



PRIMER PARCIAL  
23 de febrero de 2021

**Indicaciones generales**

- Este es un examen **individual** con una duración de **120 minutos: de 1:00 a 3:00 p.m.**
- Sólo se permite el uso de calculadoras como medio electrónico. Los celulares deben estar apagados durante todo el examen.
- Las cámaras deben estar activas durante todo el examen.
- Puede usar una única hoja con apuntes. El uso de libros u otro recurso “analógico” diferente no está permitido.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva a la anulación del examen.
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- Al finalizar, suba a eaulas un **único** archivo .pdf con su solución. En caso de problemas con la plataforma envíe su archivo por el chat privado de Teams a martin.andrade@urosario.edu.co.
- ¡Suerte y ánimo!

1. (15 pts) Una caja contiene cinco bolas rojas y tres verdes. Una muestra aleatoria de tamaño 2 se extrae de la caja (sin recambio). Sean

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si la primera bola es roja} \\ 0, & \text{d.l.c} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{si la segunda bola es roja} \\ 0, & \text{d.l.c} \end{cases}$$

- Determine la PMF conjunta de  $X$  e  $Y$
- Determine  $p_{X|Y}(x|y)$
- Determine  $\mathbb{E}(X|Y = y)$
- ¿Son  $X$  e  $Y$  independientes? Justifique

2. (15 pts) Demuestre que

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x}, \quad 0 < y < x < 1,$$

es una función de densidad conjunta legítima (válida). Halle:

- La densidad marginal de  $X$
- $\mathbb{E}(X)$
- ¿Son  $X$  e  $Y$  independientes? Justifique



3. (10 pts) Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{dlc} \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$ . Determine la PDF condicional de  $X$  dado  $Y = y$  y el valor esperado de  $X$  dado  $Y = y$ .

4. (10 pts) Una máquina produce monedas para las cuales la probabilidad de cara  $P$  es una variable aleatoria con PDF

$$f_P(p) = \begin{cases} pe^p, & p \in [0, 1] \\ 0, & \text{dlc} \end{cases}$$

Una moneda producida por esta máquina se selecciona y se lanza repetidamente, asumiendo que los lanzamientos sucesivos son independientes.

- Determine la probabilidad de obtener una cara en el primer tiro.
- Dado que el lanzamiento de la moneda resultó en cara, calcule la PDF condicional de  $P$ .