Universidad del Rosario

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Taller 5 Punto 1

Guillermo Ribero, Camilo Silva, Natalia Rojas

Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología, Universidad del Rosario

Septiembre 2021

1. Ejercicio 1

1. Se quiere estimar la estatura media h (en metros) de una población usando n muestras independientes $X_1, \ldots, X_n$ seleccionadas aleatoriamente de la población. Se usa la media muestral M_n para estimar h y un estimativo grueso de que la desviación estándar de la altura en la población (y por ende de cada muestra) es de un metro.

a Determine el tamaño n mínimo para que la desviación estándar de M_n sea de a lo sumo 1 centímetro.

b Determine el tamaño n que hace que la desigualdad de Chebyshev garantice que el estimador M_n está a lo sumo a 5 centímetros de diferencia de h con probabilidad de por lo menos 0,99.

c Determine cómo cambian sus resultados anteriores si la desviación estándar de la población se estima en 10 centímetros.

2. Solución

a Tenemos $\sigma = 1, \sigma^2 = 1, E(Mn) = h, Var(Mn) = \frac{\sigma^2}{n}$ y asumiendo una confianza del 99 %, luego por la ley débil de los números grandes:

$$P(|Mn - h| \leq 0{,}01) = 1 - P(|Mn - h| \geq 0{,}01) \leq 1 - \frac{1}{n0{,}01^2}$$

$$1 - P(|Mn - h| \geq 0{,}01) \leq 1 - \frac{1}{n0{,}01^2} \leq 1 - 0{,}01$$

$$1 - \frac{1}{n(0{,}01)^2} \geq 1 - 0{,}01$$

$$\frac{1}{n(0{,}01)^2} \geq 0{,}01$$

$$n \geq \frac{1}{(0{,}01)^3} = 1{,}000{,}000$$

por lo tanto el n mínimo es 1 millón

b

$$P(|Mn-h|\leq 0{,}05)=1-P(|Mn-h|\geq 0{,}05)\leq 1-\frac{\sigma^2}{n(0{,}05)^2}$$

$$P(|Mn-h|\geq 0{,}05)\leq 1-\frac{\sigma^2}{n(0{,}05)^2}$$

$$1-P(|Mn-h|\geq 0{,}05)\geq 1-\frac{1}{n(0{,}05)^2}\geq 1-0{,}01$$

$$-\frac{1}{n(0{,}05)^2}\geq -0{,}01$$

$$\frac{1}{n(0{,}05)^2}\geq 0{,}01$$

$$n\geq \frac{1}{0{,}01(0{,}05)^2}=40{,}000$$

El tamaño de n$\geq$ 40,000

c Usando $\sigma=10,\ \ \sigma^2=10$ y basándonos en los literales a y b:

c_a.

$$P(|Mn-h|\leq 0{,}01)$$

$$=1-P(|Mn-h|\geq 0{,}01)\leq 1-\frac{10}{n(0{,}01)^2}\leq 1-0{,}01$$

$$n\geq \frac{10}{(0{,}01)^3}$$

$$Finalmente: n=10{,}000{,}000$$

c_b.

$$P(|Mn-h|\leq 0{,}05)$$

$$=1-P(|Mn-h|\geq 0{,}05)\leq 1-\frac{10}{n(0{,}05)^2}\leq 1-0{,}01$$

$$n\geq \frac{10}{0{,}01(0{,}05)^2}$$

$$n\geq \frac{10}{0{,}01(0{,}05)^2}=400{,}000$$

$$Finalmente: n=400{,}000$$