Soluciones fundamentales

Clase #10, jueves 24/02

Luz Myriam Echeverry

Ch 3.2: Soluciones Fundamentales de las Ecuaciones Lineales Homogéneas

- Sean p, q funciones continuas en $I = (\alpha, \beta)$, puede ser infinito. Para cualquier función y dos veces diferenciable en I, definimos el operador diferencia L como
  - $L(y) = y'' + py' + qy$

- Note que $L[y]$ es una función en el intervalo I, cuyo resultado es
  - $L(y)(t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t)$

- Por Ejemplo,

$$p(t) = t^2,\ q(t) = e^{2t},\ y(t) = \sin(t),\ \ I = (0, 2\pi)$$
$$L[y](t) = -\sin(t) + t^2\cos(t) + 2e^{2t}\sin(t)$$

Notación: Operador Diferencial

- En esta sección estudiaremos la ecuación diferencial de segundo orden $L[y](t) = 0$, y sus condiciones iniciales:
  - $L(y)(t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t)$
  - $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'(t_0)$

- Queremos saber si el problema tiene solución y si es única.
- También, conocer la forma y estructura de las soluciones puede ser de ayuda para hallar la solución de un problema particular.
- Esas preguntas son teoremas de la presente sección.

Teorema 3.2.1

- Sea el PVI

  - $L(y)(t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t)$
  - $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'(t_0)$

- Con *p*, *q*, y *g* continuas en un intervalo abierto *I* que contiene a t_0. Entonces existe una única solución $y = \phi(t)$ en el intervalo *I.*

- Nota: Este teorema dice que la solución existe, pero no es fácil escribir la solución en general. Esta es la mayor diferencia entre ecuaciones de primer orden y de segundo orden.

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = g(t)$$
$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1$$

Ejemplo 1

- Sea la ecuación

$$y'' - y = 0,\ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 1$$

- En 3.1, hallamos la solución:

$$y(t) = 2e^{t} + e^{-t}$$

- Nota: $p(t) = 0$, $q(t) = -1$, $g(t) = 0$ son continuas en $(-\infty, \infty)$, y la solución y esta definida y es dos veces diferenciable en $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 2

- Sea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$$

  con p, q continuas en un intervalo abierto I conteniendo a t_0.

- Con las condiciones iniciales, veamos que $y = 0$ es solución de este PVI.

- Las hipótesis del teorema 3.2.1 se cumplen, entonces $y = 0$ es la única solución del problema.

Ejemplo 3

- Determine el intervalo más grande en donde el PVI tiene solución. No trate de hallarla solución.
- $(t+1)y'' - (\cos t)y' + 3y = 1, y(0) = 1, y'(0) = 0$

- Primero, escribir la ecuación en forma estandar:
- $y'' - (\frac{\cos t}{t+1})y' + \frac{3}{t+1}y = \frac{1}{t+1}, y(0) = 1, y'(0) = 0$

- El intervalo que contiene $t = 0$ y tal que los coeficientes sean continuos es (-1, ∞).
- Por el teorema 3.2.1 el intervalo más grande tal que el PVI tiene solución dos veces continuamente diferenciable también es (-1, ∞).

Teorema 3.2.2 (Principio de Superposición)

- Si y_1y y_2 son soluciones de la ecuación
- $L(y)(t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t)$=0

  Entonces cualquier combinación lineal c_1y_1 + y_2c_2 es solución, para cualquier par c_1 y c_2.

- Demostración, sustituya c_1y_1 + y_2c_2 por y en la ecuación anterior, y use el hecho y_1 y y_2 son soluciones.
- Entonces con cualquier par de soluciones y_1 y y_2, podemos construir una familia infinita de soluciones, de la forma $y = c_1y_1 + c_2 y_2$.
- ¿Podemos escribir así todas las soluciones? Para responder esta pregunta, usamos el determinante Wronskiano.

El Determinate Wronskiano (1 of 3)

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0$$
$$c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y_0'$$

- Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación
- $L(y)(t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t)$=0

- Por el teorema 3.2.2, sabemos que $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es una solución de la ecuación.
- Para hallar los coeficientes $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ usamos la necesidad de cumplir las condiciones iniciales
  - $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'(t_0$

Para ello, hay que resolver:

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0$$
$$c_1 y'_1(t_0) + c_2 y'_2(t_0) = y'_0$$

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0$$
$$c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y_0'$$

El Determinate Wronskiano(2 of 3)

- Al resolver las ecuaciones, obtenemos

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(t_0) - y_0' y_2(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}$$
$$c_2 = \frac{-y_0 y_1'(t_0) + y_0' y_1(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}$$

- En término de determinantes:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}$$

El Determinate Wronskiano(3 of 3)

- Para que las formulas sean válidas, el determinante *W* en el denominador no puede ser cero.

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{W}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{W}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)$$

- *W* es el **determinante Wronskiano**, o simplemente, el Wronskiano de las soluciones y_1 y y_2. Usaremos la notación

$$W(y_1, y_2)(t_0)$$

Teorema 3.2.3

- Sean y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación
- $L(y)(t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t)$=0, (1)

  tal que el Wronskian

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

no es cero en el punto de las condiciones iniciales t_0

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'(t_0) \quad (2)$$

dadas. Existe un par c_1, c_2 tal que $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es solución de la ecuación diferencial (1) con condiciones iniciales (2).

Ejemplo 4

- Recordemos:
- $y'' - y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 1, \rightarrow y(t) = 2e^{t} + e^{-t}$
- Las dos funciones son solución de la ecuación:
  - $y_1 = e^{t}, y_2 = e^{-t}$
- El Wronskiano de y_1 y y_2 es

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 = -e^{t}e^{-t} - e^{t}e^{-t} = -2e^{0} = -2$$

- Como $W \neq 0$ para todo t, las combinaciones lineales de y_1 y y_2 se pueden usar para construir soluciones del PVI para cualquier t_0.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Teorema 3.2.4 (Soluciones Fundamentales)

- Sea y_1 y y_2 are soluciones de la ecuación
- $L(y)(t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$

  Si existe un punto t_0 tal que $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$, entonces la familia de soluciones $y = c_1y_1 + c_2 y_2$ con coeficientes arbitrarios c_1, c_2 incluye todas las soluciones de la ecuación.

- La expresión $y = c_1y_1 + c_2 y_2$ se llama **solución general** de la ecuación anterior, y en este caso y_1 y y_2 son el **conjunto fundamental de soluciones** de la ecuación diferencial.

Ejemplo 5

- Recordemos la ecuación, con las dos soluciones indicadas:

$$y'' - y = 0, \quad y_1 = e^t, y_2 = e^{-t}$$

- El Wronskiano de y_1 y y_2 es

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -e^t e^{-t} - e^t e^{-t} = -2e^0 = -2 \neq 0 \text{ para todo } t.$$

- Entonces y_1 y y_2 forma un conjunto fundamental soluciones de la ecuación dada, y se puede usar para construir todas las soluciones.
- La solución general es

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Resultado general

- Veamos la ecuación diferencial siguiente, con las dos soluciones dadas:

  - $L(y)(t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$

Suponemos que y_1y y_2 son soluciones :

- $y_1 = e^{r_1 t}, \quad y_2 = e^{r_2 t} \quad r_1 \neq r_2$

El Wronskiano de y_1y y_2 es

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0 \text{ para todo } t.$$

Entonces y_1y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación, y se pueden usar para generar todas las soluciones.

- La solución general es $y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

Ejemplo 7: Soluciones (1 of 2)

- Sea la ecuación diferencial:
- $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$
- Muestre que las funciones dadas son soluciones fundamentales:
  - $y_1 = t^{1/2}, y_2 = t^{-1}$
- Entonces, sustituimos y_1 en la ecuación:

$$2t^2\left(\frac{-t^{-3/2}}{4}\right)+3t\left(\frac{t^{-1/2}}{2}\right)-t^{1/2}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-1\right)t^{1/2}=0$$

- y_1 es una solución de la ecuación diferencial.
- Igual para , y_2 que también es solución:

$$2t^2\left(2t^{-3}\right)+3t\left(-t^{-2}\right)-t^{-1}=\left(4-3-1\right)t^{-1}=0$$

Ejemplo 7: Soluciones Fundamentales (2 of 2)

- Recordemos
  - $y_1 = t^{1/2}, y_2 = t^{-1}$
- Para ver que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones, evaluamos el Wronskiano de y_1 y y_2:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -t^{-3/2} - \frac{1}{2}t^{-3/2} = -\frac{3}{2}t^{-3/2} = -\frac{3}{2\sqrt{t^3}}$$

- Como $W \neq 0$ para $t > 0$, y_1, y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecución diferencial

$$2t^2 y'' + 3t\, y' - y = 0, \;\; t > 0$$

Teorema 3.2.5: Existencia del conjunto fundamental de soluciones

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

- Considere la siguiente ecuación diferencial, con coeficientes *p* y *q* continuos en algún intervalo abierto *I*:
  - $L(y) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$
- Sea t_0 un punto en *I*, y y_1 y y_2 soluciones de la ecuación con y_1 que cumple las condiciones iniciales
- $y_1(t_0) = 1, y_1'(t_0) = 0$

  y y_2 también cumple las condiciones iniciales.
- $y_2(t_0) = 0, y_2'(t_0) = 1$
- Entonces y_1, y_2 forman un conjunto fundamental soluciones para la ecuación dada.

Ejemplo 7: Teorema 3.2.5

- Encuentre el conjunto fundamental de soluciones 3.2.5 de la ecuación diferencial y el valor inicial
- $y'' - y = 0, \; t_0 = 0$
- Ya mostramos que
- $y_1 = e^t, y_2 = e^{-t}$

  son soluciones fundamentales, pues $W(y_1, y_2)(t_0) = -2 \neq 0$.
- Pero las soluciones no cumplen las condiciones iniciales, propuestas en el Teorema 3.2.5, y no forman el conjunto fundamental de soluciones mencionado en ese teorema.
- Para que y_3 y y_4 sea un conjunto fundamental de soluciones del Tm 3.2.5. Sean las condiciones iniciales

$$y_3(0) = 1, \; y_3'(0) = 0; \quad y_4(0) = 0, \; y_4'(0) = 1$$

Ejemplo 7: Solución General (2 of 3)

- Como y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones,

$$y_3 = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad y_3(0) = 1, y_3'(0) = 0$$

$$y_4 = d_1 e^t + d_2 e^{-t}, \quad y_4(0) = 0, y_4'(0) = 1$$

- Resolviendo

$$y_3(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh(t), \quad y_4(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} = \sinh(t)$$

- El Wronskiano de y_3 y y_4 es

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \neq 0$$

- Entonces y_3, y_4 forman el conjunto de soluciones indicado en el Teorema 3.2.5, con la solución.

$$y(t) = k_1 \cosh(t) + k_2 \sinh(t)$$

Resumen

- Hallar la solución general de
    - $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$

  primero hallamos dos soluciones y_1 y y_2.
- Luego debemos estar seguros que existe un t_0 en el intervalo tal que $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$.
- Entonces y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación, la solución general $y = c_1y_1 + c_2 y_2$.
- Si las condiciones iniciales están fijas para t_0 en el intervalo donde $W \neq 0$, entonces se pueden calcular c_1 y c_2 , tales que la solución cumpla las condiciones iniciales.

Ejercicios

- 1) Encuentre el intervalo mas grande en el que el problema de valor inicial dado, con seguridad, tiene una única solución
- t$(t-4)y'' + 3ty' + 4y = 2, y(3) = 0, y'(3) = -1$
- Para los siguientes problemas halle el un conjunto fundamental de soluciones
- 2)$y'' + 4y' - 2y = 0, t_0 = 0, y_1(t_0) = 1, y_1'(t_0) = 0, y_2(t_0) = 0, y_2'(t_0) = 1$
- 3) y”+4y’+3y=0, $t_0 = 1, y_1(t_0) = 1, y_1'(t_0) = 0, y_2(t_0) = 0, y_2'(t_0) = 1$

Ejemplo 7:
Infinidad de conjuntos solución (3 of 3)

- Entonces

$$S_1 = \left\{e^t, e^{-t}\right\}, \quad S_2 = \left\{\cosh t, \sinh t\right\}$$

  los dos conjuntos son conjunto solución del mismo problema

$$y'' - y = 0, \quad t_0 = 0$$

- En general una ecuación tiene una infinidad de conjuntos solución, Tomamos el mas conveniente de acuerdo con la aplicación..

Bibliografía

- W.E. Boyce, R.C. DiPrima, "Elemtary Differential Equations and Boundary Value Problems". Willey, 8e ed.

- http://jws-edcv.wiley.com/college/bcs/redesign/instructor/0,,_047143339X_BKS_1873____,00.html