Ecuaciones lineales homogeneas

De coefs constantes

forma general:

$$y'' = f(t, y, y'), \text{ con } f \text{ dada}$$

- Si f es lineal en y e y' entonces:

$$y'' = g(t) - p(t)y' - q(t)y, \quad y'' + p(t) + q(t) = g(t),$$ la ecuación es lineal.

- forma de una ecn de segundo orden:

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t),$$ si $G(t) = 0 \ \forall t$ esta es homogenea.

Para una ecn de segundo grado necesitamos 2 condiciones iniciales

1. $y(t_0) = y_0$
2. $y'(t_0) = y'_0$

Un caso de ecuación lineal de 2do orden:

$$y'' - y = 0 \equiv y'' = y$$

Note que $y_1 = e^t$ y $y_2 = e^{-t}$ cumplen el requisito y también cualquier combinación lineal de ellas:

$$\frac{d^2}{dt}\left((a \ \ b) \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix} \right) = (a \ \ b) \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Así $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ Para $y'' - y = 0$

---

el caso de coefs. constantes

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Con el ejemplo anterior suponemos $y = e^{rt}$

$$ay'' + by' + cy = 0$$
$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$
$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

] dado $e^{rt} \neq 0$ puedo hacer lo siguiente

$$ar^2 + br + c = 0$$] ecuación característica de la ecuación diferencial

Podemos resolver para r con la cuadrática.
hay 3 casos

1. $r_1 = r_2$ $\quad r_1 \in \mathbb{R}$
2. $r_1 \neq r_2$ $\quad r_1 \in \mathbb{R}$ y $r_2 \in \mathbb{R}$] hoy trabajaremos este caso
3. $r_1 \neq r_2$ $\quad r_1 \in \mathbb{C}$ y/o $r_2 \in \mathbb{C}$

entonces $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

Para hallar C_1 y C_2 usamos los valores iniciales: $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$

$$\left.\begin{aligned} y(t_0) &= C_1 e^{r_1 t_0} + C_2 e^{r_2 t_0} = y_0 \\ y'(t_0) &= C_1 r_1 e^{r_1 t_0} + C_2 r_2 e^{r_2 t_0} = y'_0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{y'_0 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} \cdot e^{-r_1 t_0} \\ C_2 &= \frac{y_0 r_1 - y'_0}{r_1 - r_2} \cdot e^{-r_2 t_0} \end{aligned}$$

Quick summary of the process

$a y'' + b y' + c y = 0$, Asumimos $y = e^{rt}$ (Porque recuerde el ej: $y'' = y$)

$a r^2 e^{rt} + b r e^{rt} + c e^{rt} = 0$

$e^{rt}(a r^2 + br + c) = 0$, multiplicamos por $\frac{1}{e^{rt}}$, $e^{rt} > 0$

ecuación caract. de la ecuación diferencial: $a r^2 + br + c = 0$, solucionamos r de la eqn. cuadrática

en el caso $r_1 \neq r_2$ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$:

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Use $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = y'_0$ Para encontrar C_1 y C_2 Así:

$$\left.\begin{aligned} y(t_0) &= C_1 e^{r_1 t_0} + C_2 e^{r_2 t_0} = y_0 \\ y'(t_0) &= C_1 r_1 e^{r_1 t_0} + C_2 r_2 e^{r_2 t_0} = y'_0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{y'_0 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} \cdot e^{-r_1 t_0} \\ C_2 &= \frac{y_0 r_1 - y'_0}{r_1 - r_2} \cdot e^{-r_2 t_0} \end{aligned}$$