Formulas P2

Wednesday, September 29, 2021 5:13 PM

(*) Defs. Sobre mínimos:

Def (mínimo local):

→ dado $x^* \in \Omega$, si $\exists\, \varepsilon > 0$ t.q. $f(x) \geq f(x^*)$, $\forall x \in \Omega \setminus \{x^*\} : \|x - x^*\| < \varepsilon$, entonces x^* es un mínimo local.

→ dado $x \in \Omega$, si $\exists \varepsilon > 0$ y $\forall x \in \Gamma$, $\Gamma = \|x - x^*\| < \varepsilon$ se tiene $f(x) \geq f(x^*) \Rightarrow x^*$ es mín. local.

Def (mín. global):

dado $x^* \in \Omega$, si $f(x) \geq f(x^*)$, $\forall x \in \Omega$, entonces x^* es mín global.

Notación:

x^* mínimo global:

- $f(x^*) = \text{mín}_{x \in \Omega}\{f(x)\}$
- $x^* = \text{argmin}_{x \in \Omega}\{f(x)\}$

(*) Defs. direcciones factibles:

Def. (dir. factible)

→ dado $d \in \mathbb{R}^n$ y $d \neq 0$, si para $x \in \Omega$ $\exists\, \alpha_0 > 0$ tal que $(x + \alpha d) \in \Omega$, $\forall \alpha \in [0, \alpha_0]$, $\Rightarrow d$ es una dirección factible.

Def. (derivada direccional)

Def. (derivada direccional)

→ Dada una dirección factible d en $x \in \Omega$ la derivada direccional de $f(x)$ en dicha dirección es:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta d} = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(x+\alpha d) - f(x)}{\alpha}$$

$$= d' \cdot \nabla f(x)$$

(*) Condiciones Necesarias 1 orden y 2do orden

→ Cond. Necesarias 1 ord.

(caso restricto)

- Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\overbrace{f \in C^1}^{\text{tiene 1ra derivada}}$.

Si x^* es un mínimo local de f en Ω

$\Rightarrow \forall d$ factible en x^*:

$$d' \nabla f(x^*) \geq 0$$

(caso irrestricto)

- Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\overbrace{f \in C^1}^{\text{tiene 1ra derivada}}$.

Si x^* es un mínimo local de f en Ω y es un punto interior

$$\Rightarrow \quad \nabla f(x^*) = 0$$

→ Cond. Necesaria 2do ord.

(caso restricto)

tiene 2da derivada.

(Caso restricto)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\overbrace{f \in C^2}^{\text{tiene 2da derivada.}}$. Si x^* es un mínimo local de f en Ω, y d una dir. factible en x^* t.q. $d' \nabla f(x^*) = 0$, entonces:

$$d' H(x^*) d \geq 0$$

(Caso irrestricto)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Si x^* es un mínimo local de f en Ω y x^* es un punto interior

$\Rightarrow \nabla f(x^*) = 0$ y $H(x^*)$ es $\underbrace{\text{Semi def. positiva}}$

- $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x' A x \geq 0$
- todos los eigenval. son no negativos.

Matriz def. positiva

- Det. de los menores principales es mayor que cero
- todos los eigenvalues son positivos

→ Condición suficiente de 2do orden

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$ y x^* un punto interior de Ω. Si:

1. $\nabla f(x^*) = 0$
2. $H(x^*) > 0$

entonces x^* es un mínimo local estricto en f en Ω.

(*) Conjuntos convexos

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \Omega$$

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \Omega$$

$\forall x_1, x_2 \in \Omega$ y $\lambda \in (0,1)$

---

④ Funciones convexas

Def (función convexa)

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ es una función convexa si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(\hat{x})$$

→ la función entre x y $\hat{x}$ está siempre por debajo de su interpolación.

si es $<$ y no $\leq$ es estrictamente convexa.

- Vea que si f es convexa, entonces f es continua en el interior.
- Si $f \in C^2$, f es convexa estricta sii H es semidef. positiva
- todo mínimo local de f en Ω (convexo) es mín. global.

Def (función cóncava)

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ es cóncava si $f = -g$ es convexa.

- Si $f \in C^2$, f es cóncava estricta sii H es semidef. Negativa

⊛ funciones cuasi convexas :

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ es cuasi convexa si:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) \leq \max\{f(x), f(\hat{x})\}$$

$(\forall x, \hat{x}) \in \Omega, \lambda \in (0,1)$

los valores de la función desde x hasta $\hat{x}$ están por debajo de la función evaluada en uno de los extremos

• (Teoremitas)

→ Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estructa cuasi convexa en $[a,b]$ y sean $\lambda, \mu \in [a,b]$, con $\lambda < \mu$.

entonces:

- Si $f(\mu) < f(\lambda) \Rightarrow f(\mu) \leq f(z), \forall z \in [a, \lambda)$
- si $f(\lambda) < f(\mu) \Rightarrow f(\lambda) \leq f(z), \forall z \in (\mu, b]$