DM: Desplazamiento temporal

$$\left[x(t) \xrightarrow{fs} a_k \text{ y } y(t) = x(t-t_0)\right] \Rightarrow y(t) \xrightarrow{fs} e^{-j\omega_0 k t_0} \cdot a_k$$

$$x(t) \xrightarrow{fs} a_k$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) \cdot e^{-j\omega_0 k t} dt$$

dado que $t = t - t_0$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j\omega_0 k(t-t_0)}$$

$$= \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j\omega_0 k t} \cdot e^{j\omega_0 k t_0} dt$$

$$= \frac{e^{j\omega_0 k t_0}}{T} \cdot \int_T x(t)\, e^{-j\omega_0 k t} dt$$

$$\frac{a_k}{e^{j\omega_0 k t_0}} = \frac{1}{T} \cdot \int_T \boxed{x(t-t_0)}\, e^{-j\omega_0 k t} dt$$

$$= a_k\, e^{-j\omega_0 k t_0}$$

Así:

dado $x(t) \xrightarrow{fs} a_k$

$x(t-t_0) \xrightarrow{fs} a_k\, e^{-j\omega_0 k t_0}$, puesto que $y(t)$,

$y(t) \xrightarrow{fs} e^{-j\omega_0 k t_0} \cdot a_k$ $\square$

(2) Inversión temporal

$$x(t) \xrightarrow{fs} a_k \Rightarrow x(-t) \xrightarrow{fs} a_{-k}$$

Si $x(t) \xrightarrow{fs} a_k$

analizando la ecn de síntesis para $x(-t)$:

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{-jk\omega_0 t}$$

ahora analizando la ecn de síntesis para $\Theta = -k$ con $x(-t)$

$$x(-t) = \sum_{\theta=-\infty}^{\infty} a_{-\theta} e^{j\theta\omega_0 t}$$

Vea entonces que $x(-t)$ es de la forma de $x(t)$ pero los coeficientes a_k son a_{-k} $\square$

3. escalamiento temporal

$$\text{Si} \quad x(t) \xrightarrow{fs} a_k$$

$$\text{entonces} \quad x(\alpha t) \xrightarrow{fs} a_k$$

$x(t)$ tiene frecuencia fundamental ω_0 y periodo T

Sus coef. de fourier son de la forma:

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega_0 t}\, dt$$

Ahora si dado $\alpha > 0$ y $x(\alpha t)$ vea que el periodo fundamental debe escalarse a $T' = \frac{T}{\alpha}$ y equivalentemente $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ es ahora $\omega_0' = \frac{2\pi}{\frac{T}{\alpha}} = \alpha\omega_0$, ergo sus coeficientes de fourier

Son:

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{T'} x(t)\, e^{-j\omega_0' t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{T} x(t)\, e^{-j\cancel{\alpha}\omega_0 \cdot \frac{t}{\cancel{\alpha}}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{T} x(t)\, e^{-j\omega_0 t}\, dt$$

ambos a_k son los mismos.

$\blacksquare$

④ Simetría del complejo conjugado

Si $x(t) \xrightarrow{fs} a_k$

entonces $x^*(t) \xrightarrow{fs} a^*_{-k}$

Dice que los coeficientes de la señal conjugada son a^*_{-k} y note que $a_k = a^*_{-k}$.

$$F(x^*(t)) = a_k^* = \frac{1}{2\pi} \int_T x(t)^* \cdot (e^{-j\omega_0 t})^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_T x(t) e^{j\omega_0 t} dt$$

haciendo un cambio de variables $k = -k$

$$a^*_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_T x(t) e^{j\omega_0 (-t)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_T x(t) e^{-j\omega_0 t} dt$$

Vea que:

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_T x(t) e^{-j\omega_0 t} dt$$

$\square$

$\boxed{5}$ Escalamiento temporal

Si $\quad x(t) \xrightarrow{fs} a_k$

$y(t) \xrightarrow{fs} b_k$, entonces

$$x(t)\,y(t) \xrightarrow{fs} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

Analicemos detalladamente un caso particular de $x(t) \cdot y(t)$ a partir de la fórmula de síntesis para estas señales truncadas, como se muestra:

$$\left(a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{2j\omega_0 t} + a_3 e^{3j\omega_0 t}\right) \cdot \left(b_1 e^{j\omega_0 t} + b_2 e^{2j\omega_0 t} + b_3 e^{3j\omega_0 t}\right)$$

$$= a_0 b_1 e^{j\omega_0 t} + a_0 b_2 e^{2j\omega_0 t} + a_0 b_3 e^{3j\omega_0 t}$$

$$k=2 \leftarrow a_1 b_1 e^{2j\omega_0 t} + a_1 b_2 e^{3j\omega_0 t} + a_1 b_3 e^{4j\omega_0 t}$$

$$k=3 \leftarrow a_2 b_1 e^{3j\omega_0 t} + a_2 b_2 e^{4j\omega_0 t} + a_2 b_3 e^{5j\omega_0 t}$$

$$k=4 \leftarrow a_3 b_1 e^{4j\omega_0 t} + a_3 b_2 e^{5j\omega_0 t} + a_3 b_3 e^{6j\omega_0 t}$$

$k=5 \leftarrow$

al observar cada uno de estos coeficientes y los valores de a_i y b_j se hace claro el patrón $h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$