Ejemplo

Una industria manufacturera produce tres tipos de productos en dos máquinas. Plantear este problema como un programa lineal para maximizar el ingreso total de producción, sujeto a restricciones de tiempos de producción.

- Producir n productos en m máquinas
- b_i: tiempo disponible en la máquina i, $1 \leq i \leq m$ (horas)
- a_{ij}: tiempo requerido por el producto j en la máquina i, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ (horas por unidad)
- c_j: ingreso generado por cada unidad del producto j, $1 \leq j \leq n$ (dinero por unidad)

Ejemplo

Solución:

- Variable de decisión: x_j: cantidad a producir del item j, $1 \leq j \leq 3$ (unidades).
- Objetivo: $\max\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$
- Restricciones:

$$a_{A1}x_1 + a_{A2}x_2 + a_{A3}x_3 \leq b_A$$

$$a_{B1}x_1 + a_{B2}x_2 + a_{B3}x_3 \leq b_B$$

- No-negatividad: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

Ejemplo 2

Problema de transporte

Una compañía cafetera procesa los granos de café cosechados en m plantas diferentes, de la cuales el café sale despachado cada semana a n bodegas de almacenamiento para luego ser reempacado, distribuido y exportado. La planta i tiene una capacidad de producción de a_i unidades de café, y cada unidad de café que sale de la planta a la bodega j tiene un costo de transporte c_{ij}. Por su parte, la demanda de café en la bodega j es b_j.

Plantee este problema como un programa lineal que minimiza el costo de transporte de atender la demanda de café.

Ejemplo 2

Solución:

- Variables de decisión: x_{ij}: café despachado de la planta i a la bodega j, para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$
- Objetivo: min $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$
- Restricciones: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_{ij}$, $1 \leq i \leq m$ (producción)
- Restricciones: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq j \leq n$ (demanda)
- $x_{ij} \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, $1 \geq j \geq n$ (no-negatividad)

Ejemplo 3

- Se tiene un conjunto de n nodos que se quiere conectar
- Previamente se ha determinado el requerimiento de tráfico para cada arco de la red, definido como d_{ij} para $1 \leq i, j \leq n$, medido en Mbps
- Para el cableado se tienen 3 tecnologías, donde la tecnología k ofrece una tasa de transmisión de r_k Mbps por cada cable instalado, para $1 \leq k \leq 3$
- Además, instalar un cable de la tecnología k para atender el tráfico entre los nodos i y j tiene un costo c_{ijk}, para $1 \leq i, j \leq n$ y $1 \leq k \leq 3$
- Determine la cantidad y el tipo de cableado a usar para atender el tráfico proyectado en la red, a un mínimo costo
- Plantee este problema como un programa lineal

Ejemplo 3

Solución:

- Variables de decisión: x_{ijk}: número de cables de la tecnología k a instalar entre los nodos i y j, para $1 \leq i, j \leq n$ y $1 \leq k \leq 3$
- Objetivo: min $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{3} c_{ijk} x_{ijk}$
- Restricciones: $\sum_{k=1}^{3} r_k x_{ijk} \geq d_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$ (demanda)
- $x_{ijk} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq n$, $1 \geq k \geq 3$ (no-negatividad)

Ejemplo 4

- Presupuesto: 180 pesos
- Dos opciones de desarrollo: tipo 1 y tipo 2
- Costos:
    - Tipo 1: 30
    - Tipo 2: 20
- Rendimiento:
    - Salidas: 4
    - Salidas: 3
- Maximizar las posibilidades de atención de pacientes
- Variante: Solo hay espacio para 8 ventiladores

Ejemplo 4

Solución:

- Variables de decisión: x_i: número de ventiladores de la tecnología i a construir
- Objetivo: max $4x_1 + 3x_2$
- Restricciones: $30x_1 + 20x_2 \leq 180$ (costo)
- Restricciones - variante: $\sum_{i=1}^{2} x_i \leq 8$ (capacidad)
- $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 2$ (no-negatividad)

Ejemplo 5

Una fábrica de tejidos requiere fabricar dos tejidos de calidad diferente T y T'; se dispone de 500 Kg de hilo a, 300 Kg de hilo b y 108 Kg de hilo c. Para obtener un metro de T diariamente se necesitan 125 gr de a, 150 gr de b y 72 gr de c; para producir un metro de T' por día se necesitan 200 gr de a, 100 gr de b y 27 gr de c. El T se vende a \$4000 el metro y el T' se vende a \$5000 el metro. Si se debe obtener el máximo beneficio. Cuántos metros de T y T' se deben fabricar?

Ejemplo 5

Solución:

- Variables de decisión: x_T y $x_{T'}$: metros fabricados de cada tejido
- Objetivo: max $4000x_T + 5000x_{T'}$
- Restricciones: $125x_T + 200x_{T'} \leq 500$ (disponibilidad de a)
- Restricciones: $150x_T + 100x_{T'} \leq 300$ (disponibilidad de b)
- Restricciones: $72x_T + 27x_{T'} \leq 108$ (disponibilidad de c)
- $x_T \geq 0$, $x_{T'} \geq 0$ (no-negatividad)

Ejemplo 6

Un granjero dedicado a la cría de aves les proporciona una dieta diaria a las aves que consiste en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitaminas diarias. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2.5 unidades de hierro y 1 unidades de vitaminas y que cada kilo de compuesto proporciona 1 unidad de hierro y 2 de vitaminas. Sabiendo que el kilo de maíz vale 0.3 pesos y el de compuesto 0.52 pesos. Cuál es la composición de la dieta diaria que minimiza los costos del granjero?

Como cambia el espacio de solución si por escasez en el mercado el granjero no puede disponer de más de 1 kilo diario de compuesto?

Ejemplo 6

Solución:

- Variables de decisión: x_1 kilos de maíz y x_2: Kilos de compuesto
- Objetivo: min $0{,}3x_1 + 0{,}52x_2$
- Restricciones: $2{,}5x_1 + x_2 \geq 3$ (hierro)
- Restricciones: $x_1 + 2x_2 \geq 4$ (vitaminas)
- $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (no-negatividad)

- Restricción adicional: $x_2 \leq 1$ (escasez de compuesto)
  Ajustar el setido de la desigualdad: $-x_2 \geq -1$

Temas a revisar de álgebra lineal

- Vectores y matrices
- Independencia lineal
- Subespacios lineales
- Subespacio lineal generado por un conjunto de vectores
- Bases de un subespacio