Ecuaciones autónomas

- Clase #6 febrero 10
- Luz Myriam Echeverry

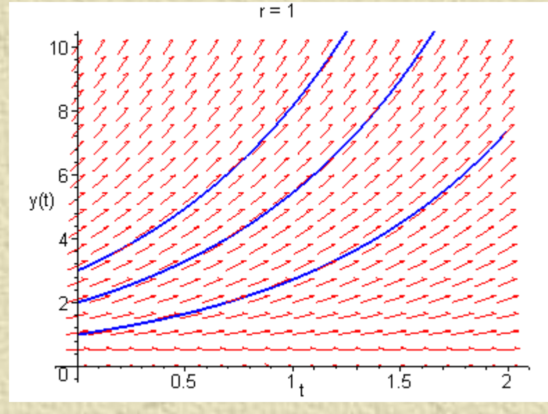
Ch 2.5:Ecuaciones Autónomas y Dinámica Poblacional

- Estudiaremos funciones de la forma $y' = f(y)$, Llamadas ecuaciones **autónomas**, la característica que las distingue es que la variable independiente t no aparece explícitamente.
- El objetivo es entender los métodos geométricos usados para obtener resultados cualitativos sobre la solución sin resolverla analíticamente.
- Ejemplo (Crecimiento exponencial):

$$y' = ry, \quad r > 0$$

- Solución:

$$y = y_0 e^{rt}$$



Crecimiento Poblacional (Logística)

- Un modelo exponencial $y' = ry$, tiene como solución $y = e^{rt}$,y predice un crecimiento ilimitado, con tasa $r > 0$ independiente de la población .
- Suponiendo que la tasa de crecimiento depende de la población y, cambiamos a r por y= $h(y)$ obtenemos $y' = h(y)y$.
- Escogemos $h(y)$ tal que
- $h(y) \cong r$ para y pequeña,
  - $h(y)$ decrece si y crece,
  - $h(y) < 0$ cuando y grande.

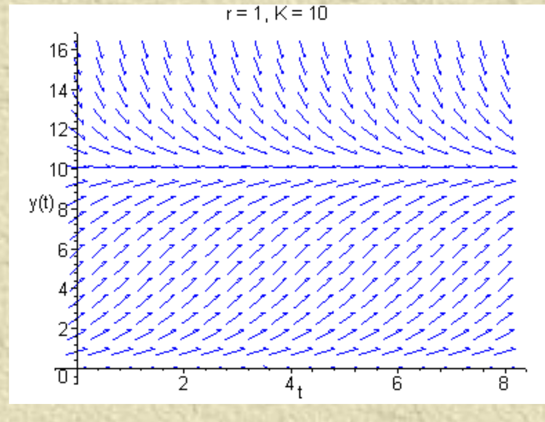
  La función más sencilla es $h(y) = r - ay$, con $a > 0$.
- La ecuación diferencial queda:

$$y' = (r - ay)y, \qquad r, a > 0$$

- Se conoce como la ecuación de Verhulst, o **logistica**.

Ecuación Logística

- La Logística hallada anteriormente
$$y' = (r - ay)y, \qquad r, a > 0$$
- Usualmente se rescribe así:
$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y,$$
con $K = r/a$. La constante r se llama **tasa de crecimiento intrínseca**,y como se ve, K representa la capacidad del nicho poblacional .
- El campo direccional de la ecuación con $r = 1$ y $K = 10$ es



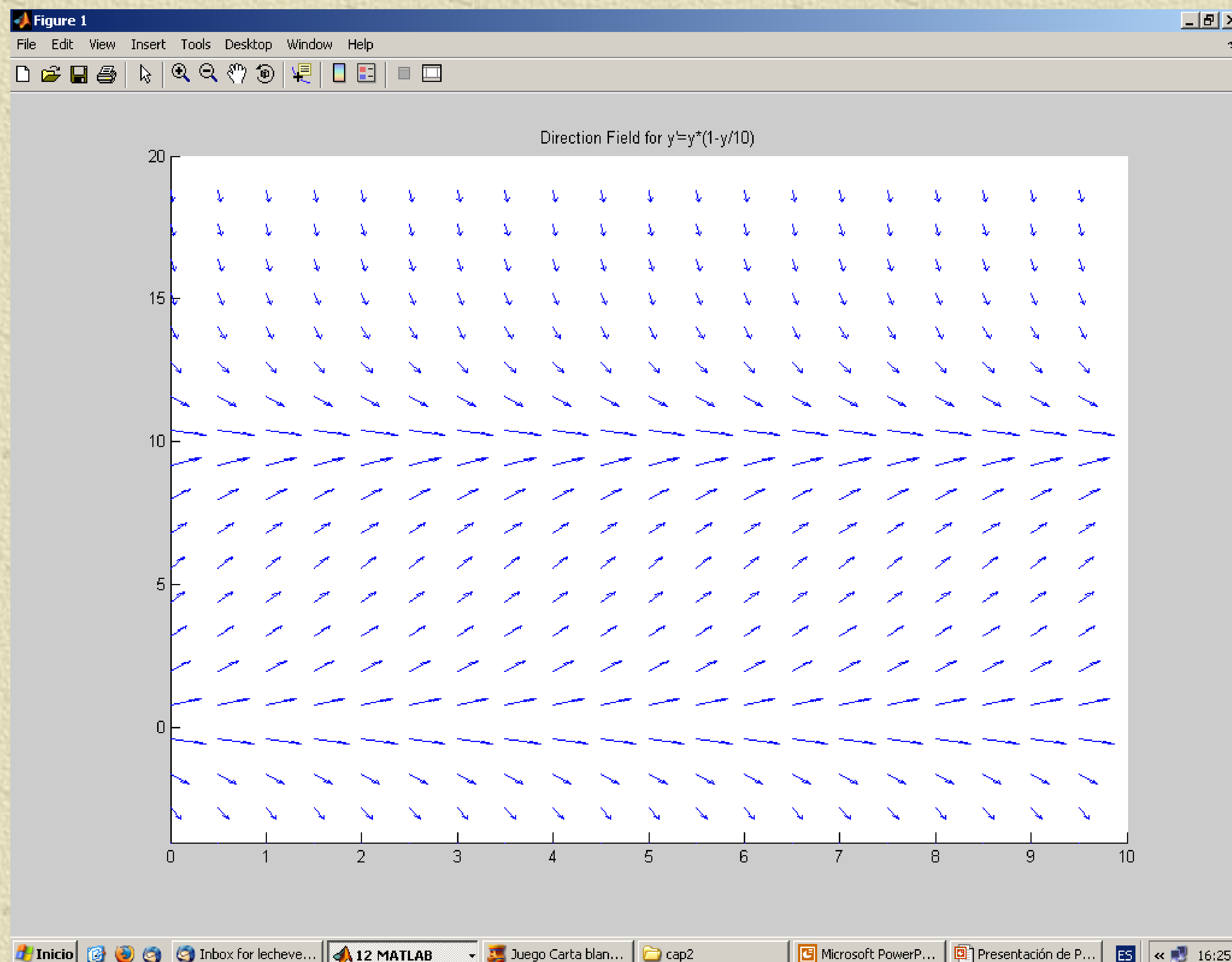


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Direction Field for y'=y*(1-y/10)
20
15
10
5
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Inicio
Inbox for lecheve...
12 MATLAB
Juego Carta blan...
cap2
Microsoft PowerP...
Presentación de P...
ES
16:25

Ecuación Logística: Soluciones de equilibrio

- Nuestra ecuación

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \quad r,\ K > 0$$

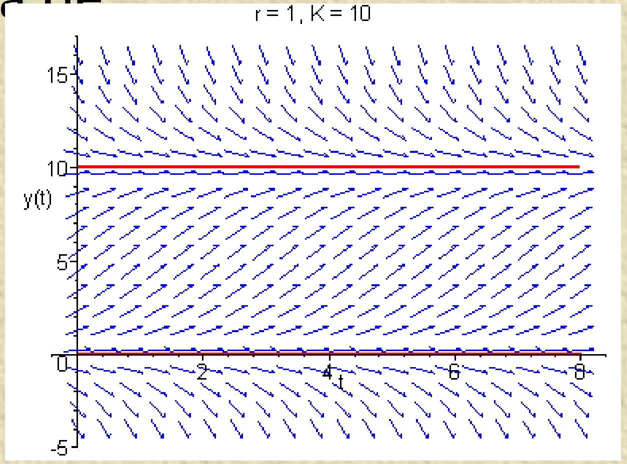
- Tiene dos soluciones de equilibrio:

$$y = \phi_1(t) = 0, \quad y = \phi_2(t) = K$$

- Miremos en el campo direccional, con r = 1, K = 10, el comportamiento de las soluciones cerca de :

  y = 0 es **inestable**,

  y = 10 es **asintóticamente estable**.



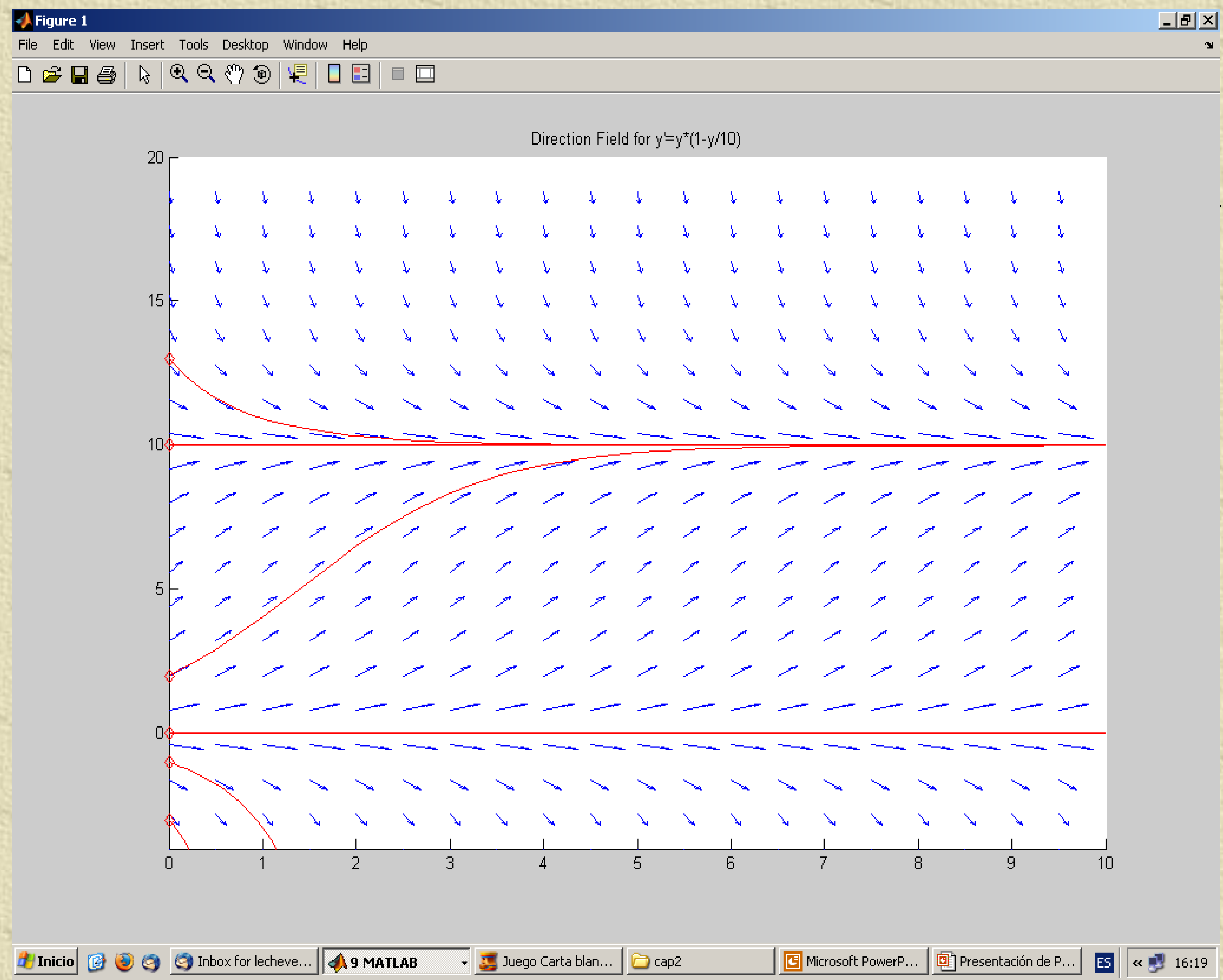


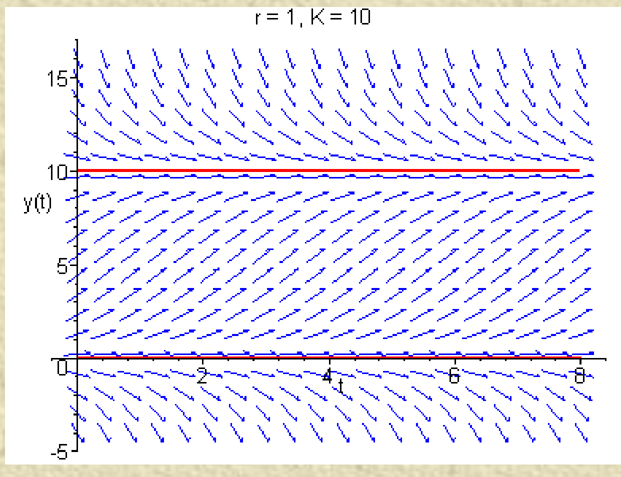
Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Direction Field for y'=y*(1-y/10)
20
15
10
5
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Inicio
Inbox for lecheve...
9 MATLAB
Juego Carta blan...
cap2
Microsoft PowerP...
Presentación de P...
ES
16:19

Ecuaciones Autónomas: Sol de equilibrio

- Las soluciones de equilibrio de una E.D. autónoma $y' = f(y)$ es simplemente resolver $f(y) = 0$.
- Las raíces de $f(y)$ se llaman **puntos críticos** .
- Por ejemplo, en la Logística los puntos críticos son

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$$

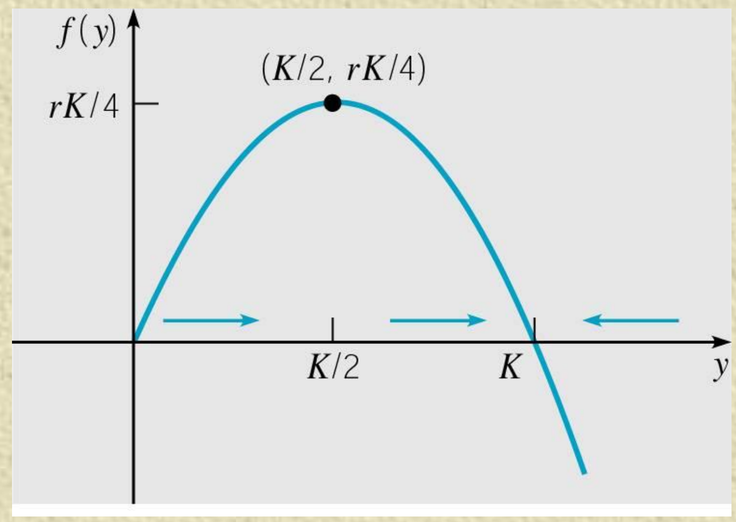
- $y = 0$ y $y = K$.
- Son funciones constantes en este caso



Ecuación Logística: Análisis cualitativo, gráficas(1 of 7)

- Para entender el comportamiento de los sistemas autónomos hagamos la gráfica de $f(y)$ vs. y.
- En la logística, caso muy fácil, basta pintar.

$$f(y) = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$$



Ecuación Logística : Puntos críticos (2 of 7)

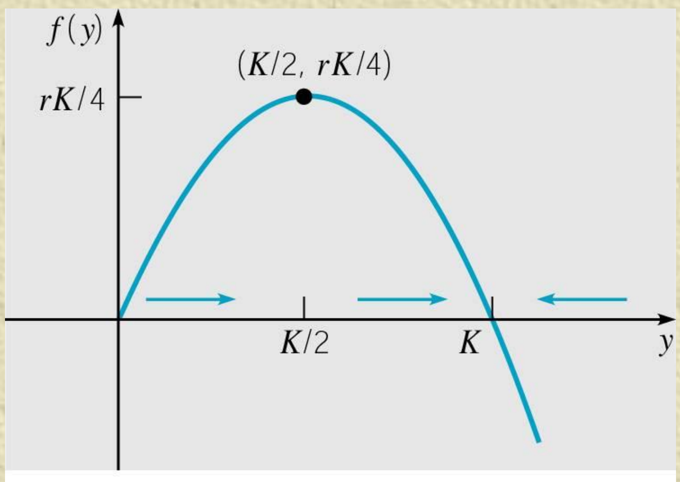
- Cortes de f con el eje y, $y = 0$ y $y = K$, son los puntos críticos de la ecuación logística.
- El vértice $(K/2, rK/4)$, como se ve.

$$f(y) = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$$

$$f'(y) = r\left[\left(-\frac{1}{K}\right)y + \left(1 - \frac{y}{K}\right)\right]$$

$$= -\frac{r}{K}\left[2y - K\right] \overset{set}{=} 0 \Rightarrow y = \frac{K}{2}$$

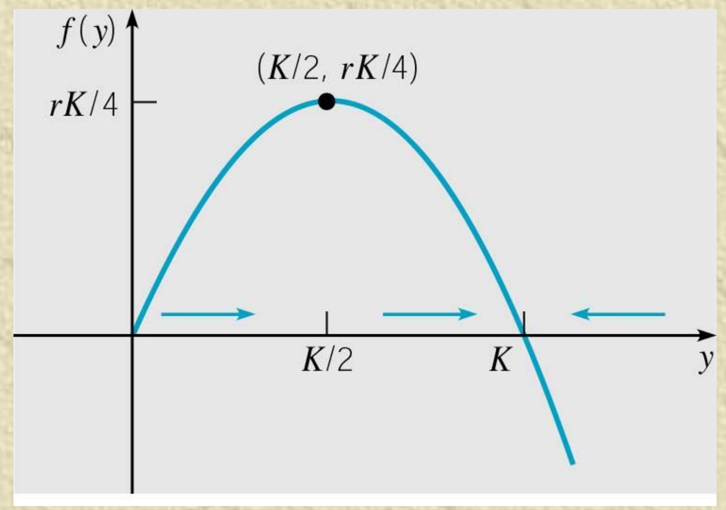
$$f\left(\frac{K}{2}\right) = r\left(1 - \frac{K}{2K}\right)\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{rK}{4}$$



Solución Logística : creciente y decreciente (3 of 7)

- Note que $dy/dt > 0$ for $0 < y < K$, y es creciente en t (como lo indican las flechas $0 < y < K$).
- Y, y es decreciente en t para $y > K$ (como lo indican las flechas sobre el eje y, $y > K$).
- En este caso el eje y se llama la **línea de fase**.

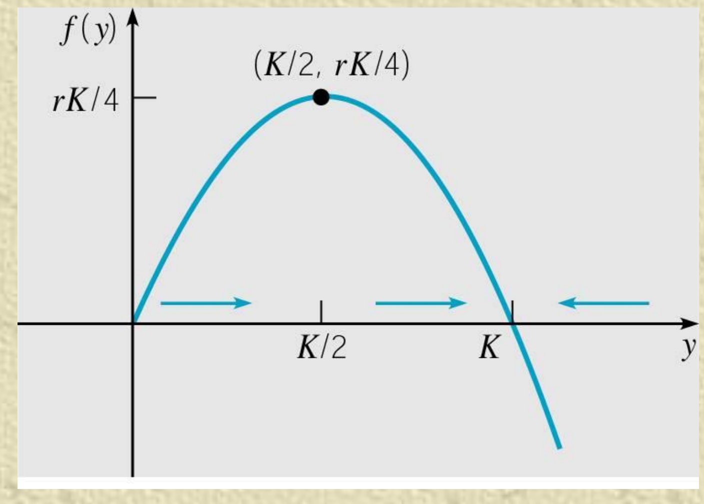
$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \quad r > 0$$

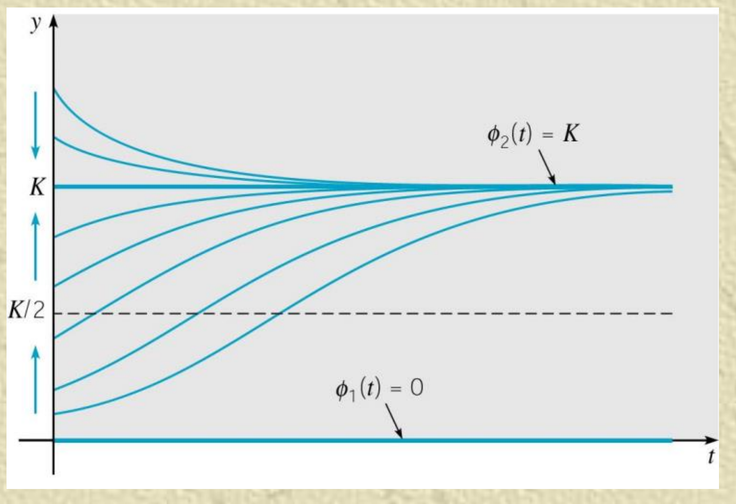


Solución Logística : pendientes, (4 of 7)

- $dy/dt \cong 0$ cuando $y \cong 0$ o $y \cong K$, entonces y es "plana" allí, y y se hace más pendiente si y se aleja de 0 o K.

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$$



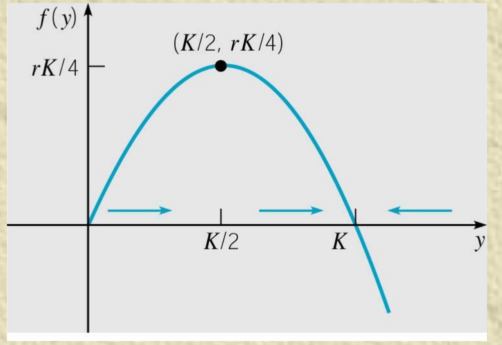


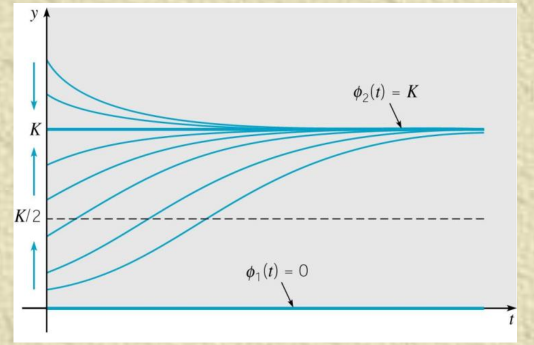
Solución Logística : Concavidad

- La concavidad de $y(t)$, la da y'':

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \;\Rightarrow\; \frac{d^2y}{dt^2} = f'(y)\frac{dy}{dt} = f'(y)\,f(y)$$

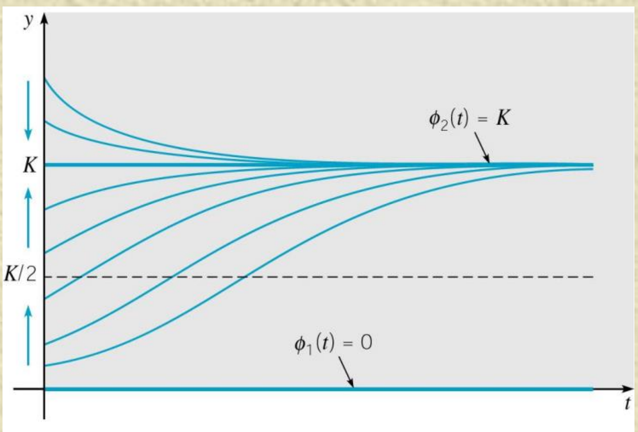
- La gráfica de y cóncava hacia arriba se f y f' tienen el mismo signo, es decir $0 < y < K/2$ y $y > K$.
- La gráfica de y es cóncava hacia abajo si f y f' tienen signos opuestos, es decir $K/2 < y < K$.
- Puntos de inflexión en el corte de y con $y = K/2$.





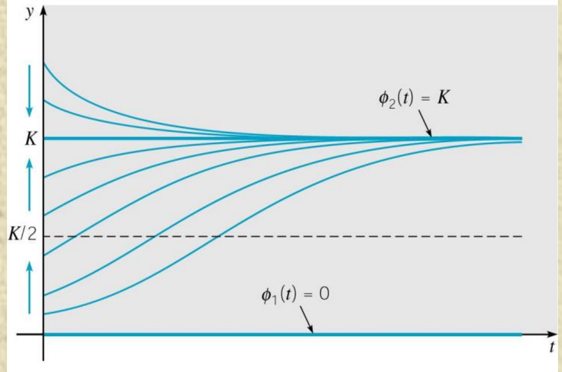
Solución Logística : Bosquejo de la gráfica (6 of 7)

- Resumiendo:
  - Cualquier solución y crece si $0 < y < K$.
  - Cualquier solución y decrece si $y > K$.
  - La pendiente de y esta cerca de cero si $y \cong 0$ or $y \cong K$.
  - Cualquier solución y cóncava hacia arriba $0 < y < K/2$ y $y > K$.
  - Cualquier solución y es cóncava hacia abajo si $K/2 < y < K$.
  - Punto de inflexión en $y = K/2$.
- Con esto se hace un bosquejo
- de todas las soluciones.



Solución Logística : Discusión (7 of 7)

- Sin resolver la ecuación tenemos **información cualitativa** de *y*.
- Por ejemplo sabemos dónde crece *y*, como cambia. También, *y* tiende a *y* = *K*, para *t* grande.
- *K* se conoce como **capacidad del nicho**, o **nivel de saturación**, en el caso de especies.
- La solución es muy diferente
- a la exponencial y el
- término no lineal es muy
- importante.



Solución analítica (1 of 3)

- Si $y \neq 0$ y $y \neq K$, la ecuación se escribe :

$$\frac{dy}{\left(1 - y/K\right)y} = r\,dt$$

- Usando fracciones parciales,

$$\frac{1}{\left(1 - y/K\right)y} = \frac{A}{1 - y/K} + \frac{B}{y} \quad \Rightarrow \; 1 = Ay + B\left(1 - y/K\right) \Rightarrow \; B = 1,\; A = 1/K$$

- La ecuación queda

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K}\right)dy = r\,dt$$

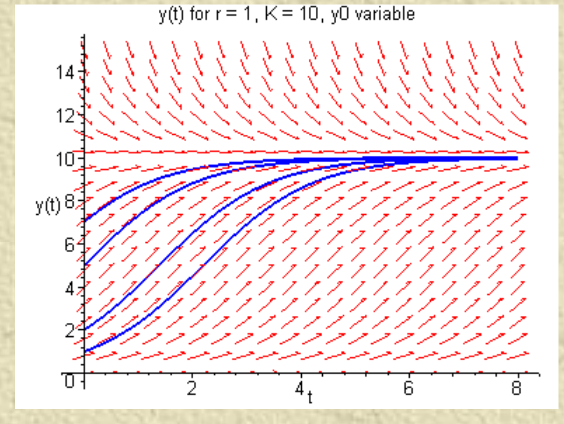
- Integrando, tenemos

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + C$$

Solución (2 of 3)

* Tenemos

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + C$$



* Si $0 < y_0 < K$, entonces $0 < y < K$ y

$$\ln y - \ln\left(1 - \frac{y}{K}\right) = rt + C$$

* Organizando con las propiedades del logaritmo, :

$$\ln\left[\frac{y}{1 - y/K}\right] = rt + C \iff \frac{y}{1 - y/K} = e^{rt+C} \iff \frac{y}{1 - y/K} = ce^{rt}$$

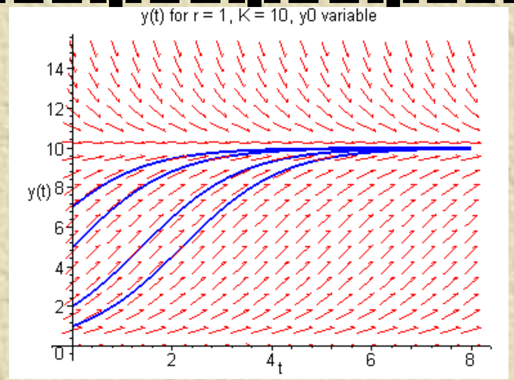
$$\text{or } \; y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}, \quad \text{con } y_0 = y(0)$$

Solución (3 of 3)

- Tenemos:

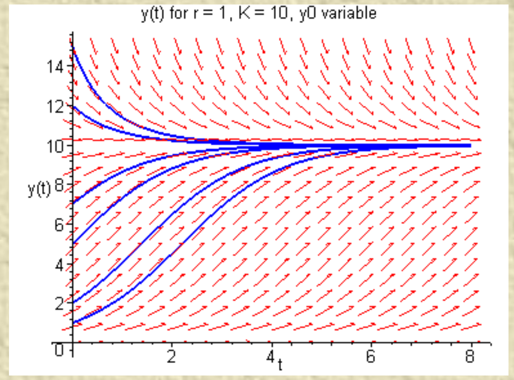
$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$

para $0 < y_0 < K$.



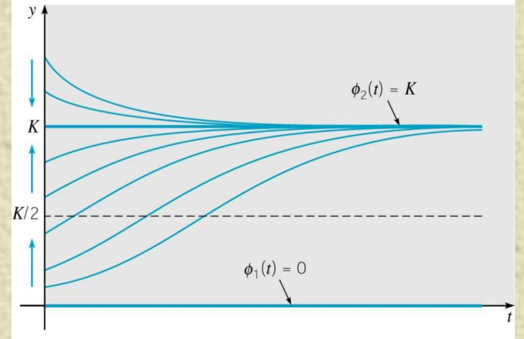
- Se puede demostrar que la solución es válida para $y_0 > K$. También contiene las soluciones de equilibrio $y = 0$ y $y = K$.
- La solución general es

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$



Comportamiento asintótico

- La solución de la EDO logística es



$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$

- Hallando el límite cuando t tiende a infinito:

$$\lim_{t\to\infty} y = \lim_{t\to\infty} \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{y_0 K}{y_0} = K$$

- Concluimos que la solución de equilibrio $y(t) = K$ es **asintóticamente estable**, mientras que $y(t) = 0$ es **inestable**.
- La única manera de que y este cerca de cero es $y_0 = 0$.

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$

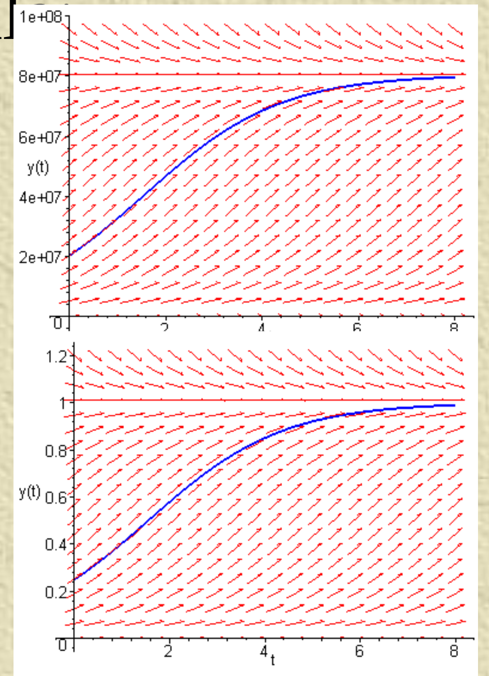
Ejemplo numérico: Peces(1 of 2)

- Sea y biomasa (en kg) de peces en el tiempo t, con r = 0.71/año y K = 80.5 x 10^6 kg. Si $y_0 = 0.25K$, Hallar

  (a) biomasa 2 años después

  (b) el tiempo τ tal que y(τ) = 0.75K.

(a) Por conveniencia, cambiando de escal



$$\frac{y}{K} = \frac{y_0/K}{y_0/K + (1 - y_0/K)e^{-rt}}$$

entonces

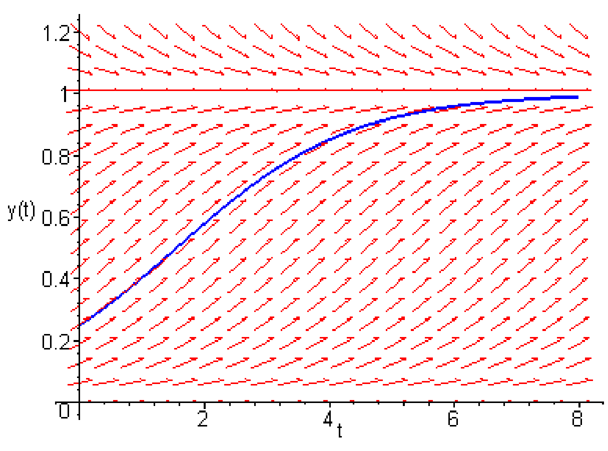
$$\frac{y(2)}{K} = \frac{0.25}{0.25 + 0.75e^{-(0.71)(2)}} \approx 0.5797$$

y

$$y(2) \approx 0.5797K \approx 46.7 \times 10^6 \text{ kg}$$

Ejemplo parte (b) (2 of 2)

(b) El tiempo τ tal que y(τ) = 0.75K.



$$\frac{y}{K} = \frac{y_0/K}{y_0/K + (1 - y_0/K)e^{-rt}}$$

$$0.75 = \frac{y_0/K}{y_0/K + (1 - y_0/K)e^{-r\tau}}$$

$$0.75\left[\frac{y_0}{K} + \left(1 - \frac{y_0}{K}\right)e^{-r\tau}\right] = \frac{y_0}{K}$$

$$0.75\, y_0/K + 0.75(1 - y_0/K)e^{-r\tau} = y_0/K$$

$$e^{-r\tau} = \frac{0.25 y_0/K}{0.75(1 - y_0/K)} = \frac{y_0/K}{3(1 - y_0/K)}$$

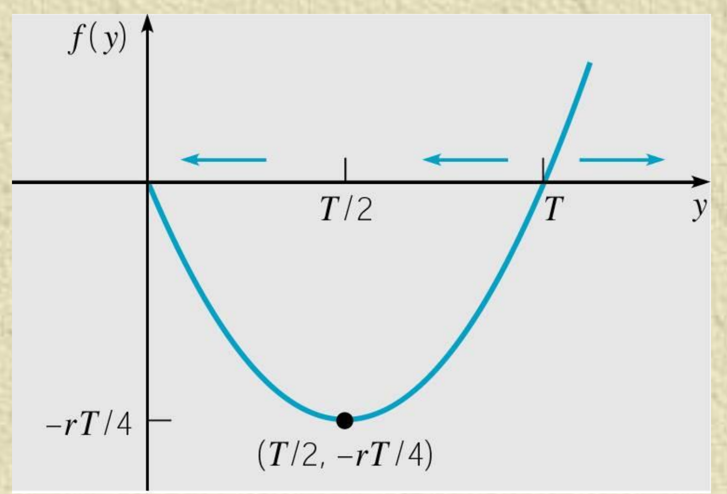
$$\tau = \frac{-1}{0.71}\ln\left(\frac{0.25}{3(0.75)}\right) \approx 3.095 \text{ años}$$

Modificación (1 of 2)

- Sea la EDO:

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{T}\right)y, \quad r > 0$$

- La gráfica de $f(y)$.



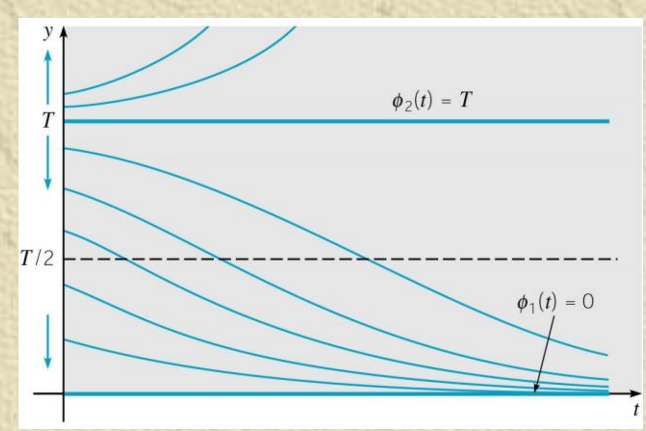
Análisis cualitativo (2 of 2)

- Haciendo el análisis similar tenemos.
- T es **valor límite** para y_0, la población desaparece o crece dependiendo del lado de T en que este y_0.

- La solución es

is $$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{T}\right)y, \quad r > 0$$

$$y = \frac{y_0 T}{y_0 + (T - y_0)e^{rt}}$$

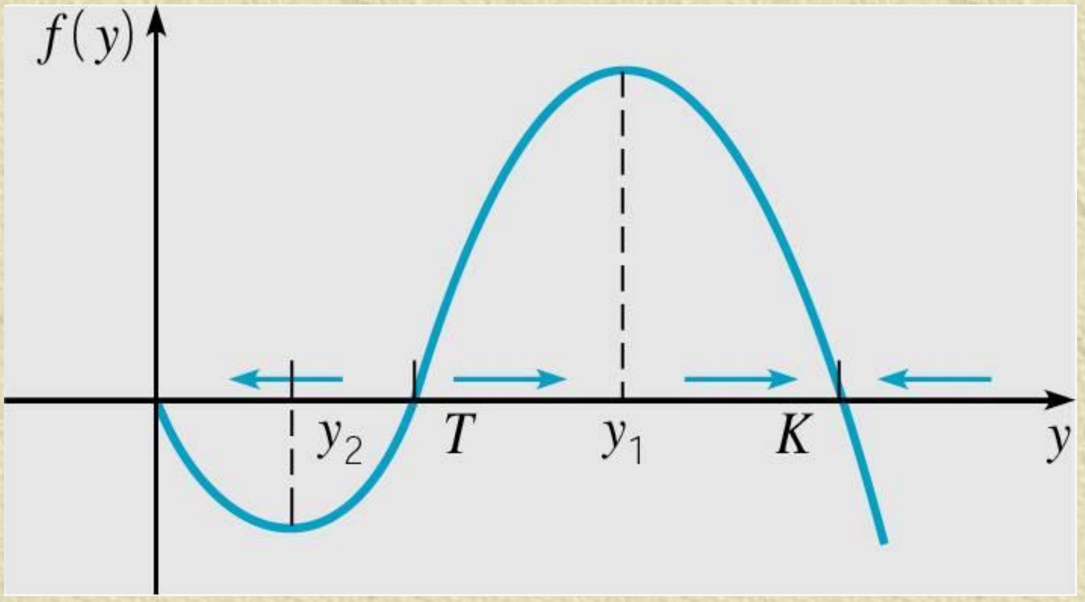


Segunda modificación (1 of 2)

- Otra modificación es:

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1-\frac{y}{T}\right)\left(1-\frac{y}{K}\right)y, \quad r > 0 \text{ and } 0 < T < K$$

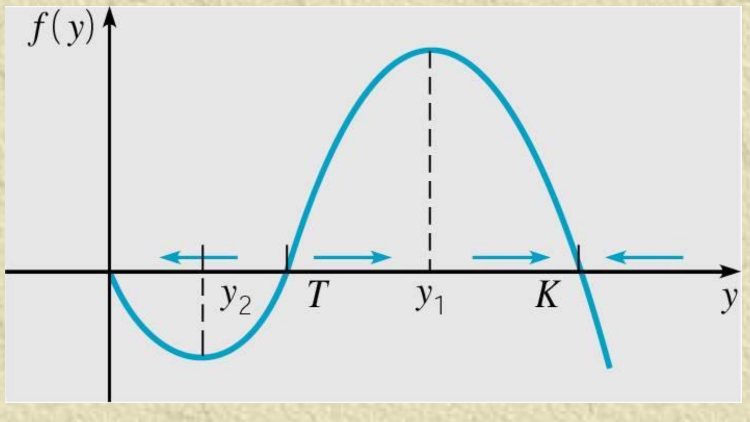
- La gráfica de $f(y)$ es.

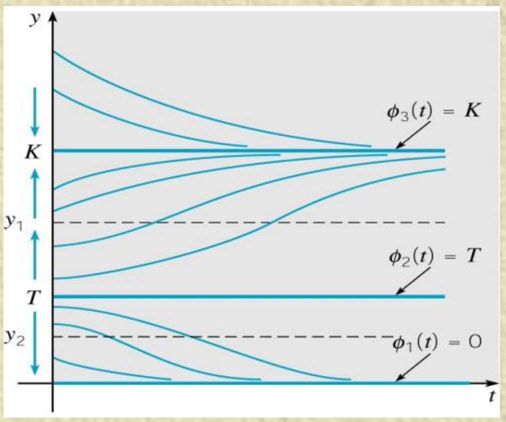


Análisis (2 of 2)

- Haciendo un análisis cualitativo.
- T valor límite de y_0, por debajo desaparece por arriba crece hacia K.
- K capacidad del nicho.
- Note que : $y = 0$ y $y = K$ soluciones de equilibrio estables,

  y $y = T$ es inestable.





Ejercicios

- Para cada ecuación de la forma $y' = f(y)$
- Gráfica de f versus y. Puntos de equilibrio. Clasifíquelos según su estabilidad. Dibuje la línea de fase y el bosquejo de varias soluciones
- 1) $\frac{dy}{dt} = ay + by^2, a > 0, b > 0, y_0 > 0$
- 2) dy/dt $= y(1 - y)(2 - y), y_0 \geq 0$
- 3) $\frac{dy}{dt} = y(1 - y^2)$

Bibliografía

W.E. Boyce, R.C. DiPrima, “Elemtary Differential Equations and Boundary Value Problems”. Willey, 8e ed.

http://jwsedcv.wiley.com/college/bcs/redesign/instructor/0,,_047143339X_BKS_1873_____,00.html