Problema de valor en la frontera

19/04/2022

Luz Myriam Echeverry N

Sea $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), t \in [\alpha, \beta]$y las condiciones $y(\alpha) = y_0, y(\beta) = y_1$

- El dominio $[\alpha, \beta]$, un intervalo cerrado y el cambio con respecto al problema de valor inicial, $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0'$ es que damos el valor en la frontera del intervalo, los extremos.
- El dato interesante es que al tener un problema de valor en frontera el comportamiento se las soluciones cambia radicalmente, vamos a ver unos ejemplos de este caso.

Ejemplo 1 resolver $y'' + 2y = 0, y(0) = 1, y(\pi) = 0$

- La ecuación tiene polinomio característico
  - $r^2 + 2 = 0, r = \pm i\sqrt{2}$
  - $y(t) = c_1 sen\,\sqrt{2}t + c_2 cos\sqrt{2}t$
- Condiciones de frontera
  - $y(0) = c_2 cos\sqrt{2} \times 0 = c_2 = 1$
  - $y(\pi) = \cos\sqrt{2} \times \pi + c_1 sen\sqrt{2} \times \pi = 0 \rightarrow c_1 = -\cot\sqrt{2}\pi \cong -0{,}2762$
  - Condición de frontera no homogénea y tenemos solución única.
  - $y(t) = -\cot\sqrt{2}\pi sen\sqrt{2}t + \cos\sqrt{2}t$

Ejemplo 2 $y'' + y = 0, y(0) = 1, y(\pi) = a$

- La solución general
  - $y(x) = c_1 \cos x + c_2 sen\ x$
- La primera condición $y(0) = 1 \rightarrow c_1 = 1$
- La otra condición $y(\pi) = a \rightarrow \cos(\pi) + c_2 sen\ (\pi) = -1 = a$!!
- Las dos condiciones son incompatibles a menos que $a = -1$
- Si $a = -1$, hay infinitas soluciones $y(x) = \cos x + c_2 sen\ x$
- Si $a \neq -1$, no hay solución
- La condición de frontera no homogénea puede tener infinitas soluciones o no tener solución

Ejemplo 3 $y'' + y = 0, y(0) = 0, y(\pi) = 0$ ecuación homogénea y condiciones homogéneas

- La solución general
  - $y(x) = c_1 \cos x + c_2 sen\, x$
- La primera condición $y(0) = 0 = c_1$
- La segunda condición $y(\pi) = 0 = c_2 sen\, \pi$
- Se cumple para cualquier valor de c_2!
- Tiene infinitas soluciones.

Valores y vectores propios

- Recordemos
- λ es un valor propio de la matriz A si existe un vector no nulo, $\vec{v}$, tal que
    - $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
- Si consideramos el operador $D^2 : C^2([0,\pi]) \to C([0,\pi])$, es un operador lineal
    - $D^2y + \lambda y = 0, y(0) = y(\pi) = 0$
        - Por facilidad $\lambda = \mu^2$. La solución general, polinomio $r^2 + \mu^2 = 0$
- tenemos la solución general
    - $y(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 sen\, \mu x.$
- La condición de frontera $y(0) = 0,$ implica $c_1 = 0$ pero la condición $y(\pi) = 0$
- queda $c_2 sen\, \mu\pi = 0$ que se cumple si $\mu = n, n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

- $c_2 sen\ \mu\pi = 0$ que se cumple si $\mu = n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- El problema
    - $D^2 y + \lambda y = 0, y(0) = y(\pi) = 0$
- Tiene soluciones no nulas para $\lambda = n^2$
- Tenemos valore propios:
- $\lambda = 1{,}4{,}9{,}16\ldots.$
- “vectores propios” o funciones propias
- $sen\ x, sen\ 2x, sen\ 3x, \ldots.$
- Igual que en algebra lineal un múltiplo del vector propio también es vector propio

- Para estudiar todos los casos
  - $\lambda < 0, \lambda = -\mu^2$
  - $D^2y - \mu^2 y = 0, y(0) = y(\pi) = 0$
- El polinomio característico
  - $r^2 - \mu^2 = 0, r = \pm\mu$
- La solución general, $y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$ Pero tambien
  - $y(x) = c_1 senh\, \mu x + c_2 \cosh \mu x$
- Queda $y(0) = 0 = c_2 \cosh(0) = c_2$ y $y(\pi) = c_1 senh(\pi) = 0$
- implica que $c_1 = 0$.
- La única solución es $y \equiv 0$

- Falta
  - $\lambda = 0$
  - $y'' = 0 \rightarrow y = c_1 x + c_2$
- Aplicando las condicione de frontera
- $y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$ y $y(\pi) = 0 \rightarrow c_1\pi = 0 \rightarrow c_1 = 0$
- Otra vez la única solución es
  - $y \equiv 0$
- Los únicos valores propios son
  - $\lambda =$ 1,4,9,16….

Ejercicios

Encuentre los valores propios y las funciones propias

1) $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y'(\pi) = 0$

2) $y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y'(\pi) = 0$

3) $y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y(\pi) = 0$

4) $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(L) = 0$, L>0

$y_1 = e^{\mu x}, y_2\ e^{-\mu x},\ w_1 = \frac{e^{\mu x}+e^{-\mu x}}{2} = \cosh \mu x, w_2 = \frac{e^{\mu x}-e^{-\mu x}}{2}$=$senh\ \mu x$

Conjunto fundamental de soluciones $\{y_1 . y_2\}, \{w_1, w_2\}$

1) $\begin{vmatrix} \cosh \mu x & senh\ \mu x \\ \mu senh\ \mu x & \mu cosh \mu x \end{vmatrix}$=$\mu(\cosh^2 \mu x - senh^2 \mu x) = \mu \neq 0$

Bibliografia

- W.Boyce, R. DiPrima, “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems” 8Ed