Módulo 2: Método simplex

Departamento MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario

Primer Semestre de 2021

Agenda

1. Método de las dos fases
2. Ciclaje

Agenda

1. Método de las dos fases

2. Ciclaje

Inicialización del método simplex

- Método de las dos fases
- Fase I: encontrar solución básica factible
- Fase II: encontrar solución óptima
- Variables artificiales $Ax + x_a = b$, $x \geq 0$, $x_a \geq 0$
- Variables básicas iniciales Fase I: x_a
- Base inicial Fase I: I_m

Método de las dos fases

- Problema original en formato estándar:

$$\begin{aligned} \text{min. } & c'x \\ \text{s.a. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Fase I:

$$\begin{aligned} \text{min. } & 1'x_a \\ \text{s.a. } & Ax + x_a = b \\ & x, x_a \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo:

- Problema original:

$$\begin{aligned} \text{min. } & 5x_1 - x_2 \\ \text{s.a. } & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Problema original en formato estándar:

$$\begin{aligned} \text{min. } & 5x_1 - x_2 \\ \text{s.a. } & -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo:

- Fase I:

$$\begin{aligned} \text{min. } & x_5 + x_6 \\ \text{s.a. } & -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

- Base inicial: $I_B = \{5, 6\}$

Método de las dos fases

Si al terminar la Fase I ...

- ... $x_a \neq 0 \Rightarrow$ Prob. original no tiene solución factible
- ... $x_a = 0$ y variables artificiales fuera de la base $\Rightarrow$ Comenzar Fase II con solución básica factible final de Fase I
- ... $x_a = 0$ y variables artificiales en la base $\Rightarrow$ Sacar variables artificiales de la base y reemplazarlas por variables estructurales

Ejemplo:

- Fase I:

$$\begin{aligned} \text{min. } & x_5 + x_6 \\ \text{s.a. } & -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

- $I_B = \{5, 6\}$, $I_N = \{1, 2, 3, 4\}$, $x_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $z_0 = 8$
- $\bar{c}_N = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, x_2 entra a la base
- $y_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\epsilon = \text{mín}\{\frac{2}{2}, \frac{6}{1}\} = 1$, x_5 sale de la base

Ejemplo:

Iteración 2:

- $I_B = \{2, 6\}$, $I_N = \{1, 3, 4, 5\}$, $x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$
- $\bar{c}_N = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, x_1 entra a la base
- $y_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\epsilon = \text{mín}\{\frac{5}{3/2}\} = \frac{10}{3}$, x_6 sale de la base

Iteración 3:

- $I_B = \{1, 2\}$, $I_N = \{3, 4, 5, 6\}$, $x_B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$
- $\bar{c}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, solución óptima
- Variables artificiales fuera de la base: iniciar fase II con $I_B = \{1, 2\}$

Ejemplo no factible:

- Problema original:

$$\begin{aligned} \text{min. } & 5x_1 - x_2 \\ \text{s.a. } & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Problema original en formato estándar:

$$\begin{aligned} \text{min. } & 5x_1 - x_2 \\ \text{s.a. } & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + x_2 - x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo no factible:

- Fase I:

$$
\begin{aligned}
\text{min. } & x_5 \\
\text{s.a. } & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\
& -x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Base inicial: $I_B = \{3, 5\}$

Ejemplo no factible:

Iteración 1:

- $I_B = \{3, 5\}$, $B = I$, $x_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\bar{c}'_N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, x_2 entra a la base
- $y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\epsilon = \text{mín}\left\{\frac{2}{2}, \frac{3}{1}\right\} = 1$
- x_3 sale de la base

Ejemplo no factible:

Iteración 2:

- $I_B = \{2, 5\}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\bar{c}'_N = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- Solución actual es óptima para fase I
- x_5 en la base óptima y $x_5 \neq 0$: problema original no factible

Agenda

1. Método de las dos fases
2. Ciclaje

Ciclaje

- Si todas las soluciones visitadas son no degeneradas, función objetivo mejora en cada iteración
- $\bar{b}_r > 0 \longrightarrow x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$
- $z = z_0 + \bar{c}_k x_k \longrightarrow z < z_0$
- En caso de degeneramiento, se puede presentar ciclaje: se repiten bases con el mismo valor de función objetivo
- En caso de degeneramiento, $\bar{c}_N \geq 0$ no es una condición necesaria para optimalidad: $z = z_0 + \bar{c}_k x_k = z_0$
- Reglas de prevención de ciclaje
- Selección de variables que entran y salen de la base ("empates")

Regla de Bland

Selección de variable que entra a la base:

- Entre todas las variables no básicas con costo reducido negativo, escoja la de menor índice

Selección de variable que sale de la base:

- Entre todas las variables básicas candidatas a salir (empatadas en la razón mínima), escoja la de menor índice

Regla lexicográfica

Selección de variable que sale de la base:

- $I_0 = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$: criterio de la razón mínima
- Entre todas las variables básicas candidatas a salir (empatadas en la razón mínima), escoja la de menor índice
- $I_1 = \min_{i \in I_0} \left\{ \frac{y_{i1}}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$. Donde $y_1 = B^{-1} a_c$, con a_c columna de A asociada a la variable.
- Si persiste el empate calcular I_2, I_3, ... $I_{j-1}, j \leq m$