Método de Coefs. indeterminados para E.D.O lineales no homogeneas

ecuación no homogenea prototípica

$$L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \neq 0$$

p, q, g continuas en el intervalo $I = (\alpha, \beta)$

$$L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

versión homogenea de la eqn.

Teorema

Sean Y_1 e Y_2 soluciones del problema no homogeneo entonces $Y_1 - Y_2$ es una solución de la ecuación homogenea correspondiente a y (problema homogeneo).

Si y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la eqn homogenea entonces:

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

Teorema

La solución general del problema no homogeneo se puede escribir como:

$$\phi(t) = \underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2}_{\text{soluciones de la eqn homogenea}} + \underbrace{Y(t)}_{\text{solución al problema no homogeneo}}$$

Algoritmo

1. hallar la solución general del problema homogeneo.
2. hallar la solución particular al problema no homogeneo.
3. Se suman ambas:

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p(t)$$

Coeficientes indeterminados

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

Combinaciones lineales de senos y cosenos, exponenciales, productos de polinomios con las funciones anteriores.

el truco de esta forma de solucionar es:

1. Solucione el problema homogeneo respectivo (obtenga y_1 e y_2)
2. Asuma que la solución particular y_p tiene la forma:

$$y_p(t) = A\, g(t)$$

Calcule y_p'', y_p' y reemplace en la eqn. diferencial original para hallar el valor de A.

$$y_p'' + p(t)y_p' + q(t)y_p = g(t)$$

Sumar y_1, y_2 e y_p.

3. (si $g(t)$ es una suma de funciones entonces por principio de superposición soluciono una parte de la suma y sumo esa solución con la solución de la otra).

⚠ Ver los ejemplos es importante!!! (lea diapos)

Ej: Resolver $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3\,\mathrm{sen}(t)$

① Resolver el problema homogeneo
② Resolver el problema no homogeneo.

a) $2y'' + 3y' + y = t^2$

se asume que $y_p = \boxed{At^2 + Bt^2 + C}$

se debe reemplazar así

b) $2y'' + 3y' + y = 3\,\mathrm{sen}(t)$

se asume que y_p es de la forma:

$$y_p = \boxed{A\cos(t) + B\,\mathrm{sen}(t)}$$

se debe reemplazar así.

Caso especial la función de la derecha ya es solución de la ecuación homogenea

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

Suponer que $y_p = Ate^{-t}$

$$y'' + y' + 4y = 2\,\text{senh}(t) = \cancel{2}\frac{(e^{t} - e^{-t})}{\cancel{2}}$$
$$= e^{t} - e^{-t}$$

$$r^2 + r + 4 = 0 \qquad r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} i$$
$$r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} i$$

$$\overbrace{c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)}^{y_1 \text{ ó } y_A} \qquad \overbrace{c_2 \cdot e^{-\frac{t}{2}}\left(\text{sen}\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)}^{y_2 \text{ ó } y_B}$$

$$y = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right) + c_2 \cdot e^{-\frac{t}{2}}\left(\text{sen}\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)$$

Coefs. indet.

$$y'' + y' + 4y = 2\,\text{senh}(t) = \cancel{2}\frac{(e^{t} - e^{-t})}{\cancel{2}}$$
$$= e^{t} - e^{-t}$$

$$y(t) = Ae^{t} - Be^{-t}, \quad y'(t) = Ae^{t} + Be^{-t}, \quad y''(t) = Ae^{t} - Be^{-t}$$

$$[Ae^{t} \cancel{- Be^{-t}}] + [Ae^{t} \cancel{+ Be^{-t}}] + 4[Ae^{t} - Be^{-t}] = e^{t} - e^{-t}$$

$$6Ae^{t} - 4Be^{-t} = e^{t} - e^{-t}$$

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{4}$$

entonces $\quad y_p(t) = \frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t}$

Así por metodo $\quad y = y_A + y_B + y_p$

$$y(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right) + c_2 \cdot e^{-\frac{t}{2}}\left(\text{sen}\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right) + \frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t}$$