



PRIMER PARCIAL  
25 de agosto de 2021

**Indicaciones generales**

- Este es un examen **individual** con una duración de **120 minutos: de 10:00 a 12:00**.
- Sólo se permite el uso de calculadoras como medio electrónico. Los celulares deben estar apagados durante todo el examen.
- Las cámaras deben estar activas durante todo el examen.
- Puede usar una única hoja con apuntes. El uso de libros u otro recurso “analógico” diferente no está permitido.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva a la anulación del examen.
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- Al finalizar, suba a eaulas un **único** archivo .pdf con su solución. En caso de problemas con la plataforma envíe su archivo a [juanca.yepes@urosario.edu.co](mailto:juanca.yepes@urosario.edu.co).
- ¡Suerte y ánimo!

1. (25 pts) Se selecciona un punto al azar (de acuerdo con una ley uniforme) dentro de un rectángulo con vértices en los puntos  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(3,0)$ ,  $(3,1)$ .

- Determine la función de densidad conjunta de  $X$  e  $Y$
- Determine la función de densidad marginal de  $X$ .
- Determine la función de densidad marginal de  $Y$ .
- Determine  $f_{X|Y}(x|y)$
- Determine  $\mathbb{E}(X|Y = y)$

2. (25 pts) Sean  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  variables aleatorias. Muestre que:

$$p_{X,Y,Z}(x, y, z) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x)p_{Z|X,Y}(z|x, y)$$

3. (25 pts) En una fábrica se producen componentes electrónicos muy delicados cuya probabilidad de fallar cada vez que se utiliza es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{d.l.c} \end{cases}$$

Un componente producido en esta fábrica se selecciona y se utiliza repetidamente, asumiendo que las pruebas son sucesivas e independientes.

- Determine la probabilidad de que el componente falle la primera vez que se utiliza.
  - Dado que al utilizar el componente éste no falló, calcule la PDF condicional de  $X$ .
4. (25 pts) Una moneda justa es lanzada repetidamente hasta que dos caras o dos sellos caigan seguidos.



- Encuentre la función de masa de probabilidad del número de lanzamientos hasta conseguir las dos caras o los dos sellos consecutivos.
- Encuentre el valor esperado y la varianza del número de lanzamientos hasta conseguir las dos caras o los dos sellos consecutivos.

Pista: Tenga en cuenta que después de cada resultado, sea cara o sea sello, el siguiente lanzamiento tiene que ser igual al obtenido y eso se da con determinada probabilidad. Defina claramente los valores que puede tomar la variable aleatoria y con qué probabilidad toma cada valor.