Sistemas de ecuaciones diferenciales

24 de marzo 2022

Luz Myriam Echeverry N

Ejemplo 1 sistema masa resorte

En el sistema masa resorte, caso particular del oscilador armónico, tenemos

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\gamma\frac{dy}{dt}+ky=0\ (1)$$

Esta ecuación se puede presentar de la siguiente manera

$$\frac{dy}{dt}=v$$

La velocidad la consideramos como otra variable, entonces podemos ver que de la ecuación (1)

$$\frac{dv}{dt}=y''=-\frac{\gamma}{m}v-\frac{k}{m}y$$

Queda

$$\frac{dy}{dt}=v$$

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}y-\frac{\gamma}{m}v$$

- Tenemos un sistema lineal

$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}y - \frac{\gamma}{m}v$$

- Que matricialmente se presenta
  - $$\begin{bmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \dot{\vec{y}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\gamma/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$$
- Es decir
  - $$\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$$
- La matriz es de coeficientes constantes.

En general

- El caso de dimensión dos tenemos
  - $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x}$ (2)
- Si $\vec{x} = [x_1(t), x_2(t)]^t$
  - $\begin{bmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$
- La ecuación (2) es el caso homogéneo, el caso no homogéneo sería
  - $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x} + \overrightarrow{g(t)}$
- Es decir
  - $\begin{bmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$

- Para dimensión *n*
  - $\vec{x} = [x_1(t), x_3(t) \ldots\ x_n\,(t)]^t$
  - $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x}$ (3)
- Pero aquí tenemos n ecuaciones.
- Para el sistema no homogéneo
  - $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x} + \overrightarrow{g(t)}$
- La representación matricial nos permite manejar cómodamente cualquier dimensión finita.
- Recordemos que una propiedad interesante es la linealidad
  - $A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y}$
- de las operaciones entre vectores y matrices.

Ejemplo

- Sea
  - $\overrightarrow{x'} = \frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} = A\vec{x}$
- Las soluciones
  - $\overrightarrow{x^{(1)}} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{x^{(2)}} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Para verificar que es solución
- $\frac{d}{dt}\overrightarrow{x^{(1)}} = 3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{Ax^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\overrightarrow{x^{(1)}} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
- $\frac{d}{dt}\overrightarrow{x^{(2)}} = -e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{Ax^{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\overrightarrow{x^{(2)}} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- La propiedad $A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y}$
- Aplicada a las soluciones $\overrightarrow{x^{(1)}}, \overrightarrow{x^{(2)}}$ se presenta
  - $A\left(c_1\overrightarrow{x^{(1)}} + c_2\overrightarrow{x^{(2)}}\right) = c_1 A\overrightarrow{x^{(1)}} + c_2\, A\overrightarrow{x^{(2)}} = c_1 \frac{d}{dt}\overrightarrow{x^{(1)}} + c_2\, \frac{d}{dt}\overrightarrow{x^{(2)}}$
  - $= \frac{d}{dt}\left(c_1\overrightarrow{x^{(1)}} + c_2\overrightarrow{x^{(2)}}\right)$
- Es decir cualquier combinación lineal finita de soluciones es solución, la función
  - $\overrightarrow{x(t)} = c_1\overrightarrow{x^{(1)}} + c_2\overrightarrow{x^{(2)}} = \mathrm{c}_1 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ (4)
- Bajo la condición de independencia lineal veremos que (4) es la solución general de
  - $\overrightarrow{x'} = \frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix}1 & 1\\4 & 1\end{pmatrix}\vec{x}$

Teorema

- Si dos funciones vectoriales, $\overrightarrow{x^{(1)}}, \overrightarrow{x^{(2)}}$, son solución del sistema
  - $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x}$
- Cualquier combinación lineal de , $\overrightarrow{x^{(1)}}, \overrightarrow{x^{(2)}}$
  - $\overrightarrow{x(t)} = c_1\overrightarrow{x^{(1)}} + c_2\overrightarrow{x^{(2)}}$
- con c_1, c_2 constantes es solución.
- $\frac{d}{dt}\overrightarrow{x(t)} = \frac{d}{dt}\left(c_1\overrightarrow{x^{(1)}} + c_2\overrightarrow{x^{(2)}}\right) = c_1 \frac{d}{dt}\overrightarrow{x^{(1)}} + c_2 \frac{d}{dt}\overrightarrow{x^{(2)}} = c_1 P(t)\overrightarrow{x^{(1)}} + c_2 P(t)\overrightarrow{x^{(2)}} =$
  - $P(t)\left(c_1\overrightarrow{x^{(1)}} + c_2\overrightarrow{x^{(2)}}\right)$

- Si tenemos *n* soluciones de $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x}$ en IR^n
  - $\overrightarrow{x^{(1)}} = \begin{bmatrix} x_{11}\,(t) \\ \vdots \\ x_{n1}\,(t) \end{bmatrix}, \dots \overrightarrow{x^{(n)}} = \begin{bmatrix} x_{1n}\,(t) \\ \vdots \\ x_{nn}\,(t) \end{bmatrix}$
- Podemos formar la matriz
  - $\boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} x_{11}\,(t) & & x_{1n}\,(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}\,(t) & & x_{nn}\,(t) \end{bmatrix}$
- Podemos formar su determinante
  - $W[\overrightarrow{x^{(1)}} \quad \dots \quad \overrightarrow{x^{(n)}}] = \det(\boldsymbol{X}(t))$
- Las soluciones son linealmente independientes en un punto t_0 si y solo si
  - $W[\overrightarrow{x^{(1)}} \quad \dots \quad \overrightarrow{x^{(n)}}] \neq 0$

Teorema

- Si las soluciones
- $\overrightarrow{x^{(1)}} = \begin{bmatrix} x_{11}\,(t) \\ \vdots \\ x_{n1}\,(t) \end{bmatrix}, \dots \overrightarrow{x^{(n)}} = \begin{bmatrix} x_{1n}\,(t) \\ \vdots \\ x_{nn}\,(t) \end{bmatrix}$ de $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x}$ en IR^n
- Son linealmente independientes en el intervalo $\alpha < t < \beta$, entonces cualquier solución, $\vec{x} = \phi(t)$ se puede representar de manera única como combinación lineal de $\overrightarrow{x^{(1)}}, \dots \overrightarrow{x^{(n)}}$
  - $\overrightarrow{x(t)} = c_1\overrightarrow{x^{(1)}} \dots c_n\overrightarrow{x^{(n)}}$

Definición Cualquier conjunto de soluciones $\overrightarrow{x^{(1)}}, \dots \overrightarrow{x^{(n)}}$ de $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x}$ linealmente independientes en $\alpha < t < \beta$, es un conjunto fundamental de soluciones.

- *Demostración del teorema*, dada $\phi(t)$ solución, sea $t_0 \in (\alpha, \beta)$ si tomamos $\vec{\xi} = \phi(t_0)$, basta despejar las constantes $c_1, \ldots c_n$ del sistema:
  - $\overrightarrow{\xi(t_0)} = c_1\overrightarrow{x^{(1)}(t_0)} \dots c_n\overrightarrow{x^{(n)}(t_o)}$
- En forma matricial
  - $\begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & & x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$
- Que tiene solución única por que su determinante es diferente de cero.

- La propiedad de Abel para el Wronskiano se cumple de la siguiente forma
  - $\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22} \dots p_{nn})W$ (5)

- Cuando es el wronskiano de las soluciones de $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x}$
- $W[\overrightarrow{x^{(1)}} \quad \dots \quad \overrightarrow{x^{(n)}}] = \det(\boldsymbol{X}(t))$
- <u>*Teorema*</u> Si $\overrightarrow{x^{(1)}} \quad \dots \quad \overrightarrow{x^{(n)}}$ son soluciones de $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x}$ en el intervalo $\alpha < t < \beta$, entonces el wronskiano nunca se anula o es idénticamente cero.
- Lo interesante de la propiedad es que no es necesario calcular el wronskinano en todo el intervalo, basta calcularlo en un punto.
- La solución de (5) es de forma exponencial
- $$W = C\ exp(\int (p_{11} + p_{22} \dots p_{nn})dt$$

Ejercicios

- 1) Sean
  - $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$
- A) Calcule el wronskiano.
- B)¿ En que intervalos son linealmente independientes?
- C) ¿Qué podemos decir de los coeficientes de sistema de ecuaciones diferenciales cuya solución fundamental es $\{\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\}$?
- D) Encuentre dicho sistema de ecuaciones.
- 2) Las mismas preguntas para
  - $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$

Bibliografía

- W.Boyce, R. DiPrima, “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems” 8Ed 7.4