Formulas 2

Saturday, September 18, 2021 10:25 AM

⊛ Sobre la varianza

$$Var(x) = \sum_{x} (x - E(x))^2 \cdot P_X(x)$$

- **Propiedades:**

1. $var(x) \geq 0$
2. $var(a) = 0$, $a \in \mathbb{R}$ y es cte.
3. $var(aX) = a^2 \, var(X)$.
4. $Var(x+y) = var(x) + var(y) + 2\,Cov(x,y)$
5. $var(y) = E(var(Y|X)) + var(E(Y|X))$

$\hookrightarrow var(\sum x_i) = \sum Var(x_i) + \sum_{\{(i,j),\, i \neq j\}} cov(x_i, x_j)$

⊛ Sobre el valor Esperado

Def: $E(x) = \sum_{x} x \cdot P_X(x)$

$\int_{x} x \cdot f_X(x)\, dx$

- **propiedades:**

1. $E(c) = c$, c es cte.
2. $E(cX) = c\,E(X)$.
3. Si $X \geq 0 \Rightarrow E(x) \geq 0$
4. Si $X \leq Y \Rightarrow E(x) \leq E(Y)$
5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq E(x) \leq b$
6. $Y = a + bx \Rightarrow E(Y) = a + b\,E(X)$
7. Si x, y indep. $\Rightarrow E(x,y) = E(x) \cdot E(y)$
8. Valor esperado iterado $E(x) = E(E(x|Y))$

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[X \mid Y]] = \begin{cases} \sum_{y} \mathbf{E}[X \mid Y = y] p_Y(y), & Y \text{ discrete,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}[X \mid Y = y] f_Y(y)\, dy, & Y \text{ continuous.} \end{cases}$$

⊛ Sobre distribuciones derivadas

Método 1:

[illegible] $Y = g(x)$ de

Calcular la PDF de $Y = g(x)$ de una v.a. continua X.

1. Calcular la CDF de F_Y así:

$$F_Y(y) = P(g(x) \leq y)$$
$$= \int_{\{x \mid g(x) < y\}} f(x)\, dx$$

2. derive $F_Y(y)$ para obtener $f_Y(y)$.

Método 2 (cuando Y es f. lineal de una v.a.):

Sea X continua con PDF $f_X(x)$, y sea $Y = aX + b$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

DM: $Y = aX + b \Rightarrow F_Y(y) = P(aX + b \leq y)$

$$= P(aX \leq y - b)$$
$$= P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right)$$
$$= F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Ahora se deriva para obtener $f_Y(y)$:

por regla de la cadena sale:

$$f_Y(y) = \frac{d F_Y(y)}{dy} = \frac{1}{a} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Método 3 (caso de función Monótona):

- Dado que g es estrictamente monótona, tiene una función inversa h, vea entonces que:

$$y = g(x) \Leftrightarrow x = h(y) \equiv x = h(g(x))$$

$$y = g(x) \Leftrightarrow x = h(y) = x = h(g(x))$$

Asumiendo que h es diferenciable, entonces la PDF de Y en la región donde $f_Y(y) > 0$ es:

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot \left| \frac{dh}{dy}(y) \right|$$

Pm:

dado g monótona estricta y $Y = g(X)$ calculemos la acumulada de Y:

$$\begin{aligned} F_Y &= P(g(X) \leq y) \\ &= P(h(g(X)) \leq h(y)) \\ &= P(X \leq h(y)) \\ &= F_X(h(y)) \end{aligned}$$

] g tiene inversa dado que es monótona estricta.

Ahora se puede diferenciar F_Y para obtener f_Y

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy}(y) = f_X(h(y)) \cdot \frac{dh}{dy}(y)$$

(el caso donde g y $\therefore h$, son decrecientes se trata análogamente)

Método 4 (caso multivariado):

el truco de obtener la acumulada y después diferenciar aplica también aquí.

Método 5 (suma de variables a. indep. = convolución):

- Caso discreto, sea $Z = X + Y$, donde X y Y son independientes

- Caso discreto, sea $Z = X + Y$, donde X y Y son independientes

$$P_Z(z) = P(X+Y=z) = \sum_{\{x,y \mid x+y=z\}} P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

$$= \underline{\underline{\sum_x P_X(x) \cdot P_Y(z-x)}} \quad \Big] \text{ convolución de } X \text{ y } Y$$

- Caso continuo, sea $Z = X + Y$, donde X y Y son indep. y cont.

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx$$

Si $Z = X - Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_{-Y}(z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(x-z)\, dx$$

DM:

Para obtener f_Z, con $Z = X + Y$, primero se obtendrá $f_{X,Z}$, para después integrar con respecto a x y quedar con f_Z:

$$P(Z \le z \mid X = x) = P(X + Y \le z \mid X = x)$$

$$= P(x + Y \le z)$$

$$= P(Y \le z - x) = F_Y(z - x)$$

Recordemos que por la regla de la multiplicación:

$$f_{Z,X}(z,x) = f_{Z|X}(z|x) \cdot f_X(x)$$

$$= f_X(x) \cdot \underbrace{f_Y(z-x)}_{\text{Se obtiene al diferenciar respecto a } z,\ P(Z \le z \mid X = x)}$$

finalmente:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx$$

Funciones derivadas conocidas (fórmulas):

- Sea X una v.a. exponencial y $Y = aX + b$, por el método 2 $f_Y(y)$:

$$\lambda e^{-\lambda(y-b)/a}$$

Por el ... y Y:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{para } x \geq 0 \qquad \Big\} \; f_Y(y) = \frac{\lambda}{|a|} e^{-\lambda(y-b)/a} \quad \text{para } (y-b)/a \geq 0$$

- Sea X una V.a. normal con media μ y varianza σ^2 y sea $Y = aX + b$, con a y b escalares y $a \neq 0$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$\therefore \quad f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2 / 2\sigma^2\right\}$$

$$= \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}\right\}$$

f_Y es normal con media $a\mu + b$ varianza $a^2\sigma^2$.

- $Z = X - Y$, X y Y son exponenciales

$$F_Z = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \\ \frac{1}{2} e^{\lambda z}, & z < 0 \end{cases}$$

$$f_Z = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda z}, & z > 0 \\ \frac{\lambda}{2} e^{\lambda z}, & z < 0 \end{cases}$$

o también: $f_Z(z) = \frac{\lambda}{2} \cdot e^{-\lambda|z|}$] → exponencial de 2 lados, Laplace PDF

- Sea $Z = X + Y$ donde X y Y son normales independientes, con convolución se tiene que:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \exp\left\{-\frac{(z - \mu_x - \mu_y)^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right\}$$

- Sobre la covarianza

Def: $\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X]) \cdot (Y - E(Y))]$

$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$

- **Propiedades:**

1. $Cov(X, X) = 1$
2. $Cov(X, aY + b) = a \cdot Cov(X, Y)$
3. $Cov(X, Y + Z) = Cov(X, Y) + Cov(X, Z)$

Teorema

X, Y indep. $\Rightarrow Cov(X, Y) = 0$

$Cov(X, Y) \not\Rightarrow X, Y$ indep.

⊛ Coef. de correlación:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{var(X) \cdot var(Y)}}$$

$$|\rho| \leq 1$$

⊛ Sobre la Regresión Lineal

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

$$\underbrace{\hat{\beta}_1}_{\text{insesgado}} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) Y_i - \bar{Y} \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})}}{S_{xx}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) Y_i}{S_{xx}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

1. $Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$
2. $Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2 \cdot \sum x_i^2}{n \cdot S_{xx}}$
3. $Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0) = \frac{-\bar{X}}{S_{xx}} \cdot \sigma^2$

5. An unbiased estimator of σ^2 is $S^2 = SSE/(n-2)$, where $SSE = S_{yy} - \hat{\beta}_1 S_{xy}$ and $S_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2$.

If, in addition, the ε_i, for $i = 1, 2, \ldots, n$ are normally distributed,

6. Both $\hat{\beta}_0$ and $\hat{\beta}_1$ are normally distributed.
7. The random variable $\frac{(n-2)S^2}{\sigma^2}$ has a χ^2 distribution with $n - 2$ df.
8. The statistic S^2 is independent of both $\hat{\beta}_0$ and $\hat{\beta}_1$.

⊛ Sobre la correlación

(•) podemos asumir 2 casos para un modelo lineal

1. exactamente

(•) podemos asumir 2 casos para un modelo lineal

→ X es un parámetro que puede ser totalmente controlado en cuyo caso:

$$Y = \hat{\beta}_0 + x\hat{\beta}_1 + \varepsilon$$

→ X es una muestra de una v.a. que se puede relacionar funcionalmente con Y, se suele asumir que la variable (X, Y) es de distribución Normal bivariada.

$$E(Y|X=x) = \beta_0 + \beta_1 x, \quad \beta_1 = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho$$

$$\rho = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}} = \hat{\beta}_1 \cdot \sqrt{\frac{S_{xx}}{S_{yy}}}$$

(*) Transformadas o Fun. gen. de momentos:

→ Def: la transformada asociada a la v.a. X es una función:

$$M_X(s) = E(e^{sX})$$

Una notación más simple para cuando X está clara por contexto:

$$M(s) = \sum_x e^{sx} \cdot p_X(x)$$

$$\equiv \int_x e^{sx} f_X(x)$$

→ Generación de Momentos

$$\frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\,dx = E[X^n]$$

esto por que, (reemplace s por cero):

$$\frac{d}{ds}M(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{E}[e^{sX}] = \mathbf{E}\left[\frac{d}{ds}e^{sX}\right] = \mathbf{E}[Xe^{sX}],$$

→ Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a's continuas con pdf $f_{X_1}, \dots f_{X_n}$.

$f_{X_1}, \dots f_{X_n}$.

$$f_Y(y) = p_1 f_{X_1}(y) + \dots + p_n f_{X_n}(y)$$

$$M_Y(s) = p_1 M_{X_1}(s) + \dots + p_n M_{X_n}(s)$$

→ Si $Z = \sum_i X_i$, con X_i's independientes

$$M_Z(s) = M_{X_1}(s) \cdot M_{X_2}(s) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(s)$$

→ Consider n random variables $X_1, \dots, X_n$ related to the same experiment. Let $s_1, \dots, s_n$ be scalar free parameters. The associated **multivariate transform** is a function of these n parameters and is defined by

$$M_{X_1,\dots,X_n}(s_1, \dots, s_n) = \mathbf{E}\left[e^{s_1 X_1 + \dots + s_n X_n}\right].$$

Transformadas conocidas:

⊙ Sea X una poisson con $f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, $x \in \mathbb{N}^*$:

$$M_X(s) = M(s) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{sx} \cdot \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}, \quad a = e^s \lambda$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^a = e^{\lambda(e^s - 1)}$$

⊙ Sea X una exponencial con param. λ:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

$$M_X(s) = M(s) = \lambda \cdot \int_0^{\infty} e^{sx} \cdot e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \cdot \int_0^{\infty} e^{x(s-\lambda)} dx = \lambda \cdot \frac{e^{(s-\lambda)x}}{s-\lambda} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - s}$$ (solo si $s < \lambda$, dlc esto no converge)

⊙ transformada de una función lineal de una v.a.:

$$Y = aX + b$$

$$M_Y(s) = M(s) = E\left(e^{s(aX+b)}\right) = e^{sb} \cdot E\left(e^{saX}\right)$$

$$= \underline{\underline{s^{sb} \cdot M_X(s \cdot a)}}$$

- Transformada de una normal con media μ y var. σ^2,

Asumiendo que X es N. estándar:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

$$M_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\right) \cdot e^{sy} \, dy$$

$$= \underline{\underline{e^{s^2/2}}}$$

Vea que una Normal con media μ y var. σ^2 se obtiene de una N. estándar así:

$$X = \sigma Y + \mu$$

ergo $M_X(s) = s^{sb} \cdot M_Y(sa) = \underline{\underline{s^{s\mu} \cdot e^{(sa)^2/2}}}$

- Transformada de X (geométrica) es:

$$M_X(s) = M(s) = \frac{p e^s}{1 - (1-p)e^s}$$

Donde $0 < p \leq 1$

Transforms for Common Discrete Random Variables

Bernoulli(p) $(k = 0, 1)$

$$p_X(k) = \begin{cases} p, & \text{if } k = 1, \\ 1-p, & \text{if } k = 0, \end{cases} \qquad M_X(s) = 1 - p + pe^s.$$

Binomial(n, p) $(k = 0, 1, \ldots, n)$

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad M_X(s) = (1 - p + pe^s)^n.$$

Geometric(p) $(k = 1, 2, \ldots)$

$$p_X(k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad M_X(s) = \frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}.$$

Poisson(λ) $(k = 0, 1, \ldots)$

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad M_X(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}.$$

Uniform(a, b) $(k = a, a+1, \ldots, b)$

$$p_X(k) = \frac{1}{b-a+1}, \qquad M_X(s) = \frac{e^{sa}\left(e^{s(b-a+1)} - 1\right)}{(b-a+1)(e^s - 1)}.$$

Transforms for Common Continuous Random Variables

Uniform(a, b) $(a \le x \le b)$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad M_X(s) = \frac{e^{sb} - e^{sa}}{s(b-a)}.$$

Exponential(λ) $(x \ge 0)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}, \qquad (s < \lambda).$$

Normal(μ, σ^2) $(-\infty < x < \infty)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad M_X(s) = e^{(\sigma^2 s^2/2) + \mu s}.$$

* Suma de un número aleatorio de vars. indep

la suma de un número aleatorio de V. a's aleatorias tiene :

$$Y = X_1 + \ldots + X_N$$

$\rightarrow E(Y \mid N) = N \cdot E(X)$

$\rightarrow E(Y) = E(E(Y \mid N)) = E(N \cdot E(X)) = E(N) \cdot E(X)$

$\rightarrow \mathrm{var}(Y \mid N) = N \cdot \mathrm{var}(X)$

$\rightarrow \mathrm{var}(Y) = E(N \cdot \mathrm{var}(X)) + \mathrm{var}(N \cdot E(X))$

$= \mathrm{var}(X) \cdot E(N) + E(X)^2 \cdot \mathrm{var}(N)$

$\rightarrow M_Y(s) = M_N(\log(M_X(s)))$

$E(Y)$, $Var(Y)$ y $M_Y(s)$, para vá's Suma de # aleatorio de va's

- Suma de un número geométrico de exponenciales

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad N \to \text{geom}, \quad X_i \to \exp$$

$$E(Y) = E[N] \cdot E[X] = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{p\lambda}$$

$$Var(Y) = E(N) \cdot Var(X) + E(X)^2 Var(N)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 p^2}$$

$$M_Y(s) = \frac{p\lambda}{p\lambda - s}$$

- Suma de un número geométrico de V.a's geométricas

after some algebra,

$$M_Y(s) = \frac{pqe^s}{1-(1-pq)e^s}.$$

- Desigualdades de Markov y Chebyshev

Markov Inequality

If a random variable X can only take nonnegative values, then

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{a}, \qquad \text{for all } a > 0.$$

Chebyshev Inequality

If X is a random variable with mean μ and variance σ^2, then

$$\mathbf{P}\big(|X-\mu| \geq c\big) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}, \qquad \text{for all } c > 0.$$

Ley débil de los grandes números

As in the introduction to this chapter, we consider a sequence $X_1, X_2, \ldots$ of independent identically distributed random variables with mean μ and variance σ^2, and define the sample mean by

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

We have

$$\mathbf{E}[M_n] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_n]}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu,$$

and, using independence,

$$\text{var}(M_n) = \frac{\text{var}(X_1 + \cdots + X_n)}{n^2} = \frac{\text{var}(X_1) + \cdots + \text{var}(X_n)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

We apply the Chebyshev inequality and obtain

$$\mathbf{P}\big(|M_n - \mu| \geq \epsilon\big) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}, \qquad \text{for any } \epsilon > 0.$$

The Weak Law of Large Numbers

Let $X_1, X_2, \ldots$ be independent identically distributed random variables with mean μ. For every $\epsilon > 0$, we have

$$\mathbf{P}\big(|M_n - \mu| \geq \epsilon\big) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) \to 0, \qquad \text{as } n \to \infty.$$