1. Considere el problema restringido

$$\begin{aligned} \text{mín } & x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a } & x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & x_1 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

   (a) Encuentre un punto que satisfaga la condición necesaria de primer orden.
   (b) ¿Es regular el punto que encontró en el literal anterior?
   (c) ¿Satisface el punto que encontró en el literal anterior la condición necesaria de segundo orden? ¿La condición suficiente de segundo orden?

2. Considere el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min\ & 5x_1^2 + 2x_2 + x_2^2 \\ \text{s.a. } & x_1^2 + x_2^2 = 9 \\ & 5x_1 + 6x_2 \geq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   (a) Usando KKT, encuentre los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones en el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. ¿El punto dado cumple con la condición necesaria de primer orden de KKT?
   (b) ¿Es el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\lambda = -4/3$ (multiplicador asociado a la restricción de igualdad) un mínimo local de este problema?

3. Considere el problema restringido

$$\begin{aligned} \text{mín } & (x_1 + 5)^2 + (x_2 + 4)^2 \\ \text{s.a } & x_1 + x_2^2 = 4, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4. \end{aligned}$$

   (a) Encuentre dos puntos que satisfagan la condición necesaria de primer orden (pista: dibuje la región factible y las curvas de nivel para identificar estos puntos).
   (b) ¿Son regulares los puntos que encontró en el literal anterior?
   (c) ¿Satisfacen estos puntos la condición necesaria de segundo orden? ¿La condición suficiente de segundo orden?

4. Considere el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - 1 \\ \text{s.a. } & 5x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

(a) Muestre que el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1/14 \\ 1/7 \end{bmatrix}$ cumple con la condición necesaria de primer orden de KKT.

(b) ¿Es el punto $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1/14 \\ 1/7 \end{bmatrix}$ un mínimo local de este problema?

5. Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{máx } & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a. } & x_2 \leq (x_1 - 2)(x_1 - 1)(x_1 + 1)(x_1 + 2) \\ & x_1 \geq -2 \\ & x_1 \leq 1 \end{aligned}$$

Sin resolver el problema de optimización, estudie las condiciones de KKT para los puntos $\hat{x} = (0, 4)$ y $\overline{x} = (1, 0)$. ¿Qué puede decir de estos puntos? ¿qué es lo más preciso que puede afirmar?

6. Utilizando la condición suficiente de segundo orden, encuentre un mínimo local para el problema

$$\begin{aligned} \text{mín } & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a } & x_1^2 - x_2 \leq 4, \\ & x_2 - x_1 \leq 2. \end{aligned}$$

de aqui hacia abajo empiezan algoritmos (conjuntos activos, direcciones factibles, gradiente proyectado, penalización y barrera,)

7. Considere el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 - x_2 \\ \text{s.a. } & x_1 + x_2 = 2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & -x_1 + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Resuelva el problema usando el método de conjuntos activos con punto inicial $x_0 = (2, 0)$.

8. Considere el problema

$$\begin{aligned} \min\ & (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s.a. } & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva el problema usando el método de direcciones factibles, con el punto inicial $x_0 = (4, 0)$.

9. Resolver usando el método de direcciones factibles

$$\begin{aligned} \text{mín } & (x_1-6)^2+(x_2-2)^2 \\ \text{s.a } & -x_1+2x_2 \leq 4, \\ & 3x_1+2x_2 \leq 12, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

10. Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{min } & x_1^2+(x_2-3)^2 \\ \text{s.a. } & -x_1+x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Utilice el método de direcciones factibles para resolver el problema, usando como punto inicial $x_0=(0,1)$.

11. Considere el problema de minimización

$$\begin{aligned} \text{min } & x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1-3x_4 \\ \text{s.a. } & 2x_1+x_2+x_3+4x_4=7 \\ & x_1+x_2+2x_3+x_4=6 \\ & x_i \geq 0, \ i=1,2,3,4 \end{aligned}$$

(a) Resuelva el problema usando el método de gradiente proyectado con $x_0=\begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix}$ y $W=\{3,4\}$

12. Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{min } & 2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-x_1-6x_2 \\ \text{s.a. } & x_1+x_2 \leq 2 \\ & x_1+5x_2 \leq 5 \\ & x_i \geq 0, \ i=1,2 \end{aligned}$$

Resuelva el problema usando el método de gradiente proyectado con $x_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ y $W=\{3,4\}$

13. Considere el problema

$$\begin{aligned} \min\ & (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

Utilice el método de gradiente proyectado para resolver este problema, comenzando en el punto $(0, 1)$.

14. Considere el problema

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + 2x_2^2 \\ \text{s.a.}\ & -x_1 - x_2 + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Usando el método de penalización, con una función de penalidad cuadrática, encuentre el multiplicador de Lagrange óptimo para el problema.

15. Considere el problema

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 x_2 \\ \text{s.a.}\ & x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0 \end{aligned}$$

Usando el método de penalización, con una función de penalidad cuadrática, encuentre el multiplicador de Lagrange óptimo para el problema.

16. Considere el problema

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 + x_2^2 \\ \text{s.a.}\ & x_1 + x_2 \leq 6 \end{aligned}$$

Usando el método de barrera, con una función de barrera logarítmica (logaritmo natural), encuentre la solución óptima del problema.

17. Considere el problema de minimización

$$\begin{aligned} \min\ & x \\ \text{s.a.}\ & x^2 \geq 0 \\ & x + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

(a) Escriba la función de penalización para este problema.

(b) Para varios valores de la constante de penalización, resuelva el problema penalizado no restringido. ¿A qué valor converge el óptimo de estos problemas al aumentar el valor de la constante de penalización?

18. Considere el problema

$$\min\ 2e^{x_1} + 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$$
$$\text{s.a. } 3x_1 + 2x_2 - 6 = 0.$$

(a) Formule un problema penalizado con constante de penalización $\gamma = 10$.

(b) Inicie en el punto $[1, 1]$ y realice dos iteraciones del método del gradiente para resolver el problema penalizado.