Guillermo Ribero

Hoja de fórmulas:

x^* Candidato a mín Local ← **Pasos:** (CNPO)

i) $\nabla f(x) = 0$ find x^*

ii) $d'\nabla f(x^*) \geq 0$ ó $= 0$.

vector $(d_1, \dots, d_n)$, $n \Rightarrow$ num_variables en $f(x)$

Si x^* cumple es Candidato a mín_local

↓

Debe Cumplir $\forall d$. y $d \neq 0$.

Hessiano $= \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

2x2: ∘ Inversa $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} b & -c \\ -d & a \end{pmatrix}$

∘ det. $ad-bc$

3x3: ∘ Det (Sarrus) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$ π $-\pi$

∘ Inversa $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|}$ ③ ← Transpuesta (2); $|A|$ ← det (P.1) (Si es 0 no hay inv)

$\text{Adj}(A^t) = a_{ij} \Rightarrow (-1)^{i+j} \cdot \det|\text{menor}(A_{aij})|$

x^* mín Local. ← **Pasos:** (CNSO) → $x \in$ frontera (Si es interior solo hacer 1,2)

i) $H(x)$ def Positivo. ∘ Semi

ii) $d'\nabla f(x^*) = 0$

iii) $d'H(x^*)d \geq 0$

$J = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ → Se evalua en los Ptos Críticos

∘ $\det(a)$ ≥ 0 Semidef + ; > 0 def +

∘ $\det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \geq 0$ Semidef + ; > 0 def +

∘ $\det(J) \geq 0$ Semidef + ; > 0 def +

} $\wedge$-toria (todos cumplen o f)

→ $\leq$, $<$ para neg.

Si todos los autovals $(A - \lambda I)$ son ≥ 0 es Semiposi; > 0 es def Posi

x^* es mín estricto ← **Pasos:** (CSSO) (Puntos interiores)

i) $\nabla f(x^*) = 0$

ii) $H(x^*)$ es def Positiva

Conjunto Convexo: ∪

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω es un Conj Convexo si $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in \Omega$, $\forall x_1, x_2 \in \Omega$ y $\lambda \in (0,1)$

Función Convexa: máx$\{f(x), g(x)\}$ es Convexa

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ es convexa si

$f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) \cdot f(\hat{x})$ / $\forall x, \hat{x} \in \Omega, \lambda \in (0,1)$, Ω conj. Convexa

≤ Convexa

< estrictamente Convexa

Tenemos que verificar la igualdad operando y usando la def de la función

Función Cóncava: ∩

Con recta si una es Convexa o Cóncava la otra también.

f Cóncava si $f = -g$ es convexa. / f convexa → Continua en Ω (Cond necesaria Para Convexidad)

∘ f derivable es Convexa sii $f(x) \geq f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})'(x - \hat{x})$

∘ f 2-veces derivable, f es Convexa (estricta) en Ω sii $H(x)$ es Sem-Posi $\forall x \in \Omega$

∘ f 2-veces derivable, f es Cóncava (estricta) en Ω sii $H(x)$ es $\underbrace{\text{Semi-negativa}}_{\text{Submatrices} \leq 0}$ $\forall x \in \Omega$

Todo mín_local de f en Ω (convexo) es mín_global

Toda Convexa lo es ← **Funciones Cuasi-Convexas:** $f: \Omega \to \mathbb{R}$ es Cuasiconvexa si

$f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) \leq$ máx$\{f(x), f(\hat{x})\}$, $\forall x, \hat{x} \in \Omega, \lambda \in [0,1]$

Estrictamente Cuasi-Convexa en $[a,b]$; $\lambda, \mu \in [a,b], \lambda < \mu$

∘ Si $f(\mu) < f(\lambda) \Rightarrow f(\mu) \leq f(z), \forall z \in [a, \lambda)$

∘ Si $f(\lambda) < f(\mu) \Rightarrow f(\lambda) \leq f(z), \forall z \in (\mu, b]$

Algoritmo de selección áurea:

$\varepsilon = 0.0001$ (Criterio de Parada)

Paso 0: Long. final del int I. int inicial $[a_0, b_0]$, $k=0$

$\lambda_0 = a_0 + (1-\alpha)(b_0 - a_0)$, $f(\lambda_0)$

$\mu_0 = a_0 + \alpha(b_0 - a_0)$, $f(\mu_0)$

Paso 1:

Si $b_k - a_k < I$ luego
  Parar, $\lambda^* \in [a_k, b_k]$
else
  if $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ then
    Paso 2
  else
    Paso 3
  endif
endif

Paso 2: $(f(\lambda_k) > f(\mu_k))$:

$a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$, $\lambda_{k+1} = \mu_k$

$\mu_{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1})$

$f(\mu_{k+1})$, $k = k+1$, ir al Paso 1.

Paso 3: $(f(\lambda_k) < f(\mu_k))$

$a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \mu_k$, $\mu_{k+1} = \lambda_k$

$\lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1-\alpha)(b_{k+1} - a_{k+1})$

$f(\lambda_{k+1})$, $k = k+1$, ir al Paso 1.

Ajuste Cuadrático:

$i,j \in [1,3]$

$$\hat{x}_k = \frac{b_{23} f(x_1) + b_{31} f(x_2) + b_{12} f_3}{2(a_{23} f(x_1) + a_{31} f(x_2) + a_{12} f(x_3))}$$

$$b_{ij} = x_i^2 - x_j^2 , \quad a_{ij} = x_i - x_j$$

Paso 0: ε, $int_0 = [x_1, x_2, x_3]$, $k=0$

Paso 1: $x_1, f(x_1)$; $x_2, f(x_2)$; $x_3, f(x_3)$ / $\hat{x}_k, f(\hat{x}_k)$

if $x_3 - x_1 < \varepsilon$ then
  Parar, $\hat{x}_k \in [x_1, x_3]$
else
  if $\hat{x}_k > x_2$ then
    Ir al Paso 2
  else if $\hat{x}_k < x_2$ then
    Ir al Paso 3
  else if $\hat{x}_k = x_2$ then
    Ir al paso 4
  endif
end if

Paso 2: $(\hat{x}_k > x_2)$

if $f(\hat{x}_k) > f(x_2)$ Luego $[x_1, x_2, \hat{x}_k]$

if $f(\hat{x}_k) \leq f(x_2)$ Luego $[x_1, \hat{x}_k, x_3]$

Ir al paso 1

Paso 3: $(\hat{x}_k < x_2)$:

if $f(\hat{x}_k) > f(x_2) \Rightarrow [\hat{x}_k, x_2, x_3]$

if $f(\hat{x}_k) \leq f(x_2) \Rightarrow [x_1, \hat{x}_k, x_2]$

Ir al Paso 1.

Paso 4: $(\hat{x}_k = x_2)$

$$\hat{x}_k = \begin{cases} x_2 + \varepsilon/2 & \text{Si } x_2 - x_1 < x_3 - x_2 \\ x_2 - \varepsilon/2 & \text{Si } x_2 - x_1 > x_3 - x_2 \end{cases}$$

Ir al Paso 1.

$$X_{i+1} = X_i - \frac{f(X_i)}{f'(X_i)}$$

Newton-Raphson:

Óptimo cumple
$g(\hat{X}) = f'(\hat{x}) = 0$

min:
$$X_{i+1} = X_i - \frac{g(X_i)}{g'(X_i)}$$
$$= X_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

Paso 0: Pto inicial X_0, $k=0$, error $\mathcal{E} = 0.0001$

Paso 1: $X_{k+1} = X_k - \frac{f'(X_k)}{f''(X_k)}$

if $|X_{k+1} - X_k| < \mathcal{E}$ then
  Stop, $x^* \in [X_{k+1}, X_k]$
eles
  Repetir
endif

Tamaño Paso

Derivada direccional: $X_{k+1} = X_k + \lambda d$

Direcciones de descenso: d lo es si $\exists \delta > 0$

$f(X+\lambda d) < f(X)$, $\lambda \in (0, \delta)$ → Con X una Sol factible $\in \mathbb{R}^n$

Si f diferenciable ←
$f'(x,d) = \nabla f(x)' d < 0$

Método de descenso del gradiente:

$$d = \frac{-\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$$

$\min f'(x, d)$
s.a. $\|d\| = 1$

Paso 0: $\mathcal{E} > 0$, Pto inicial bsqueda $\bar{X}_1 \in \Omega$, $K=1$

Paso 1:
While $\|\nabla f(X_k)\| > \mathcal{E}$ do
  $d_k = -\nabla f(X_k)$
  $\lambda_k = \min_{\lambda \geq 0} f(X_k + \lambda d_k)$ → Usar busqueda de linea
  $X_{k+1} = X_k + \lambda_k d_k = X_k + \lambda_k(-\nabla f(X_k))$
  $k = k+1$
endwhile

Convergencia → Descenso del Gradiente

Punto, dir
$$D = (X, -\nabla f(x))$$

$f(x) = \frac{1}{2} x' Q x - b' x$ (vector)

Q def Positiva
$\nabla f(x) = Qx - b$
$H(x) = Q > 0$

$e(X) = \frac{1}{2}(X - x^*)' Q (X - x^*)$ $e(x) = 0$ Sii $X = x^*$, Con $x^* \in \Omega$

Si $X \neq x^* \Rightarrow e(X) > 0$

$$\lambda = \frac{g_k' g_k}{g_k' Q g_k} \qquad X_{k+1} = X_k - \frac{g_k' \cdot g_k}{g_k' Q g_k} \cdot g_k$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad e(X_{k+1}) = \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^2 e(X_k)$$

λ_n, λ_1 val max (λ_n) y min (λ_1) de Q ← autovalores / ← eigenvals $(A - \lambda I)$

$r = 1 \Rightarrow$ Converge en una iteración dlc Converge lento ($\gg 1$)

Que tan rápido Converge
$$\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

$$\boxed{\frac{e(X_{k+1})}{e(X_k)}}$$
Factor reducción

Método de Newton: (Series de Taylor)

Paramos:
o Gradiente cercano a 0
o $|X_{k+1} - X_k|$ cercano a 0
o $|f(X_{k+1}) - f(X_k)|$ bab

X_0 dado ~ Si no dan tomar (0 0)

$$q(x) = f(X_k) + \nabla f(X_k)'(X - X_k) + \frac{1}{2}(X - X_k)' H(X_k)(X - X_k)$$ ← Aprox función en X_k

Condición necesaria para un mínimo local de $q(x)$: $\nabla q(x) = 0$.

$\nabla q(x) = \nabla f(X_k) + H(X_k)(X - X_k) = 0$ → Donde $q(x)$ Aproxima la función Cuadrática, Sale en una it.

$H(X_k)X = H(X_k)X_k - \nabla f(X_k)$

$X = X_k - H(X_k)^{-1} \nabla f(X_k)$ → Si H es Singular

$X_{k+1} = X_k - H^{-1}(X_k) \nabla f(X_k)$

Pstu. → Si Pstu ir a Conjugados

1. Grad
2. Hesiano

dado
X_k a partir de X_0
Da un vector.

$ax^2+bxy+cy^2$
$+dx+ey+c$

$$H=\begin{pmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{pmatrix}$$

$$f(x)=c'x+\frac{1}{2}x'H(x)$$

Pasos:

i). Definir $d_1=(1,0)$

ii). $d_1 H(x)\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$ obtenemos a,b Para d_2 d_1,d_2 ind.

iii). X_0 dado o tomo $(0,0)$

iv). Usar $\lambda_j^* \leftarrow$ óptimo.

Métodos de direcciones Conjugadas:

d arbitraria $(1\ 0)$

- $H\in\mathbb{R}^{n\times n}$ Simétrica
- $\{d_1,\dots,d_n\}$ Son vecs H-Conjugados si son L.I. y $d_i' H d_j=0$ para $i\neq j$

def Positiva

$$X=X_1+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j d_j$$

Vector Coeficientes

$$\phi(\lambda)=f(x)=f\left(X_1+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cdot d_j\right)=c'X_1+\frac{1}{2}x_1'Hx_1+\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_j c'd_j+\lambda_j d_j' H x_1+\frac{1}{2}\lambda_j^2 d_j' H d_j\right)$$

Óptimo de λ_j

$$\frac{\partial\phi(\lambda)}{\partial\lambda_j}=c'd_j+d_j'Hx_1+\lambda_j d_j' H d_j=0$$

$$\lambda_j^*=-\frac{c'd_j+d_j'Hx_1}{d_j'Hd_j}$$