

**Temas:** distribuciones conjuntas, condicionales e independencia de variables aleatorias discretas

- Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta dada por

	$Y$		
$X$	1	3	5
0	0.12	0.15	0.1
2	0.17	0.08	0.13
4	0.05	0.14	0.06

- Determine la función de probabilidad marginal de cada variable aleatoria.
  - ¿Son  $X$  y  $Y$  independientes?
  - Sea  $g(x, y) = x^2y$ . Determine el valor esperado de  $g(X, Y)$ .
  - Si  $Y = 1$ , determine el valor esperado de  $X$ .
  - Determine el valor esperado de  $X$  dado que  $Y = 3$ .
- Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta dada por

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{15}(x + y), & x = 0, 1, 2, \ y = 1, 2, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

- Determine la función de probabilidad marginal de  $X$ .
  - Determine la función de probabilidad marginal de  $Y$ .
  - Determine la función de probabilidad condicional de  $Y$  dado  $X = x$ .
  - Con el resultado anterior determine la función de probabilidad condicional de  $Y$  dado  $X = 1$ .
  - Con el resultado anterior determine la probabilidad de que  $Y$  sea igual a 1 dado que  $X$  es igual a 1.
  - Determine la función de probabilidad condicional de  $X$  dado  $Y = y$ .
  - Con el resultado anterior determine la función de probabilidad condicional de  $X$  dado  $Y = 2$ .
  - Con el resultado anterior determine la probabilidad de que  $X$  sea al menos igual a 1 dado que  $Y$  es igual a 2.
  - ¿Son  $X$  y  $Y$  independientes?
- Un inversionista compra 100 acciones de la empresa A y 200 acciones de la empresa B. Sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias que representan los cambios de precio de las acciones de A y B, respectivamente. Sobre un período de tiempo se ha estimado que

la función de masa de probabilidad (f.m.p.) conjunta de  $X$  y  $Y$  es uniforme sobre el conjunto de enteros

$$\{(a, b) : -2 \leq a \leq 4, -1 \leq b - a \leq 1\}$$

- a) Determine la f.m.p. de  $X$  y  $Y$ .
- b) Determine el valor esperado de  $X$  y  $Y$ .
- c) Determine la utilidad esperada del inversionista.

4. Una clase consiste de  $n$  estudiantes que toman un parcial de  $m$  preguntas. El  $i$ -ésimo estudiante responde las primeras  $m_i$  preguntas.

- a) El profesor selecciona una respuesta al azar (entre todas las recibidas de todos los estudiantes). Es decir, selecciona una respuesta  $(I, J)$ , donde  $I$  se refiere al estudiante que envió la respuesta y  $J$  al número de la pregunta respondida. Teniendo en cuenta que cada respuesta tiene la misma probabilidad de ser seleccionada, determine la f.m.p. conjunta de  $I$  y  $J$ . Determine las f.m.p. marginales de  $I$  y  $J$ .
- b) Si el estudiante  $i$  responde la pregunta  $j$ , su respuesta es correcta con probabilidad  $q_{ij}$ . Por cada respuesta correcta el estudiante obtiene  $a$  puntos, y de lo contrario obtiene  $b$  puntos. Determine el valor esperado de la nota del estudiante  $i$ .

5. Usted ha comprado un videojuego recientemente y juega una vez al día. En un día cualquiera, su puntaje en el videojuego varía entre 1 y 10, tomando cada valor con la misma probabilidad, independientemente de los otros días.

- a) El fin de semana usted jugó una vez cada día. Sean  $X_1$  y  $X_2$  los puntajes obtenidos cada día, y sea  $X$  el mínimo de los dos. Determine la f.m.p. de  $X$  y su valor esperado. ¿En cuánto difiere éste del puntaje esperado en un día cualquiera?
- b) Repita el ejercicio anterior pero ahora considere que juega 3 días consecutivos, con puntajes  $X_1, X_2, X_3$ , y sea  $X$  el mínimo puntaje.
- c) ¿Puede generalizar los dos ejercicios anteriores al caso en que juega un número arbitrario  $n$  de días y  $X$  es el mínimo puntaje obtenido en estos?

6. En el año 1990 se reúnen  $2m$  personas que forman  $m$  parejas que vivían juntas en ese momento. En el año 2015, la probabilidad de que cada persona esté viva es  $p$ , independiente de las demás personas. Sea  $A$  el número de personas vivas en 2015, y sea  $S$  el número de parejas en las que ambos miembros están vivos. Dado que han sobrevivido  $a$  personas, determine el valor esperado del número de parejas en las que han sobrevivido sus dos miembros, es decir, determine  $E[S|A = a]$ .

**Pista:** Expresé  $S$  como  $S = S_1 + S_2 + \dots + S_m$ , donde cada  $S_i$  es una variable aleatoria de Bernoulli que es igual a uno si la pareja sobrevive y a cero en caso de que no.

7. Sean  $X$ ,  $Y$ , y  $Z$  variables aleatorias discretas.

a) Demuestre que

$$p_{XYZ}(a, b, c) = p_{Z|X,Y}(c|a, b)p_{Y|X}(b|a)p_X(a)$$

b) Generalice este resultado para cualquier número de variables aleatorias.

8. Un transmisor envía mensajes en forma de ceros y unos. La probabilidad de que envíe un 1 es  $p$ , y la probabilidad de que envíe un 0 es  $1 - p$ , independiente de otras transmisiones. En un intervalo de observación el número de transmisiones es una variable aleatoria de Poisson con parámetro  $\lambda$ . Demuestre que el número de unos transmitidos en ese intervalo es una variable aleatoria de Poisson con parámetro  $p\lambda$ . **Pista:** Sea  $Z = X + Y$ , donde  $X$  y  $Y$  cuentan el número de unos y ceros transmitidos, respectivamente. Determine la función de masa probabilidad de  $X$  y  $Y$  y obtenga la marginal de la variable aleatoria  $X$ .

9. En su camino a la universidad, Camilo pasa por 4 semáforos cada día. Cada semáforo tiene la misma probabilidad de estar en rojo o en verde, independiente de los demás.

a) Determine la f.m.p., la media y la varianza del número de semáforos en rojo que Camilo encuentra en rojo.

b) Suponga que cada semáforo en rojo retarda a Camilo exactamente 2 minutos. Determine la varianza del retardo de Camilo causado por los semáforos.

c) El tiempo de desplazamiento se puede descomponer en dos factores: uno constante debido a la distancia ( $d$ ) y uno de retardo. Determine el valor esperado y la varianza del tiempo de desplazamiento suponiendo que  $d = 25$ .

10. Cada mañana usted se come entre uno y seis panes con la misma probabilidad, independiente del número de panes que coma algún otro día. Sea  $X$  el número de panes que se come en diez días. Determine el valor esperado y la varianza de  $X$ .

11. Un profesor tiene una extraña forma de calificar: a cada parcial le asigna aleatoriamente una nota de  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , independiente de los demás.

a) ¿Cuántos parciales espera presentar hasta obtener un 5?

b) ¿Cuántos parciales espera presentar hasta obtener al menos una vez cada nota de  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ?

X: #panes comidos en el

hay que volver a preguntar este punto 1

E(Geométrica), con  $p = 1/5$