7.8 Valores propios repetidos

5/04/2022

Luz Myriam Echeverry N

Ejemplo

- Sea
  - $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$
- Polinomio característico:
  - $r^2 - 4r + 4 = 0 \leftrightarrow (r-2)^2 = 0$
- Tiene un valor propio repetido, *r=2*, multiplicidad: 2
- Vector propio:
  - $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = -x,\ V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- La multiplicidad geométrica es uno, sólo un vector propio.
  - $\vec{x}_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Valor propio repetido.

- Siguiendo el procedimiento usado en las ecuaciones de segundo orden se podría tratar de buscar la otra solución de la forma:
- $\vec{x}_2 = t\vec{\xi}e^{2t}$, multiplicar la anterior solución por $t\vec{\xi}$, buscar el vector.
- $\vec{\xi}$: vector propio de A
    - $\vec{x}' = \vec{\xi}e^{2t} + 2t\vec{\xi}e^{2t} = A\, t\vec{\xi}e^{2t}$?
        - $\vec{\xi}e^{2t} + 2t\vec{\xi}e^{2t} - A\, t\vec{\xi}e^{2t} = 0$
            - $\vec{\xi}e^{2t} + (2\vec{\xi} - \overrightarrow{A\,\xi})te^{2t} = 0$
- Para cumplir la ecuación se necesite que los coeficientes de e^{2t} y te^{2t} sean cero!!
    - $\vec{\xi}=0$, la otra $(2\vec{\xi} - \overrightarrow{A\,\xi})=(2I-A)\vec{\xi}=0$
- No sirve.

Propuesta

- En el reemplazo:
  - $\vec{\xi}e^{2t} + 2t\vec{\xi}e^{2t}$ $-$A $t\vec{\xi}e^{2t} = 0$
- Para buscar una solución diferente de cero parece apropiado suponer que la segunda solución tiene un término: $\vec{\eta}\, e^{2t}$.
- Es decir:
  - $\vec{x}_2 = t\vec{\xi}e^{2t}+ \vec{\eta}\, e^{2t}$.
- Derivando:
  - $\vec{x}_2{}' = \vec{\xi}e^{2t}+2\, t\vec{\xi}e^{2t}+2\,\vec{\eta}\, e^{2t} = \mathrm{A}(t\vec{\xi}e^{2t}+ \vec{\eta}\, e^{2t})$
- Los coeficientes de e^{2t} y los de t e^{2t} debes ser iguales:
- $\vec{\xi} + 2\,\vec{\eta}$=A $\vec{\eta}$ y 2 $\vec{\xi}$=A $\vec{\xi}$

Segunda solución

- La segunda solución:
  - $\vec{x}_2 = t\vec{\xi}e^{2t} + \vec{\eta}\, e^{2t}$.
- Con:
  - $\vec{\xi} + 2\,\vec{\eta} = A\,\vec{\eta}$ y $2\,\vec{\xi} = A\,\vec{\xi}$
- Es decir
  - $(A - 2I)\,\vec{\xi} = 0$ valor propio
  - $(A - 2I)\vec{\eta} = \vec{\xi}$ Valor propio generalizado.
- En el ejemplo ya está $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Falta:
  - $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Segunda solución

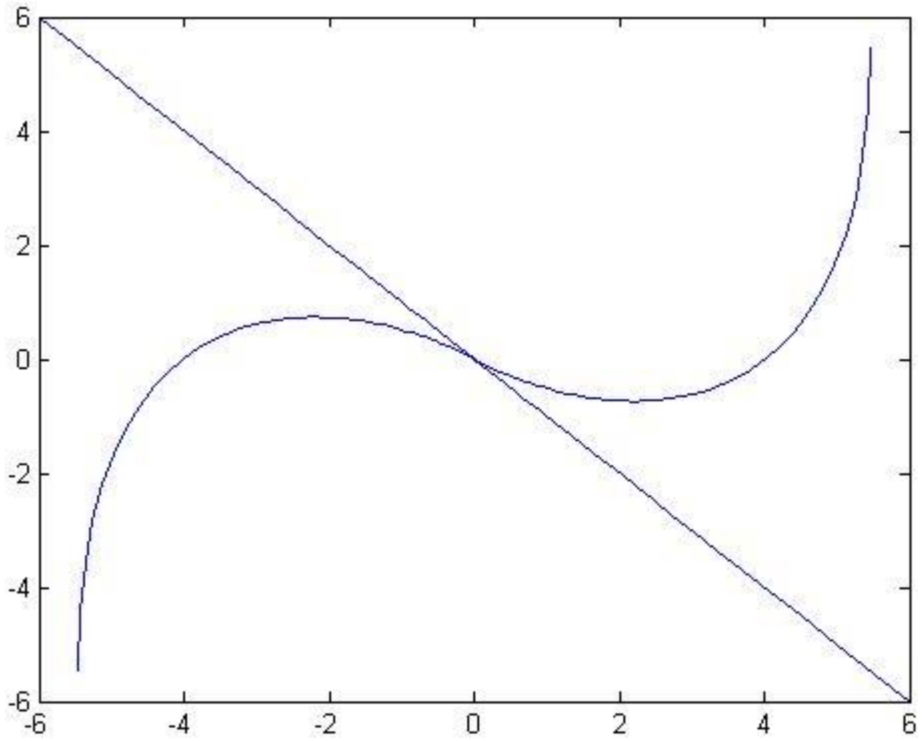
- $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Es un sistema con infinitas soluciones.
    - $-x - y = 1$, si $x = k, y = -1 - k$
- Entonces
    - $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} k \\ -1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Y
- $\vec{x}_2 = t\vec{\xi}e^{2t} + \vec{\eta}\, e^{2t} = te^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$.
    - $\vec{x}_2 = te^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{k}\vec{x_1}(t)$
- Eliminando el último término que es múltiplo de $X_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Solución general:

- Resumiendo
  - $\vec{x}\,(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\left[te^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + ke^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right],$
- El comportamiento cuando t tiende al infinito, es crecer sin cota y cuando tiende a menos infinito la solución va a cero.
- $\vec{x}\,(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\, ke^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c\, e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Grafica

- Cuatro gráficas
- Con $c_2 = 0, \text{dos semirectas.}$
- Dos curvas, $c_1 = 0.5, c_2 = -0.2$
- Y $c_1 = -0.5, c_2 = 0.2$



Caso general

- En el caso de tener valor propio de multiplicidad dos (o mas si el sistema lo permite) y un sólo vector propio el procedimiento es similar al que se realizó anteriormente. Es decir.
- Si $r=\rho$ es un valor propio repetido con sólo un vector propio $\vec{\xi}$ se procede a buscar la solución de la forma:
  - $\vec{x}_2 = t\vec{\xi}e^{\rho t} + \vec{\eta}\, e^{\rho t}$.
- Con $\vec{\eta}$ solución de:
- $(A - \rho I)\vec{\eta} = \vec{\xi}$ Valor propio generalizado. Este sistema siempre tiene solución por las características de la matriz. (Álgebra lineal)

Ejemplo, ejercicio No 9

- Resolver:
  - $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ -3/2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}, \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Polinomio característico:
- $p(r) = r^2 - r + \left(-2 + \frac{9}{4}\right) = r^2 - r + \frac{1}{4} = (r - \frac{1}{2})^2$
- Valor propio repetido, $r = \frac{1}{2}$
- Vector propio:
  - $\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ -3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Solución, $x = -y$
  - $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vector propio generalizado.

- Sólo un vector propio. Resolver:
  - $(A-\rho I)\vec{\eta} = \vec{\xi}$
  - $\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ -3/2 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Son dos ecuaciones iguales!
  - $\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y=1, \leftrightarrow x + y = \frac{2}{3} \leftrightarrow y = \frac{2}{3} - k, x = k$
- Vector propio generalizado:
  - $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} k \\ \frac{2}{3} - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Siempre aparece el vector propio inicial.

Solución general

- Para la segunda solución:
  - $\vec{x}_2 = t\vec{\xi}e^{\rho t} + \vec{\eta}\, e^{\rho t}.$

$$\vec{x}_2 = te^{t/2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + e^{t/2}\left[\begin{pmatrix}0\\2/3\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]$$

La parte en rojo es la primera solución, por el principio de superposición podemos eliminarla. La solución genral:

$$\vec{x}\,(t) = c_1 e^{t/2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + c_2\left[te^{t/2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + e^{t/2}\left[\begin{pmatrix}0\\2/3\end{pmatrix}\right]\right]$$

Solución del problema de valor inicial

- Para que: , $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\vec{x}(0) = c_1 e^{t/2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \left[te^{t/2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \; e^{t/2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right] \right] \Big|_{t=0}$ = $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Queda:
  - $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow c_1 = 3, c_2 = \frac{3}{2}$
- Es decir
  - $\vec{x}$(t)=3$e^{t/2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (3/2) \left[te^{t/2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \; e^{t/2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right] \right]$
  - $\vec{x}\,(t) = \left(\frac{2}{3}\right) te^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{t/2} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Qué pasa con el cambio de base

- En el caso de dos vectores propios linealmente independientes, la base de vectores propios diagonaliza la matriz.
- Aquí:
  - $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Tomando k=0, la matriz:
- $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2/3 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculemos $T^{-1}AT = ?$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- Forma de Jordan de la matriz.

Matriz Fundamental

- La solución general
- $\vec{x}(t) = c_1 e^{t/2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + c_2\left[te^{t/2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \ e^{t/2}\left[\begin{pmatrix}0\\2/3\end{pmatrix}\right]\right]$
- Una matriz fundamental:
  - $\Psi(\mathrm{t})=\begin{pmatrix} e^{t/2} & te^{t/2} \\ -e^{t/2} & -te^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{t/2} \end{pmatrix}$
- La matriz:$\Psi(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\Psi^{-1} = \frac{1}{2/3}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$
- La matriz fundamental:
  - $\Phi(\mathrm{t})=\Psi(\mathrm{t})\ \Psi^{-1}(0)$

Ejercicio 19

- Sea :
  - $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, λ número real arbitrario.
- Calcular: J^2, J^3, J^n
- $J^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$,
- $J^3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$

  - $J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

Demuestre por inducción $J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

- Caso n=1
  - $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
- Suponemos cierto para *n*
  - $J^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$

Exponencial

- Calcular exp(J)
- $\exp(tJ) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$
- La sumatoria implica sumar término a término es decir:
- $\exp(tJ) = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \lambda^n & \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n!} t^n \lambda^{n-1} \\ 0 & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$
- El término;
- $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n!} t^n \lambda^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{n-1!} t^{n-1} \lambda^{n-1} = t(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \lambda^n) = te^{\lambda t}$

Ejercicios hallar la solución general y hacer graficas

- 1) $\frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$
- 2) $\frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\vec{x}$
- 3) $\frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\vec{x}$
- $\frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}\vec{x}$

Bibliografía

- Boyce DiPrima. ¨ Elementary Differential equations and Boudary problems¨8ª ed.
- https://stage.geogebra.org/m/utcMvuUy