# Clase 1

Monday, January 24, 2022 4:37 PM

## Método de factores de integración

Forma general: $\dfrac{dy}{dt} + \underbrace{p(t)}\, y = \underbrace{g(t)}$ — funciones independientes ya dadas.

Para solucionar esta forma de ecn. multiplicamos por $\boxed{\mu(t)}$ ← factor integrador

**ejemplo:**

¿Cómo escoger $\mu(t)$ tal que se pueda entender este lado izquierdo como $\frac{d}{dt}[\mu y]$?

↓

Si logro hacer que el lado izquierdo sea $\frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)]$ puedo integrarlo y obtener $\mu(t)y(t)$ y de ahí sacar $y(t)$.

- $$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}$$

- $$\boxed{\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)\frac{y}{2}} = \mu(t)\frac{1}{2}e^{t/3}$$ (multiplicamos por $\mu(t)$)

- $$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \frac{\mu(t)}{dt}y + \mu(t)\frac{y}{dt}$$ → Podemos guiarnos de aquí para buscar $\mu(t)$

- $$\frac{\mu(t)}{dt}y = \mu(t)\frac{1}{2}y$$
$$\frac{\mu(t)}{dt} = \frac{\mu(t)}{2}$$

- Si solucionamos $\frac{\mu(t)}{dt} = \frac{\mu(t)}{2}$ podemos obtener $\mu(t)$

 en este caso: $$\frac{\mu(t)/dt}{\mu(t)} = \frac{1}{2}$$

 Se puede deducir que $\mu(t)$ es de la forma:
 $$\mu(t) = C \cdot e^{t/2}$$ → escogemos $C = 1$

- Con $\mu(t) = e^{t/2}$ reemplazamos en la expresión inicial:

$$\cancel{\mu(t)}^{e^{t/2}}\frac{dy}{dt} + \cancel{\mu(t)}^{e^{t/2}}\frac{y}{2} = \cancel{\mu(t)}^{e^{t/2}}\frac{1}{2}e^{t/3}$$

$$\boxed{e^{t/2}\frac{dy}{dt} + \frac{e^{t/2}}{2}y = \frac{e^{t/2}}{2}\cdot e^{t/3} = \frac{e^{5/6}}{2}}$$

- Al integrar ambos lados de la ecn se obtiene

$$e^{t/2}y = \frac{3}{5}e^{5t/6} + C$$

- despejando para $y$:

$$y = \frac{3}{5}e^{t/3} + ce^{-t/2}$$

## Retomando el caso General

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t)$$

Note que $\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y$ es la derivada $\frac{d}{dt}(\mu(t)y)$

Gráficamente: $\mu(t)y' + \mu(t)'y = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y$

es decir tenemos que $\mu(t)$ satisface:

$$\mu(t)'y = \mu(t)p(t)y$$
$$\mu(t)' = \mu(t)p(t)$$

Asumiendo $\mu(t) > 0$:

$$\frac{\mu(t)/dt}{\mu(t)} = p(t)$$

Consecuentemente (integrando a ambos lados):

$$\ln(\mu(t)) = \int p(t)\,dt + K$$

Con exp:

$$e^{\ln(\mu(t))} = e^{\int p(t)\,dt + K}$$

$$\boxed{\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt + K}}$$

Ahora que tenemos $\mu(t)$ podemos ir a integrar $\frac{d}{dt}[\mu(t)y]$

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t)$$

$$\mu(t)y = \int \frac{d}{dt}[\mu(t)y]\,dt = \int \mu(t)g(t)\,dt$$

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t)\,dt}{\mu(t)}$$ → este $\mu(t)$ no entra a la integral

## Ejercicios:

### Ejercicios

- Resolver el problema de valor inicial
- 1. $ty' + 2y = sen(t), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. t > 0$
- 2. $ty' + (1+t)y = t,\ y(\ln 2) = 1, t > 0$
- 3. Hallar el valor $y(0) = y_o$ de tal manera que la solución del problema

## Ejercicios

- Resolver el problema de valor inicial
- 1. $ty' + 2y = sen(t), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. t > 0$
- 2. $ty' + (1+t)y = t,\ y(\ln 2) = 1, t > 0$
- 3. Hallar el valor $y(0) = y_o$ de tal manera que la solución del problema
  - $y' - y = 1 + 3sen\, t, y(0) = y_0$
- Permanezca acotada.
- 4. Considere el problema de valor inicial
- $y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t, y(0) = y_0$
- Hallar el valor de $y_0$, que separa las soluciones que van a mas infinito de las que van a menos infinito cuando $t \to \infty$.

(2) $t\frac{dy}{dt} + (1+t)y = t \ ,\quad y(\ln(2)) = 1 \ ,\quad t > 0$

Ver que se pueden simplificar las $t$:

$$\frac{dy}{dt} + \left(\frac{1}{t} + 1\right)y = 1$$

multiplicando por el factor integrador:

$$\underbrace{\mu(t)\frac{dy}{dt}}_{\mu(t)\frac{dy}{dt}} + \underbrace{\mu(t)\left(\frac{1}{t}+1\right)y}_{\mu(t)'y} = \mu(t)$$

tenemos que hallar $\mu(t)$ tal que vuelva el lado izq. de la igualdad de arriba $\frac{d}{dt}[\mu(t)\cdot y]$.

Podemos usar $\mu(t)\left(\frac{1}{t}+1\right)y = \frac{\mu(t)}{dt}y$ para guarnos y encontrar $\mu(t)$:

$$\frac{\mu(t)}{dt}\cancel{y} = \mu(t)\left(\frac{1}{t}+1\right)\cancel{y}$$

$$\frac{\mu(t)}{dt} = \mu(t)\left(\frac{1}{t}+1\right)$$

$$\frac{\mu(t)/dt}{\mu(t)} = \frac{1}{t} + 1$$

esto es equivalente a:

$$\ln(\mu(t)) = \int \frac{1}{t} + 1 \ + C$$

$$e^{\ln(\mu(t))} = e^{\ln(t) + t + C}$$

$$\mu(t) = t\cdot e^t \cdot \cancel{e^C}^{\,K}$$

$$\mu(t) = t\cdot e^t\cdot K \quad \longrightarrow \text{Asumimos } K = 1$$

Ya que tenemos $\mu(t)$ podemos pasar a reemplazarlo en la expresión inicial:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \cancel{\mu(t)}^{\,te^t}\frac{dy}{dt} + \underbrace{\cancel{\mu(t)}^{\,te^t}\left(\frac{1}{t}+1\right)y}_{} = \cancel{\mu(t)}^{\,te^t}$$

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \cancel{\mu(t)}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\mu(t)\frac{dy}{dt}} + \underbrace{\cancel{\mu(t)}\left(\frac{1}{t}+1\right)y}_{\mu(t)'y} = \cancel{\mu(t)}$$

$$= te^t\frac{dy}{dt} + te^t\left(\frac{1}{t}+1\right)y = te^t$$

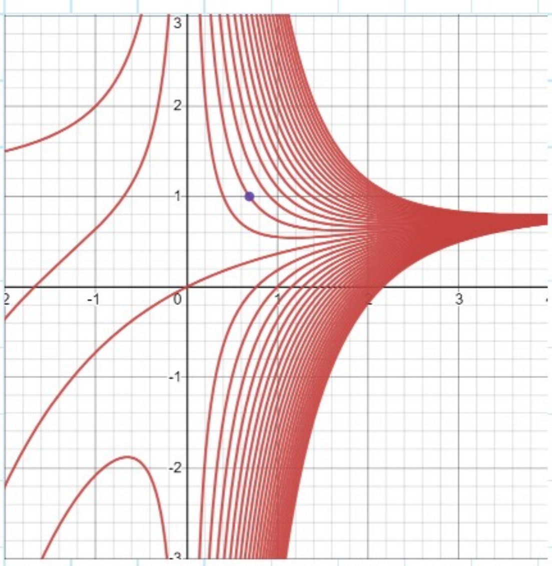
Podemos integrar a ambos lados de la igualdad

$$\mu(t)y = \int te^t\frac{dy}{dt} + te^t\left(\frac{1}{t}+1\right)y = \int \overbrace{t}^{u}\,\overbrace{e^t}^{dv}$$

$$\mu(t)y = e^t(t-1)+C$$

$$y = \frac{e^t(t-1)+C}{te^t} = \frac{t-1}{t} + \frac{C}{te^t}$$

Recuerde que $y(\ln(2)) = 1$ y $t>0$



$$y(\ln(2)) = \frac{\ln(2)-1}{\ln(2)} + \frac{C}{\ln(2)e^{\ln(2)}} = 1$$

$$= \frac{\ln(2)-1}{\ln(2)} + \frac{C}{2\ln(2)} = 1$$

$$= \cancel{2\ln(2)} - 2 + C = \cancel{2\ln(2)}$$

$$= C = 2$$

$$y(t) = \frac{t-1}{t} + \frac{2}{te^t}$$

Ejercicios

- Resolver el problema de valor inicial
- 1.$ty' + 2y = sen(t), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. t > 0$
- 2. $ty'+(1+t)y = t,\ y(\ln 2) = 1, t > 0$
- 3. Hallar el valor $y(0) = y_o$ de tal manera que la solución del problema
  - $y' - y = 1 + 3sen\, t, y(0) = y_0$
- Permanezca acotada.
- 4. Considere el problema de valor inicial
- $y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t, y(0) = y_0$
- Hallar el valor de $y_0$, que separa las soluciones que van a mas infinito de las que van a menos infinito cuando $t \to \infty$.

1 $\quad ty' + 2y = \text{sen}(t),\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ t>0$

Lo ponemos a formato estándar:

$$y' + \underbrace{\frac{2}{t}}_{p(t)}y = \underbrace{\frac{\text{sen}(t)}{t}}_{g(t)}$$

multiplicamos por $\mu(t)$:

$$\mu(t)y' + \mu(t)\frac{2}{t}y = \frac{\mu(t)\,\text{sen}(t)}{t}$$

$$\ln(\mu(t)) = \int \frac{2}{t}\,dt = 2\ln(t)$$

$$e^{\ln(\mu(t))} = e^{2\ln(t)}$$

$\ln(t^2) \quad t^2$

$$e^{\ln(\mu(t))} = e^{2\ln(t)}$$
$$\mu(t) = e^{\ln(t^2)} = t^2$$

Ya que sabemos $\mu(t)$ lo reemplazamos en la eqn:

$$\overset{t^2}{\cancel{\mu(t)}}\, y' + \overset{t^2}{\cancel{\mu(t)}}\, \frac{2}{t} y = \frac{\overset{t^2}{\cancel{\mu(t)}}\, \text{sen}(t)}{t}$$

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = t^2 y' + 2ty = t\,\text{sen}(t)$$

Integramos:

$$\mu(t)y = \int t\,\text{sen}(t) = \sin(t) - t\cos(t) + C$$

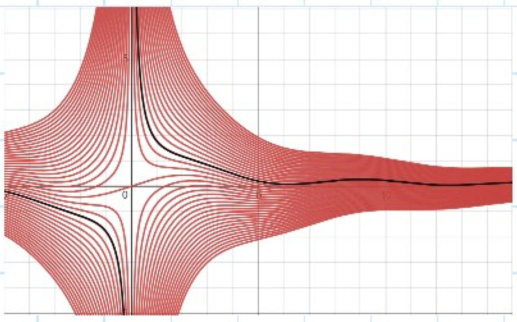
$$y = \frac{\sin(t)}{t^2} - \frac{\cos(t)}{t} + \frac{C}{t^2} \quad , t > 0$$

Sabemos que $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} - \frac{\overset{0}{\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{C}{(\pi/2)^2} = 1$$

$$= C = (\pi/2)^2 - \underset{1}{\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}}$$

Luego $y(t)$ es:



$$y(t) = \frac{\sin(t)}{t^2} - \frac{\cos(t)}{t} + \frac{(\pi/2)^2 - 1}{t}$$

$$\frac{1}{(\pi/2)^2} - 0 + \frac{(\pi/2)^2 - 1}{(\pi/2)}$$

---

Ejercicios

- Resolver el problema de valor inicial
- 1.$ty' + 2y = sen(t), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. t > 0$
- 2. $ty' + (1+t)y = t,\ y(\ln 2) = 1, t > 0$
- 3. Hallar el valor $y(0) = y_0$ de tal manera que la solución del problema
    - $y' - y = 1 + 3sen\, t, y(0) = y_0$
- Permanezca acotada.
- 4. Considere el problema de valor inicial
- $y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t, y(0) = y_0$
- Hallar el valor de $y_0$, que separa las soluciones que van a mas infinito de las que van a menos infinito cuando $t \to \infty$.

3 hallar $y(0) = y_0$ t.q

$$\underbrace{y' - y}_{p(t)y} = \underbrace{1 + 3\,\text{Sen}(t)}_{g(t)} \quad \text{[Sea acotada]}$$

Multiplicamos por el fact. integrador

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)y' - \mu(t)y = \mu(t)(1 + 3\,\text{Sen}(t))$$

Para hallar $\mu(t)$:

$$\ln(\mu(t)) = \int -1\, dt$$
$$e^{\ln(\mu(t))} = -t$$
$$\mu(t) = e^{-t} \cdot \overset{1}{\cancel{K}} \quad (\text{sea } K = 1)$$

Reemplazando $\mu(t)$ en la ecn:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \cancel{\mu(t)}^{e^{-t}} y' - \cancel{\mu(t)}^{e^{-t}} y = \cancel{\mu(t)}^{e^{-t}} (1 + 3\,\text{sen}(t))$$

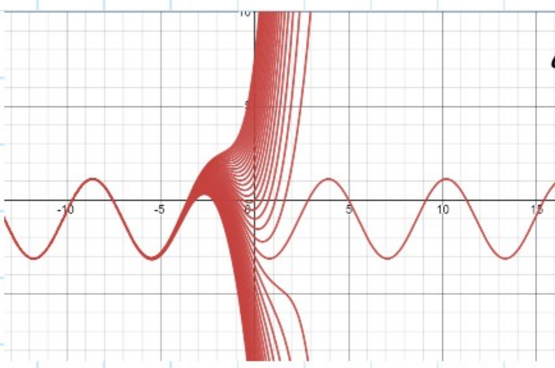
$$= e^{-t} y' - e^{-t} y = e^{-t} (1 + 3\,\text{sen}(t))$$

Si integramos:

$$\mu(t) y = \int e^{-t} (1 + 3\,\text{sen}(t))\, dt$$

$$\mu(t) y = -\frac{1}{2} e^{-t} (3 \sin(t) + 3\cos(t) + 2) + C$$

$$y = -\frac{1}{2}(3 \sin(t) + 3\cos(t) + 2) + \frac{C}{e^{-t}}$$



$\rightsquigarrow$ dado $t > 0$ debemos escoger $C$ t.q. haya que la función no explote.

puesto que $\lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^{-t}} \to \infty$ $C$ debe ser cero para que no estalle. $C = 0$

por lo que

$$y(0) = -\frac{1}{2}(3 \cancel{\sin(0)}^{0} + 3\cos(0) + 2)$$

$$= -\frac{1}{2}(3 + 2) = \frac{-5}{2}$$

---

**4**

$$y' - \underbrace{\frac{3}{2}}_{p(t)} y = \underbrace{3t + 2e^{t}}_{g(t)}, \quad y(0) = y_0$$

Ejercicios

- Resolver el problema de valor inicial
- 1. $ty' + 2y = sen(t), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. t > 0$
- 2. $ty' + (1+t)y = t,\ y(\ln 2) = 1, t > 0$
- 3. Hallar el valor $y(0) = y_o$ de tal manera que la solución del problema
  - $y' - y = 1 + 3sen\, t, y(0) = y_0$
- Permanezca acotada.
- 4. Considere el problema de valor inicial
- $y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t, y(0) = y_0$
- Hallar el valor de $y_0$, que separa las soluciones que van a mas infinito de las que van a menos infinito cuando $t \to \infty$.

multiplicamos por el factor de integración:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)y' - \mu(t)\frac{3}{2}y = \mu(t)(3t + 2e^{t})$$

Vamos a hayar $\mu(t)$ que cumpla la condición:

$$\ln(\mu(t)) = \int p(t)\, dt = -\int \frac{3}{2}\, dt$$

$$\mu(t) = e^{(-3/2)t} \cdot \cancel{K}^{1}$$

Reemplazamos $\mu(t)$ en la ecuación:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \cancel{\mu(t)}^{e^{(-\frac{3}{2})t}} y' - \cancel{\mu(t)}^{e^{(-\frac{3}{2})t}} \frac{3}{2} y = \cancel{\mu(t)}^{e^{(-\frac{3}{2})t}} (3t + 2e^{t}) = e^{(-\frac{3}{2})t}(3t + 2e^{t})$$

Si integramos:

$$\mu(t)y = \int e^{(-\frac{3}{2})t} (3t + 2e^{t})\, dt$$

Si integramos:

$$\mu(t)\, y = \int e^{(-\frac{3}{2})t}\left(3t + 2e^{t}\right) dt$$

$$= \int \underbrace{e^{-\frac{3}{2}t}}_{dv} \cdot \underbrace{3t}_{u} + \int 2e^{-\frac{t}{2}}\, dt$$

$$= 3t \cdot e^{-\frac{3}{2}t} - 3\int e^{-\frac{3}{2}t} + 2 \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

$$= 3e^{-3/2\, t}(t - 1) + 2 \cdot e^{-\frac{t}{2}} + C$$