Módulo 3: Dualidad

Departamento MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario

Primer Semestre de 2021

Agenda

Dualidad

- Problema lineal asociado
- Se resuelve simultáneamente
- Puede usarse para obtener solución al problema original
- Interpretación económica
- Problema original: Primal
- Problema asociado: Dual

Dualidad

Ejemplo:

- Una compañía relojera produce dos tipos de relojes, un tipo de gama media (GM) y otro tipo de gama alta (GA), los cuales vende a 2 y 3 pesos respectivamente. Para producir un reloj GM se necesita un gramo de plata y dos gramos de oro, mientras que para producir un reloj GA se necesita un gramo de plata y un gramo de oro. LA compañía cuenta con 3 gramos de plata y 4 de oro. La empresa desea maximizar sus ingresos por la venta de relojes.

Agenda

Formato canónico de dualidad

Problema primal (P):

$$\begin{aligned} \min\ & c'x \\ \text{s.a. } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual (D):

$$\begin{aligned} \max\ & w'b \\ \text{s.a. } & w'A \leq c' \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

Formato canónico de dualidad - Ejemplo

Primal:

$$
\begin{aligned}
\min\ & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a. } & 3x_1 + x_2 \geq 4 \\
& 5x_1 + 2x_2 \geq 7 \\
& x_1 + 3x_2 \geq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dual:

Formato canónico de dualidad - Ejemplo

Primal:

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a. } & 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ & 5x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \max\ & 4w_1 + 7w_2 + 5w_3 \\ \text{s.a. } & 3w_1 + 5w_2 + w_3 \leq 3 \\ & w_1 + 2w_2 + 3w_3 \leq 2 \\ & w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Formato estándar de dualidad

Problema primal:

$$\begin{aligned} \min\ & c'x \\ \text{s.a. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Formato estándar de dualidad

Problema primal:

$$\begin{aligned} \min\ & c'x \\ \text{s.a. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual:

$$\begin{aligned} \max\ & w'b \\ \text{s.a. } & w'A \leq c' \\ & w \text{ no restringido} \end{aligned}$$

Formato estándar de dualidad - Ejemplo

Primal:

$$
\begin{aligned}
\min\ & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a. } & 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
& 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dual:

Formato estándar de dualidad - Ejemplo

Primal:

$$
\begin{aligned}
\min\ & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a. } & 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
& 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dual:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4w_1 + 7w_2 \\
\text{s.a. } & 3w_1 + 5w_2 \leq 3 \\
& w_1 + 2w_2 \leq 2 \\
& 2w_1 + 4w_2 \leq 0 \\
& w_1, w_2 \text{ no restringidas}
\end{aligned}
$$

El problema dual del problema dual

Dual:

$$\begin{aligned} \max\ & w'b \\ \text{s.a. } & w'A \leq c' \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

El problema dual del problema dual

Dual:

$$\begin{aligned} \max\ & w'b \\ \text{s.a. } & w'A \leq c' \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} \min\ & -b'w \\ \text{s.a. } & -A'w \geq -c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

El problema dual del problema dual

Dual:

$$\begin{aligned} \max\ & w'b \\ \text{s.a. } & w'A \le c' \\ & w \ge 0 \end{aligned}$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{aligned} \min\ & -b'w \\ \text{s.a. } & -A'w \ge -c \\ & w \ge 0 \end{aligned}$$

$$\nearrow$$

Dual del Dual:

$$\begin{aligned} \max\ & y'(-c) \\ \text{s.a. } & y'(-A') \le -b' \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

El problema dual del problema dual

Dual:

$$\begin{aligned} \max\ & w'b \\ \text{s.a. } & w'A \leq c' \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{aligned} \min\ & -b'w \\ \text{s.a. } & -A'w \geq -c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

$$\nearrow$$

Dual del Dual:

$$\begin{aligned} \max\ & y'(-c) \\ \text{s.a. } & y'(-A') \leq -b' \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{aligned} \min\ & c'y \\ \text{s.a. } & Ay \geq b \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Relaciones entre variables y restricciones

min		max	
Variable		Restricción	
Restricción		Variable	

Relaciones entre variables y restricciones

min		max	
Variable	≥ 0	Restricción	$\leq$
Restricción	$=$	Variable	no rest.

Relaciones entre variables y restricciones

min		max	
Variable	≥ 0	Restricción	$\leq$
Restricción	$\geq$ $=$	Variable	≥ 0 no rest.

Relaciones entre variables y restricciones

min		max	
Variable	≥ 0 no rest.	Restricción	$\leq$ $=$
Restricción	$\geq$ $=$	Variable	≥ 0 no rest.

Relaciones entre variables y restricciones

min		max	
Variable	≥ 0	Restricción	$\leq$
	≤ 0		$\geq$
	no rest.		$=$
Restricción	$\geq$	Variable	≥ 0
	$=$		no rest.

Relaciones entre variables y restricciones

min		max	
Variable	≥ 0	Restricción	$\leq$
	≤ 0		$\geq$
	no rest.		$=$
Restricción	$\geq$	Variable	≥ 0
	$\leq$		≤ 0
	$=$		no rest.

Relaciones entre variables y restricciones (cont.)

Ejemplo 1:

Primal:

$$
\begin{aligned}
\min\ & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a. } & 3x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 5x_1 + 2x_2 = 3 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

Dual:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4w_1 + 3w_2 \\
\text{s.a. } & 3w_1 + 5w_2 \leq 3 \\
& w_1 + 2w_2 \geq 2 \\
& w_1 \leq 0 \\
& w_2 \text{ no rest.}
\end{aligned}
$$

Agenda

1. Dualidad
2. El problema dual
3. Relaciones primal-dual
4. Holgura complementaria

Formato canónico de dualidad

Problema primal (P):

$$\begin{aligned} \min\ & c'x \\ \text{s.a. } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual (D):

$$\begin{aligned} \max\ & w'b \\ \text{s.a. } & w'A \leq c' \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidad débil

- x_0: sol. factible primal (min)
- w_0: sol. factible dual (max)
- $Ax_0 \geq b \Leftrightarrow w_0'Ax_0 \geq w_0'b$
- $c' \geq w_0'A \Leftrightarrow c'x_0 \geq w_0'Ax$
- $\Rightarrow c'x_0 \geq w_0'b$
- Para todo par de soluciones factibles x_0 y w_0 de los problemas de min. y max., $c'x_0 \geq w_0'b$

Dualidad débil (cont.)

- x_0: sol. factible primal (min)
- w_0: sol. factible dual (max)

- Si $c'x_0 = w_0'b \Rightarrow x_0$ y w_0 soluciones óptimas

- Si uno de los problemas no tiene óptimo finito, el otro no es factible
- Si uno de los problemas no es factible, el otro puede no tener óptimo finito o no ser factible

Dualidad fuerte

- El primal tiene una solución óptima finita $\Leftrightarrow$ el dual también la tiene
- El valor óptimo de sus funciones objetivo coincide

- Defina $w' = c_B' B^{-1}$ en la solución básica factible óptima del primal
- w es una solución factible del dual
- $w'b = c_B' B^{-1} b = c_B' x_B = c' x \Rightarrow w$: sol. óptima del dual

Teorema Fundamental de Dualidad

Teorema

Para una pareja de problemas P y D, una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta

- *P y D tienen soluciones óptimas* x^* *y* w^* *tales que* $c'x^* = b'w^*$
- *Un problema no tiene óptimo finito y el otro no es factible*
- *Ambos problemas son no factibles*

Ejemplo

Primal:

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a. } & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \max\ & 3w \\ \text{s.a. } & w \leq 3 \\ & w \leq -2 \\ & w \leq 0 \end{aligned}$$

- Soluciones factibles primal: $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
- Soluciones factibles dual: $w = -5, -10, -3, -2$
- Soluciones óptimas: $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $w = -2$
- Iteraciones del simplex: $I_B = \{1\} \to \{3\} \to \{2\}$

Ejemplo 2

Primal:

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a. } & x_1 + x_2 \leq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \max\ & -3w \\ \text{s.a. } & w \leq 3 \\ & w \leq -2 \\ & w \leq 0 \end{aligned}$$

- Primal no factible
- Dual sin óptimo finito

Ejemplo 3

Primal:

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a. } & x_1 + x_2 \leq -3 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \max\ & -3w_1 + 3w_2 \\ \text{s.a. } & w_1 + w_2 \geq 3 \\ & w_1 + w_2 \leq -2 \\ & w_1 \leq 0, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Primal no factible
- Dual no factible

Agenda

Holgura complementaria

Teorema

Un par de soluciones factibles x y w para los problemas P y D, respectivamente, son óptimas si y solo si

1. $(c' - w'A)x = 0$ *y*
2. $w'(Ax - b) = 0$

Holgura complementaria (cont.)

1. $(c_j - w^{*\prime} a_j)x_j^* = 0, \; j = 1, \ldots, n$
2. $w_i^*(a^i x^* - b_i) = 0, \; i = 1, \ldots, m$

Implicaciones:

- Si $w_i^* > 0 \Rightarrow a^i x^* = b_i, \; i = 1, \ldots, m$
- Si $a^i x^* > b_i \Rightarrow w_i^* = 0, \; i = 1, \ldots, m$
- Si $x_j^* > 0 \Rightarrow w^{*\prime} a_j = c_j, \; j = 1, \ldots, n$
- Si $w^{*\prime} a_j < c_j \Rightarrow x_j^* = 0, \; j = 1, \ldots, n$

Holgura complementaria (cont.)

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a. } & x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \max\ & 4w_1 + 3w_2 \\ \text{s.a. } & w_1 + 2w_2 \leq 2 \\ & w_1 + w_2 \leq 2 \\ & 3w_1 + w_2 \leq 3 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Holgura complementaria (cont.)

Solución gráfica del dual:

- Intersección de $w_1 + 2w_2 \leq 2$ y $3w_1 + w_2 \leq 3$
- $w^{*\prime} = [4/5 \ 3/5] > 0$, $w^{*\prime} b = 5$

Holgura complementaria $((c_j - w^{\prime *} a_j) x_j^* = 0)$:

- $j = 1$, $2 - [4/5 \ 3/5] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (2-2)x_1^* = 0$
- $j = 2$, $2 - [4/5 \ 3/5] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 3/5 x_2^* = 0 \Rightarrow x_2^* = 0$
- $j = 3$, $3 - [4/5 \ 3/5] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (3-3)x_1^* = 0$

Holgura complementaria (cont.)

Holgura complementaria ($w_i^*(a^i x^* - b_i) = 0$):

- $i = 1,\ w_1^* = 4/5 \Rightarrow a^1 x^* = b_1 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = 4 \Rightarrow x_1^* + 3x_3^* = 4$
- $i = 2,\ w_2^* = 3/5 \Rightarrow a^2 x^* = b_2 : \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow 2x_1^* + x_3^* = 3$
- $x_1^* = 4 - 3x_3^*$
- $2x_1^* + x_3^* = 2(4 - 3x_3^*) + x_3^* = 8 - 5x_3^* = 3 \Rightarrow x_3^* = 1$
- $\Rightarrow x_1^* = 1$

Holgura complementaria (cont.)

- $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $c'x^* = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$