Temas: distribuciones conjuntas, condicionales e independencia de variables aleatorias discretas

1. Sean X y Y dos variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta dada por

	Y		
X	1	3	5
0	0.12	0.15	0.1
2	0.17	0.08	0.13
4	0.05	0.14	0.06

   a) Determine la función de probabilidad marginal de cada variable aleatoria.

   b) ¿Son X y Y independientes?

   c) Sea $g(x,y) = x^2y$. Determine el valor esperado de $g(X,Y)$.

   d) Si $Y = 1$, determine el valor esperado de X.

   e) Determine el valor esperado de X dado que $Y = 3$.

2. Sean X y Y dos variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta dada por

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{15}(x+y), & x = 0,1,2,\ y = 1,2, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

   a) Determine la función de probabilidad marginal de X.

   b) Determine la función de probabilidad marginal de Y.

   c) Determine la función de probabilidad condicional de Y dado $X = x$.

   d) Con el resultado anterior determine la función de probabilidad condicional de Y dado $X = 1$.

   e) Con el resultado anterior determine la probabilidad de que Y sea igual a 1 dado que X es igual a 1.

   f) Determine la función de probabilidad condicional de X dado $Y = y$.

   g) Con el resultado anterior determine la función de probabilidad condicional de X dado $Y = 2$.

   h) Con el resultado anterior determine la probabilidad de que X sea al menos igual a 1 dado que Y es igual a 2.

   i) ¿Son X y Y independientes?

3. Un inversionista compra 100 acciones de la empresa A y 200 acciones de la empresa B. Sean X y Y variables aleatorias que representan los *cambios de precio* de las acciones de A y B, respectivamente. Sobre un período de tiempo se ha estimado que

la función de masa de probabilidad (f.m.p.) conjunta de X y Y es uniforme sobre el conjunto de enteros

$$\{(a,b) : -2 \leq a \leq 4, -1 \leq b-a \leq 1\}$$

a) Determine la f.m.p. de X y Y.

b) Determine el valor esperado de X y Y.

c) Determine la utilidad esperada del inversionista.

4. Una clase consiste de n estudiantes que toman un parcial de m preguntas. El i-ésimo estudiante responde las primeras m_i preguntas.

   a) El profesor selecciona una *respuesta* al azar (entre todas las recibidas de todos los estudiantes). Es decir, selecciona una respuesta (I, J), donde I se refiere al estudiante que envió la respuesta y J al número de la pregunta respondida. Teniendo en cuenta que cada respuesta tiene la misma probabilidad de ser seleccionada, determine la f.m.p. conjunta de I y J. Determine las f.m.p. marginales de I y J.

   b) Si el estudiante i responde la pregunta j, su respuesta es correcta con probabilidad q_{ij}. Por cada respuesta correcta el estudiante obtiene a puntos, y de lo contrario obtiene b puntos. Determine el valor esperado de la nota del estudiante i.

5. Usted ha comprado un videojuego recientemente y juega una vez al día. En un día cualquiera, su puntaje en el videojuego varía entre 1 y 10, tomando cada valor con la misma probabilidad, independientemente de los otros días.

   a) El fin de semana usted jugó una vez cada día. Sean X_1 y X_2 los puntajes obtenidos cada día, y sea X el mínimo de los dos. Determine la f.m.p. de X y su valor esperado. ¿En cuánto difiere éste del puntaje esperado en un día cualquiera?

   b) Repita el ejercicio anterior pero ahora considere que juega 3 días consecutivos, con puntajes X_1, X_2, X_3, y sea X el mínimo puntaje.

   c) ¿Puede generalizar los dos ejercicios anteriores al caso en que juega un número arbitrario n de días y X es el mínimo puntaje obtenido en estos?

6. En el año 1990 se reúnen $2m$ personas que forman m parejas que vivían juntas en ese momento. En el año 2015, la probabilidad de que cada persona esté viva es p, independiente de las demás personas. Sea A el número de personas vivas en 2015, y sea S el número de parejas en las que ambos miembros estás vivos. Dado que han sobrevivido a personas, determine el valor esperado del número de parejas en las que han sobrevivido sus dos miembros, es decir, determine $E[S|A = a]$.
   Pista: Exprese S como $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_m$, donde cada S_i es una variable aleatoria de Bernoulli que es igual a uno si la pareja sobrevive y a cero en caso de que no.

7. Sean X, Y, y Z variables aleatorias discretas.

   a) Demuestre que

   $$p_{XYZ}(a,b,c) = p_{Z|X,Y}(c|a,b)p_{Y|X}(b|a)p_X(a)$$

   b) Generalice este resultado para cualquier número de variables aleatorias.

8. Un transmisor envía mensajes en forma de ceros y unos. La probabilidad de que envíe un 1 es p, y la probabilidad de que envíe un 0 es $1-p$, independiente de otras transmisiones. En un intervalo de observación el número de transmisiones es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λ. Demuestre que el número de unos transmitidos en ese intervalo es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $p\lambda$. **Pista**: Sea $Z = X+Y$, donde X y Y cuentan el número de unos y ceros transmitidos, respectivamente. Determine la función de masa probabilidad de X y Y y obtenga la marginal de la variable aleatoria X.

9. En su camino a la universidad, Camilo pasa por 4 semáforos cada día. Cada semáforo tiene la misma probabilidad de estar en rojo o en verde, independiente de los demás.

   a) Determine la f.m.p., la media y la varianza del número de semáforos en rojo que Camilo encuentra en rojo.

   debería ser la misma vari

   b) Suponga que cada semáforo en rojo retarda a Camilo exactamente 2 minutos. Determine la varianza del retardo de Camilo causado por los semáforos.

   c) El tiempo de desplazamiento se puede descomponer en dos factores: uno constante debido a la distancia (d) y uno de retardo. Determine el valor esperado y la varianza del tiempo de desplazamiento suponiendo que $d = 25$.

10. Cada mañana usted se come entre uno y seis panes con la misma probabilidad, independiente del número de panes que coma algún otro día. Sea X el número de panes que se come en diez días. Determine el valor esperado y la varianza de X.

11. Un profesor tiene una extraña forma de calificar: a cada parcial le asigna aleatoriamente una nota de $\{1,2,3,4,5\}$, independiente de los demás.

    a) ¿Cuántos parciales espera presentar hasta obtener un 5?

    b) ¿Cuántos parciales espera presentar hasta obtener al menos una vez cada nota de $\{1,2,3,4,5\}$?

X: #panes comidos en el díaP(

E(Geométrica), con p = 1/5