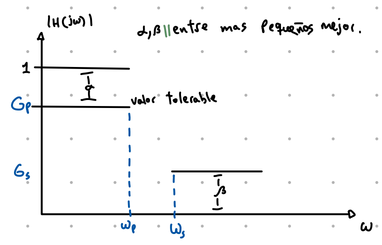
Diseño de Filtros Digitales

Para el diseño de filtros digitales partimos del diseño de un filtro en tiempo continuo.

Características de un filtro Pasa-bajas en tiempo continuo



- G_p = Ganancia de paso, dada en dB.
- G_s = Ganancia de rechazo, dada en dB.
- ω_p = frecuencia de paso.
- ω_s = frecuencia de rechazo.

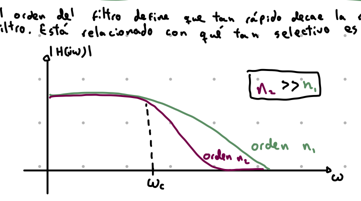
Filtros Butterworth

Las respuestas en frecuencia de un filtro Butterworth está dada por:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}$$

Donde ω_c es la frecuencia de corte del filtro y n es el orden del filtro.

El orden del filtro define que tan rápido decae la respuesta del filtro. Está relacionado con qué tan selectivo es el filtro.



El orden tambien se relaciona con el número de polos que tiene el sistema.

Si estudíamos el cuadrado de la respuesta en frecuencia del filtro obtenemos:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

El objetivo es encontrar un sistema que tenga esta respuesta en frecuencia.

Como $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ entonces a partir de la respuesta en frecuencia podemos obtener la función de transferencia del filtro

$$|H(j\omega)|^2 = |\underbrace{H(s)}_{\text{función de transferencia}}|^2_{s=j\omega} = H(s)\,H(-s)$$

Si $s = j\omega$ entonces $\omega = \frac{s}{j}$ de allí obtenemos que:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2n}}$$

esto se puede expresar como:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{B_n(s)}$$

donde $B_n(s)$ es un polinomio en s denominado el polinomio de Butterworth.

¿Cómo encontrar los valores de ω_c y de n para un filtro?

Suponiendo que se tiene como criterio de diseño G_p, G_s, ω_p y ω_s, la ganancia de un filtro en dB (decibeles) está dada por:

$$G_x = 20 \log_{10} |H(j\omega_x)|$$

La cual es la ganancia del filtro para la frecuencia ω_x.

Nota

La frecuencia de corte de un filtro se denomina a la frecuencia a la cual una senosuidal de entrada de dicha frecuencia, produce, como salida la mitad de la potencia de la señal. Es decir:

$$|H(j\omega)|^2 = 0.5$$

Ahora como:

$$\begin{aligned} G_c &= 20 \log_{10} |H(j\omega_c)| \\ &= 10 \log_{10} |H(j\omega_c)|^2 \\ &= 10 \log_{10}(0.5) \\ &\underbrace{\approx -3\ dB}_{\text{Ganancia en la frecuencia de corte}} \end{aligned}$$

La frecuencia de corte, ω_c, de un filtro es aquella donde $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $|H(j\omega)|^2 = 0.5$ o la ganancia en dB es de -3 dB.

Teniendo en cuenta la ecuación de ganancia, se pueden realizar las siguientes simplificaciones:

$$\begin{aligned} G_x &= 20 \log_{10} |H(j\omega)| \\ &= 10 \log_{10} |H(j\omega)| \\ &= 10 \log_{10} \left|\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^{2n}}}\right|^2 \\ &= 10\left(\log_{10}(1) - \log_{10}\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^{2n}}^{\,2}\right) \\ &= -10 \log_{10}\left(1+(\omega/\omega_c)^{2n}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se tienen los datos ω_p, G_p, ω_s y G_s, se pueden obtener las siguiente ecuaciones:

$$G_p = -10 \log_{10}\left(1+(\omega_p/\omega_c)^{2n}\right)$$

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n} = 10^{-G_p/10} - 1$$

y de la misma forma

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n} = 10^{-G_s/10} - 1$$

Por lo tanto, al dividir las ecuaciones queda:

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2n} = \frac{10^{-G_s/10}-1}{10^{-G_p/10}-1}$$

* Si se quiere resolver para n, queda:

$$n = \frac{\log_{10}\left[\left(10^{-G_s/10}-1\right)/\left(10^{-G_p/10}-1\right)\right]}{2\log_{10}(\omega_s/\omega_p)}$$

como n debe ser entero, se debe escoger el entero más cercano para arriba al n determinado por la ecuación.

* Si se quiere encontrar el valor para ω_c, se despejan de las ecuaciones:

$$\omega_c = \frac{\omega_p}{\left(10^{-G_p/10}-1\right)^{1/2n}} \quad \text{o} \quad \omega_c = \frac{\omega_s}{\left(10^{-G_s/10}-1\right)^{1/2n}}$$

Al utilizar un n entero, es posible que ambas ecuaciones no retornen el mismo resultado. En ese caso se escoje según el problema. En general, se busca satisfacer las condiciones de la banda de paso.

Encontrando la función de Transferencia y la ubicación de los polos del sistema.

Se sabe que la función de transferencia de un filtro Butterworth es:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2n}}$$

Si suponemos $\omega_c = 1$ queda

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}}$$

Luego los polos de la función estan ubicados en raices de:

$$1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = 0$$

$$\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = -1$$

$$s^{2n} = -1(j)^{2n} \qquad \| -1 = e^{j\pi(2k-1)}$$

$$s^{2n} = e^{j\pi(2k-1)}\left(e^{j\pi/2}\right)^{2n} \qquad \| j = e^{j\pi/2}$$

$$s^{2n} = e^{j\pi(2k-1)}e^{jn\pi}$$

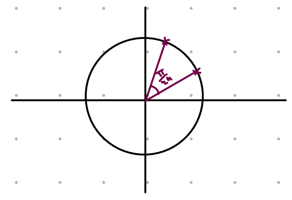
$$s^{2n} = e^{j\pi(2k+n-1)}$$

$$S_k = \left[e^{j\pi(2k+n-1)}\right]^{1/2n} \qquad \| \text{Con } k \in 1:2n \text{ ya que se tienen } 2n \text{ raices.}$$

De esa forma con S_k se pueden obtener los $2n$ polos del filtro en tiempo continuo.
Cómo $\omega_c = 1$, si reemplazamos por $\frac{s_k}{\omega_c}$ se obtiene

$$S_k = \omega_c\left[e^{j\pi(2k+n-1)}\right]^{1/2n}$$

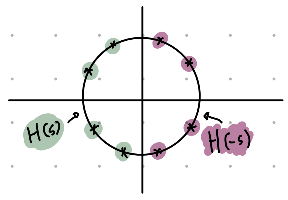
Es decir, los polos de un filtro Buterworth de orden n y frecuencia de corte ω_c esta ubicados en un circulo de radio ω_c, y estan separados por un ángulo de $\frac{\pi}{2n}$.



Por lo tanto

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_{2n})}$$

Como se quiere que sea estable, definimos los S_k que se encuentran en el lado izquierdo del plano S.



Estabilidad

- Un sistema es estable si para una entrada acotada, la salida es acotada.

- Sabemos que la respuesta en frecuencia de un sistema esta dada por $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$. Además la respuesta al impulso del sistema es la inversa de la transformada de fourier de la respuesta en frecuencia:

$$h(t) = F^{-1}[H(j\omega)]$$

Se puede probar tambien que:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

es decir, la respuesta al impulso es la inversa de la transformada de La Place de la función de transferencia. Como $H(s)$ se puede expresar de la forma:

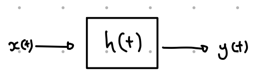
$$H(s) = \frac{c}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$

Lo cual puede llevarse a fracciones parciales:

Por lo tanto:
$$H(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_k}{s-s_k}$$

$$h(t) = A_1e^{s_1t} + \dots + A_ke^{s_kt}$$

Por otro lado, la salida de un sistema con respuesta al impulso $h(t)$ y entrada $x(t)$ dado por:



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)}_{\text{acotada}} h(t-\tau)\,d\tau \qquad \| \text{Para que } y(t) \text{ sea acotada, } h(t) \text{ también debe serlo.}$$

Para que esto se cumpla, $h(t)$ debe desvanecerse en el tiempo. Si revisamos $h(t)$ se tiene:

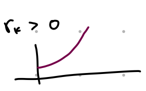
$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{s_kt}$$

donde $S_k = r_k + j\omega_k$. Es decir:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{r_kt}e^{j\omega_kt}$$

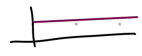
Se tiene que $e^{j\omega_kt}$ es una señal oscilatoria que no se desvanece. Por otro lado e^{r_kt} es una exponencial que:

- $r_k > 0$



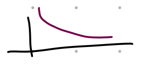
|| Crece.

- $r_k = 0$



|| constante.

- $r_k < 0$



|| Decrece.

Por lo tanto, para que el sistema sea estable, es decir, para que $h(t)$ se desvenezca $r_k < 0$. Por lo tanto, para que un sistema sea estable, los polos deben estar en el lado izquierdo del plano complejo

- Ya tenemos el filtro en tiempo Continuo, como lo pasamos a tiempo discreto?

Transformada Z

Sea una señal muestreada X_p.

$$X_p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-nT_s)$$ || T_s = Periodo de muestreo.

Por lo tanto

$$X_p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\,\delta(t-nT_s)$$

Si calculamos la transformada de La Place de $X_p(t)$ se tiene:

$$\mathcal{L}[X_p(t)] = X_p(s) = \mathcal{L}\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,\delta(t-nT_s)$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)}_{\text{constante}}\ \mathcal{L}[\delta(t-nT_s)]$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-sT_0}\cdot F(s)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}[\delta(t-nT_s)] = e^{-snT_s}$$

Es decir

$$X_p(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\,(e^{sT_s})^{-n}$$

Si se define $z = e^{sT_s}$ se tiene

$$X_p(s) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\,Z^{-n}}_{\text{Esta expreción se conoce como la transformada } z \text{ de la secuencia de datos } x[n].} = X_p(z)$$

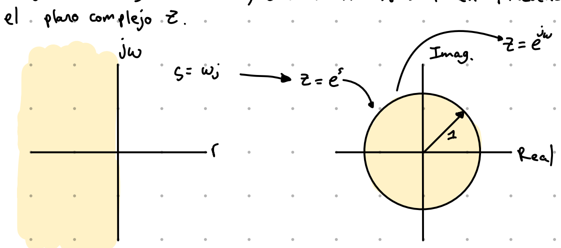
* Para simplificar, se asume $T_s = 1$ y $X(nT_s) = X[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,z^{-n}$$

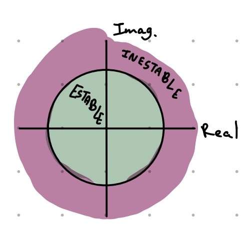
La transformada z es el analogo a la transformada de La Place en tiempo discreto.

Propiedades Importantes

1. La respuesta en frecuencia en tiempo continuo se obtiene mapeando $H(s)$ en $s = j\omega$. En la transfomada Z, como $s = j\omega$ y $z = e^{s} = e^{j\omega}$, entonces la respuesta en frecuencia se obtiene mapeando el circulo unitario en el plano complejo Z.



2. Si un sistema en tiempo continuo es estable si sus polos estan al lado izquierdo del plano S, el equivalente es que en tiempo discreto es estable si sus polos so encuentran dentro del círculo unitario.



3. Si $y[n]$ tras la Transformada Z queda $Y(z)$, entonces $y[n-d]$ tras la Transformada Z, resulta $z^{-d}Y(z)$.

Demostración

Si:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\,z^{-n}$$

Ahora, sea $y_1[n] \to y[n-d]$ entonces:

$$Y_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1[n]\,z^{-1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-d]\,z^{-1}$$

Si $m = n-d$ entonces:

$$n = m + d$$

entonces
Si $n \to -\infty$ entonces $m \to -\infty$
Si $n \to \infty$ entonces $m \to \infty$

Luego:

$$Y_1(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m]\,z^{-(m+d)}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m]\,z^{-m}z^{-d}$$

$$= z^{-d}\underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m]\,z^{-m}}_{Y(z)}$$

$$Y_1(z) = z^{-d}Y(z)$$

4. Si la función de transferencia de un sistema en tiempo continuo es $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$, la funcion de transferencia de un sistema de tiempo discreto es:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

~> ¿Cómo transformar un filtro en tiempo continuo en un filtro en tiempo discreto?

Transformación Bilineal.

Al pasar a tiempo discreto, el eje de frecuencias $j\omega$ se convirtió ahora en el círculo unitario. En sí la parte positiva del eje de frecuencias $j\omega$ está representada por el semi círculo superior del círculo unitario. Es decir, las frecuencias $[0, \omega]$ para $\omega \to \infty$ están mapeadas entre $[0, \pi]$.
Sin embargo, por el teorema de Nyquist, sabemos que una señal al muestrearse, para que pueda reconstruirse, debe ser de banda limitada, donde la máxima frecuencia de la señal es $\frac{f_s}{2}$, lo que equivale a $\frac{\omega_s}{2}$ en el eje de frecuencias ω. Por lo tanto, una señal en tiempo continuo con frecuencias entre $[0, \omega_s/2]$ se mapea en la parte superior del semi círculo unitario entre ángulos $[0, \pi]$.
Se llama a esta frecuencia angular discreta Ω. La transformación bilineal, transforma de transferencia continua a una discreta, mediante el cambio de variable.

$$S = \frac{2}{T_s}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

Como $z = e^{j\Omega}$, se tiene:

$$S = \frac{2}{T_s}\left(\frac{1-e^{-j\Omega}}{1+e^{-j\Omega}}\right)$$

$$= \frac{2}{T_s}\left(\frac{2e^{-j\Omega/2}(j\cdot\sin(\Omega/2))}{2e^{-j\Omega/2}(\cos(\Omega/2))}\right)$$

$$= \frac{2}{T_s} j\cdot\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

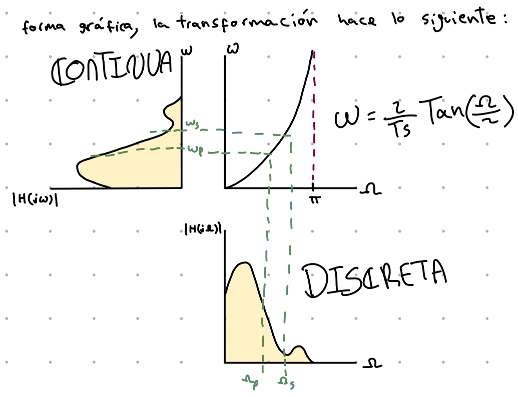
Aún cuando $s = r + j\omega$, para poder hallar la respuesta en frecuencia se mapea en $s = j\omega$. Se tiene:

$$j\omega = \frac{2}{T_s} j\cdot\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

Es decir, se realiza un mapeo de la frecuencia continua ω, a la frecuencia de la señal discreta Ω de la forma

$$\omega = \frac{2}{T_s}\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

~> De la forma gráfica, la transformación hace lo siguiente:



Resumen

Para diseñar un filtro en tiempo discreto se debe:

1. Diseñar un filtro en tiempo continuo, en función de los parámetros: G_s, G_p, ω_s y ω_p.
2. Encontrar el $H(s)$ (función de transfomación del filtro en tiempo continuo).
3. Utilizar la transformación bilineal para encontrar $H(z)$.

$$S = \frac{2}{T_s}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$