# Parcial 1 — AED.

(1.) $A^{1/2} = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\lambda_i} \cdot e_i \cdot e_i' = P \cdot \Lambda^{1/2} \cdot P'$, con $PP' = P'P = I$.

a. $A^{1/2} \cdot A^{1/2} = A$

Demostración: Sean $A$, $P$ matrices con $P$ una matriz ortogonal. Por definición, $A^{1/2} = P \cdot \Lambda^{1/2} \cdot P'$. Donde $\Lambda$ es una matriz diagonal con $\lambda_i$ como el i-esimo elemento diagonal, con $\lambda_i$, $e_i$ como los autovalores y autovectores normalizados asociados a $A$.

Considere $A^{1/2} \cdot A^{1/2} = (P \Lambda^{1/2} P')(P \cdot \Lambda^{1/2} \cdot P')$

por asociatividad $A^{1/2} \cdot A^{1/2} = P \Lambda^{1/2} (P' \cdot P) \Lambda^{1/2} \cdot P$

luego $A^{1/2} \cdot A^{1/2} = P \Lambda^{1/2} \cdot \Lambda^{1/2} \cdot P'$

Como $\Lambda^{1/2}$ es una matriz diagonal con $\sqrt{\lambda_i}$ en sus entradas de la diagonal, por propiedades de matrices:

$$\Lambda^{1/2} \cdot \Lambda^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} \cdot \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_m} \cdot \sqrt{\lambda_m} \end{pmatrix}$$

Como $\lambda_i \in \mathbb{R}$, entonces $\sqrt{\lambda_i} \cdot \sqrt{\lambda_i} = \lambda_i$ luego,

$$\Lambda^{1/2} \cdot \Lambda^{1/2} = \Lambda$$

Entonces, $A^{1/2} \cdot A^{1/2} = P \cdot \Lambda \cdot P'$

por definición $A^{1/2} \cdot A^{1/2} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i e_i' = A$.

Como $A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i e_i'$ por su descomposición espectral,

Entonces $A^{1/2} \cdot A^{1/2} = A$. $\square$

b. $(A^{1/2})^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i e_i' = P . \Lambda^{-1/2} . P'$

Demostración: por definición tenemos que:

$$A^{1/2} = P . \Lambda^{1/2} . P'$$

luego, $(A^{1/2})^{-1} = (P . \Lambda^{1/2} . P')^{-1}$

$(A^{1/2})^{-1} = (P')^{-1} (\Lambda^{1/2})^{-1} (P)^{-1}$ por propiedades de la inversa de matrices.

Como $P . P' = P' . P = I$, entonces.

$$(A^{1/2})^{-1} = P . (\Lambda^{1/2})^{-1} . P'$$

Como $\Lambda^{1/2}$ es una matriz diagonal, su matriz inversa es invertir cada elemento de la diagonal.

$$(\Lambda^{1/2})^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_k} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/\sqrt{\lambda_k} \end{pmatrix} = \Lambda^{-1/2}$$

Con $\lambda_i$ los autovalores de A

luego $(A^{1/2})^{-1} = P . \Lambda^{-1/2} . P'$

por definición $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i e_i' = P . \Lambda^{-1/2} . P'$

por lo tanto, $(A^{1/2})^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i . e_i' = P . \Lambda^{-1/2} . P'$ $\square$

(2) Sea $X \sim N_3(\mu, \Sigma)$ $\quad \mu = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Distribución de $X_1$ dado que $X_2 = x_2$ y $X_3 = x_3$

Tenemos $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \hline x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad \mu_1 = 1$ $\quad \Sigma_{11} = 4$ $\quad \Sigma_{1(2,3)} = (0, -1)$

$\mu_{(2,3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \Sigma_{(2,3)1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \Sigma_{(2,3)(2,3)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\text{Med} &= \mu_1 + \Sigma_{1(2,3)} \Sigma_{(2,3)(2,3)}^{-1} (X_{(2,3)} - \mu_{(2,3)}) \\
&= 1 + (0, -1) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \left( \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\
&= 1 + (0, -1) \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 + 1 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix} \\
&= 1 + (0, -1/2) \begin{pmatrix} x_2 + 1 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix} = 1 + 1 - \frac{x_3}{2} = 2 - \frac{x_3}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{cov} &= \Sigma_{11} - \Sigma_{1(2,3)} \cdot \Sigma_{(2,3)(2,3)}^{-1} \cdot \Sigma_{(2,3)1} \\
&= 4 - (0, -1) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= 4 - (0, -1) \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= 4 - (0, -1/2) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

Distribución condicional de $X_1$ dado $X_2 = x_2$ y $X_3 = x_3$ $\sim N(\text{Med}, \text{cov})$

③ Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra. $N_2(\mu, \Sigma)$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_0: 2\mu_1 - \mu_2 = 0.2$
$H_a: 2\mu_1 - \mu_2 \neq 0.2$

$$(2,-1)\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = 2\mu_1 - \mu_2$$

$n = 100 \qquad \alpha = 0.05 \qquad a' = (2,-1) \qquad p = 1$

Estadístico de prueba $\longrightarrow$ $T^2 = n(a'\bar{x} - \mu_0)(a'Sa)^{-1}(a'\bar{x} - \mu_0)$

$$T^2 = 100\left((2,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0.2\right)\left((2,-1)\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)^{-1}\left((2,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0.2\right)$$

$$T^2 = 100(0-0.2)(4)^{-1}(0-0.2)$$

$$T^2 = 100(-0.2)\left(\frac{1}{4}\right)(-0.2) = 25(0.04) = 1.$$

Sabemos que el valor crítico $\sim \dfrac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)$

luego valor crítico $\sim \dfrac{99}{99} F_{1,99}(0.05) = 3.937117$

Como $1 \leq 3.937117$, entonces Acepto $H_0$.

````r
alpha = 0.05
x = as.matrix(dat)
n = nrow(x)
p = ncol(x)

x_media = t(matrix(1,ncol = n) %*% x)/n

d = x - matrix(1, nrow = n) %*% t(x_media)
s = (1/(n-1))*t(d)%*%d

c = ((n-1)*p)/(n-p)

v_critico = c*qf(1-alpha, p, (n-p))

for (i in 1:p){
  a = x_media[i,1] - sqrt(v_critico)*sqrt(s[i,i]/n)
  b = x_media[i,1] + sqrt(v_critico)*sqrt(s[i,i]/n)

  I = c(a,b)
  print(I)
}



```
````

```
bill_length_mm bill_length_mm
      46.75334       48.38279
bill_depth_mm bill_depth_mm
     14.73801      15.25526
flipper_length_mm flipper_length_mm
         215.5080          218.9626
```
```

```
### Solución del punto B)
```{r}

s_inversa = solve(s)

mu0 = c(48.1,15.1,217.9)

(t2 = n*t(x_media - mu0) %*% s_inversa %*% (x_media-mu0))
print(t2)

cc = ((n-1)*p)/(n-p)

vv_critico = cc*qf(1-alpha, p, (n-p))
vv_critico





```
```

```
         [,1]
[1,] 3.525144
         [,1]
[1,] 3.525144
[1] 8.187194
```