Teoría de la Computación

Sesión 16

Edgar Andrade, Ph.D.

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la computación

Última revisión: Agosto de 2021

Contenido

Contenido

Equivalencia entre CFG y PDA

Teorema

L es un lenguaje independiente del contexto sii existe un PDA P tal que $L(P) = L$.

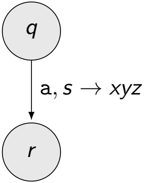
De PDA a CFG

Teorema ($\Rightarrow$)

Si L es un lenguaje independiente del contexto, existe un PDA P tal que $L(P) = L$.

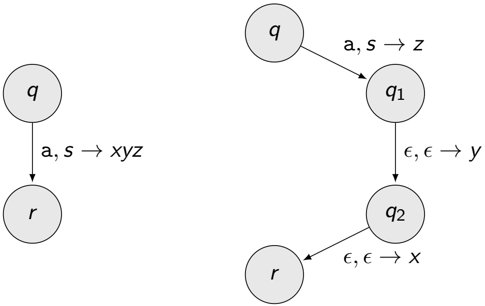
Una construcción intermedia

Es posible escribir más de un símbolo en la pila al mismo tiempo mediante la siguiente convención:



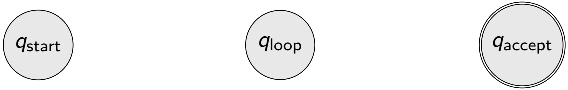
Una construcción intermedia

Es posible escribir más de un símbolo en la pila al mismo tiempo mediante la siguiente convención:

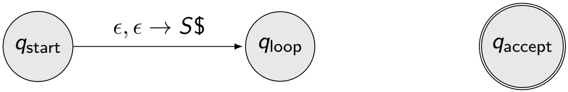


Donde q_1 y q_2 son estados nuevos.

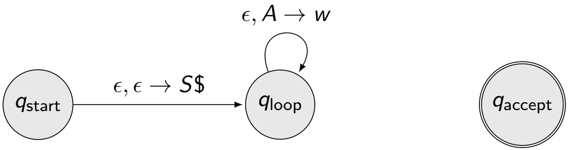
De CFG a PDA



De CFG a PDA

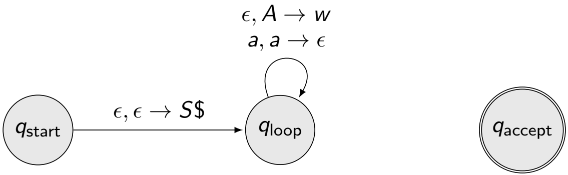


De CFG a PDA



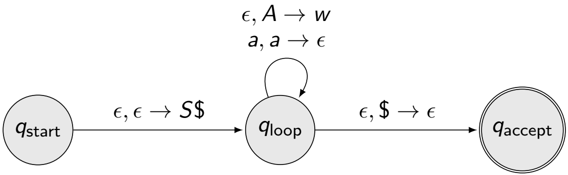
Para toda regla $A \to w$ en la gramática.

De CFG a PDA



Para toda regla $A \to w$ en la gramática.
Para todo símbolo $a \in \Sigma$.

De CFG a PDA



Para toda regla $A \rightarrow w$ en la gramática.
Para todo símbolo $a \in \Sigma$.

Ejemplo

La gramática:

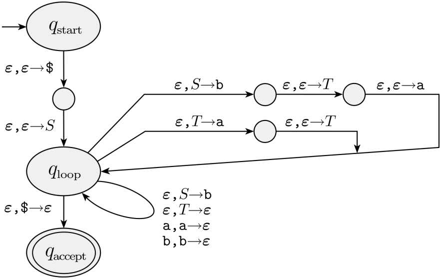
$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow \mathtt{a}T\mathtt{b} \mid \mathtt{b} \\
T &\rightarrow T\mathtt{a} \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

Ejemplo

La gramática:

$$S \to \mathtt{a}T\mathtt{b} \mid \mathtt{b}$$
$$T \to T\mathtt{a} \mid \epsilon$$

produce el PDA:



De CFG a PDA

☞ Hemos visto cómo construir P a partir de L. Falta mostrar la recíproca.

Teorema ($\Leftarrow$)

Si P es un PDA, entonces existe un lenguaje independiente del contexto L tal que $L(P) = L$.

Contenido

Lema 1

Sea P un PDA. Entonces existe un PDA P' equivalente a P con las siguientes propiedades:

1. P' tiene un solo estado de aceptación q_{accept}.
2. Su pila está vacía antes de aceptar una cadena.
3. Cada transición o bien incluye un solo símbolo en la pila o bien lo elimina.

Lema clave

Lema 2

Dado un PDA con las características del lema 1, es posible construir una CFG G con las siguientes propiedades. Para cada par de estados p, q de P, G tiene un símbolo no terminal A_{pq} de tal manera que:

$$(p, w, \epsilon) \overset{*}{\vdash} (q, \epsilon, \epsilon) \quad sii \quad A_{pq} \overset{*}{\Rightarrow} w$$

En palabras, al procesar w, P pasa del estado p con pila vacía al estado q con pila vacía si, y solamente si, G puede reescribir A_{pq} como w.

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Demostración del teorema a partir del lema

Asumiendo el lema 2 se puede demostrar fácilmente que a partir de P (donde P tiene las propiedades del lema 1) se puede construir una CFG equivalente G. Sea G tal gramática asumiendo que $A_{q_0 q_{\text{accept}}}$ es su símbolo inicial. Entonces:

Demostración del teorema a partir del lema

Asumiendo el lema 2 se puede demostrar fácilmente que a partir de P (donde P tiene las propiedades del lema 1) se puede construir una CFG equivalente G. Sea G tal gramática asumiendo que $A_{q_0 q_{\text{accept}}}$ es su símbolo inicial. Entonces:

- Supongamos que P acepta a w.

Demostración del teorema a partir del lema

Asumiendo el lema 2 se puede demostrar fácilmente que a partir de P (donde P tiene las propiedades del lema 1) se puede construir una CFG equivalente G. Sea G tal gramática asumiendo que $A_{q_0 q_{\text{accept}}}$ es su símbolo inicial. Entonces:

- Supongamos que P acepta a w.
- Por el lema 2, $(q_0, w, \epsilon) \overset{*}{\vdash} (q_{\text{accept}}, \epsilon, \epsilon)$ si, y solo si, $A_{q_0 q_{\text{accept}}} \overset{*}{\Rightarrow} w$.

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Demostración del teorema a partir del lema

Asumiendo el lema 2 se puede demostrar fácilmente que a partir de P (donde P tiene las propiedades del lema 1) se puede construir una CFG equivalente G. Sea G tal gramática asumiendo que $A_{q_0 q_{\text{accept}}}$ es su símbolo inicial. Entonces:

- Supongamos que P acepta a w.
- Por el lema 2, $(q_0, w, \epsilon) \overset{*}{\vdash} (q_{\text{accept}}, \epsilon, \epsilon)$ si, y solo si, $A_{q_0 q_{\text{accept}}} \overset{*}{\Rightarrow} w$.
- Por lo tanto, G puede generar a w.

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Demostración del teorema a partir del lema

Asumiendo el lema 2 se puede demostrar fácilmente que a partir de P (donde P tiene las propiedades del lema 1) se puede construir una CFG equivalente G. Sea G tal gramática asumiendo que $A_{q_0 q_{\text{accept}}}$ es su símbolo inicial. Entonces:

- Supongamos que P acepta a w.
- Por el lema 2, $(q_0, w, \epsilon) \overset{*}{\vdash} (q_{\text{accept}}, \epsilon, \epsilon)$ si, y solo si, $A_{q_0 q_{\text{accept}}} \overset{*}{\Rightarrow} w$.
- Por lo tanto, G puede generar a w.
- La recíproca es similar, por lo que podemos concluir que $L(P) = L(G)$, lo que concluye la prueba.

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Contenido

Componentes de G

Sea $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}})$ un PDA.

Componentes de G

Sea $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}})$ un PDA.

☞ Las variables de G son de la forma A_{pq} para todo $p, q \in Q$.

Componentes de G

Sea $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}})$ un PDA.

☞ Las variables de G son de la forma A_{pq} para todo $p, q \in Q$.

☞ El símbolo inicial de G es $A_{q_0 q_{\text{accept}}}$.

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Componentes de G

Sea $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}})$ un PDA.

☞ Las variables de G son de la forma A_{pq} para todo $p, q \in Q$.

☞ El símbolo inicial de G es $A_{q_0 q_{\text{accept}}}$.

☞ Se incluyen las reglas $A_{pp} \to \epsilon$, para todo $p \in P$.

Componentes de G

Sea $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}})$ un PDA.

☞ Las variables de G son de la forma A_{pq} para todo $p, q \in Q$.

☞ El símbolo inicial de G es $A_{q_0 q_{\text{accept}}}$.

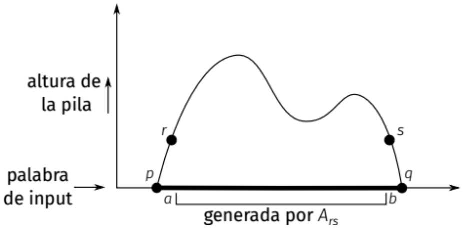
☞ Se incluyen las reglas $A_{pp} \to \epsilon$, para todo $p \in P$.

☞ Al procesar una cadena desde un estado p a un estado q, empezando y terminando con la pila vacía, tenemos dos casos: la pila queda vacía en algún paso computacional o no. Cada caso se relaciona con un tipo de reglas de G.

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

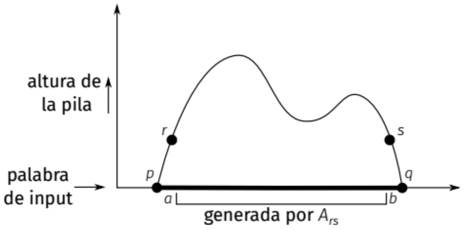
Altura de pila y reglas de G (1/2)

Cuando la pila queda vacía solo al final:



Altura de pila y reglas de G (1/2)

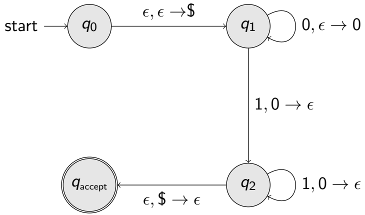
Cuando la pila queda vacía solo al final:



☞ Se simula esta computación mediante la regla $A_{pq} \to aA_{rs}b$, donde a es el primer símbolo leído y b el último; r el estado al que se llega desde p y s el que antecede a q.

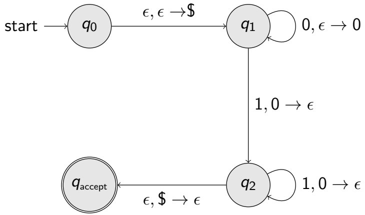
MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Ejemplo



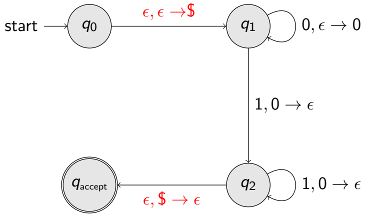
La pila queda vacía solo al final.

Ejemplo



La pila queda vacía solo al final. Como no sabemos esto de antemano, incluimos todas las reglas basadas en las transiciones que incluyen un símbolo en la pila y en las que lo retiran:

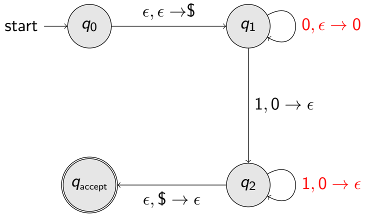
Ejemplo



La pila queda vacía solo al final. Como no sabemos esto de antemano, incluimos todas las reglas basadas en las transiciones que incluyen un símbolo en la pila y en las que lo retiran:

☞ Deben incluirse las reglas $A_{q_0 q_{\text{accept}}} \rightarrow \epsilon A_{q_1 q_2} \epsilon$

Ejemplo

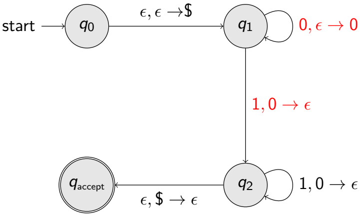


La pila queda vacía solo al final. Como no sabemos esto de antemano, incluimos todas las reglas basadas en las transiciones que incluyen un símbolo en la pila y en las que lo retiran:

☞ Deben incluirse las reglas

$A_{q_0 q_{accept}} \to \epsilon A_{q_1 q_2} \epsilon$
$A_{q_1 q_2} \to 0 A_{q_1 q_2} 1$

Ejemplo

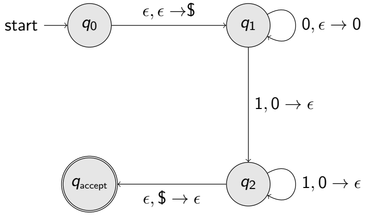


La pila queda vacía solo al final. Como no sabemos esto de antemano, incluimos todas las reglas basadas en las transiciones que incluyen un símbolo en la pila y en las que lo retiran:

☞ Deben incluirse las reglas

$A_{q_0 q_{\text{accept}}} \to \epsilon A_{q_1 q_2} \epsilon$
$A_{q_1 q_2} \to 0 A_{q_1 q_2} 1$
$A_{q_1 q_2} \to 0 A_{q_1 q_1} 1$

Ejemplo

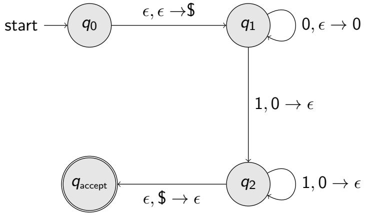


$$A_{q_0 q_{accept}} \to \epsilon A_{q_1 q_2} \epsilon$$
$$A_{q_1 q_2} \to 0 A_{q_1 q_2} 1$$
$$A_{q_1 q_2} \to 0 A_{q_1 q_1} 1$$
$$A_{q_1 q_1} \to \epsilon$$

Simulación de la aceptación de 0011:

$$A_{q_0 q_{accept}} \Rightarrow \epsilon A_{q_1 q_2} \epsilon$$

Ejemplo



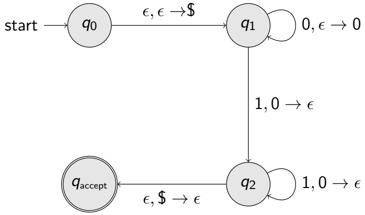
$$A_{q_0 q_{\text{accept}}} \rightarrow \epsilon A_{q_1 q_2} \epsilon$$
$$A_{q_1 q_2} \rightarrow 0 A_{q_1 q_2} 1$$
$$A_{q_1 q_2} \rightarrow 0 A_{q_1 q_1} 1$$
$$A_{q_1 q_1} \rightarrow \epsilon$$

Simulación de la aceptación de 0011:

$A_{q_0 q_{\text{accept}}} \Rightarrow \epsilon A_{q_1 q_2} \epsilon \Rightarrow \epsilon 0 A_{q_1 q_2} 1 \epsilon$

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Ejemplo

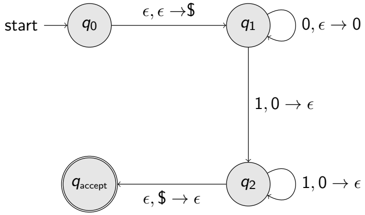


$$A_{q_0 q_{\text{accept}}} \to \epsilon A_{q_1 q_2} \epsilon$$
$$A_{q_1 q_2} \to 0 A_{q_1 q_2} 1$$
$$A_{q_1 q_2} \to 0 A_{q_1 q_1} 1$$
$$A_{q_1 q_1} \to \epsilon$$

Simulación de la aceptación de 0011:

$$A_{q_0 q_{\text{accept}}} \Rightarrow \epsilon A_{q_1 q_2} \epsilon \Rightarrow \epsilon 0 A_{q_1 q_2} 1 \epsilon \Rightarrow \epsilon 00 A_{q_1 q_1} 11 \epsilon$$

Ejemplo



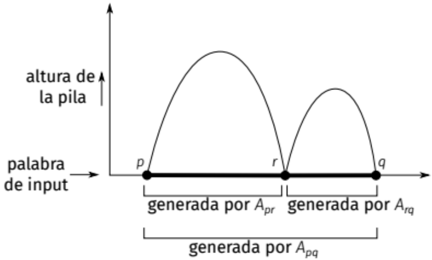
$$
\begin{aligned}
A_{q_0 q_{accept}} &\to \epsilon A_{q_1 q_2} \epsilon \\
A_{q_1 q_2} &\to 0 A_{q_1 q_2} 1 \\
A_{q_1 q_2} &\to 0 A_{q_1 q_1} 1 \\
A_{q_1 q_1} &\to \epsilon
\end{aligned}
$$

Simulación de la aceptación de 0011:

$A_{q_0 q_{accept}} \Rightarrow \epsilon A_{q_1 q_2} \epsilon \Rightarrow \epsilon 0 A_{q_1 q_2} 1 \epsilon \Rightarrow \epsilon 00 A_{q_1 q_1} 11 \epsilon \Rightarrow \epsilon 00 \epsilon 11 \epsilon$

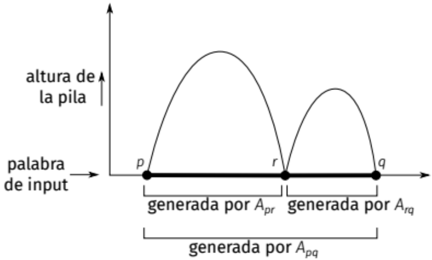
Altura de pila y reglas de G (2/2)

Cuando la pila queda vacía en algún paso intermedio:



Altura de pila y reglas de G (2/2)

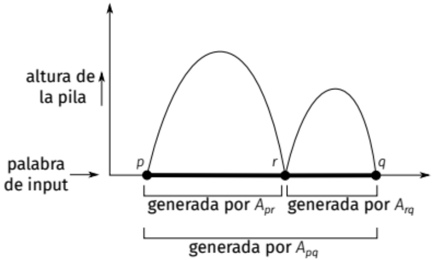
Cuando la pila queda vacía en algún paso intermedio:



☞ Se simula esta computación mediante la regla $A_{pq} \to A_{pr}A_{rq}$.

Altura de pila y reglas de G (2/2)

Cuando la pila queda vacía en algún paso intermedio:

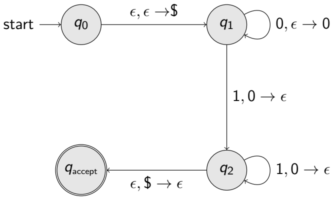


☞ Se simula esta computación mediante la regla $A_{pq} \to A_{pr}A_{rq}$.

☞ Se incluyen todas estas reglas en la gramática.

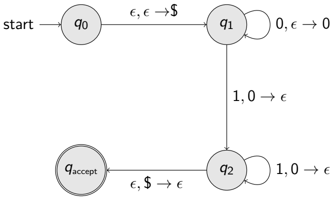
MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Ejemplo

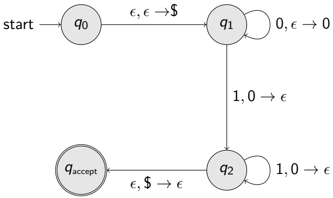

start
q_0
$\epsilon, \epsilon \rightarrow \$$
q_1
$0, \epsilon \rightarrow 0$
$1, 0 \rightarrow \epsilon$
q_{accept}
$\epsilon, \$ \rightarrow \epsilon$
q_2
$1, 0 \rightarrow \epsilon$

Ejemplo

☞ Las variables son:
$A_{q_0 q_0}, A_{q_0 q_1}, \ldots, A_{q_1 q_0}, A_{q_1 q_1}, \ldots$



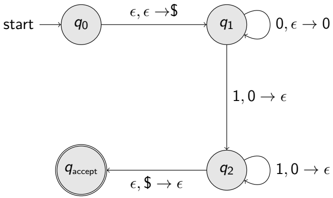
Ejemplo



☞ Las variables son:
$A_{q_0 q_0}, A_{q_0 q_1}, \ldots, A_{q_1 q_0}, A_{q_1 q_1}, \ldots$

☞ El símbolo inicial es: $A_{q_0 q_{\text{accept}}}$.

Ejemplo

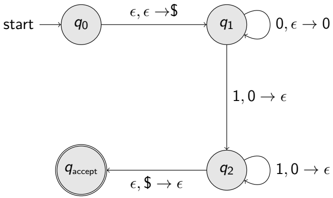


☞ Las variables son:
$A_{q_0 q_0}, A_{q_0 q_1}, \ldots, A_{q_1 q_0}, A_{q_1 q_1}, \ldots$

☞ El símbolo inicial es: $A_{q_0 q_{accept}}$.

☞ Se incluyen las reglas:
$A_{q_0 q_0} \rightarrow \epsilon,\ A_{q_1 q_1} \rightarrow \epsilon,\ A_{q_2 q_2} \rightarrow \epsilon,\ A_{q_{accept} q_{accept}} \rightarrow \epsilon.$

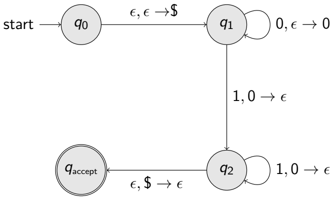
Ejemplo



- Las variables son: $A_{q_0q_0}, A_{q_0q_1}, \ldots, A_{q_1q_0}, A_{q_1q_1}, \ldots$
- El símbolo inicial es: $A_{q_0q_{\text{accept}}}$.
- Se incluyen las reglas: $A_{q_0q_0}\to\epsilon,\ A_{q_1q_1}\to\epsilon,\ A_{q_2q_2}\to\epsilon,\ A_{q_{\text{accept}}q_{\text{accept}}}\to\epsilon.$
- Se incluyen las reglas: $A_{q_0q_{\text{accept}}}\to\epsilon A_{q_1q_2}\epsilon,\ A_{q_1q_2}\to 0A_{q_1q_2}1,$ $A_{q_1q_2}\to 0A_{q_1q_1}1.$

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Ejemplo



- ☞ Las variables son:
  $A_{q_0 q_0}, A_{q_0 q_1}, \ldots, A_{q_1 q_0}, A_{q_1 q_1}, \ldots$
- ☞ El símbolo inicial es: $A_{q_0 q_{\text{accept}}}$.
- ☞ Se incluyen las reglas:
  $A_{q_0 q_0} \to \epsilon,\ A_{q_1 q_1} \to \epsilon,\ A_{q_2 q_2} \to \epsilon,\ A_{q_{\text{accept}} q_{\text{accept}}} \to \epsilon.$
- ☞ Se incluyen las reglas:
  $A_{q_0 q_{\text{accept}}} \to \epsilon A_{q_1 q_2} \epsilon,\ A_{q_1 q_2} \to 0 A_{q_1 q_2} 1,$
  $A_{q_1 q_2} \to 0 A_{q_1 q_1} 1.$
- ☞ Se incluyen las reglas:
  $A_{q_0 q_0} \to A_{q_0 q_0} A_{q_0 q_0},\ A_{q_0 q_1} \to A_{q_0 q_0} A_{q_0 q_1},$
  $A_{q_0 q_0} \to A_{q_0 q_1} A_{q_1 q_0},\ A_{q_0 q_1} \to A_{q_0 q_1} A_{q_1 q_1}$, etc.

En esta sesión usted aprendió

- Cómo construir un autómata de pila que sea equivalente a una gramática independiente del contexto.
- Dos lemas importantes para construir una gramática a partir de un autómata de pila.
- El uso de estos lemas para demostrar que la gramática es equivalente al autómata.
- La motivación de las reglas de la gramática que simula al autómata.

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación