Taller 1

Dana Isabella Acosta, Juan José Caballero, David Alsina

Agosto 2021

1. Se selecciona un punto al azar *(de acuerdo con la ley uniforme)* dentro del semicírculo.

$$\{(x,y)|x^2+y^2 \leq r^2, y \geq 0\}$$

a) Determine la función de densidad conjunta de las coordenadas X y Y del punto seleccionado.

Dado que esta función es conjuntamente uniforme la probabilidad de cada punto (x,y) se puede ver como $\frac{1}{A(Region\ de\ integracion)}$ así:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{A(Region)} = \frac{1}{\pi \cdot r^2} \end{cases}$$

b) Determine la función de densidad de Y y úsela para determinar el valor esperado de Y.

Primero para hayar la función de densidad de Y hace falta integrar a lo largo de $F_{x,y}$ con respecto a X y para ello hace falta también conocer los valores extremos en x:

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$$

Ahora:

$$f_y = \int_{x=-\sqrt{r^2-y^2}}^{x=\sqrt{r^2-y^2}} \frac{1}{\pi \cdot r^2} dx$$

$$f_y = \frac{1}{\pi \cdot r^2} \cdot \int_{x=-\sqrt{r^2-y^2}}^{x=\sqrt{r^2-y^2}} dx$$

$$f_y = \frac{1}{\pi \cdot r^2} \cdot x \Big|_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} = 2 \cdot (\sqrt{r^2 - y^2}) \cdot \frac{1}{\pi \cdot r^2} \quad \square$$

Finalmente para obtener el valor esperado se calcula:

$$
\begin{aligned}
E[y] &= \int_0^r y \cdot f_y dy \\
E[y] &= \frac{2}{\pi \cdot r^2} \cdot \int_0^r y \cdot \sqrt{r^2 - y^2} dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\textit{tomando } u = r^2 - y^2,\ du = -2y\ dy \\
&= \frac{1}{\pi \cdot r^2} \cdot \int_0^r \sqrt{u} \cdot \cancelto{-du}{2\frac{-du}{2}} \\
&= \frac{-2}{3\pi \cdot r^2} \cdot (u^{3/2})\Big|_0^r \\
&= \frac{-2}{3\pi \cdot r^2} \cdot (0^{3/2} - (r^2)^{3/2}) \\
&= \frac{2r^3}{3\pi r^2} = \frac{2}{3\pi} r \quad \square
\end{aligned}
$$