Aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden

Luz Myriam Echeverry N

1 de febrero 2022

Clase #3

Problema de enfriamiento

- Ley de Newton sobre enfriamiento
- “la rata e cambio, en el tiempo, de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio que lo rodea.”
- Las variables

t, el tiempo, variable independiente.

T, la temperatura del cuerpo, variable dependiente.

Constante k, constante de proporcionalidad.

T_m: temperatura del medio que rodea el objeto.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

Ejemplo 1 Una barra metálica de temperatura 100º F se pone en un cuarto de temperatura constante 0º F, si después de 20 minutos la barra tiene una temperatura de 50º F, hallar 1)el tiempo necesario para llegar a 25º F y 2) la temperatura después de 10 minutos.

- Aplicando la ley de Newton, $T_m = 0, \frac{dT}{dt} = -kT$
- Desconocemos k, la solución
  - $T(t) = Ce^{-kt}$
- La condición inicial, $T(0) = 100 \to C = 100.$
- $100 = Ce^0$, entonces $T(t) = 100e^{-kt}$ $(*)$
- Falta determinar la constante k, pero sabemos $T(20) = 100e^{-20k} = 50$
- Entonces, tomando logaritmo $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -20k \to -\ln 2 = -20k$
  - $k = \frac{\ln 2}{20} \cong 0.034657 \cong 0.035$

- Con k=0.035 la solución
    - $T(t) = 100e^{-0.035t}$ $(**)$
- Con esta fórmula podemos dar la temperatura en cualquier tiempo.
- $T(10) = 100e^{-0.035\times 10} \cong 100 \times 0.7046 \cong 70.5$º F
- Para alcanzar 25º F
- Despejar t tal que
    - $25 = 100e^{-0.035t}$
    - $\frac{1}{4} = e^{-0.035t} \leftrightarrow \ln 1/4 = -0.035t$
    - $t = \ln 4/0.035 \cong 39.61$
- Rta. En 39.61 minutos alcanza los 25º F.

Crecimiento y decrecimiento

- Dos ejemplos, uno de crecimiento de bacterias y el segundo de decrecimiento radioactivo. En todos los casos $N(t)$, representa la cantidad presente en el tiempo t. Suponemos el cambio en el tiempo de la cantidad es proporcional a la cantidad, $N(t)$, presente es ese mismo instante. Es decir
  - $\frac{dN}{dt} = kN(t)$

k es la constante de proporcionalidad, positiva en el caso del crecimiento y negativa si hay decrecimiento.

La solución

$$N(t) = Ce^{kt}$$

- Ejemplo 2 se sabe que cierto material radioactivo se desintegra a una rata proporcional a la cantidad presente. Inicialmente hay 50 miligramos del material y al cabo de dos horas se observa que el material ha perdido el 10% de su masa original, hallar 1) una expresión para la cantidad de masa del material en función del tiempo. 2) Calcular la cantidad presente después de 4 horas, 3) el tiempo en el cual la masa se reduce a la mitad de la masa inicial.
- La condición inicial $N(0) = 50$
  - $\frac{dN}{dt} = kN(t)$
- La solución $N(t) = Ce^{kt} \rightarrow N(t) = 50e^{kt}$

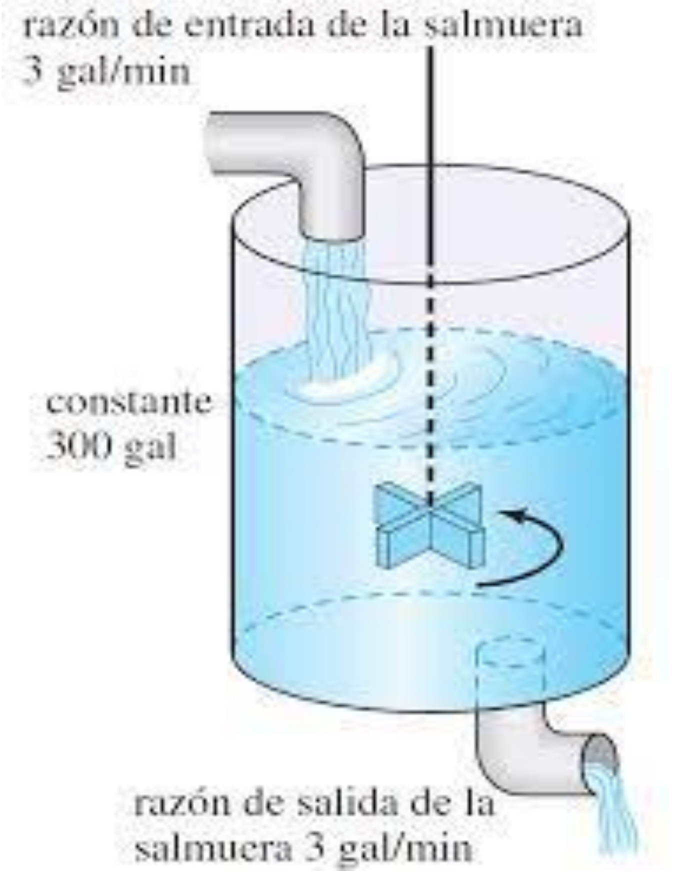
Con el dato de $N(2) = 45 = 50e^{2k}$

- $\frac{45}{50} = 0.9 = e^{2k} \rightarrow 2k = \ln 0.9 \leftrightarrow k \cong -0.05268 \cong -0.053$

- La solución
    - $N(t) = 50e^{-0.053t}$
- En cada caso hay que saber en que se mide el tiempo, aquí en horas
- $N(4) = 50e^{-4\times 0.053} \cong 50 \times 0.8089 \cong 40.45$
- La vida media del material es cuando tengamos la mitad de la cantidad original, en ese caso 25 mg.
    - $25 = 50e^{-0.053t} \leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-0.053t}$
- Tomando logaritmo y usando $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$
    - $t = \frac{\ln 2}{0.053} \cong 13.078\ horas$

Problema de soluciones Un tanque contiene inicialmente un volumen V_0 galones de solución salina. Se vierte otra solución salina a razón de r galones por minuto conteniendo b libras de sal por galón, se mezcla instantáneamente y salen s galones por minuto de la mezcla; el problema es calcular la cantidad de sal presente en el tanque en cualquier minuto.

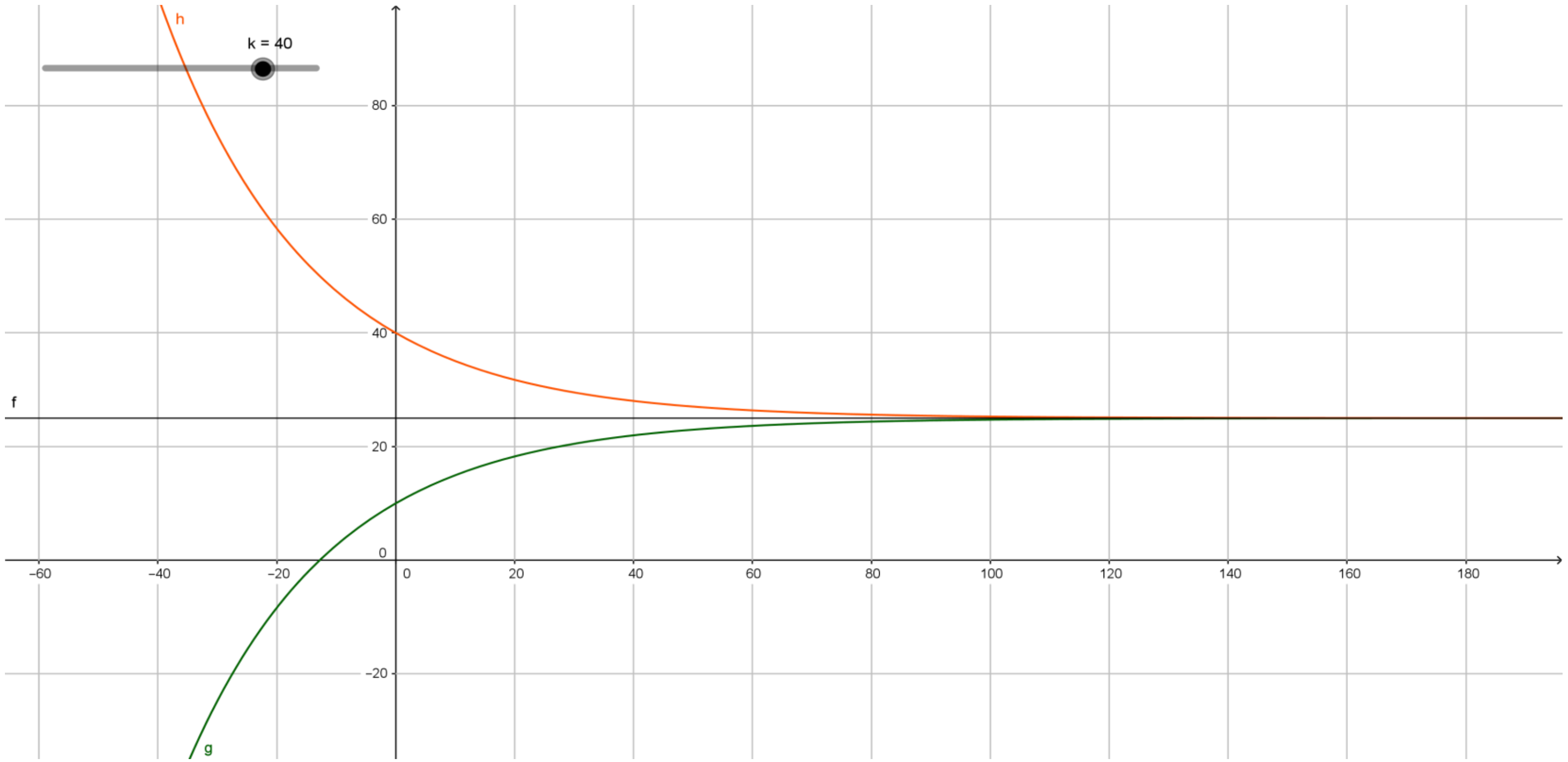
- $Q(t)$cantidad de sal en el tiempo t.
- Entran b libras por galón
- $b \times r$ cantidad de sal que entra
- Salen s galones, queremos calcular
- La cantidad de sal que sale
- Volumen en cualquier momento
- $V_0 + rt - st$
- Si $r=s$ permanece constante el volumen



- Volumen en cualquier momento $V_0 + rt - st$
- La concentración de sal, cantidad de sal, en el tanque, por galón
  - $Q(t)/(V_0 + rt - st)$
- Varia con el tiempo.
- El cambio en la cantidad de sal con respecto al tiempo es la cantidad de sal que entra menos la cantidad de sal que sale.
  - $\frac{dQ}{dt} = br - s\left(\frac{Q(t)}{(V_0+rt-st)}\right)$
- Es decir
  - $\frac{dQ}{dt} + Q(t)\frac{s}{(V_0+rt-st)} = br$
- Ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

- Caso 1, entra y sale la misma cantidad de liquido, *r=s,* El volumen permanece constante, V_0
    - $\frac{dQ}{dt} + Q(t)\frac{r}{V_0} = br$ (*)
- Por ejemplo $V_0 = 100\ gal, Q(0) = Q_0$ y $b = \frac{1}{4}li$
- Factor integrante para (*) $p(t) = \frac{r}{V_0} \rightarrow \mu(t) = exp\left(\int \frac{r}{100}dt\right) = e^{\frac{rt}{100}}$
    - $e^{\frac{rt}{100}}Q(t) = \int \frac{1}{4} r e^{\frac{rt}{100}} dt = \frac{100}{r} \times \frac{1}{4} \times r\ e^{\frac{rt}{100}}$+C
    - $Q(t) = 25 + Ce^{-rt/100}$
- $Q(0) = Q_0 \rightarrow Q_0 = 25 + C \rightarrow C = (Q_0 - 25)$
- La solución
    - $Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)e^{-rt/100}$

- Comportamiento de la solución
    - $Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)e^{-rt/100}$
- Si $t \to \infty, Q(t) \to 25$



Ejercicios

- Texto del curso
- Numeral 2,3
- Grupo 1 ejercicio 1
- Grupo 2 ejercicio 2
- Grupo 3 ejercicio 3
- Grupo 4 ejercicio 4

Bibliografía

- W.E. Boyce, R.C. DiPrima, “Elemtary Differential Equations and Boundary Value Problems”. Willey, 8e ed.