Series de Fourier

26/04/2022

Luz Myriam Echeverry N

Series trigonométricas

- Conocemos las series de potencias
  - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$
- Se estudió su convergencia y sus propiedades de integrabilidad y derivabilidad.
- Una serie trigonométrica es de la forma
  - $\frac{a_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m\, sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$
- En el conjunto de puntos en que la serie converge, define una función f cuyo valor, en un punto, es el límite de la serie en ese punto.
- Por comodidad el primer término se divide por dos.

Periodicidad

- Definición, una función, *f*, es periódica de período *T>0*, si
  - $f(x+T)=f(x)$ (1)
- Si la función es periódica la propiedad (1) se cumple también para 2T y para cualquier múltiplo entero de T.
- El menor valor de T para el que se cumple (1) es el período fundamental de *f*.
- Si dos funciones *f,g* tienen período T cualquier combinación lineal de las dos funciones también tiene período T
- $F(x)=c_1f(x)+c_2g(x) \rightarrow F(x+T)=c_1f(x+T)+c_2g(x+T)$=
- $c_1f(x)+c_2g(x)$=F(x)

- Para las funciones
  - $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$
- el período es $\mathrm{T_m} = \frac{2L}{m}, m = 1,2,3, \ldots$
- Las funciones $\cos x, sen\ x$ tienen período $2\pi, y$ $\cos \alpha x, sen\ \alpha x$ tienen período fundamental $T = 2\pi/\alpha$, aquí $\alpha = m\pi/L$ y tenemos el resultado pedido $T_m = \frac{2\pi}{\frac{m\pi}{L}} = \frac{2L}{m}$.
- Para $m = 1$, tenemos período $\mathrm{T} = 2L$, para $m \geq 2$, entero, el período 2L es múltiplo entero de T_m. Todos los elementos de la serie tienen período 2L.
- $\{1, cosx, senx, \cos 2x, sen\ 2x, \ldots . \cos nx\ , sen\ nx \ldots . .\}$ ortogonal con el producto interno
  - $< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} fgdx$

- $\{1, cosx, senx, \cos 2x, sen\ 2x, \ldots . \cos nx\ \ , sen\ nx \ldots . .\}$ ortogonal con el producto interno, producto escalar entre dos funciones diferentes es cero
- A ver
- 0=<1, f $> = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos nx\ dx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} 1 \operatorname{sen} nx\ dx = 0$, n=1,2,...
- $\int_{-a}^{a} f(x)dx, f$ función impar ...
- 1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx$=? $f(x) = -f(-x), \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx$+$\int_{0}^{a} f(x)dx$
- 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\ dx = 0,\ n \neq m$
- 3) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\ dx = 0,\ n \neq m$
- 4) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\ dx = 0,$ impar
- $\cos(A + B) = cosAcosB - senAsenB,\ \cos(A - B) = cosAcosB + senAsenB$

Fórmulas

- Si la serie trigonométrica converge, llamamos ese límite
  - $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m\, sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ (*)
- Los coeficientes a_m, b_m se relacionan con el límite $f(x)$, para ver la relación usamos la ortogonalidad de las funciones
  - $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$
- Primero para un n entero positivo fijo, multiplicamos la ecuación (*) por $\cos\frac{n\pi x}{L}$, e integramos con respecto a *x* en el intervalo [-L,L].
- $\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m\, sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right],$
- Como *n está fijo y m recorre todos los enteros positivos* el único término no nulo es el correspondiente a *n=m* es decir
  - $\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L} dx = La_n$

Para los b_n multiplicamos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m\, sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \ (*)$$

por $sen\ \frac{n\pi x}{L}$, integramos y usamos la ortogonalidad,

- $\int_{-L}^{L} f(x)\, sen\ \frac{n\pi x}{L} \mathrm{dx} = \int_{-L}^{L} sen\ \frac{n\pi x}{L} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m\, sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] =$

$\int_{-L}^{L} sen\ \frac{n\pi x}{L} \frac{a_0}{2} dx +$

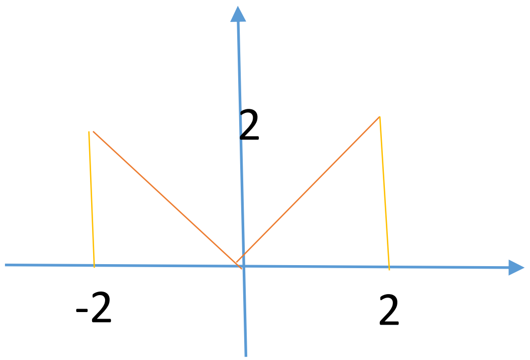
$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{-L}^{L} sen\ \frac{n\pi x}{L} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^{L} sen\ \frac{n\pi x}{L} b_m\, sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = b_n L$

Es muy fuerte la suposición de poder intercambiar límite de la serie con la integral.

- $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$, n=0,1,2,...
- $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) sen\ \frac{n\pi x}{L} dx$

Ejemplo

- Sea la función
  - $f(x) = \begin{cases} -x, -2 \leq x < 0 \\ x, 0 \leq x < 2 \end{cases}$
  - $f(x+4) = f(x)$



- Función periódica de período T=4, L=2.
- Suponemos que la serie de Fourier es convergente, calcular los coeficientes.
- $a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-x)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} xdx = \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\Big]_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2}\right) = \frac{1}{2}(2+2) = 2$
- Par $m > 0$, teniendo en cuenta que la función es par y coseno es par
- $a_m = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{m\pi x}{2}dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} x\cos\frac{m\pi x}{2}dx$

- Calculando
- $a_m = \int_0^2 x \cos\frac{m\pi x}{2} dx$
- Usamos $\int_0^2 x cos\frac{m\pi x}{2} dx = 2\, x/m\pi\ sen\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{m\pi} sen\frac{m\pi x}{2} dx =$
- $0 + \frac{4}{(m\pi)^2}\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{4}{(m\pi)^2}$ (cos$(m\pi)$-1), $\cos(m\pi) = (-1)^m$,
- $a_m = \begin{cases} -\frac{8}{m^2\pi^2}, m\ impar \\ 0, m\ par \end{cases}$
- Los $b_m = 0$ porque la función $f(x) es\ par\ pero\ \frac{sen\ n\pi x}{2}$ es función impar y el intervalo de integración es simétrico con respecto al origen.
- $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right), a_{2k+1} = -8/\big(\pi(2k+1)\big)^2$

Ejercicios

- Calcular la serie de Fourier de
- 1) $f(x) = -x, -L \leq x < L, f(x + 2L) = f(x)$ L=1
- 2) $f(x) = \begin{cases} 1, -L \leq x \leq 0 \\ 0, 0 < x < L \end{cases} \quad f(x + 2L) = f(x), L \ = 1$
- 3) $f(x) = \begin{cases} x, -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, 0 < x < \pi \end{cases} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$
- 4) $f(x) = \begin{cases} x + 1, -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x, 0 < x < 1 \end{cases} \quad f(x + 2) = f(x)$
- 5) $f(x) = \begin{cases} -1, -2 \leq x \leq 0 \\ 1, 0 < x < 2 \end{cases} \quad f(x + 4) = f(x)$

Bibliografia

- W.Boyce, R. DiPrima, “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems” 8Ed