Valores propios complejos

29 de marzo 2022

Luz Myriam Echeverry N

Considere el sistema $\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}$

- Si los coeficientes de la matriz A son constantes tenemos que resolver
  - $e^{rt}(A - Ir)\vec{\xi} = 0$
- para tener una solución
  - $\vec{x}(t) = \vec{\xi}e^{rt}$
- Para tener una solución no nula necesitamos que r sea un valor propio y $\vec{\xi}$ el vector propio asociado, pero el polinomio característico puede tener raíces complejas, en ese caso las raíces complejas vienen por pares conjugados, el polinomio tiene coeficientes reales. Las raíces serían
  - $r_1 = \lambda + i\mu,\ r_2 = \lambda - i\mu$
- Los vectores propios también son conjugados

- Si la pareja $r_1, \overrightarrow{\xi_1}$ son valor y vector propio asociado, el otro valor propio es $r_2 = \overline{r_1}$ entonces
- $(A - Ir_1)\overrightarrow{\xi_1} = 0$, el conjugado es $\overline{(A - Ir_1)\overrightarrow{\xi_1}} = 0$ pero A tiene coeficientes reales, $\bar{A} = A, \bar{I} = I, \overline{r_1} = r_2$

  - $\overline{(A - Ir_1)\overrightarrow{\xi_1}} = 0 \leftrightarrow (A - r_2 I)\overrightarrow{\overline{\xi_1}} = 0$
  - $\overrightarrow{\xi_2} = \overrightarrow{\overline{\xi_1}}$

- Las dos soluciones son
  - $\overrightarrow{x^{(1)}}(t) = \overrightarrow{\xi_1} e^{r_1 t}$ y $\overrightarrow{x^{(2)}}(t) = \overrightarrow{\overline{\xi_1}} e^{\bar{r}_1 t}$
- Pero son funciones complejas, igual que en el caso de ecuaciones de segundo orden, tomamos la parte real de una solución y la parte imaginaria nos da la otra solución

- Veamos, si , $\overrightarrow{\xi_1}=\vec{a}+i\vec{b}$, con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores reales entonces
  - $\vec{x}^{(1)}(t)=\overrightarrow{\xi_1}e^{r_1 t}=\left(\vec{a}+i\vec{b}\right)e^{(\lambda+i\mu)t}$
  - $=\left(\vec{a}+i\vec{b}\right)e^{(\lambda)t}(\cos\mu t+i sen\,\mu t)$
  - $=e^{\lambda t}[\left(\vec{a}\cos\mu t-\vec{b} sen\,\mu t\right)+i\left(\vec{b}\cos\mu t+\vec{a} sen\,\mu t\right)]$
- Separando en parte real y parte imaginaria
  - $\vec{u}(t)=e^{\lambda t}\left(\vec{a}\cos\mu t-\vec{b} sen\,\mu t\right)$
  - $\vec{v}(t)=e^{\lambda t}\left(\vec{a} sen\,\mu t+\vec{b}\cos\mu t\right)$
- Cada par conjugado de valore propios diferentes nos dan dos soluciones linealmente independientes, se podría calcular el wronskiano, es dispendioso, un mejor método es el presentado en el problema 27 sección 7.6 del texto

Ejemplo $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$

- Polinomio característico
  - $r^2 - 4r + 8 = 0 \to r = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = 2 \pm 2i$
- Vector asociado a $2 + 2i$
- $\begin{pmatrix} 1-2-2i & -1 \\ 5 & 3-2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-2i & -1 \\ 5 & 1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Tenemos $5\mathrm{z} + \mathrm{w}(1 - 2\mathrm{i}) = 0 \leftrightarrow w = -5z/(1-2i)$
  - $w = -5z \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} = -z(1+2i)$
- El vector propio, tomado $z = -1, w = (1 + 2i)$ queda
- $\overrightarrow{\xi_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

- La solución compleja
  - $\vec{x} = (\vec{a} + i\vec{b})\, e^{(\lambda)t}(\cos \mu t + isen\ \mu t)$
- $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{2t}\,(\cos 2t + isen\ 2t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos 2t - isen\ 2t \\ (1+2i)\,(\cos 2t + isen\ 2t) \end{pmatrix}$

- Separando parte real y parte imaginaria
  - $\vec{x} = e^{2t}\begin{bmatrix} -\cos 2t - isen\ 2t \\ \cos 2\,t - 2sen\ 2t + i(2\cos 2t + sen2t\,) \end{bmatrix}$
  - $= e^{2t}\left[\begin{pmatrix} -\cos 2t \\ \cos 2t\ - 2sen\ 2t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -sen2t \\ (2\cos 2t + sen2t\,) \end{pmatrix}\right]$
- $\overrightarrow{x^{(1)}}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos 2t \\ \cos 2t\ - 2sen\ 2t \end{pmatrix}, \overrightarrow{x^{(2)}}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -sen2t \\ (2\cos 2t + sen2t\,) \end{pmatrix}$

Oscilador armónico

- Resolver
  - $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$
- Polinomio $r^2 + 1 = 0$, raíces $r = \pm i$
- Vector propio
  - $\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow z + iw = 0 \leftrightarrow z = -iw \rightarrow \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$
- La solución compleja, $e^{it} = \cos t + i\, sen\, t$
  - $\vec{x} = (\cos t + i\, sen\, t) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -icos\, t + sen\, t \\ \cos t + isen\, t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\, t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\cos t \\ sen\, t \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{x^{(1)}}(t) = \begin{pmatrix} sen\, t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x^{(2)}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ sen\, t \end{pmatrix}$

Ejercicios: Hallar la solución general del sistema y describir el comportamiento cuando t va a infinito, hacer algunas gráficas

- 1) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$
- 2) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$
- 3) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$
- 4) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$
- 5) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$
- https://stage.geogebra.org/m/utcMvuUy

Bibliografia

- https://stage.geogebra.org/m/utcMvuUy
- W.Boyce, R. DiPrima, “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems” 8Ed