

Temas: distribuciones conjuntas, condicionales e independencia de variables aleatorias discretas

- Sean X y Y dos variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta dada por

| | Y | | |
|-----|------|------|------|
| X | 1 | 3 | 5 |
| 0 | 0.12 | 0.15 | 0.1 |
| 2 | 0.17 | 0.08 | 0.13 |
| 4 | 0.05 | 0.14 | 0.06 |

- Determine la función de probabilidad marginal de cada variable aleatoria.
 - ¿Son X y Y independientes?
 - Sea $g(x, y) = x^2y$. Determine el valor esperado de $g(X, Y)$.
 - Si $Y = 1$, determine el valor esperado de X .
 - Determine el valor esperado de X dado que $Y = 3$.
- Sean X y Y dos variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta dada por

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{15}(x + y), & x = 0, 1, 2, \ y = 1, 2, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

- Determine la función de probabilidad marginal de X .
 - Determine la función de probabilidad marginal de Y .
 - Determine la función de probabilidad condicional de Y dado $X = x$.
 - Con el resultado anterior determine la función de probabilidad condicional de Y dado $X = 1$.
 - Con el resultado anterior determine la probabilidad de que Y sea igual a 1 dado que X es igual a 1.
 - Determine la función de probabilidad condicional de X dado $Y = y$.
 - Con el resultado anterior determine la función de probabilidad condicional de X dado $Y = 2$.
 - Con el resultado anterior determine la probabilidad de que X sea al menos igual a 1 dado que Y es igual a 2.
 - ¿Son X y Y independientes?
- Un inversionista compra 100 acciones de la empresa A y 200 acciones de la empresa B. Sean X y Y variables aleatorias que representan los *cambios de precio* de las acciones de A y B, respectivamente. Sobre un período de tiempo se ha estimado que

la función de masa de probabilidad (f.m.p.) conjunta de X y Y es uniforme sobre el conjunto de enteros

$$\{(a, b) : -2 \leq a \leq 4, -1 \leq b - a \leq 1\}$$

- a) Determine la f.m.p. de X y Y .
 - b) Determine el valor esperado de X y Y .
 - c) Determine la utilidad esperada del inversionista.
4. Una clase consiste de n estudiantes que toman un parcial de m preguntas. El i -ésimo estudiante responde las primeras m_i preguntas.
- a) El profesor selecciona una *respuesta* al azar (entre todas las recibidas de todos los estudiantes). Es decir, selecciona una respuesta (I, J) , donde I se refiere al estudiante que envió la respuesta y J al número de la pregunta respondida. Teniendo en cuenta que cada respuesta tiene la misma probabilidad de ser seleccionada, determine la f.m.p. conjunta de I y J . Determine las f.m.p. marginales de I y J .
 - b) Si el estudiante i responde la pregunta j , su respuesta es correcta con probabilidad q_{ij} . Por cada respuesta correcta el estudiante obtiene a puntos, y de lo contrario obtiene b puntos. Determine el valor esperado de la nota del estudiante i .
5. Usted ha comprado un videojuego recientemente y juega una vez al día. En un día cualquiera, su puntaje en el videojuego varía entre 1 y 10, tomando cada valor con la misma probabilidad, independientemente de los otros días.
- a) El fin de semana usted jugó una vez cada día. Sean X_1 y X_2 los puntajes obtenidos cada día, y sea X el mínimo de los dos. Determine la f.m.p. de X y su valor esperado. ¿En cuánto difiere éste del puntaje esperado en un día cualquiera?
 - b) Repita el ejercicio anterior pero ahora considere que juega 3 días consecutivos, con puntajes X_1, X_2, X_3 , y sea X el mínimo puntaje.
 - c) ¿Puede generalizar los dos ejercicios anteriores al caso en que juega un número arbitrario n de días y X es el mínimo puntaje obtenido en estos?
6. En el año 1990 se reúnen $2m$ personas que forman m parejas que vivían juntas en ese momento. En el año 2015, la probabilidad de que cada persona esté viva es p , independiente de las demás personas. Sea A el número de personas vivas en 2015, y sea S el número de parejas en las que ambos miembros están vivos. Dado que han sobrevivido a personas, determine el valor esperado del número de parejas en las que han sobrevivido sus dos miembros, es decir, determine $E[S|A = a]$.
- Pista:** Expresé S como $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_m$, donde cada S_i es una variable aleatoria de Bernoulli que es igual a uno si la pareja sobrevive y a cero en caso de que no.

7. Sean X , Y , y Z variables aleatorias discretas.

a) Demuestre que

$$p_{XYZ}(a, b, c) = p_{Z|X,Y}(c|a, b)p_{Y|X}(b|a)p_X(a)$$

b) Generalice este resultado para cualquier número de variables aleatorias.

8. Un transmisor envía mensajes en forma de ceros y unos. La probabilidad de que envíe un 1 es p , y la probabilidad de que envíe un 0 es $1 - p$, independiente de otras transmisiones. En un intervalo de observación el número de transmisiones es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λ . Demuestre que el número de unos transmitidos en ese intervalo es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $p\lambda$. **Pista:** Sea $Z = X + Y$, donde X y Y cuentan el número de unos y ceros transmitidos, respectivamente. Determine la función de masa probabilidad de X y Y y obtenga la marginal de la variable aleatoria X .

9. En su camino a la universidad, Camilo pasa por 4 semáforos cada día. Cada semáforo tiene la misma probabilidad de estar en rojo o en verde, independiente de los demás.

a) Determine la f.m.p., la media y la varianza del número de semáforos en rojo que Camilo encuentra en rojo.

b) Suponga que cada semáforo en rojo retarda a Camilo exactamente 2 minutos. Determine la varianza del retardo de Camilo causado por los semáforos.

c) El tiempo de desplazamiento se puede descomponer en dos factores: uno constante debido a la distancia (d) y uno de retardo. Determine el valor esperado y la varianza del tiempo de desplazamiento suponiendo que $d = 25$.

10. Cada mañana usted se come entre uno y seis panes con la misma probabilidad, independiente del número de panes que coma algún otro día. Sea X el número de panes que se come en diez días. Determine el valor esperado y la varianza de X .

11. Un profesor tiene una extraña forma de calificar: a cada parcial le asigna aleatoriamente una nota de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, independiente de los demás.

a) ¿Cuántos parciales espera presentar hasta obtener un 5?

b) ¿Cuántos parciales espera presentar hasta obtener al menos una vez cada nota de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?