Una ecuación de la forma

$t^2y'' + \alpha t y' + \beta y = 0, t > 0$, con α, β, constantes se conoce como ecuación de Euler

(a) Muestre que la sustitución $x = \ln t$ transforma la ecuación de Euler en una ecuación con coeficientes constantes.

Ayuda use la regla de la cadena

(b) Use la transformación anterior para resolver

$t^2y'' + ty' + y = 0$

Necesitamos usar regla de la cadena para recuperar y poder verificar:

$$x = \ln(t)$$

$$\Rightarrow \quad e^x = t$$

$$e^{-x} = \frac{1}{t}$$

Regla de la cadena

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{\cancel{dx}} \cdot \frac{\cancel{dx}}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dt}(\ln(t)) = \frac{dy}{dx}\frac{1}{t} = \frac{dy}{dx}e^{-x}$$

Ya tenemos la primera derivada, falta la 2da:

$$\frac{d^2y}{d^2t} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\frac{1}{t}\right] = \left[\frac{d^2y}{dx^2}e^{-x} - \frac{dy}{dx}e^{-x}\right]\frac{1}{t} \rightarrow e^{-x}$$

$$= e^{-2x}\left[y''(x) - y'(x)\right]$$

Ahora sustituimos en la original:

$$\cancel{e^{-2x}}\left[y''(x) - y'(x)\right]\cancel{e^{2x}} + \alpha\left[y'(x)\cancel{e^{-x}}\right]\cancel{e^{x}} + \beta y = 0$$

$$= y'' + y'(\alpha - 1) + \beta y$$

b) $t^2y'' + ty' + y = 0$

$$y'' + y'(\alpha - 1) + \beta y = 0$$