Ecuación de Onda, separación de variables

10/05

Luz Myriam Echeverry N.

El problema

- El problema:
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ 0 < x < L, t > 0$ ★
    - $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, t > 0$
  - $u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), 0 < x < L, t > 0$, condiciones iniciales
- Aquí, *f*,*g* funciones y *c* constante positiva que depende del material.
- Las condiciones de compatibilidad:
  - $f'(0) = g'(0) = f'(L) = g'(L) = 0.$
- Las condiciones en la frontera sobre las derivadas se llaman de Neumann.
- Ya estudiamos el caso de condiciones tipo Dirichlet en la ecuación del calor.

Separación de variables

- Igual que en el caso de la ecuación del calor suponemos:
  - $u(x,t) = X(x)T(t)$
- Por ahora derivamos
  - $u_{xx} = X''(x)T(t), u_{tt} = X(x)T''(t)$
- Al reemplazar en la ecuación y separar variables ,
  - $\dfrac{T''(t)}{c^2T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}.$
- Al lado derecho depende de *t*, al otro lado de *x* únicamente entonces existe una constante -λ tal que:
  - $\dfrac{T''(t)}{c^2T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

Separación de variables

- Ahora:
  - $\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda X,\ 0<x<L$
- Y
  - $\frac{d^2T}{dt^2} = -\ c^2\lambda T,\ t>0$
- Las condiciones de frontera:
  - $u_x(0,t) = \frac{dX}{dx}(0)T(t) = 0, u_x(L,t) = \frac{dX}{dx}(L)T(t)=0$
- Llevan a
  - $\frac{dX}{dx}(0)= \frac{dX}{dx}(L)=0$
- Si se quiere una solución no trivial (diferente de cero)

Problema de valor propio

- Valores propios $AV - \lambda\, V = 0$
- Se busca una función *X(x)* solución de problema de valor propio:
  - $\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0$
  - $\frac{dX}{dx}(0) = \frac{dX}{dx}(L) = 0$
- Ya conocemos los tres casos :
- $\lambda < 0, X(x) = c_1 \cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + c_2 senh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$
- $\lambda = 0$, X(x)=A+Bx.
- $\lambda > 0, X(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 sen\left(\sqrt{\lambda}x\right)$
- c_1, c_2, A, B constantes

Condiciones e frontera: $\frac{dX}{dx}(0)= \frac{dX}{dx}(L)=0$

- La primera opción:
- $\lambda < 0, \quad X(x) = c_1 \cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + c_2 senh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$
    - $\lambda < 0, X'(0) = \sqrt{-\lambda}(c_1 \operatorname{senh}\left(\sqrt{-\lambda}0\right) + c_2 cosh\left(\sqrt{-\lambda}0\right))=0$
        - $c_2=0$
- $X'(L) = \sqrt{-\lambda}(c_1 \operatorname{senh}\left(\sqrt{-\lambda}L\right)=0,\ L > 0, \rightarrow c_1 = 0$
- El operador:
- $D^2 = \frac{d^2}{dx^2},$ no admite valores propios negativos.

Segundo caso $\frac{dX}{dx}(0)=\frac{dX}{dx}(L)=0$

- Para
  - $\lambda=0$, $X(x)=A+Bx$, $X'(0)=B$
- Al derivar, tenemos B=0, y podemos tomar A=1, A libre
- Entonces
  - $X_0(x) = 1$
- Es una función propia del operador:
  - $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$
- Para el valor propio cero.

$$\lambda > 0, X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 sen(\sqrt{\lambda} x)$$

- Para este caso:
  - $X'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda} x) + \sqrt{\lambda} c_2 cos(\sqrt{\lambda} x)$
- $X'(0) = 0, c_2 = 0.$
- Queda: X'(L)=0,
  - $-c_1\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda} L) = 0,\ \ \sqrt{\lambda} L = n\pi$
- Para que $c_1 \neq 0$, se debe tener:
  - $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, n=1,2,3,...
  - $X_n(x) = cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ Función propia

Para $T(t)$

- La ecuación para T
  - $\frac{d^2T}{dt^2} = -\, c^2\lambda_n$T   T, t>0 λ_n, $\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, n=0,1,2,3,...
- Para n =0, segunda derivada cero,
- $T_0(t) = \gamma_0 + \delta_0 t$
- $n \neq 0, T'' + c^2\lambda_n T = 0$
- $T_n(t) = \ \gamma_n \cos\left(\sqrt{c^2\lambda_n}t\right) + \delta_n sen\left(\sqrt{c^2\lambda_n}t\right)$, n=1,2,3,...
- El producto:
  - $X_0(x)T_0(t) = \frac{A_0+B_0t}{2}$ (el 2 acomoda las soluciones, $X_0 \equiv 1$)
  - $X_n(x)T_n(t) = cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n sen\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)$

Condiciones iniciales

- Por el principio e superposición generalizado:
- $u(x,t) = \frac{A_0+B_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n sen\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)$
- Solución formal o generalizada.
- Para los coeficientes. Suponiendo que f y g tienen serie de Fourier:
    - $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{n\pi}{L}x)$.
    - $g(x) = \frac{\widetilde{a_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{a_n} cos(\frac{n\pi}{L}x)$.
- Se escribe las condiciones iniciales en sus expansiones en función de las funciones propias.

Coeficientes

- Ya sabemos que para $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(\frac{n\pi}{L}x).$:
- $a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) f(x)dx$
- Y
- $u(x,0) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n cos(\frac{n\pi}{L}x). = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(\frac{n\pi}{L}x).$
- $A_n = a_n, n = 0,1,2..$
- $u_t(x,0) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} B_n \frac{c\pi n}{L} cos(\frac{n\pi}{L}x)$ =g$(x) = \frac{\widetilde{a_0}}{2} + \sum_{n=1}^{N} \widetilde{a_n} cos(\frac{n\pi}{L}x).$
  - $B_0 = \widetilde{a_0}, B_n = \frac{\widetilde{a_n}L}{cn\pi}$, n=1,2,...

Fórmula general

- Tenemos
- $u(x,t) = \frac{A_0+B_0t}{2}\sum_{n=1}^{\infty} cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n sen\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)$
- Con
- $A_n = a_n, n = 0{,}1{,}2..$, coeficientes de Fourier para *f(x)*
- $B_0 = \widetilde{a_0}, B_n = \frac{\widetilde{a_n}L}{cn\pi}$, n=1,2,... $\widetilde{a_n}$ coeficientes de Fourier para *g(x)*

Ejemplo

- Resolver
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < 1, t>0$
  - $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, t > 0$
- $u(x,0) = \ \cos^2 \pi x,\ u_t(x,0) = sen^2(\pi x)\cos(\pi x), 0 < x < 1, t>0$

- La solución tiene la forma:
- $u(x,t) = \frac{A_0 + B_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi x)\left(A_n \cos\left(\frac{2n\pi}{1} t\right) + B_n sen\left(\frac{2n\pi}{1} t\right)\right)$

Solución

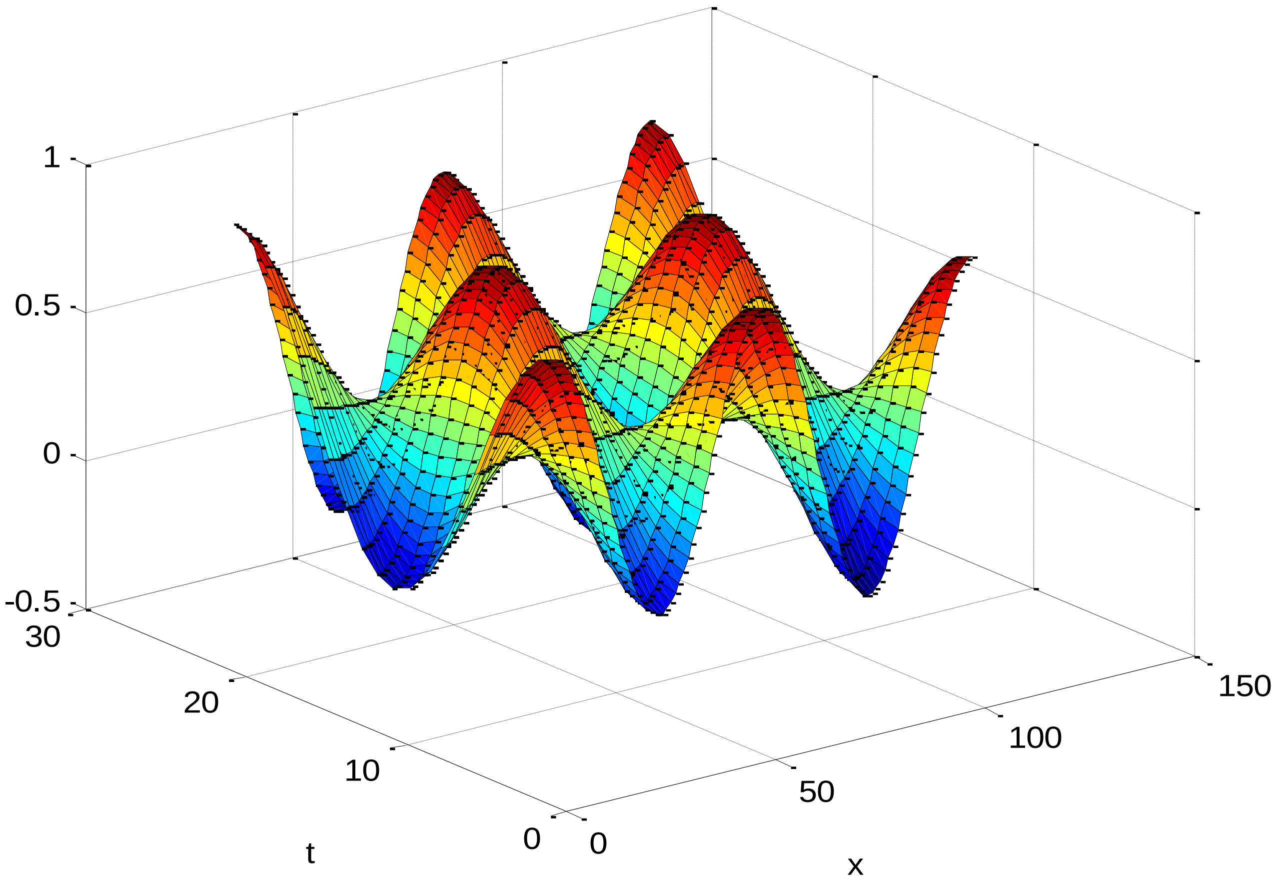
- La condición:
  - $f(x) = cos^2\pi x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi x$
- Su serie de Fourier tiene $a_0 = \frac{1}{2}$ $a_2 = \frac{1}{2}$ los demás cero.
- Para :
  - $g(x) = sen^2(\pi x)\cos(\pi x) = \left(\frac{1-\cos(2\pi x)}{2}\right)\cos(\pi x) =$
  - $\frac{1}{2}(\cos(\pi x) - \cos(\pi x)\cos(2\pi x))$
  - $=\frac{1}{2}\left(\cos(\pi x) - \frac{1}{2}(\cos(3\pi x) + \cos(\pi x))\right)=\frac{1}{4}\cos(\pi x)-\frac{1}{4}\cos(3\pi x)$
  - $\tilde{a}_1 = \frac{1}{4}, \tilde{a}_3 = -\frac{1}{4},$ cero las demás

Ejemplo

- Entonces:
- $u(x,t) = \frac{A_0+B_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n sen\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)$
- Con
- $A_n = a_n, n = 0,1,2..$, coeficientes de Fourier para *f(x)*
- $B_0 = \widetilde{a_0}, B_n = \frac{\widetilde{a_n}L}{cn\pi}$, n=1,2,… $\widetilde{a_n}$ coeficientes de Fourier para *g(x)*
- $A_0 = 1, A_2 = \frac{1}{2},\ B_1 = \frac{1}{8\pi}, B_3 = -\frac{1}{24\pi}$
- Entonces
- $u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi}\sin 2\pi t cos\pi x + \frac{1}{2}\cos 4\pi t\, cos2\pi x - \frac{1}{24\pi} sen6\pi t cos3\pi x$

Gráfica de la solución

- Solución



Ejercicios hacer la gráfica correspondiente

- 1-Encuentre la solución formal de
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, t>0$
  - $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, t > 0$
  - $u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = sen(2x) 0 < x < 1, t>0$
- 2-
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < \pi, t>0$
  - $u_x(0,t) = u_x(\pi) = 0, t > 0$
  - $u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 8sen^2(x) 0 < x < \pi, t>0$
- 3- Igual al primero con $0 < x < 10$ con $u_t(x,0)$=0
  - $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{10}, 0 \le x \le 5 \\ \frac{2(10-x)}{10}, 5 \le x \le 10 \end{cases}$

Ejercicios

- Encuentre la solución formal de
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, t>0$
  - $u_x(0,t) = u_x(1) = 0, t > 0$
  - $u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = 0$
- 4- $f(x) = \begin{cases} 1, \frac{1}{2} < x < 3/2 \\ 0, \quad otros\ puntos \end{cases}$
- 5- $f(x) = \begin{cases} 4x, 0 < x < 1/4 \\ 1 \;\; 1/4 \leq x \leq 3/4 \\ 4(1-x), \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases}$

Bibliografía

- Boyce DiPrima. ¨ Elementary Differential equations and Boudary problems¨8ª ed.
- Y. Pinchover, J. Rubinstein, An Introduction to Partial diferential equations,. Cambridge University Press, 2005