David Santiago Flórez Alsina

Halle la olución general de la siguiente ecuación diferencial si se sabe que las funciones $y_1 = \cos(\ln t)$ $y_2 = \text{sen}(\ln t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencia homogénea asociada en $(0, \infty)$.

$t^2y'' + ty' + y = \sec(\ln t)$

$$y = U_1 \cos(\ln(t)) + U_2 \operatorname{sen}(\ln(t))$$

Por método Sabemos:

- $U_1' y_1 + U_2' y_2 = 0$
- $U_1' y_1' + U_2' y_2' = g(t)$

$$y_1 = \cos(\ln(t))$$
$$y_1' = -\frac{\sin(\ln(t))}{t}$$
$$y_2 = \operatorname{sen}(\ln(t))$$
$$y_2' = \frac{\cos(\ln(t))}{t}$$

Para solucionar calculemos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{bmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{bmatrix}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\ln(t)) & \sin(\ln(t)) \\ -\frac{\sin(\ln(t))}{t} & \frac{\cos(\ln(t))}{t} \end{vmatrix} = \frac{\cos^2(\ln(t))}{t} + \frac{\sin^2(\ln(t))}{t}$$

$$= \frac{1}{t}\left(\cancel{\cos^2(\ln(t)) + \sin^2(\ln(t))}^{1}\right)$$

$$= \frac{1}{t}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{t^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{\cos(\ln(t))}{t} & -\sin(\ln(t)) \\ \frac{\sin(\ln(t))}{t} & \cos(\ln(t)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\ln(t)) & -t\sin(\ln(t)) \\ \sin(\ln(t)) & t\cos(\ln(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sec(\ln(t)) \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\ln(t)) & -t\sin(\ln(t)) \\ \sin(\ln(t)) & t\cos(\ln(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sec(\ln(t)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -t\sin(\ln(t))\sec(\ln(t)) \\ t\cos(\ln(t))\sec(\ln(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t\tan(\ln(t)) \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix}$$

$$\int U_1' = \int -t \cdot \tan(\ln(t))\, dt = \quad = U_1$$

$$\int U_2' = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} = U_2$$

$$y(t) = U_1 \cos(\ln(t)) + \frac{t^2}{2} \operatorname{sen}(\ln(t))$$

2) Halle la solución general de $y'' - 6y' + 9y = (1-t)e^{2t}$

$$y'' - 6y' + 9y = (1-t)e^{2t} = e^{2t} - te^{2t}$$

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$(r-3)(r-3)$, las raíces son $r_1 = r_2 = 3$

$$y_h = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$$

Por principio de superposición

$$y_{p_1} = Ae^{2t} \qquad y_{p_2} = -Ate^{2t}$$

$$y_{p_1}' = 2Ae^{2t} \qquad y_{p_1}'' = 4Ae^{2t}$$

$$y'' - 6y' + 9y = e^{2t}$$

$$(4Ae^{2t}) - 6(2Ae^{2t}) + 9(Ae^{2t})$$

$$\cancel{e^{2t}}(4A - 12A + 9) = \cancel{e^{2t}}$$

$$A_{p_1} = 1$$

$$y_{p_2}' = -2Ate^{2t} - Ae^{2t}, \quad y_{p_2}'' = -2Ae^{2t} - 4Ate^{2t} - 2Ae^{2t} = -4Ae^{2t} - 4Ate^{2t}$$

$$y'' - 6y' + 9y = -te^{2t}$$

$$(-4Ae^{2t} - 4Ate^{2t}) - 6(-2Ate^{2t} - Ae^{2t}) + 9(-Ate^{2t})$$

$$e^{2t}(-4A - 4At + 12At + 6A - 9At)$$

$$\cancel{e^{2t}}(2A - At) = -t\cancel{e^{2t}}$$

$$A(2-t) = -t$$

$$A_{p_2} = \frac{-t}{2-t}$$

3)

Sea

$y(t) = c_1 e^{-2t}\cos(3t) + c_2 e^{-2t}\text{sen}(3t), \quad c_1, c_2 \in IR$

a) Halle una ecuación diferencial para la cual y sea su solución general.

b) Calcule c_1, c_2 tales que la solución cumple la condición inicial $y(0) = -2, \quad y'(0) = 7$

a) Al ver y sabemos que tiene la forma de una solución de raíces complejas

$$r = -2 \pm 3i$$

$$(r - (-2+3i))(r - (-2-3i))$$

$$= r^2 + 4r + 13$$

la ecuación diferencial es: $y'' + 4y' + 13y = 0$

b) calcule c_1 y c_2 dado $y(0) = -2$, $y'(0) = 7$

Con $C_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{W}$, $C_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{W}$

Calculemos W, sabemos que $W(y_1, y_2)$ para un caso de raíces complejas es:

$$W(y_1, y_2) = \lambda e^{2\mu t} = 3e^{-4t}$$

$y_1 = e^{-2t}\cos(3t)$

$y_1' = -2e^{-t}\cos(3t) - 3e^{-2t}\sin(3t)$

$y_2 = e^{-2t}\sin(3t)$

$y_2' = -2e^{-2t}\sin(3t) + 3e^{-2t}\cos(3t)$

Ahora

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{W} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{3e^{-4}} = \frac{-6-0}{3e^{-4}}$$

$$C_1 = -2e^4$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{W} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{3e^{-4}} = \frac{7-4}{3e^{-4}}$$

$$C_2 = e^4$$

4)

Sean $y_1,\ y_2$ soluciones linealmente independientes de
$t^2y'' + 3y' + (3-t^2)e^{-t}y = 0.$
Si el Wronskiano, $W(y_1, y_2)(3) = 4$, calcule el valor de $W(y_1, y_2)(1)$

$$t^2 y'' + 3y' + (3-t^2)e^{-t}y = 0$$

$$y'' + \frac{3}{t^2}y' + \frac{(3-t^2)}{t^2}e^{-t}y = 0$$

Por teorema de abel:

$$\begin{aligned} W(y_1,y_2) &= C\cdot \exp\left(-\int p(t)\,dt\right) \\ &= C \exp\left(-\int \frac{3}{t^2}\,dt\right) \\ &= C \exp\left(-3\left(-\frac{1}{t}\right)\right) \\ &= C e^{\frac{3}{t}} \end{aligned}$$

Sabemos $W(y_1,y_2)(3) = 4 = C e^{\frac{3}{3}}$

$$\frac{4}{e} = C$$

$$4e^{-1} = C$$

entonces $W(y_1,y_2)(1) = (4e^{-1})\, e^{\frac{3}{1}}$

$$= 4e^{3-1}$$

$$= 4e^2$$