Independencia lineal

Clase #11, 1/03/2022

Luz Myriam Echeverry N

Dependencia lineal

- Definición, decimos que dos funciones, f, g definidas en el intervalo $I = (a, b)$, son linealmente dependientes si existen dos constantes k_1, k_2 no nulas, tales que
  - $k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0$ para todo $t \in I$. (1)
- Si no son dependientes decimos que son linealmente independientes, es decir la única manera para que se cumpla (1) es que $k_1, = k_2 = 0$
- Ejemplo 1, sean $f(t) = sen(t), g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$
- Si se toma
- $k_1 sen\left(_t\right) + k_2 \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = sen(t) - \left[\cos(t) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + sen(t) sen(\frac{\pi}{2})\right]$=0
  - $k_1 = 1, k_2 = -1$
- Las funciones f y g son linealmente dependientes

- Ejemplo 2 sean $f(t) = t^2 + 5t, g(t) = t^2 - 5t$, ¿son linealmente dependientes o independientes?

- La ecuación (1)
  - $k_1(t^2 + 5t) + k_2(t^2 - 5t) = 0$
- Factorizando
  - $(k_1 + k_2)t^2 + (k_1 - k_2)5t = 0$
- Para que se cumpla que un polinomio es cero los coeficientes de todos sus exponentes deben ser cero.
  - $k_1 - k_2 = 0, (k_1 + k_2) = 0$
- La única solución, $k_1 = k_2 = 0$, porque la primera ecuación $k_1 = k_2$
- La segunda $k_1 = -k_2$, son linealmente independientes

Teorema, sean f, g funciones diferenciable en un intervalo I, si $W(f,g)(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in I$, entonces f, g son linealmente independientes en I. Además si f, g son linealmente dependientes en I entonces $W(f,g)(t) = 0$ para todo t en I

- Supongamos que son dependientes, es decir $k_1 f + k_2 g = 0$ para dos constantes no nulas, k_1, k_2, y para todo t en I. Por contradicción
- En particular en $t_0, i.e.$
  - $k_1 f(t_0) + k_2 g(t_0) = 0$
- Y su derivada $\quad k_1 f'(t_0) + k_2 g'(t_0) = 0$
- El determinante del sistema es
- $\begin{vmatrix} f(t_0) & g(t_0) \\ f'(t_0) & g'(t_0) \end{vmatrix} = W(f,g)(t_0) \neq 0$ por hipótesis!!!
- la única solución $k_1 = k_2 = 0$!!! Contradicción. Por lo tanto son linealmente independientes.

- La segunda parte del teorema : Además si f, g son linealmente dependientes en I entonces $W(f, g)(t) = 0$ para todo t en I

- Por contradicción, si, $f, g,$ son linealmente dependientes pero la conclusión es falsa, es decir existe un punto t_0 en el intervalo con $W(f, g)(t_0) \neq 0$
- Por la primera parte del teorema las funciones f, g son linealmente independientes!!! Tenemos una contradicción.
- Es una propiedad fácil de aplicar, por ejemplo sean $f = e^t, g = e^{3t}$

- $W(f, g)(t_0) = \begin{vmatrix} e^{t_0} & e^{3t_0} \\ e^{t_0} & 3e^{3t_0} \end{vmatrix} = 2e^{4t_0} \neq 0$

Teorema de Abel Sean y_1, y_2 soluciones de la ecuación diferencial $L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ con p, q funciones continuas en el intervalo I, entonces el wronskiano $W(y_1, y_2)(t)$ está dado por:

$$W(y_1, y_2)(t) = c\exp(-\int p(t)dt)$$

con *c* una constante que depende de y_1, y_2, pero no de *t*, además $W(y_1, y_2)$ es cero en todo el intervalo o nunca es cero.

- Nota Podemos calcular el wronskiano sin resolver el sistema, por ejemplo si tenemos
- $x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$, ecuación de Bessel
- $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)y = 0 \ \rightarrow W(y_1, y_2) = cexp(-\ln(x)) = \frac{c}{x}$

Demostración

- Recordemos que
  - $\mathrm{W}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$
  - $W'(y_1, y_2) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$
- Las soluciones
  - $y_1'' + p(t) y_1' + q(t) y_1 = 0 \quad (-y_2)$
  - $y_2'' + p(t) y_2' + q(t) y_2 = 0 \quad (y_1)$
- Sumando, se eliminan los últimos términos del lado izquierdo.
  - $y_2'' y_1 - y_1'' y_2 + p(t)[y_2' y_1 - y_1' y_2] = 0$
  - $W' + p(t) W = 0, \leftrightarrow \frac{W'}{W} = -p(t) \leftrightarrow \ln(W) = -\int p(t) dt + \mathrm{c}$
  - $W(y_1, y_2)(t) = c \exp(-\int p(t) dt)$

Resumiendo dos soluciones de $L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, con coeficientes continuos en el intervalo I son linealmente dependientes en I si y sólo si $W(y_1, y_2)(t)$ =0, en todo el intervalo I y son independientes si y sólo si $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$

- En el intervalo en que los coeficientes son continuos tenemos la equivalencia entre las siguientes cuatro afirmaciones.

1. Las funciones y_1, y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones en I
2. Las funciones y_1, y_2 son linealmente independientes en I.
3. $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ para algún t_0 en I
4. $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ en todo el intervalo I

las soluciones y_1, y_2 son la base de un subespacio de dimensión 2 que es el espacio solución de la ecuación

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Ejercicios

- 1- Estudie la dependencia lineal de $f(x) = x^3, g(x) = |x|^3$, diferentes intervalos.
- 2-Encuentre el Wronskiano de $(1 - x^2)y'' - 2xy' + a(a + 1)y = 0$, ecuación de Legendre.
- 3- Si y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de $ty'' - 2y' + te^t = 0$ y W(y_1, y_2)(1)=2, ¿cuál es el valor de W(y_1, y_2)(5)?
- 4-Si el wronskiano de dos soluciones de $y'' + p(t)y' + q(t)y$=0 es constante ¿qué podemos decir de los coeficientes $p(t), q(t)$?
- 5- Pruebe que si y_1, y_2 tiene un máximo o un mínimo en el mismo punto $t_0 \in I$, no pueden ser un conjunto fundamental en ese intervalo.

Bibliografía

- W.Boyce, R. DiPrima, “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems” 8Ed