Parcial Final

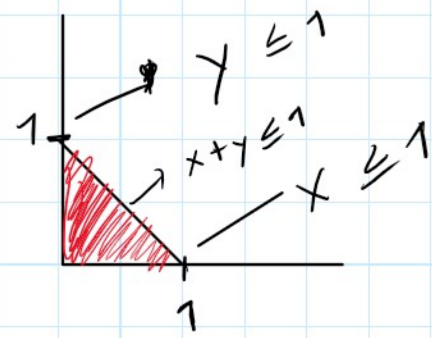
Wednesday, November 24, 2021 10:00 AM

David Alsina

1. (**25 pts**) Sean X y Y variables aleatorias continuas con PDF conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & si \quad y+x \leq 1, x>0, y>0 \\ 0 & d.l.c. \end{cases}$$

Encuentre $COV(X,Y)$



$$\mathrm{Cov}(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

$E(x,y)$ es:

$$E(x,y) = \int_0^1 \int_{y=0}^{y+x=1} 2 \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2 \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 2y \Big|_0^{1-x} dx = 2\int_0^1 1 - x \, dx$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Para hayar $E(x)$ y $E(y)$ Necesitamos encontrar las marginales:

$$f_x(x) = \int_y f_{xy}(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} 2\,dy = 2(1-x)$$

Análogamente $f_y(y) = \int_0^{1-y} 2\,dx = 2(1-y)$

$E(x)$:

$$E(x) = 2\int_0^1 x\cdot(1-x)\,dx = 2\cdot\int_0^1 x - x^2\,dx$$

$$= 2\cdot\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 2\cdot\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

$E(y)$:

$$E(y) = 2\cdot\int_0^1 y(1-y) = 2\cdot\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Cov}(x,y) = E(x,y) - E(x)E(y)$$

$$= 1 - (1/6)^2 = \frac{35}{36} = 0.97\hat{2}.$$

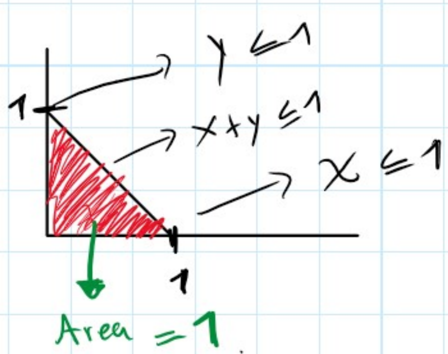
$$= 1 - (1/6)^2 = \frac{35}{36} = 0.972.$$

---

3. (25 pts)
Sean X y Y variables aleatorias continuas con PDF conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} cx+1 & si \quad y+x \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & d.l.c. \end{cases}$$

a) Realice una gráfica en el plano $x - y$ mostrado el rango de X y Y



$\rightarrow$ vea que $0 \leq x \leq 1$
$0 \leq y \leq 1$

b) Determine el valor de la constante c

La constante c debe ser una tal que vuelva a $f_{xy}(x,y)$ una función legítima:

$$\int_0^1 \int_{y=0}^{x+y=1} c\cdot x + 1 \, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} cx + 1 \, dy = \int_0^1 cxy + y \Big|_0^{1-x}$$

$$= \int_0^1 c\cdot x\cdot(1-x) + (1-x) = \int_0^1 -cx^2 + cx - x + 1$$

$$= -\frac{c}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 - \frac{x^2}{2} + x \Big|_0^1 = \boxed{1} \rightarrow \text{Area debe sumar } 1$$

$$-\frac{c}{3} + \frac{c}{2} - \frac{1}{2} + \cancel{1} = \cancel{1}$$

$$\frac{c}{6} = \frac{1}{2}$$

$$c = 3$$

c) Encuentre las PDFs marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x+y \leq 1 \end{array} \\ 0 \text{ dlc.} \end{cases}$$

$$f_x(x) = \int f_{xy}(x,y)\, dy = \int^{x+y=1} 3x+1 \, dy = \int^{y=1-x} 3x+1 \, dx$$

$f_x(x) = \int_y f_{xy}(x,y)\,dy = \int_{y=0} 3x+1\,dy = \int_{y=0} 3x+1\,dy$

$= 3xy + y \Big|_0^{(1-x)} = 3x(1-x) + (1-x)$

$f_y(y) = \int_{x=0}^{x=1-y} 3x+1\,dx = \frac{3}{2}x^2 + x \Big|_0^{1-y} = \frac{3}{2}(1-y)^2 + (1-y)$

---

2. (25 pts) Sea X el número de defectos en un circuito eléctrico. El jefe de control de calidad afirma que el número de defectos en un circuito eléctrico sigue una distribución Poisson con media igual a 0.7. Se toma una muestra aleatoria de $n = 60$ circuitos y se mide el número de defectos que tiene cada uno. Los resultados obtenidos fueron:

Número de defectos	Frecuencia observada
0	32
1	15
2	9
3	4

$\lambda = 0.7?$

¿Existe evidencia suficiente para decir que el jefe de control de calidad tiene razón en su afirmación con un valor $\alpha = 0.05$?

$H_0 : \lambda = 0.7 \quad , \quad H_a : \lambda \neq 0.7$

Veamos que para hacer una buena prueba χ^2 necesitamos 5 o más muestras para cada categoría, por lo que agrupamos: Número de defectos 2 y 3 en $2 \geq$, Así:

Número de defectos	Frecuencia observada
0	32
1	15
$2 \geq$	13

Asumiendo que $\lambda = 0.7$ calculamos:

$p_1 = P(y = 0) = e^{-\lambda} = e^{-0.7}$

$p_2 = P(y = 1) = \lambda e^{-\lambda} = (0.7)e^{-0.7}$

$p_3 = P(y \geq 2) = 1 - (e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda})$
$= 1 - (e^{-0.7} + 0.7e^{-0.7})$

$p_1 = 0.496 \quad , \quad p_2 = 0.347 \quad , \quad p_3 = 0{,}155$

$\widehat{E(N_1)} = 60 \cdot p_1 = 29.76$

$\widehat{E(N_2)} = 60 \cdot p_2 = 20.82$

$$\widehat{E(N_2)} = 60 \cdot p_2 = 20.82$$
$$\widehat{E(N_3)} = 60 \cdot p_3 = 9.33$$

estad. de prueba:

$$\chi^2 = \sum^{3} \frac{(N_i - \widehat{E(N_i)})^2}{\widehat{E(N_i)}} = 3.2391$$

dado $\alpha = 0.05$

$$RR: \{ \chi^2 > 5.99 \}$$

Vea que $\chi^2 \notin RR$. por lo que no hay evidencia suficiente para rechazar que sea poisson con $\lambda = 0.7$.

---

4 (**25 pts**) Sean X, Y y Z variables aleatorias independientes, donde X es Bernoulli con parámetro 1/3, Y exponencial con parámetro 3 y Z Poisson con parámetro 2.

a) Considere la nueva variable aleatoria $U = XY + (1-X)Z$. Encuentre la función generatriz de momentos asociada con U.

b) Encuentre la función generatriz de momentos asociada con $2Z + 3$.

c) Encuentre la función generatriz de momentos asociada con $Y + Z$.

$p = 1/3$
$\lambda_{exp} = 3$
$\lambda_{poi} = 2$

(c) si tengo la suma de 2 v.a.s indep:

$$\Theta = Y + Z, \quad M_\Theta = E(e^{\Theta s}) = E(e^{Ys} \cdot e^{Zs})$$
$$= M_Y(s)\, M_Z(s)$$

- la FGM de una exp. es:

$$M_Y(s) = \frac{\lambda_{exp}}{\lambda_{exp} - s}$$

- la FGM de una Poisson es:

$$M_Z(s) = e^{\lambda_{poi}(e^s - 1)}$$

Así $$M_Y(s) \cdot M_Z(s) = \frac{e^{\lambda_{poi}(e^s-1)} \cdot \lambda_{exp}}{\lambda_{exp} - s}$$

(b) Recuerde que la FGM de una v.a. ϕ es:

$$M_\phi(s) = E(e^{s\phi})$$

Para $\rho = 2Z + 3$

Para $\rho = 2z+3$

$$M_\rho(s) = E(e^{s\rho}) = E(e^{s(2z+3)})$$
$$= E(e^{2sz} \cdot e^{3s})$$
$$= M_z(2s) \cdot e^{3s}$$

Ahora:
$$M_z(2s)e^{3s} = e^{\lambda_{poi}(e^{2s}-1)} \cdot e^{3s}$$

9

- La FGM de x binomial: $M_x(s) = (2/3 + 1/3\, e^s)^n$
- la FGM de una exp. es: $M_y(s) = \frac{\lambda_{exp}}{\lambda_{exp} - s}$
- la FGM de una Poisson es: $M_z(s) = e^{\lambda_{poi}(e^s - 1)}$

$$U = XY + (1-X)Z$$

$$M_U(s) = E(e^{sU}) = E(e^{s(XY + (1-X)Z)}) = E(e^{sXY} \cdot e^{Zs(1-X)})$$
$$= E(e^{sXY}) \cdot E(e^{sZ}) \cdot E(e^{-sZX})$$
$$= M_Z(s) \cdot M_{XY}(s) \cdot M_{ZX}(s)$$