Taller 7

Monday, November 1, 2021 7:59 PM

- Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de una distribución uniforme en el intervalo $[0, \theta]$. Considere el estimador $\frac{n+1}{n}Y_{max}$ ¿El estimador propuesto es consistente?

Revisemos la definición de consistencia:

Un estimador $\hat{\theta}$ de θ es consistente si:

- $Var(\hat{\theta}_n) \longrightarrow 0 \; , \; n \to \infty$ (1)
- $\forall \, \varepsilon > 0, \; \lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon) = 1$ (2)

Ahora:

$$\hat{\Theta}_n = \frac{n+1}{n} \cdot Y_{max} \rightsquigarrow max(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \rightsquigarrow$$

como es muestra aleatoria $P(Y_i \leq k_i)^n$

Con (1) $Var(\hat{\theta}_n) \longrightarrow 0 \; , \; n \to \infty$ debemos obtener una expresión para $var(\hat{\theta}_n)$:

$$\hat{\theta}_n = \frac{n+1}{n} \cdot y_{max} \; , \; var(\hat{\theta}_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \underbrace{var(y_{max})}$$

$E(y_{max}) = \theta \; , \; n \to \infty$

$E(y_{max}^2) = ???$

---

2. Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2. Considere los siguientes tres estimadores para μ:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2), \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}Y_1 + \frac{Y_2 + \ldots + Y_{n-1}}{2(n-2)} + \frac{1}{4}Y_n, \quad \hat{\mu}_3 = \bar{Y}$$

- Demuestre que cada uno de los tres estimadores es insesgado

$\rightarrow E(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{2} \cdot (E(Y_1) + E(Y_2)) = \frac{1}{2}(2\mu) = \mu$ ☑

$\rightarrow E(\hat{\mu}_3) = E(\bar{Y}) = E\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n} \cdot E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$

$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(Y_i)$

$= \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$ ☑

$\rightarrow E(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{4} E(Y_1) + \frac{1}{4} E(Y_n) + \frac{(Y_2 + \ldots + Y_{n-1})}{2(n-2)} = \frac{\mu}{2} + \frac{(n-2)\mu}{2(n-2)}$

$= \mu$ ☑

- Encuentre la eficiencia de $\hat{\mu}_3$ con respecto a $\hat{\mu}_2$ y $\hat{\mu}_1$, respectivamente.

Recuerde:

$$\text{eff}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{Var(\hat{\theta}_2)}{Var(\hat{\theta}_1)}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}Y_1 + \frac{Y_2 + \ldots + Y_{n-1}}{2(n-2)} + \frac{1}{4}Y_n$$

$$Var(\bar{Y}) = Var(\tfrac{1}{n}\Sigma Y_i) = \frac{1}{n^2}\Sigma var(y_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ahora:

- $$\text{eff}(\hat{M}_3, \hat{M}_2) = \frac{Var(\hat{M}_2)}{Var(\hat{M}_3)} = \frac{Var(\hat{M}_2)}{\sigma^2/n}$$

$$Var(\hat{M}_2) = \frac{1}{8} \cdot var(y_1) + \frac{1}{8} var(y_n) + var\left(\frac{y_2 + \ldots + y_{n-1}}{2(n-2)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{(n-2) \cdot Var(y)}{2(n-2)} = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2}$$

$$= \frac{3\sigma^2}{4}$$

$$\Rightarrow \text{eff}(\hat{M}_3, \hat{M}_2) = \frac{\frac{3}{4}\sigma^2}{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{3/4}{1/n}$$ Si $n \to \infty$, eff $\to \infty$

$\therefore$ $\hat{M}_3$ es más eff que $\hat{M}_2$

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)$$

- $$\text{eff}(\hat{M}_3, \hat{M}_1) = \frac{Var(\hat{M}_1)}{Var(\hat{M}_3)} = \frac{Var(\hat{M}_1)}{\sigma^2/n}$$

$$Var(\hat{M}_1) = \frac{1}{4} \cdot 2\, var(y) = \frac{1}{2}\sigma^2$$

$$\Rightarrow \text{eff}(\hat{M}_3, \hat{M}_1) = \frac{\sigma^2/2}{\sigma^2/n} = \frac{1/2}{1/n},$$ si $n \to \infty$, eff $\to \infty$

$\therefore$ $\hat{M}_3$ es más eff que $\hat{M}_1$.

---

3. Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2.

- Si μ es desconocida y σ^2 es conocida, demuestre que $\bar{Y}$ es suficiente para μ

Para que $\bar{Y}$ sea suficiente su verosimilitud debe poder expresarse con criterio de la multiplicación.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$P(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \mid M = M) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \mid M = M) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum^n\left(\frac{Y_i - M}{\sigma}\right)^2}$$

$$P(Y_1, Y_2, \dots Y_n \mid M = M) = \prod_{i=1} P(Y_i \mid M = M) = \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\right) \cdot e^{\dots}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i - M}{\sigma}\right)^2} = \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - M)^2}$$

- Si μ es conocida y σ^2 es desconocida, demuestre que $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu)^2$ es suficiente para σ^2

$$P(Y_1, Y_2, \dots Y_n \mid M = M) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \mid M = M) = \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum \left(\frac{Y_i - M}{\sigma}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i - M}{\sigma}\right)^2} = \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - M)^2}$$

Vea que $P(Y_1, Y_2, \dots \mid M = M)$ es $g(\sum (y_i - m)^2, \sigma)$

y $h(y_1, \dots y_2) = 1$

---

4. Suponga que $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ constituyen una muestra aleatoria de una distribución de Poisson con media λ. Encuentre un estimador para λ a través del método de momentos.

Como es un solo estimador:

$\rightarrow E(X) = \lambda$

$\rightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i = \bar{Y}$

Ahora vea que $\bar{Y} \cong \lambda$

---

5. Si $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ denotan una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2, encuentre los estimadores de μ y σ^2 por medio del método de momentos.

Necesitamos estimar M y σ^2 con el método de momentos

① $E(X) = M \qquad = M_1 \qquad Var(X) = \sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2$

② $E(X^2) = M^2 + \sigma^2 = M \qquad \sigma^2 = E[X^2] - M^2$

① $E(X) = \mu = M_1$ $\quad$ $Var(X) = \sigma^2 = E[X^2] - E[X]$

② $E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2 = M_2$ $\quad$ $\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2$

$\sigma^2 + \mu^2 = E[X^2]$

① $\frac{1}{n} \sum_i^n x_i = \overline{Y}$

② $\frac{1}{n} \sum_i^n x_i^2$

Con ① = ① : $\boxed{\mu = \overline{Y}}$

Con ② = ② : $\mu^2 + \sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i^n x_i^2$

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_i^n x_i^2\right) - (\mu)^2$$

$$\boxed{\sigma^2 = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_i^n x_i^2\right) - \overline{Y}^2}$$

---

6. Sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variables aleatorias uniformes independientes y distribuidas idénticamente en el intervalo $(0, 3\theta)$. Deduzca un estimador para θ a través del método de momentos.

Vea entonces que $M_1 = E(Y) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+3\theta}{2} = \frac{3\theta}{2}$

$m_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n Y_i = \overline{Y}$

$$M_1 = m_1$$

$$3\frac{\theta}{2} = \overline{Y}$$

$$\theta = \frac{2}{3}\overline{Y}$$
