

Tema: Distancias, Repaso Álgebra, Vectores y Matrices Aleatorios

1. Las siguientes son 5 medidas sobre las variables x_1, x_2 , y x_3 :

x_1	9	2	6	5	8
x_2	12	8	6	4	10
x_3	3	4	0	2	1

Encuentre las matrices $\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{S}_n$, y \mathbf{R} .

2. Sea $\mathbf{x}' = [5, \quad 1, \quad 3]$ y $\mathbf{y}' = [-1, \quad 3, \quad 1]$

- (a) Grafique los dos vectores.
 (b) Encuentre (i) la longitud de \mathbf{x} , (ii) el ángulo entre \mathbf{x} y \mathbf{y} , y (iii) la proyección de \mathbf{y} en \mathbf{x} .
 (c) Dado que $\bar{x} = 3$ y $\bar{y} = 1$, grafique $[5 - 3, 1 - 3, 3 - 3] = [2, -2, 0]$ y $[-1 - 1, 3 - 1, 1 - 1] = [-2, 2, 0]$

3. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

- (a) ¿Es \mathbf{A} una matriz simétrica?
 (b) Muestre que \mathbf{A} es definida positiva.
 (c) Determine los valores y vectores propios de \mathbf{A} .
 (d) Encuentre la descomposición espectral de \mathbf{A} .
 (e) Determine la inversa de \mathbf{A} .
 (f) Encuentre los valores y vectores propios de \mathbf{A}^{-1} .
4. Verifique las relaciones $\mathbf{V}^{1/2} \boldsymbol{\rho} \mathbf{V}^{1/2} = \boldsymbol{\Sigma}$ y $\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{V}^{1/2})^{-1} \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{V}^{1/2})^{-1}$, donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es el $p \times p$ matriz de covarianza poblacional, $\boldsymbol{\rho}$ es la matriz de correlación poblacional $p \times p$ y $\mathbf{V}^{1/2}$ es la matriz de desviación estándar de la población.
5. Derive las expresiones para la media y las varianzas de las siguientes combinaciones lineales en términos de las medias y covarianzas de las variables aleatorias X_1, X_2 , y X_3 .
- (a) $X_1 - 2X_2$
 (b) $-X_1 + 3X_2$
 (c) $X_1 + X_2 + X_3$
 (d) $X_1 + 2X_2 - X_3$
 (e) $3X_1 - 4X_2$ si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes.

Tema: Geometría de la muestra y muestreo aleatorio

6. Dada la matriz de datos

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Grafique el diagrama de dispersión en $p = 2$ dimensiones. Localice la media de la muestra en su diagrama.
 - Dibuje la representación $n = 3$ -dimensional de los datos y trace los vectores de desviación $\mathbf{y}_1 - \bar{x}_1 \mathbf{1}$ y $\mathbf{y}_2 - \bar{x}_2 \mathbf{1}$
 - Dibuje los vectores de desviación en (b) que emanan del origen. Calcule las longitudes de estos vectores y el coseno del ángulo entre ellos. Relacione estas cantidades con \mathbf{S}_n y \mathbf{R}
 - Calcular la varianza muestral generalizada $|\mathbf{S}|$
7. Demuestre que $|\mathbf{S}| = (s_{11}s_{22} \cdots s_{pp}) |\mathbf{R}|$

Tema: Densidad normal multivariante y sus propiedades

- Sea \mathbf{V} una variable aleatoria vectorial con un vector medio $E(\mathbf{V}) = \boldsymbol{\mu}_v$ y una matriz de covarianza $E(\mathbf{V} - \boldsymbol{\mu}_v)(\mathbf{V} - \boldsymbol{\mu}_v)' = \boldsymbol{\Sigma}_v$. Demuestre que $E(\mathbf{V}\mathbf{V}') = \boldsymbol{\Sigma}_v + \boldsymbol{\mu}_v\boldsymbol{\mu}_v'$
- Considere una distribución normal bivariada con $\mu_1 = 1, \mu_2 = 3, \sigma_{11} = 2, \sigma_{22} = 1$ y $\rho_{12} = -0.8$
 - Escriba la densidad normal bivariada.
 - Escriba la expresión de distancia estadística al cuadrado $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ como una función cuadrática de x_1 y x_2 .
- Sea $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ con $\boldsymbol{\mu}' = [-3, 1, 4]$ y

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes variables aleatorias son independientes? Explique.

- X_1 y X_2
- X_2 y X_3

Ejercicio extra: NO es para entregar

- Considere los conjuntos de puntos (x_1, x_2) cuyas "distancias" desde el origen están dadas por

$$c^2 = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2$$

para $c^2 = 1$ y para $c^2 = 4$. Determine los ejes mayor y menor de las elipses de distancias constantes y sus longitudes asociadas. Dibuje las elipses de distancias constantes y comente sus posiciones. ¿Qué pasará cuando c^2 aumente?