Parcial 2 - AED.

2: Sea $\hat{\varepsilon} = y - \hat{y} = y - Z\hat{\beta} = (I - Z(Z'Z)^{-1}Z')y = Cy$

a. Muestre que C es simetrica e idempotente.

1. Demostración: Sean C, Z matrices. Definimos $C = (I - Z(Z'Z)^{-1}Z')$

Queremos mostrar que C es simétrica, es decir, $C' = C$.

Considere $C' = (I - Z(Z'Z)^{-1}Z')'$

Por propiedades de matrices la transpuesta de la suma es la suma de las transpuestos.

luego, $C' = I' - (Z(Z'Z)^{-1}Z')'$

Dadas las siguientes propiedades $(AB)' = B'A'$, $(A')' = A$ y $I' = I$ para A, B matrices.

Obtenemos que $C' = I - (Z')'(Z(Z'Z)^{-1})'$

entonces $C' = I - Z((Z'Z)^{-1})'Z'$

Por propiedades de matrices $(A^{-1})' = (A')^{-1}$ para A matriz.

De forma que $C' = I - Z((Z'Z)')^{-1}Z'$

luego $C' = I - Z(Z'(Z')')^{-1}Z'$

así, $C' = I - Z(Z'Z)^{-1}Z'$

por definición $C' = C$.

Por lo tanto, C es una matriz simétrica $\square$

2. **Demostración**: Sean C, Z matrices. Definimos $C = (I - Z(Z'Z)^{-1}Z')$

Queremos mostrar que C es idempotente, es decir, $C^2 = C$.

Considere $C^2 = CC$

luego $C^2 = (I - Z(Z'Z)^{-1}Z')(I - Z(Z'Z)^{-1}Z')$

Por la demostración anterior C es simétrica, entonces es cuadrada, luego I y $Z(Z'Z)^{-1}Z'$ también son cuadradas y por propiedades de las matrices podemos aplicar propiedad distributiva.

Entonces $C^2 = I(I - Z(Z'Z)^{-1}Z') - Z(Z'Z)^{-1}Z'(I - Z(Z'Z)^{-1}Z')$

luego $C^2 = I - Z(Z'Z)^{-1}Z' - Z(Z'Z)^{-1}Z' + (-1)(-1)Z(Z'Z)^{-1}Z'Z(Z'Z)^{-1}Z'$

Como por definición $(Z'Z)(Z'Z)^{-1} = I$, entonces

$$C^2 = I - Z(Z'Z)^{-1}Z' - Z(Z'Z)^{-1}Z' + Z(Z'Z)^{-1} I Z'$$

luego $C^2 = I - Z(Z'Z)^{-1}Z' - Z(Z'Z)^{-1}Z' + Z(Z'Z)^{-1}Z'$

así, $C^2 = I - Z(Z'Z)^{-1}Z' = C$.

Por lo tanto, C es idempotente $\square$.

b. Muestre que $Z'C = 0$.

Demostración: Sean Z, C matrices. Definimos $C = (I - Z(Z'Z)^{-1}Z')$

Considere $Z'C = Z'(I - Z(Z'Z)^{-1}Z')$

luego $Z'C = Z' - Z'Z(Z'Z)^{-1}Z'$

Como $(Z'Z)(Z'Z)^{-1} = I$, entonces

$Z'C = Z' - I Z'$

luego $Z'C = Z' - Z' = 0$

Por lo tanto $Z'C = 0$ $\square$

③

z_1	-2	-1	0	1	2
z_2	-1	1	2	3	4
y_1	5	3	4	2	1
y_2	-3	-1	-1	2	3

a. $Y = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \\ 4 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad Z = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} \\ \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$

Tenemos $\quad Y = Z\beta + \varepsilon$, queremos la estimación

$\mathbb{E}(Y) = \hat{Y}$, $\mathbb{E}(\beta) = \hat{\beta}$ y $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$

luego $\quad \hat{Y} = Z\hat{\beta}$, $\hat{\beta} = (Z'Z)^{-1}Z'Y$

Entonces $\quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 3.9 & 0 \\ -0.3 & 1.5 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\quad Y'Y = \hat{Y}'\hat{Y} + \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$, $\hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y}$ $\quad Y'Y = \begin{pmatrix} 55 & -15 \\ -15 & 24 \end{pmatrix}$

$Y = (Y_1 | Y_2)$ $\quad Y_1'Y_1 = \hat{Y}_1'\hat{Y}_1 + \hat{\varepsilon}_1'\hat{\varepsilon}_1 = 55$

y $Y_2'Y_2 = \hat{Y}_2'\hat{Y}_2 + \hat{\varepsilon}_2'\hat{\varepsilon}_2 = 24$

Se cumple.

c. Confianza 95%. $\quad Y_2 \quad z_1 = 0.5 \quad z_2 = 2.5$

$z_0 = (1, 0.5, 2.5)$

$Y_2 = (1 \;\; 0.5 \;\; 2.5)\begin{pmatrix} \beta_{01} \\ \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{pmatrix} + \varepsilon_2$

$\hat{Y}_2 = z_0\hat{\beta}_1$

$I = (-3.41, 4.916)$