Hoja de formulas:

X va, $Y=X^2$, $F_Y(y)=P(X^2\le Y)=$
$Y<0$ No Pasa $P=0$
$Y\geq 0 \alpha F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$
$Y>0 \alpha f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})/2\sqrt{y}$

En Convolución se ve con discretas

Dist Derivadas: PDF de una va a partir de la PDF de otra.

X va Continua $Y=g(x)$

i). CDF F_Y de Y / $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(x)\le y)=\int_{\{x|g(x)\le y\}} f_X(x)\,dx$

ii). Derivar $F_Y(y)$ Para tener $f_Y(y)$ (Si F_Y derivable)

Y lineal: $Y=ax+b$ $a\neq 0$

$$f_Y(y)=\left|\frac{1}{a}\right| f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \to a>0 \text{ ó } a<0.$$

Y lin y X exp: $f_Y(y)=\left|\frac{1}{a}\right| f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\begin{cases}\left|\frac{1}{a}\right|\cdot\lambda e^{-\lambda\left(\frac{y-b}{a}\right)} & \text{si } \frac{y-b}{a}\geq 0\\ 0 & \text{d.l.e}\end{cases}$ Exp con Parámetro $\frac{\lambda}{a}$ si $b=0$.

Si $b=0$ y $a>0$ Y es expo con parámetro $\frac{\lambda}{a}$

No se Cumple en todos los casos $\leftarrow$ $\frac{\lambda}{|a|}e^{-y\frac{\lambda}{a}}$

Lineal de una normal es normal

X normal $(E(X)=\mu, var(X)=\sigma^2)$ Y lineal, $a\neq 0$

$$f_Y(y)=\left|\frac{1}{a}\right|\cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\underbrace{|a|\sigma}_{\sigma_Y}}e^{\left(\frac{-(y-\overbrace{b-a\mu}^{\mu_Y})^2}{\underbrace{2a^2\sigma^2}_{\sigma_Y^2}}\right)}$$

Y por normal con $\mu_Y=b+a\mu$ (Factorizando (-1)) y $Var(Y)=a^2\sigma^2$

$E(Y)=a\mu+b$ / $Var(Y)=a^2Var(X)=a^2\sigma^2$

$Y=g(x)$, Y estrictamente monotónica (Siempre crece o decrece) (Invertible)

Propiedad se mantiene con inversa.

$\frac{dg}{dx}\le 0$ es mono. decreciente / $\frac{dg}{dx}\geq 0$ g es mon. Creciente

$Y=g(x) \iff X=h(y)$ (despejando x)

$$F_Y(y)=F_X(h(y)) \Rightarrow f_Y(y)=f_X(h(y))\cdot\left|\frac{dh(y)}{dy}\right|$$

Lo anterior se puede generalizar $\leftarrow$ **Funciones con varias va's ind** (X,Y ind e uniformes en $[0,1]$)

PDF de $Z=\max\{X,Y\}$ $F_Z(z)=P(X\le z\cap Y\le z)=z^2$

Z unif $[0,1]$ $\leftarrow$ $\overbrace{F_Z(z)=\frac{z}{2}}^{z\in[0,1]}$, $\overbrace{F_Z(z)=1-\frac{1}{2z}}^{z\geq 1}$

$Z=X-Y=\underbrace{X+(-Y)}_{\text{Ahora Podemos Usar Convolución.}}$ $\leftarrow$ **Convolución:** Suma va's ind, X,Y ind $Z=X+Y$

Conv. de P_X, P_Y $\leftarrow$ ○ **Discretas:** X,Y va's ind $Z=X+Y$ $P_Z(z)=\sum_x P_X(x)\cdot P_Y(\overbrace{z-x}^{\text{Despejando } Y})=\sum_y P_Y(y)\cdot P_X(z-y)$

Conv de f_X, f_Y nota $(f_X * f_Y)(z)$ $\leftarrow$ ○ **Continuas:** X,Y va's Cont. $Z=X+Y$ $F_{Z|X}(z|x)=F_Y(z-x)$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{Z|X}(z|x)\cdot f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x)\cdot f_X(x)\,dx$$

PDF Z Con media $\mu_X+\mu_Y$ y var $\sigma_X^2+\sigma_Y^2$ $\leftarrow$ X,Y normales con media μ_X,μ_Y y var σ_X^2,σ_Y^2 $Z=X+Y$

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}}\cdot e^{\left(\frac{-(z-\mu_X-\mu_Y)^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right)}$$

Ind $\xrightarrow{\text{Implica}}$ Covarianza = 0

Covarianza = 0 $\not\Rightarrow$ Ind

Covarianza y Correlación:

X, Y ind

- Disc: $P_{XY}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$
- Cont: $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$Cov(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y)))$ Si $=0$ X, Y no se correlacionan.

Cuando una aumenta otra crece $\Leftarrow$ • $Cov(X,Y) > 0$ X, Y tienden a desviarse de la media en la misma dirección.

Cuando una aumenta otra decrece $\Leftarrow$ • $Cov(X,Y) < 0$ X, Y tienden a desviarse de la media en direcciones opuestas

Signo de la cov nos da info sobre la relación de las variables.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

X, Y ind

$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

$E(X|Y=y) = E(X) \ \forall y$

Propiedades:

i) $Cov(X,X) = Var(X)$ ii) $Cov(X, aY+b) = a \cdot Cov(X,Y)$

iii) $Cov(X, Y+Z) = Cov(X,Y) + Cov(X,Z)$

Coeficiente de Correlación: (2 vá's con $Var \geq 0$)

Valores $\in [-1,1]$ $\xleftarrow{\text{no}}$ $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$ $\rightarrow$ Da el signo al coeficiente

Propiedad:

- Signo de $\rho(X,Y)$ Same as signo de la $Cov(X,Y)$

Mucha vela $\leftarrow$ • $|\rho|$ es cercano a 1, la relación entre X, Y es fuerte.
(valores)
↳ Casi linealmente la vela.

Poca vela. $\leftarrow$ • $|\rho|$ es cercano a 0, la relación entre X, Y es débil.

$\rho = 1$ $c > 0$, $\rho = -1$ $c < 0$ $\leftarrow$ Teo: $|\rho| = 1$ Sii $\exists$ c tq $Y - E(Y) = c(X - E(X))$

Si conozco c lo uso para intuir que tan relacionadas estan.

Var de Suma de vá's (no necesariamente ind)

Teo: $X_1, \dots, X_n$ vá's con $Var(X_i)$ finita, $1 \leq i \leq n$

1) $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)$

2) $Var(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} Cov(X_i, X_j)$

Modelos lineales: Y normal va que depende de una variable no aleatoria.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \text{ va (Error Suponemos } E(\varepsilon) = 0)$$

Para c/valor de x hay una normal (Campana) Pues error es normal. ← $E(Y) = \underbrace{\beta_0 + \beta_1}_{\text{Parámetros poblacionales desconocidos}} x$

Suma Cuadrada del error ← $SSE = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$ $\quad \hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$

Pendiente de la recta. ← $\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ $\quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ Promedio

Intercepto ← $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$ $\quad S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon, \quad E(\varepsilon) = 0, \quad Var(\varepsilon) = \sigma^2$$

$$Var(Y) = Var(\varepsilon) = \sigma^2$$

$Y_1, \dots, Y_n$ asociadas a $X_1, \dots, X_n$

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ $\quad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ vas iid, $E(\varepsilon_i) = 0$, $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$

$\sum x_i - n\bar{x} = 0$

$Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) = 0$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{S_{xx}}$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \left(\frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{S_{xx}} \right) = \beta_1 \qquad Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \qquad E(\hat{\beta}_0) = \beta_0 \qquad Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i^2)}{n \cdot S_{xx}}$$

Correlación: (En mod-Lin)

Le Ponemos el valor a X ← 1.) X no aleatoria | $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ $\quad E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x$

2.) x valor observado de una va X | $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ $\quad E(Y | X = x) = \beta_0 + \beta_1 x$

Teo: Si (X, Y) con dist conjunta normal multivariada

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1 \cdot \alpha}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}}$$

ρ rho Coeficiente de Correlación ← $\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x} - 2\rho \left(\frac{(x-\mu_x)}{\sigma_x} \right) \left(\frac{(y-\mu_y)}{\sigma_y} \right) + \left(\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y} \right) \right) \right)$

$\alpha = e$

$$\beta_1 = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right) \rho, \quad \rho \neq 0 \leftrightarrow \beta_1 \neq 0.$$

← P.H. es Significativa el X nos da info Sobre Y. (Modelo funciona)

ρ muestral $= r$

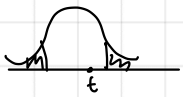
$$r = \hat{\beta}_1 \frac{S_{xx}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}}$$

da el signo a r

1) r y $\hat{\beta}_1$ siempre tienen el mismo signo

2) P.H. $H_0: \rho = 0$ $H_a: \begin{cases} \rho > 0 \\ \rho < 0 \\ \rho \neq 0 \end{cases}$

Estimador de prueba sobre r: $t = \dfrac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ dist t con $n-2$ gl si H_0 true



3). Si la muestra es grande (Normalmente $n \geq 30$) ($H_0: \rho = \rho_0$)

$$Z = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}}$$

Si H_0 true, tiene dist aprox. normal

Si α es la significancia de la prueba (Proba error Tipo 1)

$H_a: \begin{cases} \rho > \rho_0 \\ \rho < \rho_0 \\ \rho \neq \rho_0 \end{cases}$ $RR: \{z : z > z_\alpha,\ z < -z_\alpha,\ |z| > z_{\alpha/2}\}$

Valor esperado Condicional: (Como una va) y va dummy o auxiliar.

va determinada $\leftarrow E(X|\overset{\text{Valor fijo}}{y}) \rightarrow$ Toma valores $E(X|Y=y)$ cuando $Y=y$

Por Y, ed depende de los valores dados en Y.

Fijamos X (va) y definimos $E(X|Y)$ como función de la va Y. Su distribución depende de X.

Teorema valor esperado iterado:

$$E(X) = E(\underbrace{E(X|Y)}_{\text{estimador de } X}) = \begin{cases} \sum_y E(X|Y=y) \cdot P_Y(y), & \text{Si } Y \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y=y) \cdot f_Y(y)\, dy, & \text{Si } Y \text{ continua} \end{cases}$$

Error de estimación $\begin{cases} \tilde{X} = \hat{X} - X \\ E(\tilde{X}) = 0 \end{cases}$

$E(\tilde{X}|Y) = 0$

Teo: $\hat{X}$ no está correlacionada con $\tilde{X}$, ed $Cov(\hat{X}, \tilde{X}) = 0$

Teo: $Var(X) = Var(\hat{X}) + Var(\tilde{X})$

Varianza Condicional:

$Var(X|Y)$ toma valores $Var(X|Y=y)$ Cuando $Y=y$.

$Var(X|Y) = E(\tilde{X}^2|Y)$

Error

Función de la va Y

Toma valores $E(\tilde{X}^2|Y=y)$ Cuando $Y=y$

$E(\tilde{X})=0$

$Var(\tilde{X}) = E(Var(X|Y))$

- Teorema: Ley de la varianza total:

Estimador de X

Hallar Componentes y Sumar. ← $Var(X) = Var(\hat{X}) + Var(\tilde{X}) = Var(E(X|Y)) + E(Var(X|Y))$

Función Generadora de Momentos: → Única Para Sva.

Invertida de la ley de Proba de X. ← $M_S(X) = E(e^{SX}) \begin{cases} \sum e^{Sx} \cdot P_X(x), & \text{Si } X \text{ discreta} \\ \int e^{Sx} \cdot f_X(x), & \text{Si } X \text{ Continua} \end{cases}$

Momento de X es la n-ésima derivada evaluada en $S=0$.

$\left.\frac{d^n M_X(S)}{dS^n}\right|_{S=0} = E(X^n)$

- Poisson: $e^{\lambda(e^S-1)}$
- Exponencial: $\frac{\lambda}{\lambda - S}$ $(S<\lambda)$ → Si $S \geq \lambda$ No está bien definida la FGM
- Normal estandar: $e^{S^2/2}$
- Normal: $e^{S\mu + \frac{S^2\sigma^2}{2}}$
- Geo: $pe^S / 1-(1-p)e^S$ ← $p \in [0,1]$
- Bernoulli: $1-p+pe^S$
- Binomial: $(1-p+pe^S)^n$
- Uniforme: (discreta) $\frac{e^{Sa}(e^{S(b-a+1)}-1)}{(b-a+1)(e^S-1)}$
- Uniforme Continua: $e^{Sb}-e^{Sa} / S(b-a)$

Propiedad:

X va con FGM $M_X(S)$, $Y = aX+b$

$M_Y(S) = E(e^{SY}) = E(e^{S(aX+b)}) = e^{Sb}E(e^{SaX})$
$= e^{Sb}M_X(Sa)$

Para discretas y Continuas. ← Teo: $\left.\frac{d^n M_X(S)}{dS^n}\right|_{S=0} = E(X^n)$

Propiedades:

- $M_X(0) = E(e^{0 \cdot X}) = E(1) = 1$
- Si X toma valores no neg en los enteros: $\lim_{S \to -\infty} M_X(S) = P(X=0)$

Usando def de $E(X)$

Obtenemos la distribución de X. ← Propiedad de inversión:

Ed Podemos deducir las distribuciones mirando las FGM.

Otra forma es derivando con respecto a S e igualando a 0.

X va con FGM $M_X(S)$, Si $M_X(S)$ finita $\forall S \in [-a,a]$ $a>0$. FGM → CDF

Si $f_X(x)$ depende de varios eventos usamos Proba total y Para su FGM $= Proba(A_1) \cdot M_{A_1}(S) + Proba(A_2) \cdot M_{A_2}(S)$. (Para geo la cond. esta dada por min{x,1})

Generalizando:

$X_1, \dots, X_n$ vas cont con PFD's $X_1, \dots, X_n$, Y va toma comportamiento X_i: $f_Y(x) = P_1$

- $f_Y(y) = P_1 \cdot f_{X_1}(y) + P_2 \cdot f_{X_2}(y) + \dots + P_n f_{X_n}(y)$
- $M_Y(S) = P_1 \cdot M_{X_1}(S) + \dots + P_n \cdot M_{X_n}(S)$

$Z = \overbrace{X_1 + \dots + X_n}^{\text{vás ind}}$

$M_Z(S) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(S)$

Suma vás ind:

X, Y va ind $Z = X+Y$ $\quad M_Z(S) = M_X(S) \cdot M_Y(S)$ ← Se Puede generalizar a n variables ind.

- Suma de Bernoulli's $M_{X_i}(S) = (1-P+Pe^S)^n$
- Suma de Poisson es Poisson con parámetro = Suma de parámetros de las otras.
- Suma de normales es una normal.

FGM de vás Conjuntas:

$$M_{X_1,\dots,X_n}(S_1,\dots,S_n) = E(e^{S_1X+\dots+S_nX_n}) \begin{cases} \text{Disc} \Rightarrow \sum e^{S_1X \dots} \cdot P_{X_1,\dots,X_n} \\ \text{Cont} \Rightarrow \int e^{S_1X \dots} \cdot f_{X_1,\dots,X_n} \end{cases}$$

Teo: $Y_1 \dots Y_n$ $\quad \underbrace{M_{Y_1,\dots,Y_n}(S_1 \dots S_n) = M_{X_1 \dots X_n}(S_1 \dots S_n)}$ $\forall S_1,\dots,S_n$

→ Tienen la misma dist Conjunta

Sumas de vás ind cuando el # de variables sumadas es va:

Sumas de # geo de exp es exp

Sumas de # fijo de exp no es exp

$Y = X_1 + \dots + X_N$, N va que toma valores enteros no neg.

$X_1, X_2, \dots$ vás iid, $N, X_1, X_2, \dots$ ind así mismo como todo subconjunto finito.

Con $E(X_i)$ y $Var(X_i)$ $\forall X_i$, $i \in \mathbb{N}$. $M_{X_i}(S)$, vamos a determinar $E(Y), Var(Y), M_Y(S)$ y a condicionar sobre el evento $\{N=n\}$

Obs: Si $N=0$ $Y=0$ pues $Y = X_1 + \dots + X_N$ y $Y_{N=0} = 0$

$$E(Y) = E(E(Y|N)) = E(N \cdot E(X)) = E(N) \cdot E(X)$$

- $Var(Y) = Var(E(Y|N)) + E(Var(Y|N)) = Var(NE(X)) + E(N Var(X))$
  $= \underbrace{(E(X))^2}_{\text{Pues ya lo conozco junto a la varianza}} \cdot Var(N) + Var(X) E(N)$
- $Var(Y|N) = N\, Var(X)$
- $M_Y(S) = E(e^{SY})$ $n \in \mathbb{N}$

$E(e^{SY}|N) = (M_X(S))^N$ ← $E(e^{SY}|N=n) = E(e^{S(n_1+\dots+n_n)}) = (E(e^{SX}))^n$ (Pues son ind)
$= (M_X(S))^n$

$$M_Y(S) = E(E(e^{SY}|N)) = E((M_X(S))^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (M_X(S))^n \cdot P_N(n) \quad (N \text{ discreta})$$

Usando $(M_X(S))^n = e^{n \cdot \ln(M_X(S))}$

$$M_Y(S) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n \cdot \ln(M_X(S))} \cdot P_N(n)$$

$$M_N(S) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{Sn} \cdot P_N(n) \rightarrow M_Y(S) = M_N(\underbrace{\ln(M_X(S))}_{S})$$

$\ln M_X(S)$ S para M_N

Eg:
$M_N(S) = 1 + e^S$
$M_X(S) =$ Something
$M_Y(S) = 1 +$ Something
$e^{\ln(\text{Something})}$

Desigualdades Markov y Chebishev:

$X_1, \dots, X_n$ va iid con $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

$Var(S_n) = n\sigma^2$

$E(S_n) = n\mu$

$M_n = \frac{S_n}{n}$

$E(M_n) = \mu$

$Var(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ $\xrightarrow{n \to n \text{ grande}}$ $Var \to 0$

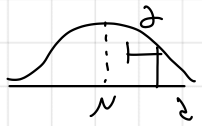
Var estandar

$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$

$E(Z_n) = 0$, $Var(Z_n) = 1$

dist $Z_n \to$ Normal estandar

↳ Teo Lim Central ($n \geq 30$)



$\lim_{n \to \infty} M_n \to \mu$ Convergencia de vas.

Markov: X va valores no neg. $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$, $a > 0$

Acota valor esperado (Como una aprox)

Chebyshev: X va con $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$

$$P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}, \forall c > 0$$

Obs: $c = k\sigma$

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}$$

X se aleja de la media con Proba muy Pero muy Pequeña!!!

Casi que Podemos decir que X no se aleja de la media.

Que X se aleja más de k desviaciones estandar de μ tiene Proba $\leq \frac{1}{k^2}$

Tiene que ver con la regla empírica.

Teo: X con valores en $[a,b]$

$$\sigma^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$ ← Acotar varianza

Para cualquier distribución

Corolario: X toma vals. en $[a,b]$

$$P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2} \leq \frac{(a-b)^2}{4c^2}$$

Acotamos las derivaciones de la media sin conocer la varianza, conociendo el rango donde X toma valores.