Ecuaciones diferenciales introducción

Luz Myriam Echeverry N

25/01/2022

Clase #1

Ejemplo

- Suponga un objeto que cae de cierta altura, nos interesa averiguar la velocidad con que cae.
- Las cantidades involucradas son el tiempo *t*, la velocidad *v*, la gravedad *g* y la masa del cuerpo *m*.
- La segunda ley de Newton dice que:
  - $F = ma$
- La aceleración $a = {}^{dv}/_{dt}$.
- Las fuerzas que actúan son la gravedad y la resistencia del aire.
  - $F = mg - \gamma v$
- La resistencia del aire se opone al movimiento y es proporcional a la velocidad.
- Reemplazando
  - $m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$

Definición

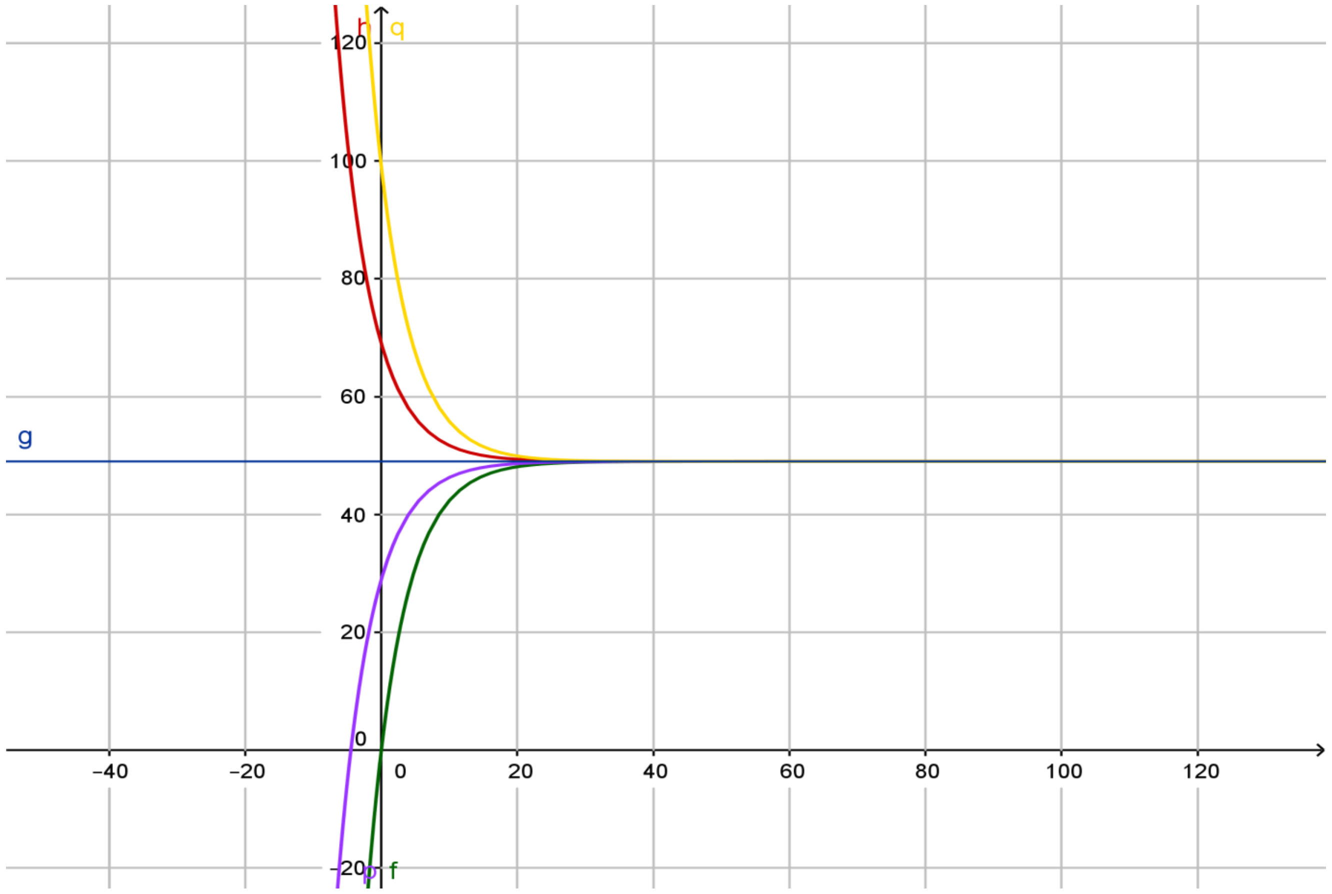
- Una ecuación diferencial es una ecuación, hay un signo igual, que relaciona una función, variable dependiente, con su o sus variables independientes y con sus derivadas.
- En el ejemplo
    - $m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$
- Variable dependiente, la velocidad, variable independiente, el tiempo que aquí no aparece explícitamente.
- La masa, el coeficiente de arrastre del aire y la gravedad, en este ejemplo, son constantes,

Solución de una ecuación diferencial

- Si en el ejemplo anterior, $m = 10kg$, y $g = 9.8m/seg^2, \gamma = 2kg/seg$
  - $\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{v}{5} = \frac{1}{5}(49 - v)$
- La ecuación se puede presentar
  - $\frac{dv/dt}{v-49} = -\frac{1}{5}$
- Integrando a ambos lados con respecto *a t*
  - $ln|v - 49| = -\frac{1}{5}t + C$
  - $|v - 49| = e^C e^{-t/5} = Ke^{-t/5} \quad (*)$
- Tenemos una familia de soluciones, debemos precisar el estado inicial, por comodidad pensamos en $t = 0,$ por ejemplo si parte del reposo $v = 0$
- $49 = K,$ la solución (*) $v(t) = 49 - 49e^{-\frac{t}{5}}$

Graficas de las soluciones

- Para diferentes valores de la velocidad inicial tendremos diferentes soluciones.



Clasificación

- Ecuaciones diferenciales ordinarias, una sola variable independiente.
- Ecuaciones diferenciales parciales , una dos o mas variables independientes.
- Orden de una ecuación, el orden de la derivada mas alta que aparece en la ecuación.
- Una ecuación diferencia ordinaria general se presenta usualmente como $F\left(t, y, y', \ldots y^{(n)}\right) = 0.$
- Una ecuación diferencial es lineal si F es lineal en $y, y', \ldots y^{(n)}$. De lo contrario no es lineal.
- Lineal $a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots a_n(t)y^{(n)} = p(t)$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} sen(\theta) = 0.$$

- No lineal

Ejercicios

- Clasificar
- 1. $t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 2y = sen(t)$
- 2. $\frac{d^2y}{dt^2} + sen(y+t) + \cos(t) = 0$
- 3. $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- 4. $u_{xx} + uu_x = \cos(x)$

Ecuaciones lineales de primer orden

- Una forma general del una ecuación lineal de primer orden es
  - $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$
- El ejemplo presentado se resolvió una ecuación de este tipo pero el caso general es un poco mas complicado.
- Ejemplo
  - $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}$
- El método consiste en multiplicar por una función, $\mu(t)$, que facilite la integración.
  - $\mu\frac{dy}{dt} + \mu\frac{1}{2}y = \mu\frac{1}{2}e^{t/3}$
- Por otra parte $(\mu y)' = \mu y' + \mu' y$. Entonces $\mu' y = \frac{1}{2}\mu y \;\rightarrow \mu' = \frac{1}{2}\mu$

- Para el lado derecho necesitamos
  - $\mu' = \frac{1}{2}\mu$
  - $\frac{\mu\prime}{\mu} = \frac{1}{2} \rightarrow \ln \mu = \frac{t}{2} + C \ \rightarrow \mu = e^{\frac{t}{2}} e^{C} = Ke^{t/2}$
- Volviendo a la ecuación
  - $\mu \frac{dy}{dt} + \mu \frac{1}{2} y = \mu \frac{1}{2} e^{t/3}$
- Cualquier función $\mu(t) = Ke^{t/2}$ pude servir, tomamos K=1
  - $e^{t/2} \frac{dy}{dt} + e^{t/2} \frac{1}{2} y = e^{t/2} \frac{1}{2} e^{t/3}$

- Entonces
  - $e^{t/2}\frac{dy}{dt}+e^{t/2}\frac{1}{2}y=e^{t/2}\frac{1}{2}e^{t/3}$
- Se puede escribir como
  - $\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{2}}y\right)=e^{t/2}\frac{dy}{dt}+e^{t/2}\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{5\mathrm{t}/6}$
- Ahora es fácil integrar
  - $\left(e^{\frac{t}{2}}y\right)=\frac{1}{2}\frac{6}{5}e^{5t/6}+C$
- Despejando
  - $y=\frac{3}{5}e^{\frac{5t}{6}-\frac{t}{2}}+Ce^{-\frac{t}{2}}=\frac{3}{5}e^{t/3}+Ce^{-\frac{t}{2}}$

Caso general

- Resolver
  - $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$
- Búsqueda de $\mu(t)$, factor integrante.
  - $\mu \frac{dy}{dt} + \mu p(t)y = \mu g(t)$
- De tal manera que el lado izquierdo sea igual a
  - $\frac{d}{dt}[\mu y] = \mu y' + \mu' y = \mu \frac{dy}{dt} + \mu p(t)y$
- Para que se cumpla
- $\frac{d\mu}{dt} = \mu p(t) \leftrightarrow \frac{d\mu/dt}{\mu} = p(t) \leftrightarrow \ln \mu = \int p(t)dt + C \ \leftrightarrow \ \mu(t) = K \exp\left(\int p\,dt\right)$
- Con un factor integrante basta, K=1.

- Note que $\mu(t) > 0$.
- Retomado la ecuación
  - $\mu \frac{dy}{dt} + \mu p(t) y = \mu g(t)$
- Tenemos
  - $\frac{d}{dt}[\mu y] = \mu g(t)$
- Integrando
  - $\mu y = \int \mu g dt + C$
  - $y(y) = 1/\mu\left[\int \mu g dt + C\right]$
- Con
- $\mu(t) = \exp\left(\int p dt\right)$

Ejemplo

- Resolver
    - $y' - y = 2te^{2t}$
- Aquí $p(t) = -1, \mu(t) = \exp(\int -1dt) = \exp(-t) \leftrightarrow \mu(t) = e^{-t}$
- Reemplazando
- $y'\, e^{-t} - e^{-t}y = \frac{d}{dt}(ye^{-t}) = 2te^{-t}e^{2t} = 2te^{t}$
- Entonces
- $ye^{-t} = \int 2te^{t}dt + C$
- $\int te^{t}dt = te^{t} - \int e^{t}dt = te^{t} - e^{t} + c$
- Finalmente $y(t) = 2(te^{t} - e^{t})e^{t} + Ce^{t} = 2te^{2t} - 2e^{2t} + Ce^{t}$

Problema de valor inicial

- Resolver
    - $y' - y = 2te^{2t}, y(0) = 1$
- Se da una condición extra que permite calcular la constante C . En general se da el punto (t_0, y_0) por el que debe pasar la solución
- Ya tenemos $y(t) = 2te^{2t} - 2e^{2t} + Ce^{t}$
- Entonces
    - $y(0) = 1 = 2 \times 0 - 2e^{0} + Ce^{0} \leftrightarrow 1 = C - 2 \leftrightarrow C = 3$
- La solución pedida
    - $y(t) = 2te^{2t} - 2e^{2t} + 3e^{t}$

Ejercicios

- Resolver el problema de valor inicial
- 1.$ty' + 2y = sen(t), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. t > 0$
- 2. ty'+$(1+t)y = t,\ y(\ln 2) = 1, t > 0$
- 3. Hallar el valor $y(0) = y_o$ de tal manera que la solución del problema
  - $y' - y = 1 + 3sen\, t, y(0) = y_0$
- Permanezca acotada.
- 4. Considere el problema de valor inicial
- $y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t, y(0) = y_0$
- Hallar el valor de y_0, que separa las soluciones que van a mas infinito de las que van a menos infinito cuando $t \to \infty$.

Bibliografía

- W.E. Boyce, R.C. DiPrima, “Elemtary Differential Equations and Boundary Value Problems”. Willey, 8e ed.