Probabilidad y Estadística 2

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS APLICADAS Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

2021-2

Universidad del Rosario
Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

Condicionar vars continuas en un evento

Def: La PDF condicional de una va X dado un evento C, tq $P(C)>0$ es una función no negativa $f_{X|C}$ tq. si $B \in \mathbb{R}$ medible

$$P(X \in B | C) = \int_B f_{X|C}(x)\,dx$$

$$\| $$

$$\frac{P(\{X \in B\} \cap C)}{P(C)}$$

1) $f_{X|C}$ no neg ✓

2) $$\int_{\mathbb{R}} f_{X|C}(x)\,dx = P(\{X \in \mathbb{R}\} \mid C) = \frac{P(\overset{\Omega}{\{X \in \mathbb{R}\}} \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(\Omega \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C)}{P(C)} = 1 \quad ✓$$

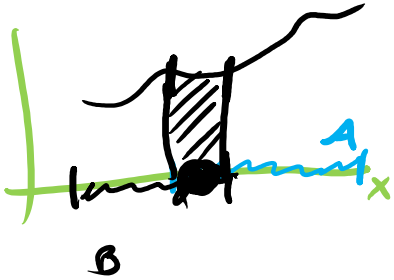
Luego, $f_{X|C}(x)$ es una PDF legítima.

En el caso en el que el evento sobre el cual se condiciona sea de la forma $\underline{\{X \in A\}}$

$\forall B \in \mathbb{R}$ medible

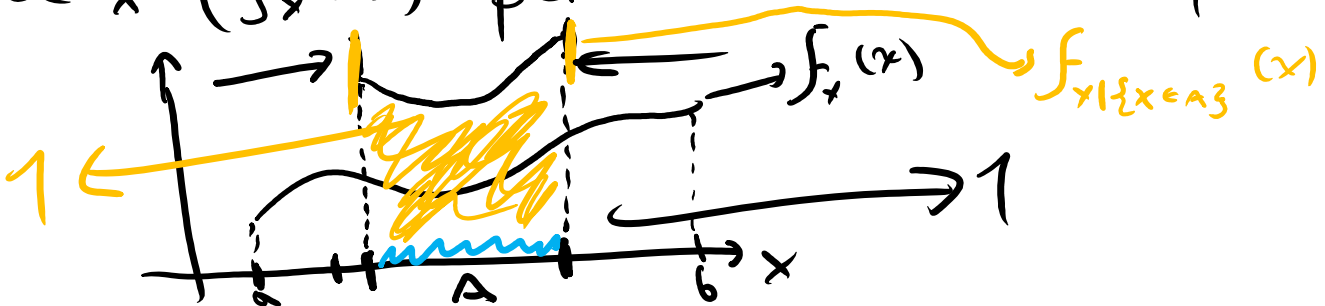
$$\int_B f_{X|\{X\in A\}}(x) = P(\{X \in B\} \mid \{X \in A\}) = \frac{P(\{X\in B\} \cap \{X \in A\})}{P(\{X \in A\})}$$

$$= \frac{P(\{X \in A \cap B\})}{P(X \in A)} = \frac{\int_{A\cap B} f_X(x)\,dx}{P(X \in A)}$$



$$f_{X|\{X\in A\}}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)\,dx}{P(X\in A)} & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obs: La PDF condicional es 0 afuera del conjunto donde se sabe que está x. Dentro del conjunto "A" la función es IGUAL a la PDF no condicionada de x ($f_X(x)$) pero escalada en un factor $\frac{1}{P(A)}$



Def: La CDF condicionada de una va X cond. a un evento C, $P(C) > 0$, es tq.

$$P(X \leq x \mid C) = F_{X|C}(x)$$

Si C es de la forma $\{X \in A\}$

$$P(\{X \leq x\} \mid \{X \mid A\}) = F_{X|\{X \in A\}}(x)$$

Ej: La va exponencial que no tiene memoria.

Sea T una va exponencial con parámetro λ

T: tiempo de vida de un bombillo.

Pepe deja el bombillo prendido un tiempo t. Después regresa y ve que el bombillo sigue funcionando.

Sea X el tiempo de vida restante del bombillo

$$X = T - t$$

¿Cuál es la ley de prob. de X?

$$A: \{T > t\}$$

$$F_{X|A}(x) = P(X \le x \mid A) = P(T-t \le x \mid T>t)$$

$$= P(\{T \le t+x\} \mid T>t)$$

$$= 1 - P(\{T > t+x\} \mid T>t)$$

$$= 1 - \frac{P(\{T>t+x\} \cap \{T>t\})}{P(T>t)}$$

$$= 1 - \frac{P(\{T>t+x\})}{P(T>t)} = 1 - \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= \underbrace{1 - e^{-\lambda x}} = \underline{\underline{F_T(x)}} = \underline{\underline{F_{X|A}(x)}}$$

La CDF condicional de X es la misma que la CDF de T y no depende de t.

Esto es lo que llamamos "no tener memoria"

No importa cuanto tiempo haya pasado, si todavía no ha habido un "éxito", el tiempo para el siguiente éxito tiene la misma distribución que la original.

En el caso de múltiples vars

Def: Sea X, Y continuas con PDF conjunta f_{XY}. Sea C evento tq. $P(C) > 0$ $\forall B \in \mathbb{R}^2$ medible

$f_{XY|C}(x,y)$ es tq.

$$P((X,Y) \in B \mid C) = \iint_B f_{XY|C}(x,y)\,dx\,dy.$$

Si $C = \{(x,y) \in A\}$

$$f_{XY|C}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x,y)}{P(C)} & \text{si } (x,y) \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Podemos obtener las PDF condicionales marginales

$$f_{X|C}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY|C}(x,y)\,dy$$

$$f_{Y|C}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY|C}(x,y)\,dx$$

Teorema de prob total de PDF cond.

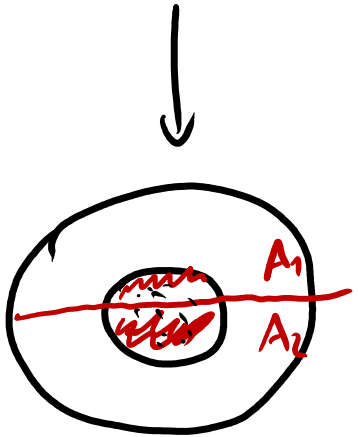
Sean $A_1 \ldots A_n$ eventos que forman una partición de Ω, entonces:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot f_{X|A_i}(x)$$

Demostración: → $\boxed{\text{P y E 1}}$

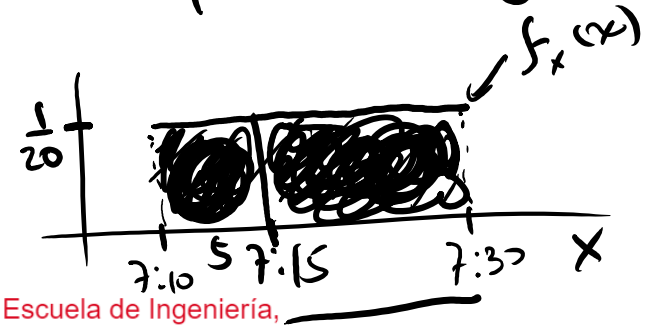
Empezar desde:

$F_X(x)$



Ej: El Transmi llega cada 15 minutos a una determ. estación a partir de las 6am.
Pepe llega a la estación todos los días entre las 7:10am y las 7:30am. Tiempo de llegada de Pepe es uniforme. ¿PDF del tiempo de espera?

X: Tiempo de llegada de Pepe.



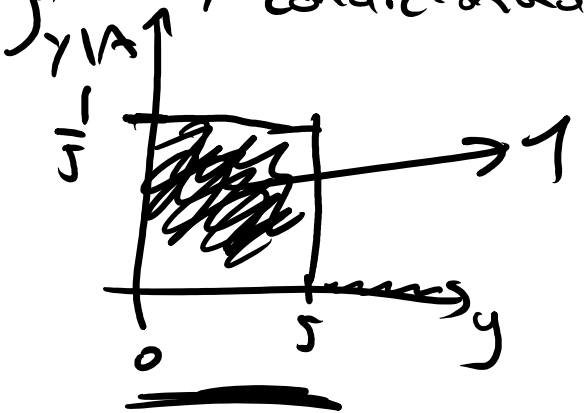
Y: Tiempo de espera

A: $\{7:10 \leq X \leq 7:15\}$ → "Pepe coge el transmi de las 7:15

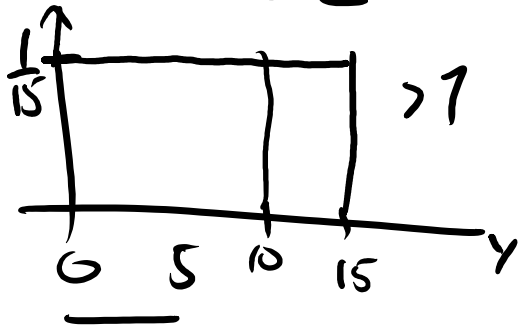
B: $\{7:15 < X \leq 7:30\}$ → "Pepe coge el transmi de las 7:30

$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{3}{4}$

$f_{Y|A}$ Y condicionada a A es uniforme entre [0,5]



Y condicionada a B uniforme en [0,15]



Si $y < 0$ y $y > 15$ $\quad f_Y(y) = 0$

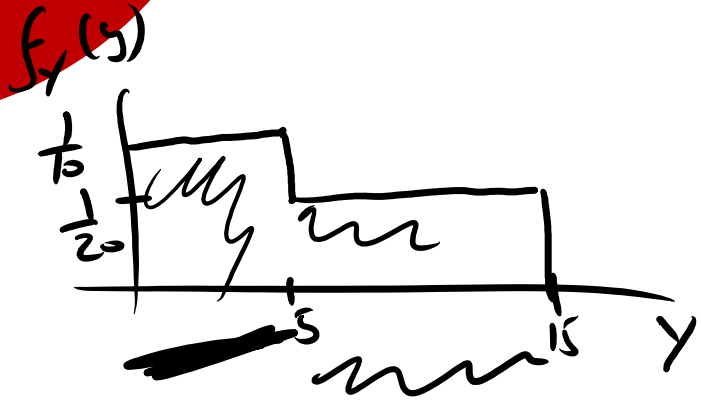
Si $0 \leq y \leq 5$

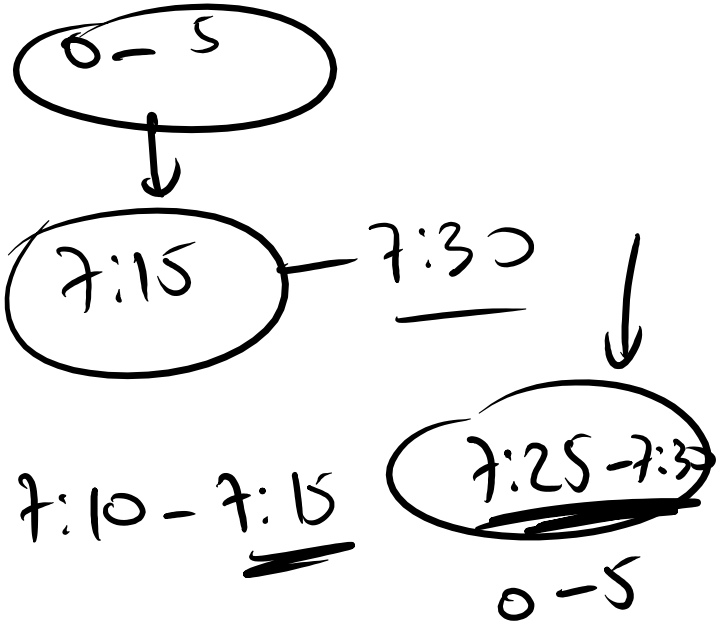
$$f_Y(y) = P(A) \cdot f_{Y|A}(y) + P(B)\, f_{Y|B}(y)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{10}$$

Si $5 < y \leq 15$

$$f_Y(y) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{20}$$


$f_Y(y)$
$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{20}$
5
15
Y


0 – 5
7:15
7:30
7:10 – 7:15
7:25 – 7:35
0 – 5

Def: Sean X, Y dos vars continuas con PDF conjunta f_{XY}. Para y tq $f_Y(y) > 0$ definimos la PDF condicional de X dado $Y=y$ como:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Vemos $f_{X|Y}(x|y)$ como una función de x después de fijar un valor en Y.

Obs: $f_{X|Y}(x|y)$ tiene la misma forma que $f_{XY}(x,y)$ escalada por $\frac{1}{f_Y(y)}$

Verifiquemos que $f_{X|Y}(x,y)$ sea una PDF legítima:

1) No neg ✓

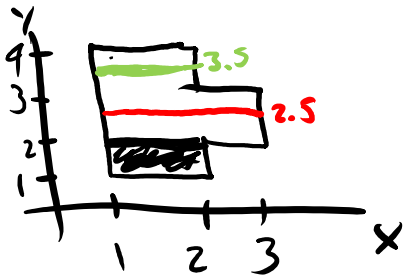
2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx$$

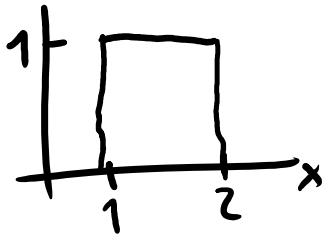
$$= \frac{1}{f_Y(y)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx}_{f_Y(y)} = \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1$$

Luego $f_{X|Y}(x|y) \rightarrow$ PDF legítima.

Ej: X, Y conjuntamente uniformes sobre S



$f_{X|Y}(x|3.5)$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|3.5)\,dx = 1$$

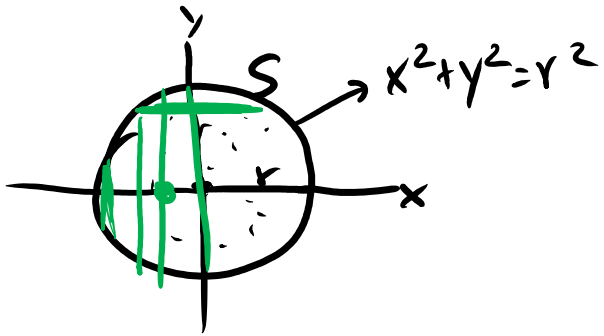
$$\int_{1}^{2} c\,dx \Rightarrow c = 1$$

$f_{X|Y}(x|\underline{2.5})$.

Ej: Pepe juega a los dardos con un blanco de radio r. Suponga que Pepe siempre le atina al blanco y que todos los puntos (x,y) dentro del blanco son igual de probables

X, Y son conjuntamente uniformes sobre el círculo S de radio r

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2} & \text{si } (x,y) \in S \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Calcular $f_{x,y}(x,y)$