

**PRIMER PARCIAL**  
26 de febrero de 2021**Indicaciones generales**

- Este es un examen **individual** con una duración de **120 minutos: de 7:00 a 9:00**.
- Puede tener **una** hoja manuscrita de resumen con fórmulas. Esta hoja debe estar marcada con el nombre del estudiante y entregarse con el parcial.
- No se permite el uso de libros o apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar apagados durante todo el examen.
- La cámara de su computador debe estar encendida todo el tiempo durante la duración del examen.
- No se permite el uso de ningún tipo de dispositivo para buscar soluciones a los puntos del parcial ni para comunicarse con otras personas.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen.
- Las respuestas deben estar totalmente **justificadas**.

1. [20 ptos.] En la elaboración de un producto  $P$  se requiere de una sustancia  $S$ . La cantidad de  $P$  que se obtiene en el proceso de transformación es menor o igual que el doble de la cantidad de sustancia  $S$  utilizada. Por otro lado, la diferencia entre las cantidades de producto  $P$  obtenido y de sustancia  $S$  utilizada no supera los 2 gramos, mientras que la suma no sobrepasa los 6 gramos. Además se utiliza por lo menos 1 gramo de  $S$  y se elabora al menos 1 gramo de  $P$ . El precio de la sustancia  $S$  en el mercado es de 40 pesos/gramo, y el precio del producto  $P$  es de 50 pesos/gramo.

Plantee este problema como un programa lineal donde se maximice el beneficio neto (ingresos menos egresos) de la actividad de transformación.

**Solución:** Variables:  $x_P$  cantidad de gramos del producto  $P$  elaborado, y  $x_S$  cantidad de gramos de sustancia  $S$  utilizada.

$$\begin{aligned} \max \quad & 50x_P - 40x_S \\ \text{s.a.} \quad & x_P - 2x_S \leq 0, \\ & x_P - x_S \leq 2, \\ & x_S - x_P \leq 2, \\ & x_P + x_S \leq 6, \\ & x_P, x_S \geq 1 \end{aligned}$$



2. [20 ptos.] Dado el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 2 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Responda las siguientes preguntas breve y claramente. **Justifique** adecuadamente.

- a) [10 ptos.] Escriba este problema en formato estándar. ¿Es posible tener  $x_1$  y  $x_2$  como variables básicas al mismo tiempo (en la misma base)?

**Solución:** Problema en formato estándar,

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

con matriz  $A$  y vector  $b$  dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Las columnas  $[a_1 \ a_2]$  no pueden formar una base debido a que no son linealmente independientes.

- b) [10 ptos.] La solución óptima a este problema es  $x^* = [1 \ 0 \ 0]$  y el valor de la función de la función objetivo en este punto es  $z^* = 1$ . El valor de las variables duales asociadas a las restricciones es  $w' = [0 \ 1/2]$ . Suponga que el lado derecho de la segunda restricción crece en una unidad tal que  $b' = [2 \ 3]$ , ¿En cuánto cambiaría el valor de la función objetivo debido al cambio en  $b$ ?

**Solución:** La solución óptima del problema sería  $z^* = 1 + 1/2 = 3/2$

3. [30 ptos.] Dado el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \min \quad & 10x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 46x_2 - 2x_4 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Utilice el método de las dos fases para encontrar una solución básica factible inicial si existe.

**Solución:** Adicionamos las variables artificiales  $x_5$ ,  $x_6$ , y planteamos el problema para minimizar estas variables:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_5 + x_6 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 46x_2 - 2x_4 + x_5 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

con matriz  $A$ , vector  $b$  y vector  $c'$  dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 46 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad c' = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1].$$

Luego,  $I_B = \{5, 6\}$  y  $I_N = \{1, 2, 3, 4\}$ . La base inicial es  $B = I$ , y  $B^{-1} = I$ . Por lo tanto  $x_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$ . Para determinar los costos reducidos calculamos los vectores  $w' = c'_B B^{-1} = [1 \quad 1]$ , y  $z' = w'N = [3 \quad 47 \quad 4 \quad 0]$ . Los costos reducidos son iguales a  $c'_N - z' = [-3 \quad -47 \quad -4 \quad 0]$ , luego  $x_2$  es candidata a entrar a la base.

Se calculan los costo reducidos con  $y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 46 \end{bmatrix}$ . Luego,  $r = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{12}{46} \right\} = 6/23$ . Entonces  $x_6$  es candidata para salir de la base.

La nueva base es  $B = [a_2, a_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 46 & 0 \end{bmatrix}$ , y  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/46 \\ 1 & -1/46 \end{bmatrix}$ . Por lo tanto  $x_B = \begin{bmatrix} 6/23 \\ 40/23 \end{bmatrix}$ . Para determinar los costos reducidos calculamos los vectores  $w' = c'_B B^{-1} = [1 \quad -1/46]$ , y  $z' = w'N = [22/23 \quad 4 \quad 47/23 \quad -1/46]$ . Los costos reducidos son iguales a  $c'_N - z' = [-22/23 \quad -4 \quad -47/23 \quad 47/46]$ , luego  $x_3$  es candidata a entrar a la base.

Se calculan los costo reducidos con  $y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ . Luego,  $r = \min \left\{ \frac{40}{92} \right\} = 40/92$ . Entonces  $x_5$  es candidata para salir de la base.

La nueva base es  $B = [a_2, a_3]$ . Esta es la base para iniciar la fase 2.

**Nota:** Se evaluará la primera iteración completa y el planteamiento de la segunda.

4. [30 ptos.] Dado el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ \text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

- a) [10 ptos.] Formule el problema dual asociado.



**Solución:** El problema dual es

$$\begin{aligned} \max \quad & 2w_1 + w_2 \\ \text{s.a.} \quad & -w_1 + 2w_2 \leq 2 \\ & w_1 + 2w_2 \leq 6 \\ & w_1 - 2w_2 \leq 2 \\ & -w_1 - 2w_2 \leq -2 \\ & w_1, w_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- b) [20 pts.] A partir de la solución óptima del problema dual,  $w^* = [4 \ 1]$ , obtenga la solución del problema primal dado.

**Solución:** Se evalúan las condiciones de holgura complementaria:

$$A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y } c = [2 \ 6 \ 2 \ -2].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left(2 - [4 \ 1] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) x_1 &= 0, \quad \left(6 - [4 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) x_2 = 0, \\ \left(2 - [4 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) x_3 &= 0, \quad \text{y } \left(-2 - [4 \ 1] \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) x_4 = 0. \end{aligned}$$

Donde,  $2 - (-4 + 2) > 0$  implica que  $x_1 = 0$  y  $-2 - (-4 - 2) > 0$  implica que  $x_4 = 0$ .

Además,

$$4 \left( \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - 2 \right) = 0, \quad \text{y } 1 \left( \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - 1 \right) = 0.$$

Donde  $x_2 + x_3 = 2$  y  $2x_2 - 2x_3 = 1$ .

Al resolver este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas encontramos que  $x_2 = 5/4$ ,  $x_3 = 3/4$ . La solución del problema primal es  $x^* = [0 \ 5/4 \ 3/4 \ 0]$ .