Método de coeficientes indeterminados para E.D.O lineales no homogéneas

Febrero 8 de 2022

Luz Myriam Echeverry N

Ecuación no homogénea

- Sea
  - $L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \neq 0$ (1)
- con $p(t), q(t), g(t)$ funciones continuas en el intervalo $I = (\alpha, \beta)$.
- La ecuación homogénea correspondiente es:
  - $L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ (2)
- El resultado importante que relaciona las dos ecuaciones está en el siguiente teorema

- Teorema, sean Y_1, Y_2, dos soluciones del problema no homogéneo (1) entonces su diferencia $Y_1 - Y_2$ es una solución de la ecuación homogénea correspondiente (2). Si y_1, y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea entonces
  - $Y_1(t) - Y_2$ (t)=$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$
- Para dos constantes c_1, c_2
- Demostración
- Sabemos $L(Y_1) = g(t), L(Y_2) = g(t)$, soluciones
- Entonces
  - $L(Y_1) - L(Y_2) = g(t) - g(t) = L(Y_1 - Y_2) = 0$

- Teorema La solución genera del problema no homogéneo (1) se puede escribir como
    - $\phi(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + Y(t)$ (3)
- Si y_1, y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea, con dos constantes c_1, c_2 arbitrarias y $Y(t)$, una solución del problema no homogéneo.
- El teorema anterior dice que dos soluciones del problema no homogéneo cumple
    - $Y_1(t) - Y_2$ (t)=$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$
- Sean $Y_1(t) = \phi(t)$ *solución general*, y sea $Y_2(t) = Y(t)$, una solución particular del problema no homogéneo. Tenemos la ecuación (3) gracias al teorema anterior.

Solución no homogénea

- Pasos
- 1- Hallar la solución general del problema homogéneo correspondiente, se puede denotar $y_c(t)\ o\ y_h(t)$
- 2-Hallar una solución particular del problema no homogéneo, se puede denotar $y_p(t)$. Vamos a ver métodos para calcularla.
- 3- Se suman las dos anteriores para obtener

$$\mathrm{y}(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p(t) \quad (4)$$

Si es un problema de valor inicial, ahora se procede a calcular las constantes c_1, c_2

Coeficientes indeterminados

- El método consiste en suponer que la solución particular tiene una cierta forma con coeficientes a determinar, veamos un ejemplo, resolver
    - $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$
- Primero la ecuación homogénea
    - $y'' - 2y' - 3y = 0$
- Polinomio característico
- $r^2 - 2r - 3 = (r+1)(r-3) = 0, r_1 = -1, r_2 = 3$
- La solución de la ecuación homogénea
    - $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$

- La ecuación
  - $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$
- Suponemos la solución del mismo tipo del término a la derecha , múltiplo de e^{2t}
  - $Y(t) = Ae^{2t}$
- No es linealmente dependiente con las soluciones fundamentales del problema homogéneo
- Las derivadas
  - $Y'(t) = 2Ae^{2t},\ Y''(t) = 4Ae^{2t}$

- reemplazamos $4Ae^{2t} - 2(2Ae^{2t}) - 3Ae^{2t} = 3e^{2t} \rightarrow -3Ae^{2t} = 3e^{2t} \rightarrow A = -1$

- *La solución particular* $Y(t) = -e^{2t}$
- *La solución de la ecuación es* $y(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-t} - e^{2t}$

- $-e^{2t}$

- El método funciona con polinomios, combinaciones lineales se senos y cosenos, exponenciales, productos de polinomios con las funciones anteriores.
- Ejemplo, resolver
  - $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3sen(t)$
- Para la ecuación homogénea:
  - $2y'' + 3y' + y = 0$
- Polinomio característico, $2r^2 + 3r + 1 = 0$
  - $r = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4},$
- Raíces, $r = -1, r = -1/2$
- Solución homogénea: $y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t/2}$

- Para buscar una solución particular, usamos el principio de superposición y resolvemos dos problemas
  - $2y'' + 3y' + y = t^2$ (5)
- Y sumamos las soluciones
  - $2y'' + 3y' + y = 3sen(t)$ (6)
- Para la ecuación (5) suponemos que la solución es un polinomio del mismo grado del de el lado derecho
  - $Y = At^2 + Bt + C$
- Derivamos $y' = 2At + B, y'' = 2A$ reemplazamos

- Ejercicio #7 Encontrar la solución general de
  - $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3sen(t)$
- La ecuación homogénea
  - $2y'' + 3y' + y = 0$
- Polinomio característico
  - $2r^2 + 3r + 1 = 0, \quad r = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4}$
- La solución homogénea
  - $y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t/2}$
- Para buscar la solución particular usamos la linealidad del operador
- Resolvemos $2y'' + 3y' + y = t^2$
- y por parte $2y'' + 3y' + y = 3sen(t)$

- Resolvemos $2y'' + 3y' + y = t^2$ (6)
- Las raíces del polinomio no aparecen en el término independiente entonces suponemos la solución del tipo
  - $Y = At^2 + Bt + C$
- Polinomio del mismo grados del lado derecho. Calculamos las derivadas
- $Y' = 2At + B, Y'' = 2A$ reemplazamos en (6)
- $2(2A) + 3(2At + B) + At^2 + Bt + C = t^2$
- Dos polinomios son iguales si sus coeficientes correspondientes a la misma potencia son iguales
- $At^2 + t(6A + B) + (4A + 3B + C) = t^2$
- A=1, $B = -6, 4 - 18 + C = 0, C = +14$
  - $Y = t^2 - 6t + 14$

- Resolver y por parte $2y'' + 3y' + y = 3sen(t)$
- El segundo término no aparece en la solución homogénea, suponemos la solución del tipo
    - Y=$Acos\, t + Bsen\, t$
- Siempre van las dos funciones porque provienen de la fórmula de Euler e^{it}=$\cos t + isen\, t$
- Derivadas $Y' = -Asen\, t + Bcos\, t,\ Y'' = -Acos\, t - Bsen\, t$
- Reemplazando
    - $-2Acos\, t - 2Bsen\, t - 3Asen\, t + 3Bcos\, t + Acos\, t + Bsen\, t$
    - $= 3sen\, t$
- $\cos t(-2A + 3B + A) + sen\, t(-2B - 3A + B) = 3sen\, t$
- $-A + 3B = 0, -B - 3A = 3 \rightarrow$A=3B, $-10B = 3, B = -\frac{3}{10}, A = -\frac{9}{10}$
    - $Y = -\frac{9}{10}\cos t - \frac{3}{10}\ sen\, t$

La solución general

- Sumando las tres soluciones
- $y == c_1e^{-t} + c_2e^{-t/2}+t^2 - 6t + 14 - \frac{9}{10}\cos t - \frac{3}{10}\ sen\ t$
- Tenemos la solución general
- El método funciona cuando el término independiente es polinomio, exponencial, senos y cosenos y combinaciones lineales de los anteriores.
- El todos los casos se revisa que la solución de la ecuación homogénea no aparezca en el término de la derecha

Caso especial, la función a la derecha ya es solución de la ecuación homogénea

- Ejemplo $y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$
- Si se supone la solución particular $Y = Ae^{-t}$
- Queda $Ae^{-t} + 3Ae^{-t} - 4A^{-t} = 2e^{-t}$, no hay solución
- La ecuación homogénea tiene el polinomio característico
- $r^2 - 3r - 4 = (r + 1)(r - 4) = 0$
- Es decir una de las soluciones fundamentales es $y_1 = e^{-t}$, el término independiente contiene un múltiplo de esta solución, pero igual que en el caso de raíces repetidas suponemos la solución particular del tipo
  - $Y = Ate^{-t}$

Resolver $y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$

- Con las raíces del polinomio característico ya tenemos la solución homogéne
  - $y = c_1e^{-t} + c_2e^{4t}$
- La solución particular del tipo
- $Y = Ate^{-t}, Y' = Ae^{-t} - Ate^{-t}$, Y''=$-Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t}$
- Reemplazando $-2Ae^{-t} + Ate^{-t} - 3Ae^{-t} + 3Ate^{-t} - 4tAe^{-t} = 2e^{-t}$
- Cancelando
- $-5Ae^{-t} = 2e^{-t} \rightarrow Y = -\frac{2}{5}e^{-t}$
- Solución general
  - $y = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} - \frac{2}{5}te^{-t}$

Ejercicios resolver

- 1- $y'' + 4y = 3sen\ 2t, y(0) = 2, y'(0) = -1$
- 2- $y'' + y' + 4y = 2\ senh(t), senh(t) = \frac{(e^{t} - e^{-t})}{2}$
- 3- $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t} \cos 2t, y(0) = 1, y'(0) = 0$, cuidado
- 4- $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$
- Nota use software para calcular las derivadas.

Bibliografía

- W.Boyce, R. DiPrima, “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems” 8Ed