Módulo 7: Algoritmos de optimización con Restricciones

Departamento MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario

Segundo Semestre de 2021

Agenda

1. Métodos primales
   - Método de direcciones factibles
   - Método de conjuntos activos
   - Método del gradiente proyectado

Métodos primales

- Cada punto generado en el método es factible
- Si genera una secuencia convergente, el limite de la secuencia debe ser un mínimo local
- No dependen de estructuras definidas para el problema

Direcciones factibles

Secuencia de puntos factibles

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

donde d_k es una dirección factible en x_k.

Teorema

Sea $\{x_k\}$ una sucesión generada por el método de direcciones factibles $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, tal que la sucesión de direcciones $\{d_k\}_{k\in K}$ verifica:

1. $\lim_{k\to\infty} \sup_{k\in K} \nabla f(x_k)' d_k < 0$

Direcciones factibles - Algoritmo

Caso: de restricciones lineales:

Dado f, x_0 punto inicial factible, $\epsilon > 0$
Paso 1: Dirección factible y de descenso $d_k = (\overline{x} - x_k)$, donde

$$\begin{aligned} &\min\ \nabla f(x_k)'(\overline{x} - x_k) \\ &\text{s.a. } \overline{x} \in \Omega \end{aligned}$$

if $\|\nabla f(x_k)'d\| \leq \epsilon$ **then**
  Stop
else
  Paso 2: Actualizar $\mathbf{x}_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, donde α_k

$$\begin{aligned} &\min\ f(x_k + \alpha_k d_k) \\ &\text{s.a. } g(x_k + \alpha_k d_k) \leq 0 \\ &\quad 0 < \alpha_k \leq 1 \end{aligned}$$

end if

Ejemplo 1

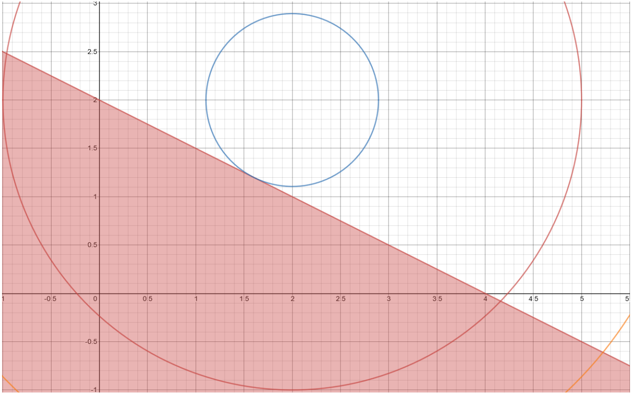
$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8 \\ \text{s.a.}\ & x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Punto inicial:

- $x_0 = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$
- $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ejemplo (Cont.)

$$x^0 = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}, \; \overline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \; d^0 = \begin{bmatrix} 8/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}, \; \alpha = 1/10$$



Interpretación geométrica)

$$
\begin{aligned}
\min\ & f(x)) \\
\text{s.a. } & Ax \leq b \\
& Qx = q
\end{aligned}
$$

Lema

Sea x una solución factible, y suponga que $A_1 x = b_l$ and $A_2 x < b_2$, donde A' se descompone en (A_1', A_2') y b' se descompone en (b_1', b_2'). Entonces, un vector d no nulo es un dirección factible en x si y solo si $A_1 d \leq 0$ y $Qd = 0$. Si $\nabla f(x)'d < 0$ es una dirección de descenso.

Ejemplo 2

$$\begin{aligned} \min\ & (x_1-6)^2+(x_2-2)^2 \\ \text{s.a.}\ & -x_1+2x_2-4\leq 0 \\ & 3x_1+2x_2\leq 12 \\ & x_1,x_2\geq 0 \end{aligned}$$

Punto inicial:

- $x_0=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

Direcciones factibles - Algoritmo

Caso: de restricciones no lineales (desigualdad):

- Considere el problema min $f(x)$ s.a. $g_i(x) \leq 0$ para $i = 1, ..., m$. Donde $g_i \in \mathcal{C}^1$. Si $\nabla f(x)'d < 0$ y $\nabla g_i(x)'d < 0$, entonces d es una dirección de descenso

Sea x una solución factible, y sea $I = \{i : g_i(x) = 0\}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
&\min z \\
&\text{s.a. } \nabla f(x_k)'d - z \leq 0 \\
&\qquad \nabla g_i(x_k)'d - z \leq 0, \;\; i \in I \\
&\qquad -1 \leq d \leq 1, \; j = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

Direcciones factibles - Algoritmo

Caso: de restricciones no lineales (desigualdad):

Dado f, x_0 punto inicial factible
Paso 1: Sea $I = \{i : g_i(x) = 0\}$, y (z_k, d_k) la solución de

$$\begin{aligned} &\min\ z \\ &\text{s.a. } \nabla f(x_k)'d - z \leq 0 \\ &\qquad \nabla g_i(x_k)'d - z \leq 0,\ \ i \in I \\ &\qquad -1 \leq d \leq 1,\ \ j = 1, ..., n \end{aligned}$$

if $z_k = 0$ **then**
  Stop
else
  Paso 2
end if

Direcciones factibles - Algoritmo

Caso: de restricciones no lineales (desigualdad):

Paso 2: Actualizar $\mathbf{x}_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, donde α_k

$$\begin{aligned} \min\ & f(x_k + \alpha_k d_k) \\ \text{s.a. } & g(x_k + \alpha_k d_k) \leq 0 \\ & 0 < \alpha_k \leq 1 \end{aligned}$$

Ir a paso 1

Ejemplo

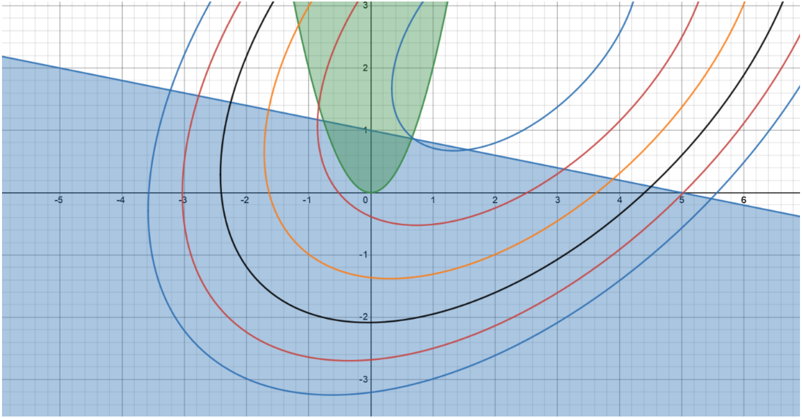
$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\
\text{s.a. } & x_1 + 5x_2 - 5 \leq 0 \\
& 2x_1^2 - x_2 \leq 0 \\
& -x_1 \leq 0 \\
& -x_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

Punto inicial:

- $x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2 (Cont.)

$$x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \end{bmatrix},\; x^1 = \begin{bmatrix} 0{,}208 \\ 0{,}514 \end{bmatrix}$$



Conjuntos activos

$$\min\ f(x)$$
$$\text{s.a. } g(x) \leq 0$$

Dado el conjuntos de restricciones activas, espacio de trabajo W,

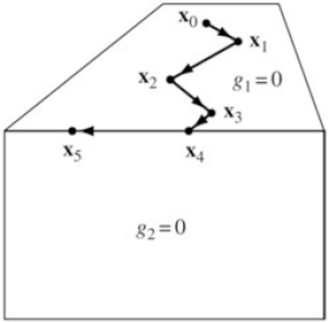
$$\min\ f(x)$$
$$\text{s.a. } g(x) = 0 \quad i \in W$$

condiciones necesarias,

$$\nabla f(x_W) + \sum_{i \in W} \mu_i \nabla g_i(x_W) = 0$$

Conjuntos activos

Espacio de trabajo W.



Algoritmo - Conjuntos activos

Sea x_0 inicial factible, $W(x_0)$, $d = x^* - x_k$,

- 1. Resolver el subproblema

$$\min \frac{1}{2} d' Q d + \nabla f(x_k)' d$$
$$\text{s.a. } A_k d = 0 \quad i \in W$$

- 2. Si $d = 0$,
    - Calcular $\mu = -(A_k A_k')^{-1} A_k \nabla f(x_k)$
    - Si $\mu \geq 0$ terminar.
    - Caso contrario, definir $x_{k+1} = x_k, \; W_{k+1} = W_k - \{j\}$, con j el índice de la variable dual más negativa
    - Volver a 1

Algoritmo - Conjuntos activos (Cont.)

- 3. Si $d \neq 0$, el paso máximo que se puede dar en la dirección es

$$\alpha_{\text{máx}} = \min_{j \ni W(x_k), a_j' d_k > 0, \alpha \neq 0} \left\{ \frac{b_j - a_j' x_k}{a_j' d_k} \right\}$$

Luego, $\alpha_k = \min\{1, \alpha_{\text{máx}}\}$

- Si $\alpha_k = 1$, definir $x_{k+1} = x_k + d_k, \; W_{k+1} = W_k$
- Si $\alpha_k < 1$, definir $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \; W_{k+1} = W_k \cup \{j\}$, con j el índice para el cual

$$\alpha_k = \frac{b_j - a_j' x_k}{a_j' d_k} < 1$$

- Volver a 1

Ejemplo

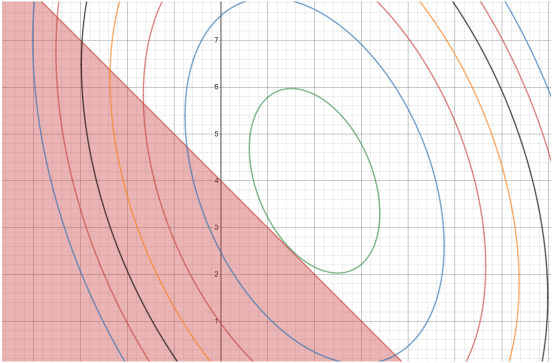
$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 12x_1 - 10x_2 \\
\text{s.a. } & x_1 + x_2 - 4 \leq 0 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Punto inicial:

- $x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces $d_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\mu = -\begin{bmatrix} 12 \\ 10 \end{bmatrix}$

Ejemplo (Cont.)

$$x^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ x^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ x^3 = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix},\ x^4 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} = x^*$$



Gradiente proyectado

Generalización del método del gradiente.

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{s.a. } g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Dado el conjuntos de restricciones activas, espacio de trabajo W,

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{s.a. } g(x) = 0 \quad i \in W. \end{aligned}$$

Se proyecta $-\nabla f(x_k)$ sobre el núcleo de A_W, que será ortogonal al subespacio tangente donde recae la dirección d:

$$-\nabla f(x_k) = d_k + A_k' \mu_k$$

Algoritmo - Gradiente proyectado

Dado f, A, b, x_0 punto inicial factible
Paso 0: Determine W y A_w
Paso 1: Calcular $P = I - A'_k(A_kA'_k)^{-1}A_k$ y $d_k = -P\nabla f(x_k)$
Paso 2:
if $d_k = 0$ **then**
  Calcular $\mu = -(A_kA'_k)^{-1}A_k\nabla f(x_k)$
  $\mu \geq 0$, Stop.
  $\mu < 0$, Sacar j de W, con j el índice de la variable dual más negativa.
else
  Calcular $\alpha_1 = \text{máx}\{\alpha : x_k + \alpha d_k \in \Omega\}$
  Calcular $\alpha_2 = \text{mín}\{f(x_k + \alpha d_k) : 0 \leq \alpha \leq \alpha_1\}$ (Búsqueda de línea)
  Actualizar $x_k + \alpha d_k$
end if
k=k+1

Ejemplo 1

$$\begin{aligned} \min \; & x_1 - x_2 \\ \text{s.a. } & 1 \leq x_1 \leq 3 \\ & 1 \leq x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

Condiciones iniciales:

- $x^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $W = \{2, 3\}$

Ejemplo 2

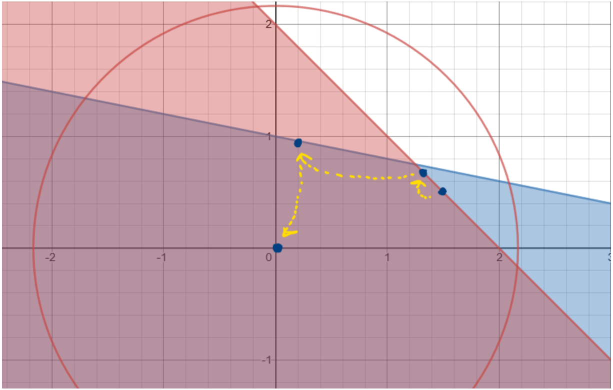
$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a. } & x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \\ & x_1 + 5x_2 - 5 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Punto inicial:

- $x^0 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

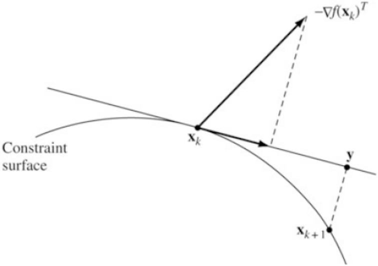
Ejemplo 2 (Cont.)

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1{,}25 \\ 0{,}75 \end{bmatrix},\ x^2 = \begin{bmatrix} 0{,}192 \\ 0{,}961 \end{bmatrix},\ x^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Gradiente proyectado

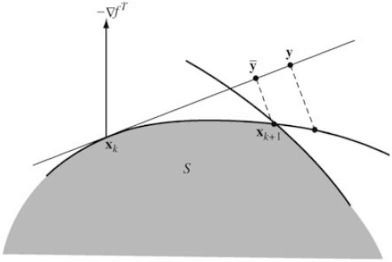
Restricciones no lineales.



- Riesgo de moverse fuera de la región factible
- Volver a la restricciones activas
- Proceso de prueba y error

Gradiente proyectado

- Volver a la restricción activa es un problema no lineal que puede ser resuelto con un método iterativo



Proyección de las restricciones activas:

$$P = I - \nabla h(x_k)'(\nabla h(x_k)\nabla h(x_k)')^{-1}\nabla h(x_k)$$