Probabilidad y Estadística 2

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS APLICADAS Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

2021-2

Universidad del Rosario | Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

Ej: Se envía un mensaje desde Bogotá con prob 0.5 a Medellín, con prob 0.3 a Cali y con prob 0.2 a Barranquilla.
El tiempo de envío X es aleatorio con valor esperado de 0.05 seg si el mensaje va a Medellín. 0.1 seg si el mensaje va a Cali y 0.3 si va a Barranquilla.

X: tiempo de viaje del mensaje.

A_1: Mensaje va a Medellín
A_2: " " " Cali
A_3: " " " Barranquilla

$P(A_1) = 0.5$ $\quad E(X|A_1) = 0{,}05$
$P(A_2) = 0.3$ $\quad E(X|A_2) = 0.1$
$P(A_3) = 0.2$ $\quad E(X|A_3) = 0.3$

$$E(X) = 0.5 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.3$$

$$= 0.115 \text{ seg.}$$

Ej: Sea X una v.a geométrica con parámetro p

$$p_X(K) = (1-p)^{K-1}\, p \qquad K = 1, 2 \ldots$$

$$E(X) = \sum_{K=1}^{\infty} K\,(1-p)^{K-1}\, p$$

$$Var(X) = \sum_{K=1}^{\infty} \left(K - E(X)\right)^2 (1-p)^{K-p}\, p$$

Series.

$A_1: \{X = 1\}$

$A_2: \{X > 1\}$

$$E(X) = \underbrace{E(X|A_1)\cdot P(A_1)} + E(X|A_2)\,P(A_2)$$

$P(A_1) = p$

$P(A_2) = 1-p$

$E(X|A_1) = 1$

$E(X|A_2) = 1 + \boxed{E(X)}$

$$E(X) = p + (1-p)(1+E(X))$$

$$= p + E(X) + 1 - E(X)p - p \rightarrow$$

Universidad del Rosario | Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

$$-1 = p(1 - E(x) - 1) = -\frac{1}{p} = -E(x)$$

$$E(x) = \frac{1}{p}$$

$$E(x^2 | A_1) = 1 \qquad E(x^2)$$

$$E(x^2 | A_2)$$

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

Def: Sea X una v.a y A un evento decimos que X es indep. del evento A

Si:

$$P(\{X=x\}\cap A) = P(\{X=x\})P(A) = p_X(x)\cdot P(A)$$

$\forall x$ valor de X

Teorema: Si A es un evento tq $P(A)>0$ y X es indep. de A. Entonces $p_{X|A}(x) = p_X(x)$

Dem: $$p_{X|A}(x) = \frac{P(\{X=x\}\cap A)}{P(A)} = \frac{p_X(x)\cancel{P(A)}}{\cancel{P(A)}} = p_X(x)$$

Ej: Se tira una moneda 2 veces

X: # de caras

$\underline{A}$: # de caras es par.

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x=0 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ \frac{1}{4} & x=2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$x = 0, 1, 2$

$$P_{X|A}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x=0 \\ 0 & x=1 \\ \frac{1}{2} & x=2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\neq$

X y A no son indep.

Def: Sean X, Y va's discretas asociadas al mismo experimento. Decimos que X, Y son indep. Si:

$$P_{XY}(x, y) = P_X(x) P_Y(y) \quad \forall x \ \forall y \text{ valores de } X \text{ y de } Y.$$

Teorema: Independencia entre va's es equivalente a $P_{X|Y}(x|y) = P_X(x) \quad \forall x \ \forall y \text{ tq } P_Y(y) > 0$

Dem: $$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{XY}(x, y)}{P_Y(y)} = \frac{P_X(x) \cancel{P_Y(y)}}{\cancel{P_Y(y)}} = P_X(x)$$

Def: Sea A un evento t.q. $P(A)>0$

Decimos que X, Y v.a's asociadas al mismo experimento son condicionalmente indep. dado A si:

$$P_{X,Y|A}(x,y) = P_{X|A}(x) \cdot P_{Y|A}(y) \quad \forall x \, \forall y \text{ valores de } X, Y$$

indep de X, Y $\not\Rightarrow$ indep condicional

indep condicional $\not\Rightarrow$ indep.

$$\boxed{P_{X|Y,A}(x) = P_{X|A}(x)}$$

$\forall x \; \forall y$ valores de X y Y respect.

y para $P_{Y|A}(y) > 0$

Si X y Y son condicionalmente independientes. ⚠

Teorema: Sean X, Y va's indep. y discretas

$$\boxed{E(XY) = E(X)E(Y)}$$

Dem: $E(XY) = \sum_x \sum_y xy \, \underline{P_{XY}}(x,y)$

$$= \sum_x \sum_y xy \, P_X(x) \, P_Y(y)$$

$$= \underbrace{\sum_x x P_X(x)}_{\downarrow \, E(X)} \, \underbrace{\sum_y y P_Y(y)}_{\downarrow \, E(Y)} = E(X)E(Y)$$

Teo: Si X, Y son v.a's indep. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces $f(X)$ y $g(Y)$ son v.a's indep.

Dem: $P_{f(X), g(Y)}(a, b) = P(f(X) = a, g(Y) = b)$

$= P(X \in f^{-1}\{a\}, Y \in g^{-1}\{b\})$

$= \displaystyle\sum_{\{(x,y) : f(x) = a,\, g(y) = b\}} P_{XY}(x, y)$

$$= \sum_{\{(x,y):\, f(x)=a,\, g(y)=b\}} p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$= \sum_{\{x:\, f(x)=a\}} p_X(x) \sum_{\{y:\, g(y)=b\}} p_Y(y) = p_{f(X)}(a) \cdot p_{g(Y)}(b)$$

Cor: Si X, Y independientes $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\underbrace{E(f(X) \cdot g(Y)) = E(f(X)) \cdot E(g(Y))}$$

Teo: Sean X, Y va's indep. Entonces

$var(X+Y) = var(X) + var(Y)$

Para demostrar:

Sea $\tilde{X} = X - E(X)$ $\tilde{Y} = Y - E(Y)$

$\tilde{X}, \tilde{Y} \to$ indep

Indep de múltiples variables aleatorias

Def: Sean X, Y, Z va's discretas asociadas al mismo experimento. Son independientes si:

$$p_{XYZ}(x,y,z) = p_X(x)\, p_Y(y)\, p_Z(z).$$

Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, X, Y, Z son independientes.

Entonces:

1) $f(X), g(Y), h(Z)$ son indep.

2) Si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x,y)$, $h(z)$ son indep.

$f(x,z)$, $h(y)$ Igual para todas las combinaciones.

Sin embargo:

$f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y)$, $g(y,z)$ no nec. indep.

$X_1, \ldots X_n$ n variables aleatorias discretas

$$Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n)$$

Ej: Sea X una va binomial con parámetros n y p. $X = X_1 + \ldots + X_n$ X_i's Bernoulli independientes.

$$X_i \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad P_{X_i}(k) = \begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$Var(X) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \overbrace{Var(X_1)}^{p(1-p)} + \overbrace{Var(X_2)}^{p(1-p)} + \ldots + \underbrace{Var(X_n)}_{p(1-p)}$$

$$= np(1-p)$$

Recordatorio:

VA Poisson X con parámetro λ se puede obtener como el límite de una v.a binomial cuando $n \to \infty$

$p \to 0$, $np = \lambda$

Valor esperado de X poisson $\longrightarrow \lambda$

Varianza $\longrightarrow \lambda$

Ej: A veces no conocemos la probab. de un evento A de interés

Podemos simular y verificar la ocurrencia o no del evento.

En ese caso podemos generar n va's asociadas a los resultados de las n simulaciones.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si ocurre } A \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad P_{X_i}(K) = \begin{cases} P(A) & \text{si } K=1 \\ 1-P(A) & \text{si } K=0 \end{cases}$$

Tenemos $E\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n}\,n\,P(A)=\underline{P(A)}$

$$\operatorname{var}\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{\cancel{n^2}}\cdot\cancel{n}\,P(A)\,(1-P(A))$$

$$=\frac{1}{n}P(A)(1-P(A))\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$