Ecuaciones de movimiento en 1D

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \quad ó \quad m\frac{dv}{dt} = F(x)$$

Integrando la 2da ecuación

$$m\int_{x_a}^{x_b} \frac{dv}{dt}\, dx = \int_{x_a}^{x_b} F(x)\, dx$$

$$dx = \left(\frac{dx}{dt}\right) dt = v\, dt$$

$$m\int \frac{dv}{dt}\, dx = m\int \frac{dv}{dt}\, v\, dt = m \qquad \frac{dv}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

$$= m\int d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{v_a}^{v_b} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

$$\int_{x_a}^{x_b} F(x)\, dx = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

Ejemplo Sistema masa resorte.

$$\frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}MV_0^2 = -k\int_{x_0}^{x} x\, dx$$

$$\frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}MV_0^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mV_0^2$$

"Parentesis"

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \text{Por conveniencia } \frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$x_1 = A\,\mathrm{Sen}\,\omega t$ o $x_2 = A\cos\omega t$

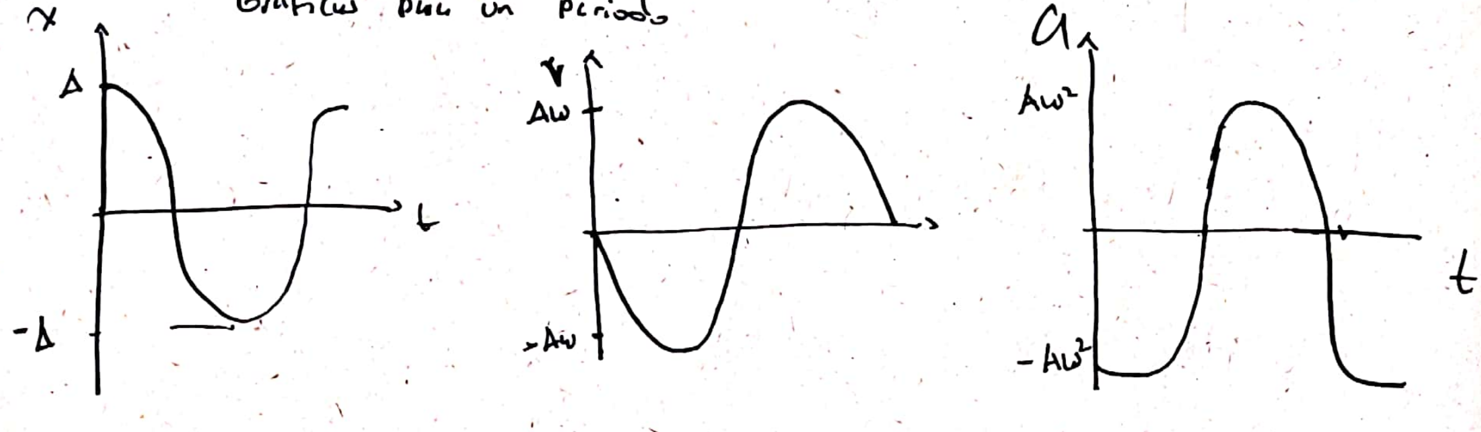
o en forma general $x = A\,\mathrm{Sen}(\omega t + \delta)$

$\delta \equiv$ fase para x_1 y x_2 depende de las condiciones iniciales

Cuando $V_0 = 0$ posición inicial es $x(0) = A$ la solución es

$x = A\cos\omega t \qquad \dot{x} = -A\omega\,\mathrm{Sen}\,\omega t \qquad \ddot{x} = -A\omega^2\cos\omega t$

Graficas para un periodo



$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-A\omega\,\mathrm{Sen}\,\omega t) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\,\mathrm{Sen}^2\omega t$$

$$K(t) = \frac{1}{2}mV_{max}^2\,\mathrm{Sen}^2\omega t$$

$$U_e(x) = \frac{1}{2}kx^2_{(t)} = \frac{1}{2}k(A\cos\omega t)^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$U_e(x) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\omega t = \frac{1}{2}mV_{max}^2\cos^2\omega t$$

Unidades

$$1 N\cdot m = 1J = 1 Kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$$

Movimiento de un Satelite.

Encontrar la máxima altitud y el mínimo valor de V_0 para que la masa escape de la tierra.

La Fuerza sobre m es: $F = -\frac{G M_T m}{r^2}$ el problema es 1D.

$$K(r) - K(R_i) = \int_{R_i}^{r} F(r)\,dr$$

$$= -G M_T m \int_{R_i}^{r} \frac{dr}{r^2} =$$

$$\frac{1}{2} m V(r)^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = G M_T m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}\right)$$

En el punto más alto $v(r) = 0$

$$V_0^2 = 2 G M_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{max}}\right) \qquad g = \frac{G M_T}{R_T^2}$$

$$V_0^2 = 2 g R_T^2 \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{max}}\right)$$

$$V_0^2 = 2 g R_T \left(1 - \frac{R_T}{r_{max}}\right)$$

$$\boxed{r_{max} = \frac{R_T}{1 - \frac{V_0^2}{2gR_T}}}$$

La velocidad de escape

La velocidad de escape es la minima velocidad que necesita para que $r_{max} \rightarrow$ infinito $\quad V_{escape} = \sqrt{2gR_T} = \sqrt{2(9.8)(6.4)}\ m/s$

$$V_{escape} = 1.1 \times 10^4\ m/s$$

$$r_{max} = \frac{R_T}{1 - \frac{V_0^2}{V_{escape}^2}}$$

$V_0 = V_{escape} \quad r \rightarrow \infty$

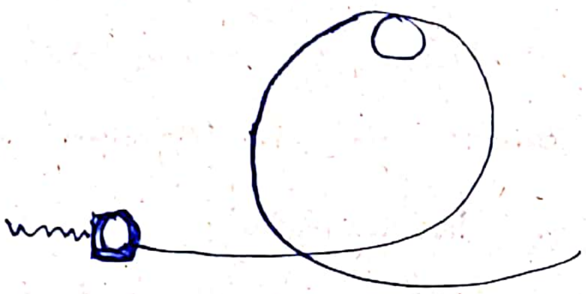
Si $V_0 > V_{escape}$ $\quad \underline{r_{max} < 0}$

hay un absurdo debido a que se asume $V_f = 0$.

$V_0 > V_{escape}$ nunca llega al reposo

$2gR = 3gR\cos\theta$

Ejercicio 1: Calcule cual debe ser la mínima compresión de tal manera que la bola alcance a dar la vuelta completa.



$$E_A = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_B = 2mgR + \frac{1}{2} m v^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2} k x^2 = 2mgR + \frac{1}{2} m v^2} \quad (1)$$

necesitamos otra ecuación.

$$-N - mg = -\frac{mv^2}{R} \qquad V_{min} \rightarrow N = 0$$

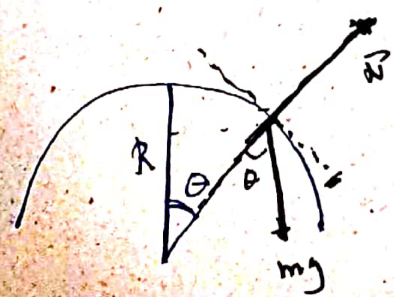
$$g = \frac{v^2}{R} \qquad V_{min} = \sqrt{gR} \qquad \text{Reemplazando}$$

$$\frac{1}{2} k x^2 = 2mgR + \frac{1}{2} mgR$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} k x^2 = \frac{5}{\cancel{2}} mgR \qquad \boxed{x = \sqrt{\frac{5mgR}{k}}}$$

Ejercicio 2

Un pequeño bloque desliza desde el reposo desde la cima de una esfera sin fricción de Radio R. A que distancia pierde contacto con la esfera.



$$① \quad N - mg\cos\theta = -\frac{mv^2}{R} \qquad \text{Cuando } N = 0 \quad Rg\cos\theta = v^2$$

$$② \quad \cancel{m}gR = \cancel{m}gR\cos\theta + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$2gR(1-\cos\theta) = v^2 = Rg\cos\theta$$

$$2gR - 2gR\cos\theta = gR\cos\theta \rightarrow$$

$$2g\cancel{R} = 3g\cancel{R}\cos\theta$$

$$\cos\theta = 2/3 .$$

$$x = R - R\cos\theta = R - \frac{R2}{3} = \frac{R}{3}.$$ ✓

<u>Golpeando un balón</u>

Próximo al borde de un tejado de un edificio de 12 m de altura, un joven golpea con el pie un balón con una velocidad de 16 m/s y $\theta = 60°$ por encima de la horizontal.

Determine a) la altura por encima del edificio que alcanza el balón

b) la velocidad antes de caer al suelo.

$$\frac{1}{2} m V_i^2 = \frac{1}{2} m V_{cima}^2 + mgh_{cima}$$

$$h_{cima} = \frac{V_i^2 - V_{cima}^2}{2g} \qquad V_{cima} = V_i \cos\theta$$

$$h_{cima} = \frac{V_i^2 - V_i^2 \cos^2\theta}{2g} = 9.79 \text{ m.}$$

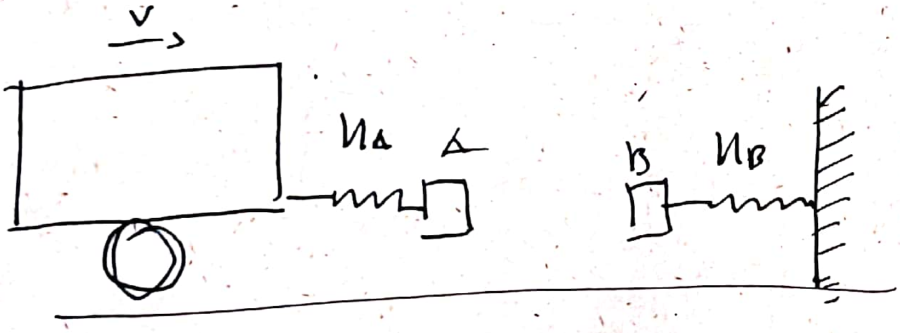
b) $\frac{1}{2} \cancel{m} V_f^2 + \cancel{m} g y_f = \frac{1}{2} \cancel{m} V_i^2$

$$V_f = \sqrt{V_i^2 - 2gy}$$

Un Carro es detenido mediante un sistema de dos parachoques de resorte A y B. Las constantes de Resorte son

$k_A = 1{,}12 \times 10^5 \frac{N}{m}$ y $k_B = 2{,}4 \times 10^5 \frac{N}{m}$ respectivamente.

El resorte A esta incorporado al carro mientras el resorte B esta unido a la pared. Si la masa del Carro $m = 2 \times 10^4$ kg $V_0 = 1\, m/s$ Calcule la compresión máxima de los resortes en el instante que se detiene el carro



$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} k_A x_A^2 + \frac{1}{2} k_B x_B^2 \qquad k_A x_A = x_B k_B$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k_A x_A^2 + \frac{1}{2} k_B \left(\frac{k_A x_A}{k_B} \right)^2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k_A x_A^2 + \frac{1}{2} \frac{k_A^2}{k_B} x_A^2$$

$$m v^2 = \left(k_A + \frac{k_A^2}{k_B} \right) x_A^2$$

$$m v^2 = \frac{k_A k_B + k_A^2}{k_B} x_A^2 \qquad x_A = \sqrt{\frac{m V^2 k_B}{k_A (k_B + k_A)}}$$

$$\boxed{x_B = \frac{k_A}{k_B} x_A}$$

Escaneado con CamScanner

Fuerzas Conservativas

Si una fuerza es conservativa entonces se le puede asociar una energía potencial

Fuerzas		Energía Potencial asociada
$\vec{P} = -mg\hat{j}$	$\longrightarrow$	$U_y = mgy$
$\vec{F} = -kx\hat{i}$	$\longrightarrow$	$U = \frac{1}{2}kx^2$
$\vec{F} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{r}$	$\longrightarrow$	$U_g = -\frac{Gm_1m_2}{r}$

¿Como obtener la fuerza usando el potencial?

a) $\vec{P} = -\frac{d}{dy}(mgy)\hat{j} = -mg\hat{j}$

b) $\vec{F} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)\hat{i} = -kx\hat{i}$

$\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{Gm_1m_2}{r}\right)\hat{r} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$

¿Si nuestra energía potencial depende de más de una variable?

$$\vec{F} = -\underbrace{\left(\frac{d}{dx}\hat{i} + \frac{d}{dy}\hat{j} + \frac{d}{dz}\hat{k}\right)}_{\text{No es la notación adecuada}} U(x,y,z)$$

$$\vec{F} = -\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)}_{\vec{\nabla}} U(x,y,z)$$

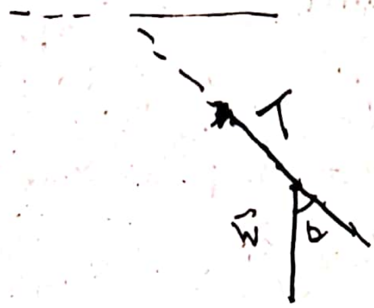
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(x,y,z)$$

¿Como saber si una fuerza es conservativa?

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \xrightarrow{\text{entonces}}$$ Se le puede asociar un potencial $U(x,y,z)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Pendulo simple



$$T - Mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$$

$$\boxed{-Mg\,\text{sen}\,\theta = Ml\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{sen}\,\theta \approx \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

no confundir ω con $\frac{d\theta}{dt}$

- De nuevo las soluciones dependen mucho de las condiciones iniciales

Ejercicio:

Para el pendulo calcular la velocidad en la parte inferior si es soltado desde un ángulo θ_0. Con la vertical desde el reposo

b) Cual es la tension en la parte inferior.

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh \qquad \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh$$

$$h = l - l\cos\theta_0 \qquad \frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2 = \cancel{m}g\,(l - l\cos\theta_0)$$

$$v_f = \sqrt{2g\,(l - l\cos\theta_0)}$$

b) cuando la masa esta en la parte inferior

$$T - mg = ma \qquad a_y = \frac{\cancel{m}(2g(l - l\cos\theta_0))}{l}$$

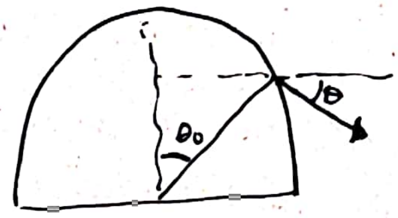
$$T = mg + ma = mg + \frac{m(2g(\cancel{l} - \cancel{l}\cos\theta_0))}{\cancel{l}}$$

$$T = mg + 2mg - 2mg\cos\theta_0 = 3mg - 2mg\cos\theta_0$$

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_0)$$

Continuación Problema

Que tan lejos llega?



$x_0 = R\,\mathrm{Sen}\theta_0$

$y_0 = R\cos\theta_0$

$$mgR = \frac{1}{2}mV_0^2 + mgR\cos\theta_0$$

$$\cancel{m}gR(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}\cancel{m}V_B^2$$

$$V_B = \sqrt{gR(1 - \cos\theta_0)}$$

$x = x_0 + V_0 t$; $y = y_0 + V_{0y} - \frac{1}{2}gt^2$ usando estas ecuaciones

$V_f = V_0 - gt$

Escaneado con CamScanner