# Segundo Parcial

9 de abril de 2021

**Indicaciones generales**

- Este es un examen **individual** con una duración de **120 minutos: de 7:00 a 9:00 a.m.**.
- Puede tener **una** hoja manuscrita de resumen con fórmulas. Esta hoja debe estar marcada con el nombre del estudiante y entregarse con el parcial.
- No se permite el uso de libros o apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los **celulares deben estar apagados** durante todo el examen.
- La **cámara de su computador debe estar encendida** todo el tiempo durante la duración del examen.
- No se permite ausentarse del área de trabajo o recibir llamadas durante el examen.
- No se permite el uso de ningún tipo de dispositivo para buscar soluciones a los puntos del parcial ni para comunicarse con otras personas.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la **anulación** del examen.
- Las respuestas deben estar totalmente **justificadas**.

1. [30 ptos.] Dado el siguiente problema de minimización,

$$\text{mín } f(x) = 3x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 2x_2$$

*a*) [10 ptos.] Encuentre la derivada direccional de $f$ en el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en la dirección $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

**Solución:** El gradiente de $f(x)$ es $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 + 1 \\ -2x_2 + 2 \end{bmatrix}$,

luego

$$\nabla f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

La derivada direccional de $f$ en el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en la dirección $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

*b*) [10 ptos.] Encuentre todos los puntos que satisfagan la condición necesaria de primer orden para un mínimo local para $f$.

**Solución:** Los puntos se encuentran en $\nabla f(x^*) = 0$.
Entonces, $6x_1 + 1 = 0$ y $-2x_2 + 2 = 0$. Luego, el único punto que satisface las condiciones de primer orden es

$$x_a = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*c*) [10 ptos.] Determine el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen la condición necesaria de segundo orden para un mínimo local. ¿Tiene esta función mínimos locales?

**Solución:** Evaluamos el Hessiano de la función,

$$H(x) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

cuya matriz no es semidefinida positiva, luego no hay puntos candidatos para ser mínimos locales.

2. [20 ptos.] Dado el siguiente problema de programación no lineal,

$$\min \frac{1}{3}x^3 - x,$$

utilice el método de Newton unidimensional con los puntos iniciales $x_a = 1/2$ y $x_b = -1/2$ para encontrar las raíces de la función. ¿Qué puede concluir sobre las soluciones encontradas? Realice al menos tres iteraciones.

**Solución:** Los valores de $x_{k+1}$ en cada iteración estarán dados por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f`(x_k)}{f''(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 1}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 1}{2x_k}$$

Para los puntos iniciales dados,

| iter | $x_k$ | $x_{k+1}$ | error | iter | $x_k$ | $x_{k+1}$ | error |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/2 | 5/4 | 0.75 | 1 | -1/2 | -5/4 | 0.75 |
| 2 | 5/4 | 41/40 | 0.225 | 2 | -5/4 | -41/40 | 0.225 |
| 3 | 41/40 | 1.0003 | 0.024 | 3 | -41/40 | -1.0003 | 0.024 |

Con un error de 0.024, los puntos $x_a = 1/2$ y $x_b = -1/2$ convergen a $x*_a = 1.0003$ y $x*_b = -1.0003$. Evaluando $f''(1.003) \approx 2 > 0$, este punto es un mínimo local. Evaluando $f''(-1.003) \approx -2 < 0$, este punto es un máximo local. La función no es convexa.

3. [30 ptos.] Dada la función,

$$f(x) = (x_1 + x_2 - 3)^2 + (x_1 - x_2 + 1)^2.$$

*a*) [10 ptos.] Use el método de newton multidimensional a partir del punto $x_0 = (3, 5)$ para minimizar $f(x)$.

**Solución:**
Gradiente y Hessiano:
$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 + x_2 - 3) + 2(x_1 - x_2 + 1) \\ 2(x_1 + x_2 - 3) - 2(x_1 - x_2 + 1) \end{bmatrix}$, $H(x) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
Evaluando en el punto inicial, $\nabla f(x_a) = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$, $H(x_a) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
$x_b = x_a - H(x_0)^{-1}\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
Para funciones cuadráticas, el método converge en una iteración al punto critico.

*b*) [20 ptos.] Use el método de direcciones conjugadas para minimizar $f(x)$.

**Solución:** Gradiente y Hessiano:
$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 + x_2 - 3) + 2(x_1 - x_2 + 1) \\ 2(x_1 + x_2 - 3) - 2(x_1 - x_2 + 1) \end{bmatrix}$, $H(x) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
Las direcciones son:

$$d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Luego, ${d_1}'Hd_2 = 0$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \to 4a + 0b = 0$$

Entonces, $a = 0$ y $b$ puede tomar cualquier valor. Entonces $d_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Además, $\lambda_j = -\dfrac{c'd_j + {d_j}'Hx_j}{{d_j}'Hd_j}$.

Con $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calculamos $\lambda_1$

$$\lambda_1 = -\frac{\begin{bmatrix} -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = -\frac{-4}{4} = 1$$

Calculamos $x_2 = x_1 + \lambda_1 d_1$,

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $d_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, calculamos $\lambda_2$

$$\lambda_2 = -\frac{\begin{bmatrix} -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = -\frac{-8}{4} = 2$$

Calculamos $x_3 = x_2 + \lambda_2 d_2$,

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. [20 ptos.] Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_3 \\ \text{s.a. } & 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 + x_2 = 3 \end{aligned}$$

*a*) [10 ptos.] Determine todos los puntos regulares para las restricciones del problema.

**Solución:** Calculamos los gradientes de las restricciones,

$h_1(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 4 = 0$, $\nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$h_2(x) = 2x_1 + x_2 - 3 = 0$, $\nabla h_2(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dado que $h_1(x)$ y $h_2(x)$ son LI para todo $x$, todo $x^* \in \mathbb{R}^3$ es regular.

*b*) [10 ptos.] Encuentre el espacio tangente a la superficie S descrita por las restricciones en el punto regular $x^*$.

**Solución:** El espacio tangente asociado en el punto $x^*$ es

$$T(x^*) = \{y : Dh(x^*)y = 0\} = \left\{ y : \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \left\{ y = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$