Ecuaciones Autónomas y Dinámica Poblacional

Son ecuaciones de la forma

$$\underbrace{y' = f(y)}$$

la variable independiente t no aparece explícitamente.

Solución logística

ej: → Un modelo $y' = ry$ tiene solución $y = e^{rt}$ pero podemos asumir para más realismo que la tasa r depende de y así:

$$y' = \underbrace{h(y)}\, y$$

pretty much like a population

- $h(y) \simeq r$, si y es pequeña
- $h(y)$ decrece, si y crece
- $h(y) < 0$; si y es grande

Un ejemplo sencillo de $h(y)$ es $(r - ay)$, $a>0$. y' quedaría así:

ecuación logística ← $$y' = (r - ay)\,y, \quad r, a > 0$$

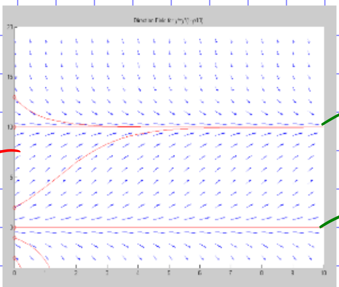
es equivalente a: $$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \quad K = \frac{r}{a}$$

Soluciones de equilibrio:

Las soluciones de equilibrio de una ecuación diferencial y' autónoma, son sus raíces.

Soluciones de equilibrio en $y' = f(y) = 0$

- hay soluciones de equilibrio estables e inestables



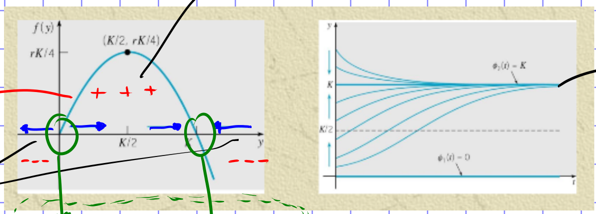
estable

Inestable

y' = logística

¿Cómo identificar punto estable o inestable?

de este lado la velocidad va aumentando (es positiva)



y' = logística

acá la velocidad se vuelve negativa

capacidad del nicho o nivel de saturación

las flechas divergen

las flechas convergen

en $y = 0$ va a ser inestable
en $y = K$ va a ser estable

Concavidad de la solución:

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = f'(y)\frac{dy}{dt} = \underbrace{f'(y)}_{\text{2nd derivative}} \cdot \underbrace{f(y)}_{\text{1st derivative}}$$

- Si la gráfica de y es cóncava hacia arriba $\Rightarrow$ $f'(y)$ y $f(y)$ tienen el mismo signo.
- Si la gráfica de y es cóncava hacia abajo $\Rightarrow$ tienen signos opuestos

Solución Analítica

$\rightarrow$ mucho texto pero la solución de y es:

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \quad K = \frac{r}{a}$$

$$\Rightarrow y = \frac{y_0 \cdot K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$