Probabilidad y Estadística 2

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS APLICADAS Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

2021-2

Universidad del Rosario | Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

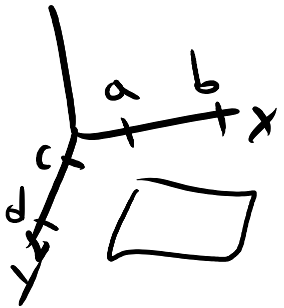
Def: Decimos que 2 vas continuas asociadas al mismo experimento son conjuntamente continuas si existe una función NO negativa f_{xy} (FDP, PDF) conjunta tq:

$$P((X,Y)\in B) = \iint_{(X,Y)\in B} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$$

Integral sobre B

$$\iint_B$$

$\forall$ subconjunto $B \in \mathbb{R}^2$ medible.



B es un rectangulo $B = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$

$$P(a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

Obs: $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = 1$$

$$\parallel$$

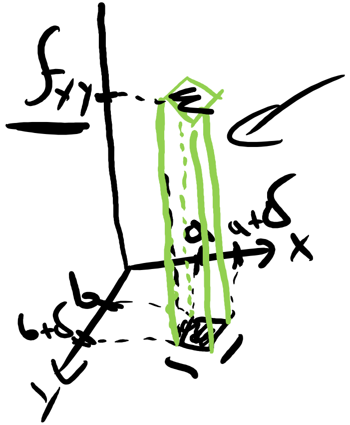
$$P((X,Y) \in \mathbb{R}^2) \longrightarrow \text{Prob de todo } \Omega$$

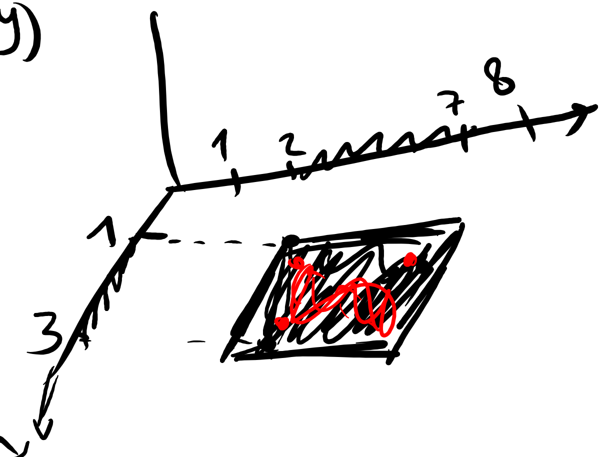
Interpretación:

Sea $0<\delta<<1$

$$\boxed{P(a\leq X\leq a+\delta,\ b\leq Y\leq b+\delta)}$$

$$\boxed{\int_b^{b+\delta}\int_a^{a+\delta} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy} \leftarrow \approx \delta^2 f_{XY}(x,y)$$





Obs: f_{XY} permite calcular prob de eventos que involucren a X y a Y

En particular: $A \subseteq \mathbb{R}$, A medible

$$P(X \in A) = P(X \in A, Y \in \mathbb{R}) = \int_A \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy}\,dx$$

$$= \int_A f_X(x)\,dx$$

$$\sum_y P_{XY}(x,y) = P_X(x)$$

Universidad del Rosario | Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

$$\underbrace{f_X(x)}_{\text{PDF. Marginal}} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{XY}(x,y)\,dy}_{\text{PDF conjunta.}}$$

Igualmente:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$$

Ej: R y J tienen una cita y cada uno llega con un retraso uniforme entre 0 y 1 horas.

X, Y son uniformes sobre $[0,1]^2$

Todos los pares $(x,y) \in [0,1]^2$

$$\underline{f_{XY}(x,y)} = \begin{cases} c=1 & \text{si } (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

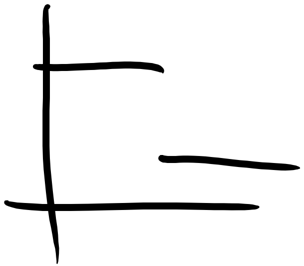
¿Quién es c??

Prob de R llegue con menos de 0.5 horas de retraso y J con más de 0.5 horas.

Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dy\,dx = \underline{1}$$

$$1 = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} c\,dy\,dx \longrightarrow c = 1$$



En general: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ (medible) la PDF $f_{xy}(x,y)$ conjunta de X, Y uniforme sobre S debe cumplir:

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} \underline{c} & \text{si } (x,y) \in S \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \longrightarrow 1 = \underline{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dy\,dx}$$

$$= \iint_S c\,dy\,dx$$

$$= c \cdot A(S)$$

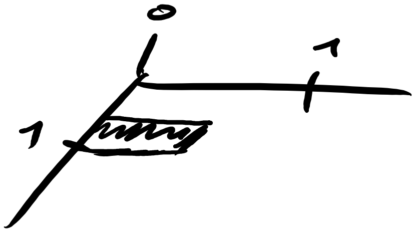
$$\Rightarrow c = \frac{1}{A(S)}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{A(S)} & (x,y) \in S \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obs: Si $A \subseteq S$ A (medible)

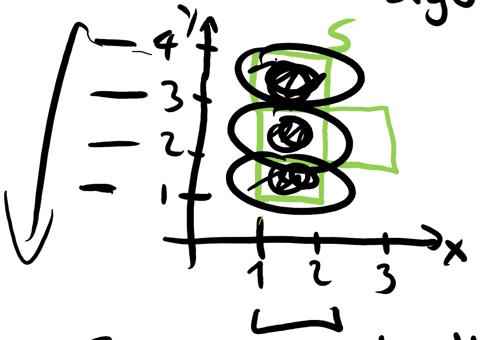
$$P((x,y)\in A) = \iint_A \underbrace{f_{xy}(x,y)}_{\to A(S)}\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{A(S)} \underbrace{\iint_A dy\, dx}_{A(A)} = \frac{A(A)}{A(S)} =$$



Ej: La PDF conjunta de X, Y es uniforme sobre S.

S es el siguiente subconjunto:



$$A(S) = 4 \qquad f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (x,y) \in S \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si quiero hallar $f_X(x)$ integramos con respecto a Y

Si $x \in [1,2]$

$$f_X(x) = \int_1^4 \frac{1}{4}\, dy = \frac{3}{4}$$

Si $x \in [2,3]$

$$f_X(x) = \int_2^3 \frac{1}{4}\, dy = \frac{1}{4}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 3/4 & \text{si } x \in [1,2] \\ 1/4 & \text{si } x \in (2,3] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } y \in [1,2] \cup [3,4] \\ 1/2 & \text{si } y \in [2,3] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Def: Sean X, Y va's asociadas al mismo experimento la CDF de X, Y denotada $F_{XY}(x,y)$, está definida por:

$$\underbrace{F_{XY}(x,y) =}\ P(X \leq x, Y \leq y)$$

$\boxed{\text{¡Aplica para va's discretas y continuas!}}$

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(s,t)\, ds\, dt$$

Obs: 1) Podemos obtener F_{xy} a partir de f_{xy} (integrando)

2) Podemos obtener f_{xy} a partir de F_{xy}

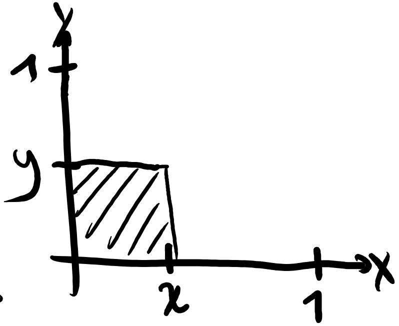
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

Siempre y cuando F_{xy} sea dos veces derivable!!

Ej: X, Y son uniformes en el cuadrado unitario

si $(x,y) \in [0,1]^2$

$$F_{XY}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$



$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(s,t)\, ds\, dt = \int_{0}^{y} \int_{0}^{x} 1\, ds\, dt = xy$$

Si $x, y \in [0,1]^2$

$$F_{XY}(x,y) = xy$$

$$\frac{\partial^2 F_{XY}}{\partial x \partial y} = 1 = f_{XY}(x,y)$$

Valor esperado de función de va's conjuntas continuas

Sean X, Y conjuntamente continuas y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Sea $Z = g(X,Y)$. Entonces.

$$E(Z) = E(g(X,Y)) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}}_{\mathbb{R}^2} g(x,y) \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

Sea $Z = aX + bY + c$ $\quad a,b,c \in \mathbb{R}$

$$E(Z) = E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

Ej: La PDF de X, Y, Z conjunta es una función f_{XYZ} no negativa tq:

$$P((X,Y,Z) \in B) = \iiint_B f_{XYZ}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$B \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\boxed{f_{XY}(x,y)} = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XYZ}(x,y,z)\,dz}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XYZ}(x,y,z)\,dy\,dz$$

Análogamente podemos hallar

f_y, f_z, f_{xz}, - - - etc...

Si $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$E(g(x,y,z)) = \iiint_{\mathbb{R}^3} g(x,y,z) \cdot f_{xyz}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$W = g(X, Y, Z) = aX + bY + cZ + d \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$W = g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n$$

$$E(W) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \ldots + a_n E(X_n)$$