Taller 3

Wednesday, September 15, 2021 8:16 PM

1

	Y		
X	1	3	5
0	1/6	0	1/6
2	0	1/6	0
4	1/6	1/6	1/6

a) det. la cov. de x y Y

$$cov(x,y) = E(x,y) - E(x)E(y)$$

Note que falta conocer $E(x)$ y $E(Y)$ y para ello se necesita f_x, f_y

	Y		
X	1	3	5
0	1/6	0	1/6
2	0	1/6	0
4	1/6	1/6	1/6

$$f_x(x) = \sum_{y_i} f_{xy}(x, y_i) = f_x = \begin{cases} 1/3, & x = 0 \\ 1/6, & x = 2 \\ 1/2, & x = 4 \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} 1/3, & y = 1 \\ 1/3, & y = 3 \\ 1/3, & y = 5 \end{cases}$$

Ahora $\boxed{E(x)} = 0 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{7}{3}$

$\boxed{E(y)} = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} = 3$

Así $E(x) \cdot E(y) = \frac{7}{3} \times 3 = 7$

Ahora falta $E(x,y)$

que se obtiene así:

	Y		
X	1	3	5
0	1/6	0	1/6
2	0	1/6	0
4	1/6	1/6	1/6

$$\sum_x \sum_y x \cdot y \cdot f(x,y) = (0) + \left(6 \cdot \frac{1}{6}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{1}{6} + 20 \cdot \frac{1}{6}\right)$$

$$= 7$$

finalmente $cov(x,y)$ es:

$$E(x,y) - E(x)E(y)$$

$$= 7 - 7 = 0$$

b) Ahora que tenemos $cov(x,y)$ podemos buscar

$$\rho(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{\ldots(x) \cdot var(y)}}$$

$$\rho(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x) \cdot var(y)}}$$

⊙ Vea que nos faltan las varianzas, luego para obtenerlas calcularemos el 2do momento:

- Sea $f_x = \begin{cases} 1/3, & x = 0 \\ 1/6, & x = 2 \\ 1/2, & x = 4 \end{cases}$ $\quad f_y(y) = \begin{cases} 1/3, & y = 1 \\ 1/3, & y = 3 \\ 1/3, & y = 5 \end{cases}$

$$E(x^2) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot (2)^2 + \frac{1}{2} \cdot (4)^2$$
$$= 0 + \frac{4}{6} + \frac{16}{2} = \frac{26}{3}$$

$$E(y^2) = \frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{1}{3} \cdot 5^2$$
$$= \frac{35}{3}$$

$$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2$$
$$= \frac{26}{3} - \left(\frac{7}{3}^2\right)$$
$$= 29/9$$

$$Var(y) = E(y^2) - E(y)^2$$
$$= \frac{35}{3} - (3^2)$$
$$= 8/3$$

ya tenemos todo para evaluar:

$$\rho(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x) \cdot var(y)}}$$
$$= \frac{0}{\sqrt{\frac{29}{9} \cdot \frac{8}{3}}} = 0$$

2. Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

a) Determine la covarianza de X y Y.

Recuerde que $cov(x,y) = E(x,y) - E(x)E(y)$

por lo que necesitamos primero las funciones de densidad de prop.:

$$f_x(x) = \int_0^1 f(x,y)\, dy = \frac{3}{2} \cdot \int_0^1 x^2 + y^2\, dy$$

$$f_x(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 \ldots$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\cdot\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$f_y(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx = \frac{3}{2}\cdot\int_0^1 x^2 + y^2\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + y^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3y^2}{2}$$

Ahora obtendremos los valores esperados de las marginales:

$$E(x) = \int_0^1 x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$E(y) = \int_0^1 y \cdot f(y)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}y + \frac{3y^3}{2}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{8}y^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Así $E(x)\cdot E(y) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$

Ahora sólo falta $E(x,y)$ que es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

$$\int_0^1\int_0^1 \ldots = \ldots\int_0^1\int_0^1 \ldots$$

$$\frac{3}{2}\cdot\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)\,xy\;dx\,dy = \frac{3}{2}\cdot\int_0^1\int_0^1 x^3y + xy^3\;dx\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\int_0^1 \frac{x^4}{4}\cdot y + \frac{x^2}{2}\cdot y^3 \Big|_0^1 dy = \frac{3}{2}\cdot\int_0^1 \frac{y}{4} + \frac{y^3}{2}\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{y^2}{8} + \frac{y^4}{8}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{2}{8} = \frac{3}{8} = E(x,y)$$

$$\therefore\ \mathrm{Cov}(x,y) = E(x,y) - E(x)\cdot E(y)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{25}{64} = -\frac{1}{64}$$

b) Determine el coeficiente de correlación de X y Y.

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{var}(x)\cdot\mathrm{var}(y)}}$$

Vea que tenemos $\mathrm{cov}(x,y)$
solo faltan las varianzas, las obtendremos

$$\mathrm{Var}(x) = E(x^2) - E(x)^2 \qquad \mathrm{Var}(y) = E(y^2) - E(y)^2$$

falta $E(x^2)$

$$\int_0^1 x^2\cdot\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{3x^4}{2} + \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$E(y^2) = \int_0^1 y^2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3y^2}{2}\right)dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2} + \frac{3y^4}{2}\,dy$$

$$= \left(\frac{3}{10}+\frac{1}{6}\right)\Big|_0^1$$

$$= \int_0^1 \ldots \frac{\;}{2} + \frac{\;}{2}$$

$$= \left(\frac{3}{10}x^5 + \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{15}$$

$$= \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{6}\right)\Big|_0^1$$

$$= 7/15$$

$$\therefore \operatorname{Var}(x) = \left(\frac{7}{15} - \left(\frac{5}{8}\right)^2\right) = \operatorname{var}(y)$$

$$= 73/960$$

finalmente

$$\rho = \frac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\sqrt{(73/960)^2}} = -\frac{75}{73} = -0{,}205$$

$-\frac{1}{64}$

3. Suponga que X y Y son variables aleatorias con la misma varianza. Demuestre que las variables $X - Y$ y $X + Y$ no están correlacionadas.

- $\operatorname{Var}(x) = \operatorname{var}(y)$

Dado lo anterior, recuerde que para que 2 vars No estén correlacionadas se requiere

$\rho = 0 \longrightarrow$ Necesito que el numerador sea 0

Con $Z = x - Y$, $W = x + y$

$$\rho(z,w) = \frac{\operatorname{Cov}(z,w)}{\sqrt{\operatorname{var}(z)\cdot\operatorname{var}(w)}}$$

Por propiedad $\operatorname{cov}(z, x+y) = \operatorname{Cov}(z,y) + \operatorname{Cov}(z,x)$

y nuevamente:

- $\operatorname{Cov}(z,y) = \operatorname{Cov}(y,z) = \operatorname{coV}(Y, x-y) = \operatorname{Cov}(y,x) + \operatorname{Cov}(y,-y)$
- $\operatorname{Cov}(z,x) = \operatorname{Cov}(x,z) = \operatorname{cov}(x, x-y) = \operatorname{Cov}(x,x) + \operatorname{Cov}(x,-y)$

luego $$\rho(z,w) = \frac{\operatorname{Cov}(y,x) + \operatorname{cov}(x,-y) + \operatorname{Cov}(y,-y) + \operatorname{Cov}(x,x)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)\cdot\operatorname{var}(y)}}$$

luego $\rho(z,w) = \dfrac{cov(y,x) + \cdots}{\sqrt{var(x)\cdot var(y)}}$

ES Necesario Analizar Ahora la fórmula original de $cov(x,y)$

$$cov(x,y) = E[(x - E(x))\cdot(y - E(y))]$$

Si y es negativo $\Rightarrow -y - E(-y)$

$\Rightarrow -y + E(y)$

$\Rightarrow$ equivale a decir que hubo un cambio de signo, es decir se mult. por -1

$$-1\cdot(y - E(y)) = -y + E(y)$$

$\therefore$ $cov(x,-y) = -cov(x,y)$

Así surge en el numerador de ρ:

$$\cancel{cov(y,x)} + \cancel{cov(x,-y)} + cov(y,-y) + cov(x,x)$$

Recordemos también que $cov(x,x) = var(x) = var(y)$ así con el argumento anterior

$$\cancel{cov(y,x)} + \cancel{cov(x,-y)} + \cancel{cov(y,-y)} + \cancel{cov(x,x)} = 0$$

4. Considere cuatro variables aleatorias W, X, Y, Z donde

$$E[X] = E[Y] = E[Z] = E[W] = 0,$$

$$\text{var}(X) = \text{var}(Y) = \text{var}(Z) = \text{var}(W) = 1.$$

Además, estas variables aleatorias son no-correlacionadas por parejas. Determine los coeficientes de correlación $\rho_{R,S}$ y $\rho_{R,T}$, donde $R = W + X$, $S = X + Y$, y $T = Y + Z$.

A $\rho(R,S) = \dfrac{cov(R,S)}{\quad}$

$$\text{A} \quad \rho_{R,S}(R,S) = \frac{\operatorname{Cov}(R,S)}{\sqrt{\operatorname{var}(R)\cdot\operatorname{var}(S)}}$$

Por un caso análogo al del ejercicio anterior

$$\operatorname{cov}(R,S) = \operatorname{Cov}(R, x+y)$$

$$= \operatorname{cov}(R,x) + \operatorname{cov}(R,y) = \operatorname{Cov}(w+x, x) + \operatorname{cov}(w+x, y)$$

$$= \underbrace{\operatorname{Cov}(w,x)}_{0} + \underbrace{\operatorname{cov}(x,x)}_{1} + \underbrace{\operatorname{Cov}(w,y)}_{0} + \underbrace{\operatorname{cov}(x,y)}_{0}$$

$$= 1$$

Ahora caracterizaremos $\operatorname{Var}(R)$ y $\operatorname{var}(S)$

Recuerde:

1. $E[X] = E[Y] = E[Z] = E[W] = 0,$

   $\operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(Y) = \operatorname{var}(Z) = \operatorname{var}(W) = 1.$

2. $R = W + X, \quad S = X + Y$

3. $\phi = \alpha + \beta \Rightarrow \operatorname{var}(\phi) = \operatorname{var}(\alpha) + \operatorname{var}(\beta) + \operatorname{cov}(\alpha,\beta)$

Así:

$$\operatorname{var}(R) = \underbrace{\operatorname{var}(W)}_{1} + \underbrace{\operatorname{var}(X)}_{1} + \operatorname{cov}(W,X)$$

$$= 2 + \underbrace{\operatorname{cov}(W,X)}_{0}$$

$$\operatorname{var}(S) = \underbrace{\operatorname{var}(X)}_{1} + \underbrace{\operatorname{var}(Y)}_{1} + \operatorname{cov}(X,Y)$$

$$= 2 + \underbrace{\operatorname{Cov}(X,Y)}_{0}$$

Así: $\sqrt{\operatorname{var}(S)\cdot\operatorname{var}(R)} = \sqrt{2\cdot 2} = 2$

Por lo que finalmente tenemos

por lo qe finalmente tenemos

$$\rho = \frac{1}{2}$$