Módulo 5: Métodos de Optimización No Restringida

Departamento MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario

Primer Semestre de 2021

Agenda

1. Búsqueda de línea con intervalos
   - Sección áurea
2. Búsqueda de línea con interpolación
   - Ajuste cuadrático
3. Taller en clase - tarea
4. Búsqueda de línea con derivadas
   - Método de Newton

Sección áurea

- Iteración con $[a_k,\ b_k]$
- Long. de nuevo intervalo: $\mu_k - a_k$ o $b_k - \lambda_k$
- λ_k y μ_k tal que long. nuevo intervalo no depende de $f(\lambda)$ vs. $f(\mu)$:
  - $\mu_k - a_k = b_k - \lambda_k$
  - $\frac{\mu_k - a_k}{b_k - a_k} = \alpha = \frac{b_k - \lambda_k}{b_k - a_k}$
- Entonces
  - $\mu_k = a_k + \alpha(b_k - a_k)$
  - $\lambda_k = a_k + (1-\alpha)(b_k - a_k)$
  - $\Rightarrow \mu_k - \lambda_k = (2\alpha - 1)(b_k - a_k)$

Sección áurea (cont.)

- Escoger λ_{k+1} y μ_{k+1} tal que se reutilice λ_k o μ_k
- Caso 1: $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$
  - $a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$: reutilizar $\mu_k (= \lambda_{k+1})$
  - $\mu_k = \lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1-\alpha)(b_{k+1} - a_{k+1}) = \lambda_k + (1-\alpha)(b_k - \lambda_k)$
  - $\Rightarrow \mu_k - \lambda_k = (1-\alpha)(b_k - \lambda_k)$
  - $b_k - \lambda_k = b_k - a_k - (1-\alpha)(b_k - a_k) = \alpha(b_k - a_k)$
  - $\Rightarrow \mu_k - \lambda_k = (1-\alpha)\alpha(b_k - a_k)$

Sección áurea (cont.)

- $\mu_k - \lambda_k = (2\alpha - 1)(b_k - a_k)$
- $\mu_k - \lambda_k = (1 - \alpha)\alpha(b_k - a_k)$
- $\Rightarrow 2\alpha - 1 = \alpha(1 - \alpha)$
- $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$
- $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx \{-1{,}618;\ 0{,}618\}$
- $\alpha = 0{,}618$

Sección áurea (cont.)

- Caso 2: $f(\lambda_k) < f(\mu_k)$
  - $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \mu_k$: reutilizar $\lambda_k(\mu_{k+1})$
  - $\lambda_k = \mu_{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1}) = a_k + \alpha(\mu_k - a_k)$
  - $\Rightarrow \lambda_k - a_k = \alpha(\mu_k - a_k) = \alpha(a_k + \alpha(b_k - a_k) - a_k) = \alpha^2(b_k - a_k)$
- Dado que $\lambda_k - a_k = (1 - \alpha)(b_k - a_k)$
  - $\Rightarrow \alpha^2 = 1 - \alpha$
  - $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$
  - $\alpha \approx 0{,}618$

Sección áurea (cont.)

- Cada iteración: factor de reducción de 0.618 con una evaluación (excepto primera)
- $\Rightarrow$ Relación de reducción: $(0{,}618)^{n-1}$

Sección áurea - Algoritmo

Paso 0: Long. final de intervalo l, intervalo inicial $[a_0, b_0]$, $k = 0$
$\lambda_0 = a_0 + (1-\alpha)(b_0 - a_0), f(\lambda_0)$
$\mu_0 = a_0 + \alpha(b_0 - a_0), f(\mu_0)$
Paso 1:
if $b_k - a_k < l$ **then**
  Stop, $\lambda^* \in [a_k,\ b_k]$
else
  if $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ **then**
    Go to Paso 2
  else
    Go to Paso 3
  end if
end if

Sección áurea - Algoritmo (cont.)

Paso 2 ($f(\lambda_k) > f(\mu_k)$):

$a_{k+1} = \lambda_k, b_{k+1} = b_k, \lambda_{k+1} = \mu_k$

$\mu_{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1})$

$f(\mu_{k+1})$, $k = k + 1$, Go to Paso 1

Paso 3 ($f(\lambda_k) < f(\mu_k)$):

$a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = \mu_k, \mu_{k+1} = \lambda_k$

$\lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1 - \alpha)(b_{k+1} - a_{k+1})$

$f(\lambda_{k+1})$, $k = k + 1$, Go to Paso 1

Agenda

1. Búsqueda de línea con intervalos
   - Sección áurea
2. Búsqueda de línea con interpolación
   - Ajuste cuadrático
3. Taller en clase - tarea
4. Búsqueda de línea con derivadas
   - Método de Newton

Ajuste cuadrático

- Ajuste mediante la interpolación de tres puntos a una parábola que contiene el punto optimo
- Estimación de $\hat{x}$,

$$\hat{x}_k = \frac{b_{23} f_1 + b_{31} f_2 + b_{12} f_3}{2(a_{23} f_1 + a_{31} f_2 + a_{12} f_3)}$$

donde, $b_{ij} = x_i^2 - x_j^2$ y $a_{ij} = x_i - x_j$.

Ajuste cuadrático - Algoritmo

Paso 0: Long. final de intervalo l, intervalo inicial $[x_1, x_2, x_3]$, $k = 0$
Paso 1: $x_1, f(x_1); x_2, f(x_2); x_3, f(x_3)$
$\hat{x}_k, f(\hat{x}_k)$
if $x_3 - x_1 < \varepsilon$ **then**
  Stop, $\hat{x}_k \in [x_1, x_3]$
else
  if $\hat{x}_k > x_2$ **then**
    Go to Paso 2
  else if $\hat{x}_k < x_2$ **then**
    Go to Paso 3
  else if $\hat{x}_k = x_2$ **then**
    Go to Paso 4
  end if
end if

Ajuste cuadrático - Algoritmo (cont.)

Paso 2 ($\hat{x}_k > x_2$):

if $f(\hat{x}_k) > f(x_2)$ **then** intervalo $[x_1, x_2, \hat{x}_k]$, Go to Paso 1

if $f(\hat{x}_k) \leq f(x_2)$ **then** intervalo $[x_2, \hat{x}_k, x_3]$, Go to Paso 1

Paso 3 ($\hat{x}_k < x_2$):

if $f(\hat{x}_k) > f(x_2)$ **then** intervalo $[\hat{x}_k, x_2, x_3]$, Go to Paso 1

if $f(\hat{x}_k) \leq f(x_2)$ **then** intervalo $[x_1, \hat{x}_k, x_2]$, Go to Paso 1

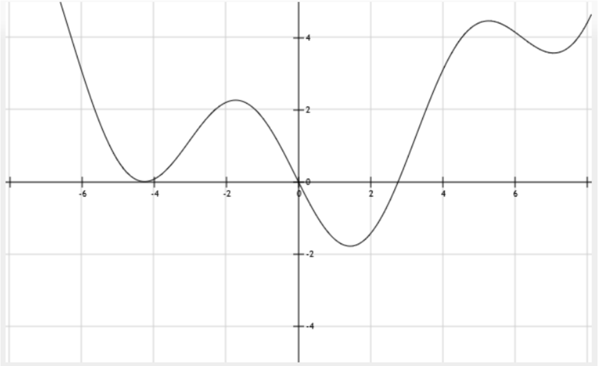
Paso 4 ($\hat{x}_k = x_2$):

$$\hat{x}_k = \begin{cases} x_2 + \varepsilon/2 & \text{if} \quad x_2 - x_1 < x_3 - x_2 \\ x_2 - \varepsilon/2 & \text{if} \quad x_2 - x_1 > x_3 - x_2 \end{cases}, \text{ Go to Paso 1}$$

Ajuste cuadrático - Ejemplo

- Encontrar el punto mínimo de la función, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, y $x_3 = 4$,

$$\min f(x) = \frac{x^2}{10} - 2\sin x$$



Agenda

Taller

Implemente el método de sección áurea en MATLAB y de interpolación cuadrática para resolver uno de los siguientes problemas,

- Grupo 1: mín $x^2 + 2x + 1, \quad -3 \leq x \leq 2$
- Grupo 2: mín $\frac{x^2}{2} + sen(x), \quad -3 \leq x \leq 3$
- Grupo 3: mín $x^2 + cos(x), \quad -4 \leq x \leq 2$
- Grupo 4: mín $\exp^{-x} + x^2 + 5, \quad -1 \leq x \leq 5$
- Grupo 5: mín $2\exp^{-x} + 2x^2, \quad -4 \leq x \leq 2$
- Grupo 6: mín $\frac{1}{2} exp^{-x} + x^2, \quad -4 \leq x \leq 4$

Taller

- Con los resultados obtenidos con el método de sección áurea, llene con al menos 5 iteraciones la siguiente tabla

iteración	a_k	b_k	λ_k	μ_k	$f(\lambda_k)$	$f(\mu_k)$
1						
2						
$\vdots$						

- Para el mismo problema, llene la siguiente tabla con los cuatro puntos de aproximación en cada iteración (al menos 5 iteraciones)

iteración	x_1	x_2	x_3	$\hat{x}$
1				
2				
$\vdots$				

Agenda

Método de Newton

- Método de Newton-Raphson para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- Valor optimo satisface $g(\hat{x}) = f'(\hat{x}) = 0$
- Mínimo de una función

$$x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

Método de Newton - Algoritmo

Paso 0: Punto inicial $x_0,\ k = 0$, error ε
Paso 1:
$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$
if $x_{k+1} - x_k < \varepsilon$ **then**
  Stop, $x^* \in [x_{k+1},\ x_k]$
else
  Repetir
end if

Método de Newton - Ejemplo

- Encontrar el punto mínimo de la función, $x_0 = 2{,}5$,

$$\min f(x) = \frac{x^2}{10} - 2\sin x$$