Método de separación de variables

28/04/2022

Luz Myriam Echeverry N.

Presentación

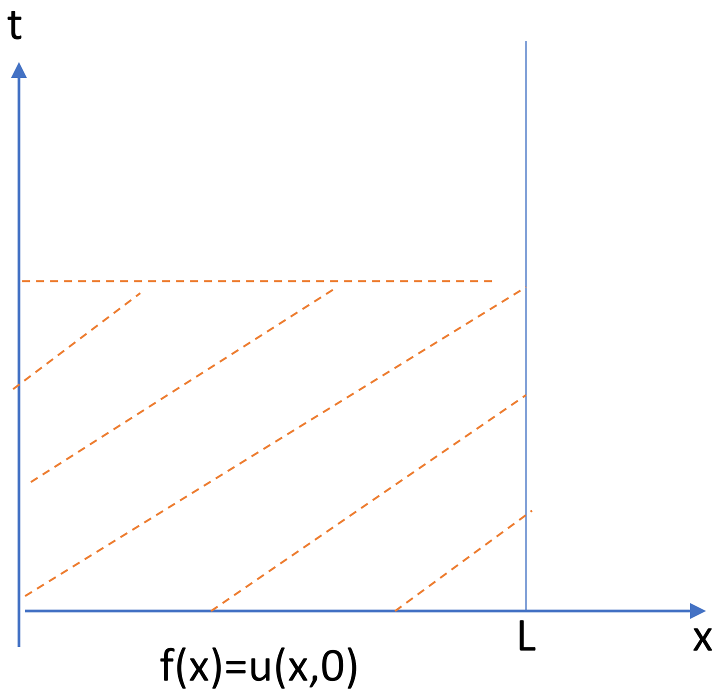
- Jean Baptiste Fourier (1768-1830) matemático y físico francés.
- Estudió la ecuación del calor y propuso la expansión en serie trigonométrica de la solución del problema en un intervalo cerrado.
- Bernoulli y D´Alembert tenían ideas similares, Fourier vio la potencia del método.

- La idea es suponer que la solución tiene la forma particular:
  - $u(x,t) = X(x)T(t)$
- Producto de dos funciones de una variable

Problema del calor en una barra

- El problema:
  - $u_t - ku_{xx} = 0 \;\; 0 < x < L, \;\; t > 0$ (1)
  - $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \geq 0$ (2)
  - $u(x,0) = f(x)$ (3)
- *k* ,constante que depende del material de la barra de longitud L, cobre, aluminio, etc.
- La función *f(x)*, representa el estado inicial, t=0, de la barra. Por consistencia $f(0) = f(L) = 0$. En (3)
- En los extremos, (2), la temperatura permanece constante igual a cero. Problema tipo Dirichlet.

Separación de variables



- Suponemos
- $u(x,t)$: temperatura en el punto x,
- tiempo t
- Entonces, $u(x,t) = X(x)T(t)$
- Dos funciones separadas
- $u_t = X(x)T'(t)$
- $u_{xx} = X''(x)T(t)$
- La ecuación (1)
  - $X(x)T_t = kX_{xx}T(t)$
- Separamos:
  - $\frac{T_t}{T} = k\frac{X_{xx}}{X}$

Soluciones.

- Al tener:
  - $\frac{T_t}{kT} = \frac{X_{xx}}{X}$
- De un lado, la expresión, depende únicamente de t, y del otro únicamente de x, entonces:
  - $\frac{T_t}{kT} = \frac{X_{xx}}{X}$=-λ
- Con λ valor real arbitrario, constante.
- Dos ecuaciones:
  - $T_t = -k\,\lambda\,\mathrm{T}\; t > 0$
  - $\frac{d^2}{dx^2}X = -\lambda\mathrm{X},\, 0 < x < L$

Condiciones de frontera.

- La ecuación en X(x)
  - $\frac{d^2}{dx^2}X = -\lambda X,\ 0 < x < L$
  - $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \geq 0$ (2)
- Para cumplir las condiciones de frontera:
  - $u(0,t) = X(0)T(t), t \geq 0$
- Para que la solución no sea cero, $T(t) \neq 0, X(0) = 0.$
  - $u(L,t) = X(L)T(t), t \geq 0$
- Para que la solución no sea cero, $T(t) \neq 0, X(L) = 0.$
- Se completa la ecuación.

Solución parcial.

- Ya se tiene:
  - $\frac{d^2}{dx^2}X = -\lambda \mathrm{X},\ 0 < x < L$
  - $X(0) = X(L) = 0 \quad (4)$
- Resolver:
  - $X''(x) + \lambda \mathrm{X}=0, \quad r^2 + \lambda=0.\ r^2=- \lambda$
- Busca soluciones diferentes de cero, $(D^2 - (-\lambda))\mathrm{X}=0$, valores y funciones propias.
- Tres casos,
  - $\lambda < 0, -\lambda > 0, X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + B\ e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
  - $\lambda=0$, $\mathrm{X(x)=Ax+B}$
  - $\lambda > 0, X(x) = Acos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + Bsen\left(\sqrt{\lambda}x\right)$

Casos: $\lambda < 0$

- $\lambda < 0, -\lambda > 0, X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + B\, e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
- Recordemos que cualquier combinación lineal de soluciones es solución en particular:
- $\cosh(\sqrt{-\lambda}x) = \frac{e^{\sqrt{-\lambda}x} + e^{-\sqrt{-\lambda}x}}{2}$, y $\operatorname{senh}(\sqrt{-\lambda}x) = \frac{e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}}{2}$
- $X(x) = \alpha\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + \beta\operatorname{senh}(\sqrt{-\lambda}x)$
- Debe cumplir X(0)=0, es decir $\alpha = 0.$ y X(L)=0, $\beta\operatorname{senh}(\sqrt{-\lambda}L)=0$ la segunda, $L \neq 0$ implica β=0
- La solución es X(x)=0 para todo x, u(x,t)=0!!!

Casos: λ=0

- En este caso
  - X(x)=Ax+B
  - $X(0) = X(L) = 0 \quad (4)$
- X(0)=0, implica B=0
- X(L)=0, con L diferente de cero. A=0
- Otra vez la única solución es X(x)=0 es decir u(x,t) cero!!!

Casos $\lambda > 0$

- Tenemos:
  - $X(x) = Acos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + Bsen\left(\sqrt{\lambda}x\right)$
  - $X(0) = X(L) = 0 \quad (4)$
- X(0)=0, implica A=0,
- Pero:
  - $Bsen\left(\sqrt{\lambda}L\right)$=0
- Es posible si: $\sqrt{\lambda}$L=$n\pi, n$ entero $n \neq 0$. $\sqrt{\lambda}$ =$\frac{n\pi}{L}$
- Entonces:
  - $X_n = sen(\frac{n\pi}{L}x)$

Solución para T

- Al tener :
    - . $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$, valor propio de multiplicidad uno,
    - $X_n = sen(\frac{n\pi}{L}x)$, función propia para todo n, entero positivo.
    - $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$
- Para T: T= $e^{-k\lambda t}$
    - $T_n = \exp(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ t), n=1,2,3…
- Tenemos infinitas soluciones.
    - $u_n(x,t) = sen(\frac{n\pi}{L}x)\exp(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ t), n=1,2,3…

Condición inicial

- Por el principio de superposición cualquier combinación lineal de soluciones es solución.
  - $u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} B_n sen(\frac{n\pi}{L}x) \exp(-k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \mathrm{t}),$
- Es solución.
- Pero debe cumplir: $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{N} B_n sen(\frac{n\pi}{L}x)$.
- Es decir que si la condición inicial es de la forma anterior, por ejemplo:
  - $f(x) = \frac{1}{2} sen\left(\frac{\pi}{L}x\right) + 3sen(\frac{4\pi}{L}x)$.
- La solución:
  - $\mathrm{u}(x,t) = \frac{1}{2} sen\left(\frac{\pi}{L}x\right) \exp(-k \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \mathrm{t}) + 3sen(\frac{4\pi}{L}x) \exp(-k \left(\frac{4\pi}{L}\right)^2 \mathrm{t})$.

Caso general

- En general la condición inicial no tiene esa forma. Necesitamos series es decir que la solución es de la forma:
- $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen(\frac{n\pi}{L}x) \exp(-k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ t),
- Para expresar la función:
  - $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen(\frac{n\pi}{L}x)$
- Un paréntesis, vamos a estudiar series de Fourier y problemas de valor en la frontera.

Problemas de valor en la frontera.

- Capitulo 10 de Boyce, DiPrima
- Ejercicios 10.1 $\alpha + i\beta,\ e^{\alpha t}(A\cos\beta t + Bsen(\beta t))$
- Para los problemas siguientes encuentre la solución o muestre que no tiene.
- 1. $y'' + \ y = 0, y(0) = 0, y'(\pi) = 1$
- 2. y´´+y=x, y(0)=0, y$(\pi) = 0$
- 3. $y'' + 4y = \cos x\,, y(0) = 0,$ y$(\pi) = 0$
- 4. $y'' + 3y = \cos x\ y'(0) = 0,$ y´$(\pi) = 0$ 5.
- 5. $y'' + 4y = sen\ x, y(0) = 0,$ y$(\pi) = 0$

Hallar los valores propios y las funciones propias

- 1. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$. $y'(\pi) = 0$
- 2. $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$. $y'(\pi) = 0$
- 3 . $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$. $y(\pi) = 0$
- 4. $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$. $y'(L) = 0$
- 5 . $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$. $y(L) = 0$

Series de Fourier, 10.2

- Dada una función periódica de periodo T se busca una serie de la forma:
  - $a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$
- Las funciones en la serie tienen período:
  - T=$\frac{2L}{m}$
- Recordemos que $sen\ \alpha x, cos\alpha x$ tienen período $\frac{2\pi}{\alpha}$.

Ortogonalidad

- Dos vectores son ortogonales si su producto interno es cero.
- Definición dadas dos funciones *u,v* en un intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$
- El producto interno de las dos funciones de valor real se define:
  - $< u, v > = \int_{\alpha}^{\beta} uvdx$
- Tienen las propiedades del producto interno:
- i) $< x, x > \geq 0, y \ < x, x >$=0 si y sólo si x=0
- ii$< x, y > =< y, x >$
- Iii $< \alpha x, y > = \alpha < x, y >, < x, y + z > =< x, y >+< x, z >$

Bibliografía

- Boyce DiPrima. ¨ Elementary Differential equations and Boudary problems¨8ª ed.
- Y. Pinchover, J. Rubinstein, An Introduction to Partial diferential equations,Texto del curso. Cambridge Universitu Press, 2005