Ejercicio lagrangianos

Thursday, October 7, 2021 10:45 AM

1. Se quiere minimizar la función $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$ sujeto a $x_1 + 2x_2 = 3$ y $4x_1 + 5x_3 = 6$.

(a) Encuentre un punto que satisfaga la condición necesaria de primer orden.

(b) ¿Es regular el punto que encontró en el literal anterior?

2. Se requiere construir un corral de aves rectangular de 40 m^2. Si la cerca a los largo de los lados horizontales cuesta \$5 por m, y para los lados verticales cuesta \$8 por m. ¿Cuáles son las dimensiones del corral que minimizan el coto total de construcción?

1

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \rightarrow x_1 + 2x_2 - 3 = 0 \,]\, h_1 \\ 4x_1 + 5x_3 &= 6 \rightarrow 4x_1 + 5x_3 - 6 = 0 \,]\, h_2 \end{aligned}$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 + 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla h_2(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) la CNPO:

$$\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 + 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

ecns:

$$\begin{cases} (1) & 2x_1 + 2x_2 + 4 + \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ (2) & 2x_1 + 6x_2 + 5 + 2\lambda_1 = 0 \\ (3) & 6 + 5\lambda_2 = 0 \\ (4) & x_1 + 2x_2 - 3 = 0 \\ (5) & 4x_1 + 5x_3 - 6 = 0 \end{cases}$$

(2) - (1) $\quad 4x_2 + 1 + x_1 + \lambda_1 - 4\lambda_2 = 0$

(3) $\quad \lambda_2 = -\frac{6}{5} = -1{,}2$

(4) $\quad x_1 = (-2x_2 + 3)$

Con (3) y (4) en ((2) - (1)):

$$4(x_2) + 1 + (-2x_2 + 3) + \lambda_1 - 4(-1{,}2) = 0$$

$$4x_2 - 2x_2 + 1 + 3 + 4.8 + \lambda_1 = 0$$

$$2x_2 = -8.8 - \lambda_1$$

$$\boxed{x_2 = -4.4 - \frac{\lambda_1}{2}}$$

Ahora evaluando 4 con la nueva info:

$$x_1 = -2x_2 + 3$$

$$x_1 = 8.8 + \lambda_1 + 3$$

$$\boxed{x_1 = \lambda_1 + 11.8}$$

Con lo que se sabe, en (1)

$$(1) \quad 2x_1 + 2x_2 + 4 + \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$$

$$(2\lambda_1 + 23{,}6) + (-8.8 - \lambda_1) + 4 + \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$$

$$2\lambda_1 + 18.8 + 4\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{(4\lambda_2 + 18.8)}{2}$$

$$\boxed{\lambda_1 = -2\lambda_2 - 9.4}$$

en (2) :

$$2x_1 + 6x_2 + 5 + 2\lambda_1 = 0$$

- $x_1 = \lambda_1 + 11.8$
- $x_2 = -4.4 - \frac{\lambda_1}{2}$

$$2\lambda_1 + 23.6 - 26.4 - 3\lambda_1 + 5 + 2\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1 = 2.2$$

Ahora:

$$\lambda_1 = -2\lambda_2 - 9.4$$

$$2.2 = -2\lambda_2 - 9.4$$

$$11.6 = -2\lambda_2$$

$$\lambda_2 = -5.8$$

$$11.6 = -2\lambda_2$$

$$\boxed{\lambda_2 = -5.8}$$

Recuerde que: $\boxed{x_2 = -4.4 - \frac{\lambda_1}{2}}$, $x_2 = -5.5$

$\boxed{x_1 = \lambda_1 + 11.8}$, $x_1 = 14$

2

$$\min \; 2x(5) + 2y(8)$$

S.a. $x \cdot y = 40 \, mt^2 \rightarrow xy - 40 = 0$

- $h_1 = xy - 40$, $\quad \nabla h_1 = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$

- $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$

- $\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla h_1(x)$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ① \; 10 + \lambda_1(y) = 0 \\ ② \; 16 + \lambda_1(x) = 0 \\ ③ \; xy - 40 = 0 \end{cases}$$

③ $xy = 40$

$x = \frac{40}{y}$

② $16 + \lambda_1\left(\frac{40}{y}\right) = 0$

$\lambda_1 = (-0{,}4)\,y$

① $10 + (-0{,}4)\,y^2 = 0$

(1) $10 + (-0{,}4)\, y^2 = 0$

$y^2 = 25$

$y = 5$

$\Rightarrow x = 8$

$\Rightarrow \lambda_1 = (-0.4)\,5 = -2$

$x^* = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\nabla h_1(x^*) = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$,

x^* y $\nabla h_1(x^*)$ son lin. indep.