Sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\vec{x}} = \overbrace{P(t)}^{\text{Matriz que deriva}}\,\vec{x}$$

Caso Homogeneo

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Caso no Homogeneo

$$\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x} + \vec{g(t)}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$$

⚠ recuerde que hay linearidad:

$$A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y}$$

Teorema

Sean $\vec{x}_{(1)}$ y $\vec{x}_{(2)}$ (funciones vectoriales) soluciones de:

$$\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x}$$

Cualquier combinación lineal de $\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}$ también es solución:

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_{(1)} + C_2\vec{x}_{(2)}$$

Si hay n soluciones de $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x}$ Podemos hacer una matriz de las soluciones

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & & x_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

las soluciones son linealmente independientes si:

$$\det(X(t)) = W[\underbrace{\vec{x}^{(1)} \ldots \vec{x}^{(n)}}_{\text{columna de la matriz } X}] \neq 0$$

Teorema

Si $\det(X(t)) \neq 0$ en el intervalo $\alpha < t < \beta$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = c_1\vec{x}^{(1)} + \ldots + c_n\vec{x}^{(n)} \quad \forall\, \vec{c}$$

Def: Cualquier conjunto de soluciones $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(n)}$ de $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x}$ linealmente indep en $\alpha < t < \beta$ es un conjunto fundamental de soluciones

Propiedad de Abel

$$\frac{dW}{dt} = \overbrace{(p_{11} + p_{22} + \dots + p_{nn})}^{\text{traza}} \cdot W$$

$$W = c \cdot \exp\left(\int p_{11} + p_{22} + \dots + p_{nn} \, dt \right)$$

Teorema Si $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(n)}$ son soluciones de $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x}$ en $t \in (\alpha, \beta)$

$\Rightarrow$ $\det(X(t))$ (wronskiano) nunca se anula o siempre es cero.