Teoría de la Computación

Sesión 11

Edgar Andrade, Ph.D.

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la computación

Última revisión: Julio de 2021

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Contenido

Contenido

Gramáticas regulares

Una gramática es regular sii sus producciones son de la forma

$$A \to aB$$

$$A \to a$$

$$A \to \epsilon$$

Gramáticas regulares

Una gramática es regular sii sus producciones son de la forma

$$A \to aB$$
$$A \to a$$
$$A \to \epsilon$$

Teorema

Las Gramáticas Regulares y los `DFA` son equivalentes.

Gramáticas regulares

Una gramática es regular sii sus producciones son de la forma

$$A \to aB$$
$$A \to a$$
$$A \to \epsilon$$

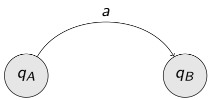
Teorema

Las Gramáticas Regulares y los `DFA` son equivalentes.

$\Leftarrow$) Clase pasada: pasar de un `DFA` a una gramática regular.

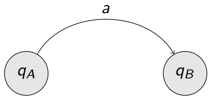
$\Rightarrow$) Idea de la demostración

$$A \to aB$$

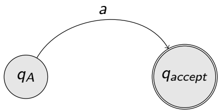


⇒) Idea de la demostración

$$A \to aB$$



$$A \to a$$

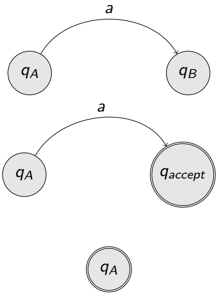


⇒) Idea de la demostración

$$A \rightarrow aB$$

$$A \rightarrow a$$

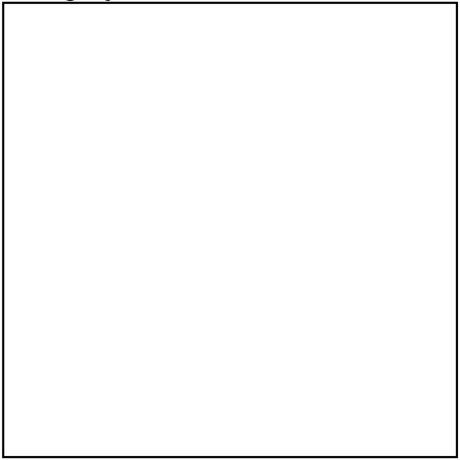
$$A \rightarrow \epsilon$$



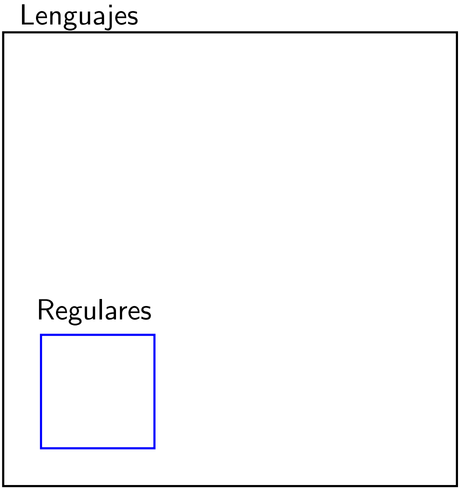
Contenido

Jerarquía de Chomsky

Lenguajes

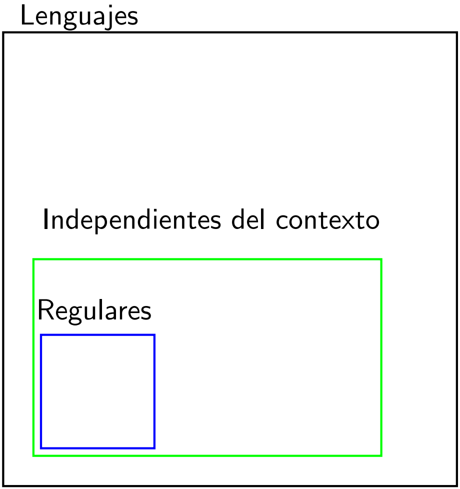


Jerarquía de Chomsky



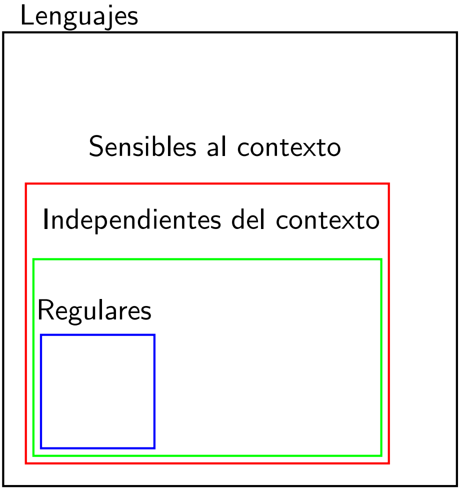
$$A \to aB \mid a \mid \epsilon$$

Jerarquía de Chomsky



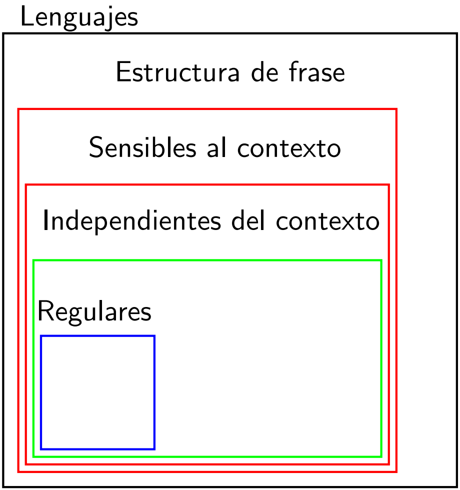
$$A \to x,\ x \in (V \cup \Sigma)^*$$

Jerarquía de Chomsky



$$xAy \to xuy,$$
$$x, y, u \in (V \cup \Sigma)^*$$

Jerarquía de Chomsky



$$x \to y,$$
$$x, y \in (V \cup \Sigma)^*$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Contenido

Forma normal de Chomsky

Para hacer manipulaciones formales, es bueno tener una forma estándar para una gramática independiente del contexto.

Forma normal de Chomsky

Para hacer manipulaciones formales, es bueno tener una forma estándar para una gramática independiente del contexto.

Definición

Una `CFG` está en forma normal de Chomsky sii todas las reglas son de la forma

$$A \to BC$$
$$A \to a,$$

donde a es un terminal y A, B, y C son variables. Además pedimos que ni B ni C sean la variable inicial y permitimos la regla $S \to \epsilon$, solo cuando S es la variable inicial.

Ejemplo

Antes de hacer la demostración formal, hagamos un ejemplo.

Ejemplo

Antes de hacer la demostración formal, hagamos un ejemplo.
Consideramos la gramática:

$$
\begin{aligned}
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \\
A &\to B \mid S \\
B &\to \mathtt{b} \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Ejemplo

Antes de hacer la demostración formal, hagamos un ejemplo. Consideramos la gramática:

$$
\begin{aligned}
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \\
A &\to B \mid S \\
B &\to \mathtt{b} \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

1. Para asegurar que la variables inicial no esté a la derecha de ninguna regla, añadimos una nueva variable inical S_0:

$$
\begin{aligned}
{\color{red}S_0} &\,{\color{red}\to S} \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \\
A &\to B \mid S \\
B &\to \mathtt{b} \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

Ejemplo

2. Ahora quitamos todas las reglas $A \to \epsilon$, ajustando las demás reglas para no cambiar el lenguaje.

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \\
A &\to B \mid S \mid \epsilon \\
B &\to \mathtt{b} \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

Ejemplo

2. Ahora quitamos todas las reglas $A \to \epsilon$, ajustando las demás reglas para no cambiar el lenguaje.

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \\
A &\to B \mid S \mid \epsilon \\
B &\to \mathtt{b} \mid \epsilon
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \mid S \\
A &\to B \mid S \mid \epsilon \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

2. Ahora quitamos todas las reglas $A \to \epsilon$, ajustando las demás reglas para no cambiar el lenguaje.

$$\begin{aligned} S_0 &\to S \\ S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \\ A &\to B \mid S \mid \epsilon \\ B &\to \mathtt{b} \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\to S \\ S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \mid S \\ A &\to B \mid S \mid \epsilon \\ B &\to \mathtt{b} \end{aligned}$$

3a. Quitamos las reglas $S \to S$ y $S_0 \to S$

$$\begin{aligned} S_0 &\to S \\ S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \mid S \\ A &\to B \mid S \\ B &\to \mathtt{b} \end{aligned}$$

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Ejemplo

2. Ahora quitamos todas las reglas $A \to \epsilon$, ajustando las demás reglas para no cambiar el lenguaje.

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \\
A &\to B \mid S \mid \epsilon \\
B &\to \mathtt{b} \mid \epsilon
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \mid S \\
A &\to B \mid S \mid \epsilon \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

3a. Quitamos las reglas $S \to S$ y $S_0 \to S$

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \mid S \\
A &\to B \mid S \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
S_0 &\to S \mid ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\to B \mid S \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

3b. Quitamos las reglas $A \to B$ y $A \to S$

$$S_0 \to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS$$

$$S \to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS$$

$$A \to B \mid S \mid \mathtt{b}$$

$$B \to \mathtt{b}$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Ejemplo

3b. Quitamos las reglas $A \to B$ y $A \to S$

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\to B \mid S \mid \mathtt{b} \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\to S \mid \mathtt{b} \mid ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Ejemplo

3b. Quitamos las reglas $A \to B$ y $A \to S$

$$\begin{aligned} S_0 &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\ S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\ A &\to B \mid S \mid \mathtt{b} \\ B &\to \mathtt{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\ S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\ A &\to S \mid \mathtt{b} \mid ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\ B &\to \mathtt{b} \end{aligned}$$

4. Añadimos variables y reglas para completar el trabajo.

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Ejemplo

3b. Quitamos las reglas $A \to B$ y $A \to S$

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\to B \mid S \mid \mathtt{b} \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
S_0 &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\to S \mid \mathtt{b} \mid ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

4. Añadimos variables y reglas para completar el trabajo.

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to AA_1 \mid UB \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
S &\to AA_1 \mid UB \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\to \mathtt{b} \mid AA_1 \mid UB \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A_1 &\to SA \\
U &\to \mathtt{a} \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

Formal normal de Chomsky

El procedimiento del ejemplo nos permite demostrar el siguiente resultado.

Teorema

Cualquier lenguaje independiente del contexto se puede generar a través de una gramática independiente del contexto en formal normal de Chomsky.

Demostración

Vamos a describir en manera algorítmica lo que hicimos antes.

1. Añadimos una nueva variable inicial S_0 con la regla $S_0 \rightarrow S$. Así la variable inicial no comparece en la derecha de ninguna regla.

Demostración

Vamos a describir en manera algorítmica lo que hicimos antes.

1. Añadimos una nueva variable inicial S_0 con la regla $S_0 \to S$. Así la variable inicial no comparece en la derecha de ninguna regla.
2. Removemos todas las reglas $A \to \epsilon$. Para no cambiar el lenguaje, añadimos una nueva regla para cada regla que removimos: si hay una regla $R \to uAv$, con u y v terminales, añadimos la regla $R \to uv$. Lo mismo hacemos para cualquier ocurrencia de A. Si había la regla $R \to A$, añadimos la regla $R \to \epsilon$ si ya no habíamos eliminado la misma. Repetimos hasta eliminar todas las reglas $A \to \epsilon$, con $A \neq S_0$.

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Demostración

3. Eliminamos todas las reglas unitaria de la forma $A \to B$. Para no cambiar el lenguaje, cada vez que había una regla $B \to u$, donde u es una cadena de terminales y variables, añadimos la regla $A \to u$. Repetimos hasta eliminar todas las reglas unitarias.

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Demostración

3. Eliminamos todas las reglas unitaria de la forma $A \to B$. Para no cambiar el lenguaje, cada vez que había una regla $B \to u$, donde u es una cadena de terminales y variables, añadimos la regla $A \to u$. Repetimos hasta eliminar todas las reglas unitarias.
4. Por último, convertimos las reglas que quedan en forma estándar. Remplazamos cada regla de la forma $A \to u_1 u_2 \cdots u_k$, donde cada u_i es una variable o un terminal, con las reglas:

$$A \to u_1 A_1, \quad A_1 \to u_2 A_2, \ldots, A_{k-2} \to u_{k-1} u_k.$$

Los A_i son variables nuevas. También remplazamos todos los terminales u_i con nuevas variables U_i y añadimos las reglas $U_i \to u_i$.

En esta sesión usted aprendió

- Conectar las ideas de gramática regular y `DFA`.
- Reconocer las gramáticas que hacen parte de la Jerarquía de Chomsky.
- Transformar una `CFG` en una gramática en Forma Normal de Chomsky.