Variación de parámetros

10 febrero

Luz Myriam Echeverry N

Ejemplo

- Resolver
  - $y'' + 4y = 3\csc t$
- No se aplica el método de coeficientes indeterminados
  - $y'' + 4y = 0$
- Tiene el polinomio característico $r^2 + 4 = 0$, raíces $r = \pm 2i$
- La solución
  - $y(t) = \mathrm{c}_1 \cos 2t + c_2 sen\ 2t$
- Variación de parámetros consiste en suponer que las constantes c_1, c_2 son funciones
  - $y(t) = \mathrm{u}_1 \cos 2t + u_2 sen\ 2t$

- Se buscan dos funciones u_1, u_2 tales que tengamos una solución de la ecuación no homogénea
  - $y'' + 4y = 3\csc t$ (1)
- Derivamos $y(t) = \mathrm{u}_1 \cos 2t + u_2 sen\ 2t$
- $y' = u_1' \cos 2t + u_2' sen\ 2t - 2u_1 sen\ 2t + 2u_2 \cos 2t$
- Como buscamos dos funciones necesitamos dos condiciones y (1) es sólo una, la otra la fijamos
- $0 = u_1' \cos 2t + u_2' sen\ 2t$
- La segunda derivada
  - $y'' = -2u_1' sen\ 2t + 2u_2' \cos 2t - 4\mathrm{u}_1 \cos 2\mathrm{t} - 4\mathrm{u}_2 \mathrm{sen}\ 2\mathrm{t}$
- Sustituyendo en (1)
- $-2u_1' sen\ 2t + 2u_2' \cos 2t - 4\mathrm{u}_1 \cos 2\mathrm{t} - 4\mathrm{u}_2 \mathrm{sen}\ 2\mathrm{t} + 4(\mathrm{u}_1 \cos 2t + u_2 sen\ 2t) = 3\csc \mathrm{t}$

- Quedan dos ecuaciones
  - $u_1{}' \cos 2t + u_2{}' sen\ 2t$=0 (2)
  - $-2u_1{}' sen\ 2t + 2u_2{}' \cos 2t = 3\csc \mathrm{t}$ (3)
- Con las derivadas $u_1{}', u_2{}'$ como incógnitas
  - $u_2{}' = -u_1{}' \frac{\cos 2t}{sen\ 2t}$
- Sustituyendo
- $-2\, u_1{}' sen\ 2t - 2u_1{}' \frac{\cos 2t}{sen\ 2t} \cos 2t = 3 \csc t$
- $-2u_1{}' \frac{(sen^2 2t + cos^2 2t)}{sen 2t} = 3 \csc t \rightarrow u_1{}' = -\frac{3csct\ sen2t}{2} = -\frac{3}{2} \csc t\ 2cost\ sent$
- $u_1{}' = -3cost$
- Y $u_2{}' = 3cost \frac{\cos 2t}{sen\ 2t} = 3 \cos t \frac{1 - 2sen^2 t}{2sent \cos t} = \frac{3}{2} scs\ t - 3sen\ t$
- Solución de (2) y (3)

- Falta integrar
- $u_1{}' = -3cost \;\to u_1 = -3sen\; t + c_1$
- $u_2{}' = \frac{3}{2}scs\; t - 3sen\; t \to u_2 = \frac{3}{2}ln|\csc t\; - \cot t| + 3\cos t + c_2$

La solución propuesta

$$y(t) = \mathrm{u}_1\cos 2t + u_2 sen\; 2t$$

Queda

$$y(t) = (-3sen\; t + c_1)\cos 2t + \left(\frac{3}{2}ln|\csc t\; - \cot t| + 3\cos t + c_2\right) sen\; 2t$$

Reordenando $y(t) = \mathrm{c}_1\cos 2t + c_2 sen\; 2t$+

$$\cos 2t(-3sen\; t) + sen\; 2t\left(\left(\frac{3}{2}ln|\csc t\; - \cot t| + 3\cos t\right)\right)$$

Caso general $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ (2)

- En el ejemplo funcionó el tomar la solución de la ecuación homogénea,
  - $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$
  - $c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = y(t)$
- y reemplazar las constantes por funciones,
  - $y(t) = u_1y_1(t) + u_2y_2(t)$
- Tratamos de despejar u_1, u_2 de tal manera que cumpla la ecuación (2)
- Derivamos
  - $y'(t) = u'_1y_1(t) + u'_2y_2(t) + u_1y'_1(t) + u_2y'_2(t)$
- Imponemos la condición
  - $u'_1y_1(t) + u'_2y_2(t) = 0$

- $y'(t) = u_1 y'_1(t) + u_2 y'_2(t)$
- Entonces
- $y''(t) = u_1' y'_1(t) + u'_2 y'_2(t) + u_1 y''_1(t) + u_2 y''_2(t)$
- Reemplazamos en
  - $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ (2)
  - $[u_1' y'_1(t) + u'_2 y'_2(t) + u_1 y''_1(t) + u_2 y''_2(t)] + p(t)[u_1 y'_1(t) + u_2 y'_2(t)] + q(t)[u_1 y_1(t) + u_2 y_2(t)] = g(t)$
- Reordenando
- $u_1[y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1] + u_2[y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2] + u_1' y'_1(t) + u'_2 y'_2(t) = g(t)$
- Los términos en paréntesis cuadrados valen cero porque es la solución de la ecuación homogénea

- Quedan dos ecuaciones
  - $u'_1 y_1(t) + u'_2 y_2(t)$=0
  - $u_1' y'_1(t) + u'_2 y'_2(t) = g(t)$
- Con dos incógnitas u_1', u_2'
- La matriz del sistema
- $A = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$ $su\ determinante$ $\det(A) = W(y_1, y_2) \neq 0$
- Su inversa $A^{-1} = \frac{1}{W(y_1,y_2)} \begin{bmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{bmatrix}$
- La solución
  - $\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{W(y_1,y_2)} \begin{bmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$

- La solución
  - $$\begin{bmatrix} u_1{}' \\ u_2{}' \end{bmatrix} = \frac{1}{W(y_1,y_2)} \begin{bmatrix} y_2{}' & -y_2 \\ -y_1{}' & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$
  - $$u_1{}' = \frac{-y_2 g(t)}{W(y_1,y_2)}, \quad u_2{}' = \frac{y_1 g(t)}{W(y_1,y_2)}$$
- Integrando
  - $$u_1(t) = \int \frac{-y_2 g(t)}{W(y_1,y_2)}\, dt + c_1, u_2(t) = \int \frac{y_1 g(t)}{W(y_1,y_2)} dt + c_2$$
- Si es posible realizar la integración con funciones elementales resta solamente reemplazar en la solución propuesta
  - $$y(t) = u_1 y_1(t) + u_2 y_2(t)$$

Ejercicios

- Resolver
- 1) $y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}$

  2) $y'' - 2y' + y = e^{t}/(1 + t^{2})$

3) $4y'' + y = 2\sec\left(\frac{t}{2}\right), -\pi < x < \pi$

- Ahora verifique que las soluciones dadas son soluciones del problema homogéneo asociado, encuentre la solución del no homogéneo
- 3) $t^{2}y'' - 2y = 3t^{2} - 1, t > 0, y_1 = t^{2}, y_2 = t^{-1}$
- 4) $ty'' - (1 + t)y' + y = t^{2}e^{2t}, t > 0, y_1 = 1 + t\ , y_2 = e^{t}$

Bibliografía

- W.Boyce, R. DiPrima, “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems” 8Ed