CLASE 28 MARZO

Para realizar la descripción del movimiento traslacional, usamos el concepto de Fuerza, momento lineal, y centro de masa.

Momento Angular de una partícula

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\quad$ $\vec{L} \Rightarrow$ momento angular

$\vec{P} \Rightarrow$ momentum $\vec{p}$

Las unidades $kg \cdot \frac{m^2}{s}$ no hay un nombre especial para estas unidades

- El momento angular es la primera cantidad física en usar el Producto Cruz.
- los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ forman un plano (plano de movimiento), $\vec{L}$ es Perpendicular al plano

- $\vec{r}$ y $\vec{p}$ estan en el plano xy
- $\vec{L}$ esta en la dirección z
- $L_z > 0$ si esta en contra de las manecillas del reloj

  $L_z < 0$ si esta a la misma dirección de las manecillas

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{L} = rp \operatorname{sen}\phi \, \hat{n}$

$L_z = rp \operatorname{sen}\phi \qquad L_z = r_\perp p \; , \quad L_z = r p_\perp$

$\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (\vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel) \times \vec{p}$

$= (\vec{r}_\perp \times \vec{p}) + (\vec{r}_\parallel \times \vec{p})$

$\vec{L} = r_\perp \times \vec{p}$ debido a que $r_\perp \times \vec{p} = 0$

Metodo II

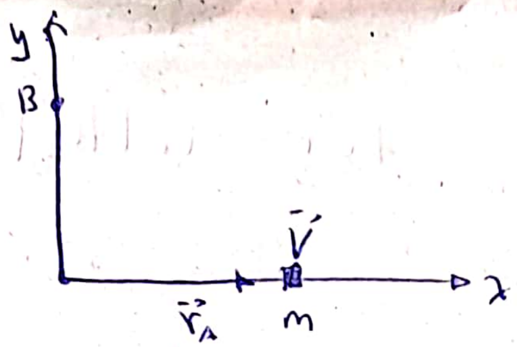
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix}$$

$= (x p_y - y p_x)\hat{k}$

Ejercicio 1

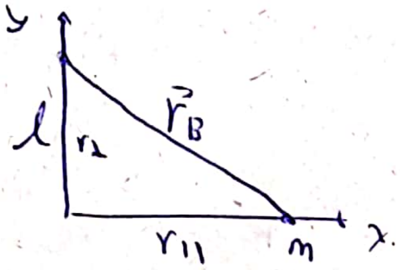
Considere un bloque de masa m con una velocidad $\vec{V} = v\hat{i}$ cual es el momento angular $\vec{L}_A$ cerca al origen y su momento angular en el punto $\vec{B}$



$r_A = x\hat{i}$

$\vec{r}_A$ es paralelo a $\vec{V}$

$\vec{L}_A = m\vec{r}_A \times \vec{V} = 0$



$\vec{L}_B = m\vec{r}_B \times \vec{V}$

$\vec{L}_B = m l v \hat{n}$

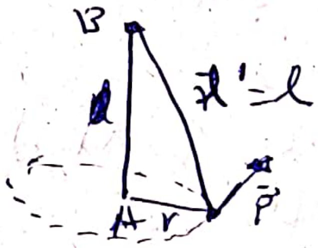
$$\vec{L}_B = m\vec{r}_B \times \vec{V}$$

$$= m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{n} \\ x & -l & 0 \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= mvl\hat{n}$$

MOMENTO ANGULAR PÉNDULO CÓNICO

$|\vec{p}| = Mv$
$= Mr\omega$



$|\vec{p}| = Mv$
$= Mr\omega$

desde el punto A

$\vec{L}_A = Mr^2\omega\,\hat{n}$ es constante en magnitud y dirección.

Ahora desde el punto B.

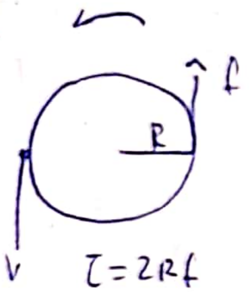
$|\vec{L}_B| = |\vec{r}' \times \vec{p}|$

$|\vec{L}_B| = Ml r\omega$. La dirección de L_B no es constante, L_B es perpendicular a $\vec{r}$ y $\vec{p}$.

Torque

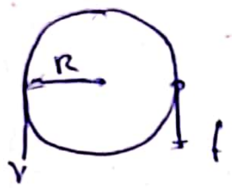
$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$ $\quad |\tau| = |r_\perp||\bar{F}|$ $\quad |\tau| = |r||F_\perp|$

$$\bar{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



$\tau = 2Rf$

$F = 0$



$\tau = 0$

$F = 2f$

$\tau = Rf$

$F = f$

El torque es importante por que puede ser relacionado al cambio del momento angular

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \bar{p}\right) + \left(\bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \times \bar{p} = \bar{v} \times m\bar{v} = 0$$

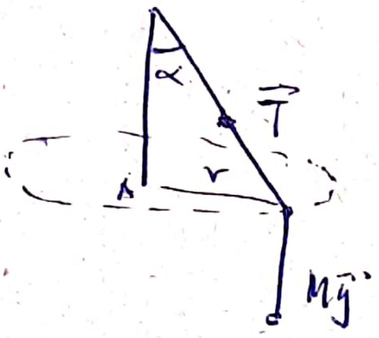
$$\boxed{\frac{d\bar{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}}$$ $\to$ Torque

si el torque es cero

$L = cte$

Escaneado con CamScanner

Torque para un pendulo conico

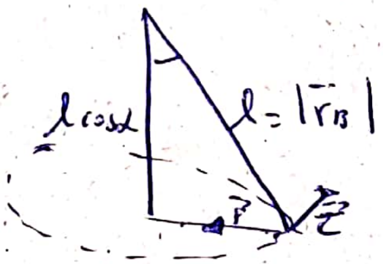


No hay movimiento vertical

$$T\cos\alpha - Mg = 0$$

$$\vec{F} = -T\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{r}$$

$$\vec{\tau}_A = \vec{r}_A \times \vec{F} = 0 \qquad \frac{d\vec{L}_A}{dt} = 0 \qquad L_A = \text{Constante}$$

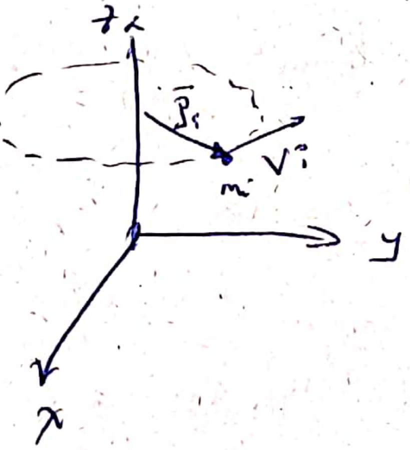


$$|\tau_B| = l\cos\alpha\, F = l\cos\alpha\, T\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$= Mgl\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\vec{\tau}_B = Mgl\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{\theta}$$

Un eje de rotacion



$$L_z = m_i v_i \times \rho_i = m_i v_i \rho_i \qquad v_i = \omega\rho_i$$

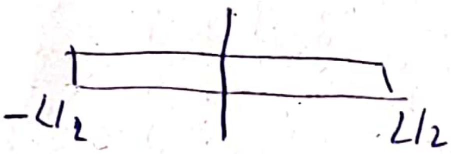
$$L_z = m_i \rho_i^2 \omega$$

$$L_z = \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}\,\omega = I\omega$$

$$I \equiv \sum_i m_i \rho_i^2 \quad \text{momento de inercia}$$

$$\sum_i m_i \rho_i^2 \rightarrow \int \rho^2\, dm$$

Para una barra en su centro



$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dm$$

$$= \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx$$

$$= \frac{M}{L} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \frac{1}{2} ML^2$$

Calcular para un aro

$$I = \int r^2 dm = mr^2$$

Momento de Inercia para diferentes Cuerpos

Esfera hueca $\frac{2}{3} mr^2$

Esfera maciza $\frac{2}{5} mr^2$

aro $I = mr^2$

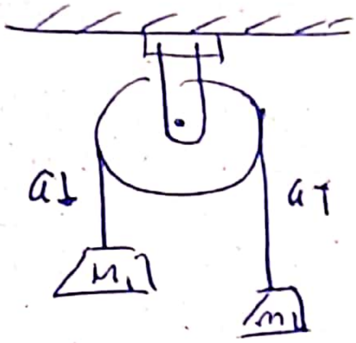
disco $I = \frac{1}{2} mr^2$

Teorema de ejes paralelos

$$\boxed{I = I_o + Ml^2}$$

I_o : Momento de Inercia con respecto al centro de masa

$l =$



$$m_1 g - T_1 = M_1 a$$

$$T_2 - M_2 g = M_2 a$$

$$\tau = T_1 R - T_2 R = I\alpha \qquad a = \alpha R$$

$$W_1 - W_2 - (T_1 - T_2) = (M_1 + M_2) a$$

$$T_1 - T_2 = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2}$$

$$W_1 - W_2 - \frac{Ia}{R^2} = (M_1 + M_2) a$$

$$I = \frac{M_p R^2}{2}$$

$$a = \frac{(M_1 - M_2) g}{M_1 + M_2 + \frac{M_p}{2}}$$