)$$

Note que fata conocer $E(x)$ y $E(Y)$ y para ello se necesita f_x, f_y

	Y		
X	1	3	5
0	1/6	0	1/6
2	0	1/6	0
4	1/6	1/6	1/6

$$f_x(x) = \sum_{y_i} f_{xy}(x, y_i) = \boxed{f_x} = \begin{cases} 1/3, & x = 0 \\ 1/6, & x = 2 \\ 1/2, & x = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{f_y(y)} = \begin{cases} 1/3, & y = 1 \\ 1/3, & y = 3 \\ 1/3, & y = 5 \end{cases}$$

Ahora $\boxed{E(x)} = 0 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 4 = \frac{7}{3}$

$\boxed{E(Y)} = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} = 3$

Así $E(x)\cdot E(y) = \frac{7}{3} \times 3 = 7$

Ahora falta $E(x,y)$

que se obtiene así:

	Y		
X	1	3	5
0	1/6	0	1/6
2	0	1/6	0
4	1/6	1/6	1/6

$$\sum_x \sum_y x \cdot y \cdot f(x,y) = (0) + \left(6 \cdot \frac{1}{6}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{1}{6} + 20 \cdot \frac{1}{6}\right)$$

$$= 7$$

finalmente $cov(x,y)$ es:

$$E(x,Y) - E(x)E(Y)$$

$$= 7 - 7 = 0$$

b) Ahora que tenemos $cov(x,y)$ podemos buscar

$$\rho(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x) \cdot var(Y)}}$$

$$\rho(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x)\cdot var(y)}}$$

⊙ Vea que nos faltan las varianzas, luego para obtenerlas calcularemos el 2do momento:

- Sea $\boxed{f_x} = \begin{cases} 1/3, & x = 0 \\ 1/6, & x = 2 \\ 1/2, & x = 4 \end{cases}$ $\quad \boxed{f_y(y)} = \begin{cases} 1/3, & y = 1 \\ 1/3, & y = 3 \\ 1/3, & y = 5 \end{cases}$

$$E(x^2) = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot(2)^2 + \frac{1}{2}\cdot(4)^2$$
$$= 0 + \frac{4}{6} + \frac{16}{2} = \frac{26}{3}$$

$$E(y^2) = \frac{1}{3}\cdot 1^2 + \frac{1}{3}\cdot 3^2 + \frac{1}{3}\cdot 5^2$$
$$= \frac{35}{3}$$

$$var(x) = E(x^2) - E(x)^2$$
$$= \frac{26}{3} - \left(\frac{7}{3}^2\right)$$
$$= 29/9$$

$$var(y) = E(y^2) - E(y)^2$$
$$= \frac{35}{3} - (3^2)$$
$$= 8/3$$

ya tenemos todo para evaluar:

$$\rho(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x)\cdot var(y)}}$$
$$= \frac{0}{\sqrt{\frac{29}{9}\cdot\frac{8}{3}}} = 0$$

---

2. Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

a) Determine la covarianza de X y Y.

Recuerde que $cov(x,y) = E(x,y) - E(x)E(y)$

por lo que necesitamos primero las funciones de densidad de prop.:

$$f_x(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \frac{3}{2}\cdot\int_0^1 x^2+y^2\,dy$$

$$f_x(x) = \int_0 f(x,y)\,dy = \frac{3}{2}\int_0$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\cdot\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$f_y(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx = \frac{3}{2}\cdot\int_0^1 x^2 + y^2\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + y^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3y^2}{2}$$

Ahora obtendremos los valores esperados de las marginales:

$$E(x) = \int_0^1 x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$E(y) = \int_0^1 y \cdot f(y)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}y + \frac{3y^3}{2}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{8}y^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Así $E(x)\cdot E(y) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$

Ahora sólo falta $E(x,y)$ que es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)\,xy\,dx\,dy = \frac{3}{2}\cdot\int_0^1\int_0^1 x^3y+xy^3\,dx\,dy$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\int_0^1 \frac{x^4}{4}\cdot y+\frac{x^2}{2}\cdot y^3\Big|_0^1 dy = \frac{3}{2}\cdot\int_0^1 \frac{y}{4}+\frac{y^3}{2}\,dy$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{y^2}{8}+\frac{y^4}{8}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$$

$$=\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{8} = \frac{3}{8} = E(x,y)$$

$$\therefore\ cov(x,y) = E(x,y) - E(x)\cdot E(y)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{25}{64} = -\frac{1}{64}$$

b) Determine el coeficiente de correlación de X y Y.

$$\rho = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x)\cdot var(y)}}$$

Vea que tenemos $cov(x,y)$
solo faltan las varianzas, las obtendremos

$$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2 \qquad Var(y)=E(y^2)-E(y)^2$$

falta $E(x^2)$

$$\int_0^1 x^2\cdot\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^1 \frac{3x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$E(y^2)=\int_0^1 y^2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3y^2}{2}\right)dy$$

$$=\int_0^1 \frac{y^2}{2}+\frac{3y^4}{2}\,dy$$

$$=\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{6}\right)\Big|_0^1$$

$$= \int_0 \frac{}{2} + \frac{}{2}$$

$$= \left(\frac{3}{10}x^5 + \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{15}$$

$$= \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{6}\right)\Big|_0$$

$$= 7/15$$

$$\therefore \operatorname{var}(x) = \left(\frac{7}{15} - \left(\frac{5}{8}\right)^2\right) = \operatorname{var}(y)$$

$$= 73/960$$

finalmente $\rho = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{(73/960)^2}} = -\frac{15}{73} = -0{,}205$ $\quad -\frac{1}{64}$

3. Suponga que X y Y son variables aleatorias con la misma varianza. Demuestre que las variables $X - Y$ y $X + Y$ no están correlacionadas.

$\odot$ $\operatorname{var}(x) = \operatorname{var}(y)$

Dado lo anterior, recuerde que para que 2 vars No estén correlacionadas se requiere

$\rho = 0 \longrightarrow$ Necesito que el numerador sea 0

Con $Z = X - Y$, $W = x + y$

$$\rho(z,w) = \frac{\operatorname{cov}(z,w)}{\sqrt{\operatorname{var}(z)\cdot\operatorname{var}(w)}}$$

Por propiedad $\operatorname{cov}(z, x+y) = \operatorname{cov}(z,y) + \operatorname{cov}(z,x)$

y nuevamente:

$\odot$ $\operatorname{cov}(z,y) = \operatorname{cov}(y,z) = \operatorname{cov}(y, x-y) = \operatorname{cov}(y,x) + \operatorname{cov}(y,-y)$

$\odot$ $\operatorname{cov}(z,x) = \operatorname{cov}(x,z) = \operatorname{cov}(x, x-y) = \operatorname{cov}(x,x) + \operatorname{cov}(x,-y)$

luego $\rho(z,w) = \frac{\operatorname{cov}(y,x) + \operatorname{cov}(x,-y) + \operatorname{cov}(y,-y) + \operatorname{cov}(x,x)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)\cdot\operatorname{var}(y)}}$

luego $\rho(Z,W) = \dfrac{\mathrm{Cov}(Y,X) + \cdots}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\cdot \mathrm{var}(Y)}}$

ES Necesario Analizar Ahora la fórmula original de $\mathrm{cov}(X,Y)$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X - E(X))\cdot(Y - E(Y))]$$

Si y es negativo $\Rightarrow -Y - E(-Y)$

$\Rightarrow -Y + E(Y)$

$\Rightarrow$ equivale a decir que hubo un cambio de signo, es decir se mult. por -1

$$-1\cdot(Y - E(Y)) = -Y + E(Y)$$

$$\therefore \quad \mathrm{cov}(X,-Y) = -\mathrm{cov}(X,Y)$$

Así surge en el numerador de ρ:

$$\cancel{\mathrm{Cov}(Y,X) + \mathrm{cov}(X,-Y)} + \mathrm{Cov}(Y,-Y) + \mathrm{Cov}(X,X)$$

Recordemos también que $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y)$ así con el argumento anterior

$$\cancel{\mathrm{Cov}(Y,X) + \mathrm{cov}(X,-Y)} + \cancel{\mathrm{Cov}(Y,-Y) + \mathrm{Cov}(X,X)} = 0 \qquad \blacksquare$$

---

4. Considere cuatro variables aleatorias W, X, Y, Z donde

$$E[X] = E[Y] = E[Z] = E[W] = 0,$$

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(Z) = \mathrm{var}(W) = 1.$$

Además, estas variables aleatorias son no-correlacionadas por parejas. Determine los coeficientes de correlación $\rho_{R,S}$ y $\rho_{R,T}$, donde $R = W + X$, $S = X + Y$, y $T = Y + Z$.

A) $\rho(R,S) = \dfrac{\mathrm{Cov}(R,S)}{}$

A $\rho_{R,S}(R,S) = \dfrac{cov(R,S)}{\sqrt{var(R) \cdot var(S)}}$

por un caso análogo al del ejercicio anterior

$cov(R,S) = cov(R, x+y)$

$= cov(R,x) + cov(R,y) = cov(w+x, x) + cov(w+x, y)$

$= \underbrace{cov(w,x)}_{0} + \underbrace{cov(x,x)}_{1} + \underbrace{cov(w,y)}_{?} + \underbrace{cov(x,y)}_{0}$