

Funciones pares e impares

Mayo 3 2022

Luz Myriam Echeverry N

- Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que es
 - Par si $f(-x) = f(x)$ para todo x
 - Impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x
- Ejemplos
- Pares $1, x^2, \cos nx, |x|$
- Impares $x, \operatorname{sen} nx, x^3$
- La mayoría de funciones no son ni par ni impar, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$
- La suma de funciones pares es par
- La suma de funciones impares es impar
- El producto de funciones pares es par
- El producto de funciones impares es par! Sean f, g impares
 - $(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)(-g(x)) = f(x)g(x).$
- Producto par por impar es impar. $h(x)$, par
- $(hf)(-x) = h(-x)f(-x) = h(x)(-f(x)) = -(hf)(x)$

Propiedades de las integrales simétricas

- Si f es función par

- $\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx$

- Si f es función impar

- $\int_{-L}^L f(x)dx = 0$

Series de Fourier

- Si f es una función, continua a trozos y derivada continua a trozos, **par** periódica de período $2L$ entonces
 - $f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ es una función **par**
- Y si f es una función **impar**
 - $f(x)\sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ es una función **impar**
- En la serie de Fourier tenemos que si
- f es una función **par**
 - $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, n=0,1,2$
- $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)\sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 0$
- Para una función par su serie contiene el término constante y únicamente los términos en cosenos

- f es una función **impar**

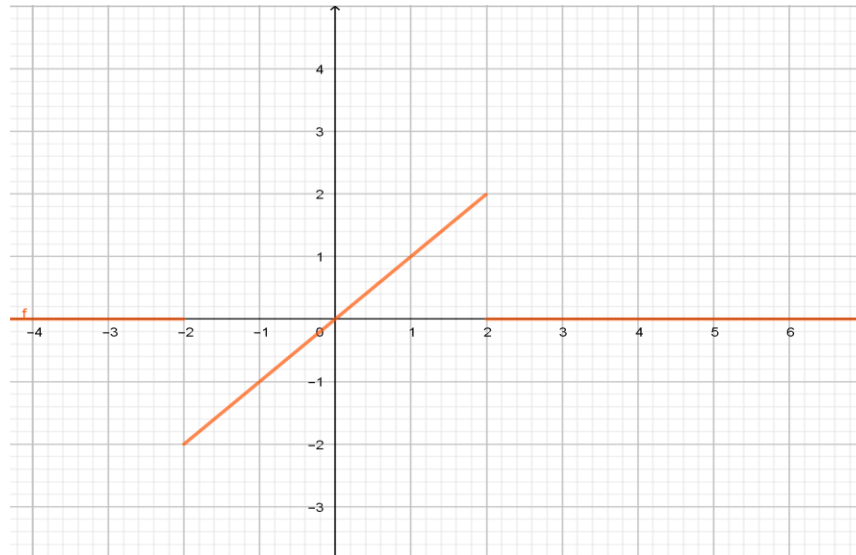
- $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 0, n=0,1,2$

- $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, n=1,2,3$

- Para una función impar su serie contiene únicamente los términos en senos

- Ejemplo

- $f(x) = x, -L < x < L, f(-L) = f(L) = 0$, periódica, $T=2L$



- La función es impar

- $a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$

- $b_n = 2 \int_0^L x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx$

- $= \frac{2}{L} \left[\frac{L}{n\pi} \right]^2 \left\{ \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) - \frac{n\pi}{L} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\} \Big|_0^L$

- $= \frac{2L}{n\pi} (-1)^n$

Ejercicios

- Para cada función extiéndala en forma par o impar y periódica de acuerdo con la serie pedida.

- 1) Serie de cosenos de período 4

$$\bullet f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

- 2) Serie de senos de período 4

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

- 3) $f(x) = 1, 0 < x < \pi$, serie de cosenos de período 2π

- 4) $f(x) = 1, 0 < x < \pi$, serie de senos de período 2π

Bibliografía

- Boyce DiPrima. "Elementary Differential equations and Boudary problems" 8ª ed.