Luz Myriam Echeverry N

- Luz Myriam Echeverry N
- Clase No 5
- Febrero 8/2022

Ch 2.4:Como diferenciar entre ecuaciones Lineales y No lineales

- Recordemos que una EDO general tiene la forma $y' = f(t,y)$, es lineal si f es lineal en y, y no lineal f es no lineal en y.
- Ejemplos: $y' = ty - e^t$, $y' = ty^2$.
- Vamos a ver que la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales abarcan varios aspectos:
  - En la teoría de existencia y unicidad y en el estudio del dominio de la solución.
  - Usualmente la solución de una ecuación diferencial lineal se puede calcular de la manera más general, lo cual es raro en el caso no lineal.
  - Las ecuaciones lineales frecuentemente tienen soluciones explícitas mientras que las no lineales típicamente no tienen soluciones explícitas, y a veces tampoco tienen soluciones implícitas.
- En los dos tipos de ecuaciones, la construcción de soluciones numéricas y gráficas es un tema importante.

Teorema 2.4.1

- Consideremos el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \ \ y(0) = y_0$$

Si las funciones p y g son continuas en (α, β), intervalo abierto que contienen el punto $t = t_0$, entonces existe una única solución $y = \phi(t)$ que cumple el PVI para todo t en (α, β).

- **Idea de la Prueba:** Usando el método de factor integrante:

$$y = \frac{\int_{t_0}^{t} \mu(t) g(t) dt + y_0}{\mu(t)}, \quad \text{where } \mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s) ds}$$

Teorema 2.4.2

- Consideramos el problema de valor inicial :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \;\; y(0) = y_0$$

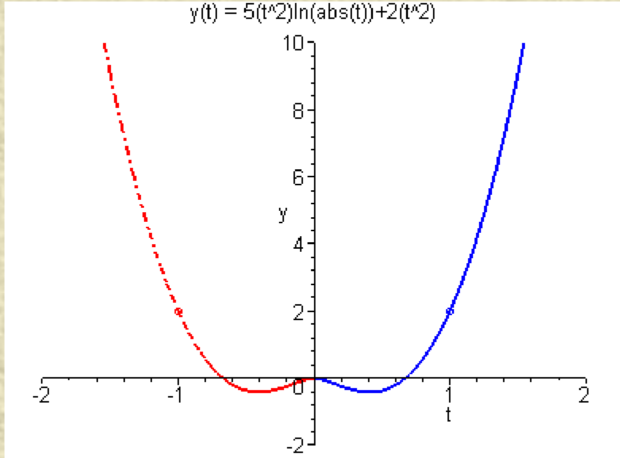
- Supongamos que f y $\partial f/\partial y$ son continuas en un rectángulo abierto $(t, y) \in (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ que contiene a (t_0, y_0). Entonces en $(t_0 - h, t_0 + h) \subseteq (\alpha, \beta)$ existe una única solución $y = \phi(t)$ del PVI(Problema de valor inicial).
- **Comentario sobre la prueba:** Como no existe una fórmula general para el PVI no lineal, la demostración es difícil y se deja para otro curso.
- Las hipótesis del teorema 2.4.2 son suficientes pero no necesarias para garantizar la existencia de la solución, y la continuidad de f garantiza existencia más no la unicidad de la solución ϕ.

Ejemplo 1:PVI Lineal

- Recordemos el PVI Cap2.1

$$ty' - 2y = 5t^2, \quad y(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 5t^2 \ln|t| + 2t^2$$

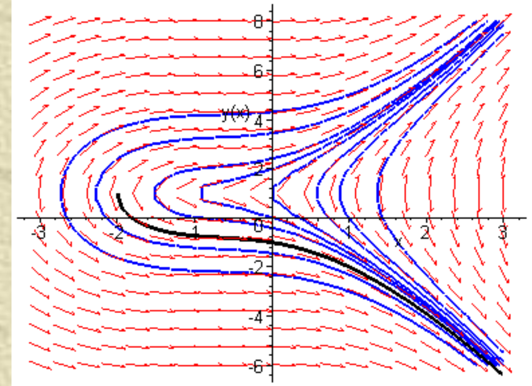
- La solución del PVI es válida para $t > 0$, es decir para el intervalo en el que $p(t) = -2/t$ es continua.
- Si la condición inicial fuera $y(-1) = 2$,la solución tienen la misma expresión pero esta definida para , $t < 0$.
- En todo caso, el Teorema 2.4.1 garantiza la unicidad en el intervalo correspondiente.



Ejemplo 2: PVI No lineal (1 of 2)

- Consideremos el PVI no lineal del Cap 2.2:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1$$

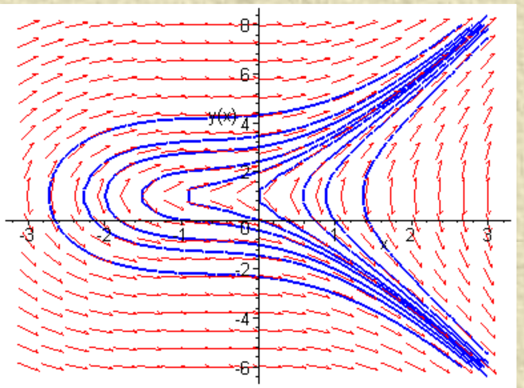


- Las funciones f y $\partial f/\partial y$ definidas por

$$f(x,y) = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)^2},$$

- son continuas excepto en la recta $y = 1$.
- Un rectángulo que contenga a (0, -1) con f y $\partial f/\partial y$ continuas, no toca a $y = 1$.
- Ancho del rectángulo? La solución definida para $t > -2$, es $y = 1 - \sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$

Ejemplo 2: Cambio en las condiciones Iniciales(2 of 2)



- Nuestro problema de valor inicial es

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)},\ \ y(0)=-1$$

con

$$f(x,y)=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)^2},$$

continuas excepto sobre $y = 1$.

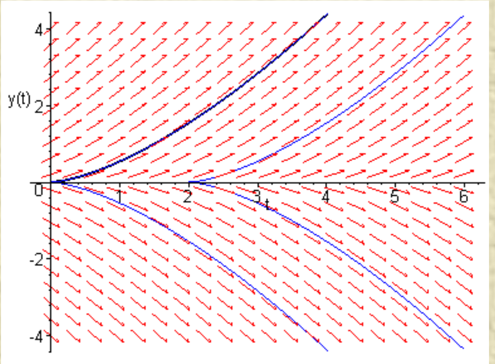
- Si cambiamos las condiciones iniciales $y(0) = 1$, el teorema 2.4.2 no se cumple. Resolviendo el PVI, obtenemos

$$y=1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x},\ \ x>0$$

- La solución existe pero no es única.

Ejemplo 3:PVI no lineal

- Nuestro problema de valor inicial es



$$y' = y^{1/3}, \;\; y(0) = 0 \qquad (t \geq 0)$$

- Las funciones *f* y $\partial f/\partial y$ dadas por

$$f(t,y) = y^{1/3}, \; \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \frac{1}{3}y^{-2/3}$$

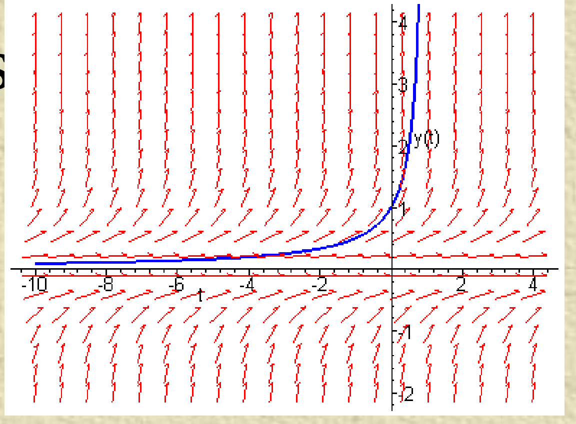
- *f* continua en todas partes , pero $\partial f/\partial y$ no existe en $y = 0$, y el Teorema 2.4.2 no se cumple.las soluciones existen pero no son únicas.Separando variables, obtenemos

$$y^{-1/3}dy = dt \;\; \Rightarrow \;\; \frac{3}{2}y^{2/3} = t + c \;\Rightarrow\; y = \pm\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}, \;\; t \geq 0$$

- Si la condición inicial no esta en el eje *t*, el teorema2.4.2garantiza la existencia y unicidad de la solución.

Ejemplo 4: PVI no lineal

- Nuestro problema de valor inicial es



$$y' = y^2, \quad y(0) = 1$$

- Las funciones f y $\partial f/\partial y$ dadas por

$$f(t,y) = y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = 2y$$

- f y $\partial f/\partial y$ son continuas en $t = 0$, y el Teo. 2.4.2 garantiza la existencia y unicidad de la solución.
- Separando variables

$$y^{-2}dy = dt \;\Rightarrow\; -y^{-1} = t + c \;\Rightarrow\; y = \frac{-1}{t+c} \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{1-t}$$

- La solución $y(t)$ esta definida en $(-\infty, 1)$. La singularidad $t = 1$ no se deduce del PVI.

Intervalo de Definición, Caso Lineal

- Por el teorema 2.4.1, la solución de un problema de valor inicial lineal

$$y' + p(t)y = g(t), \;\; y(0) = y_0$$

  existe en cualquier intervalo que contenga a $t = t_0$ y en el que p y g sean continuas.
- Asíntotas verticales y otras discontinuidades de p o g generan discontinuidades en la solución.
- Pero pueden existir soluciones continuas en puntos de discontinuidad de p o g. En el Cap.2.1: Ejemplo 3 del texto pasa esto.
- .

Intervalo de definición: Ecuaciones no Lineales

- El intervalo de existencia de la solución es difícil de calcular.
- La solución $y = \phi(t)$ existe si $(t, \phi(t))$ esta en el rectángulo del Teorema 2.4.2. Lo usual es que no se conoce $\phi(t)$ entonces es imposible dar el rectángulo.
- La relación del intervalo con f en $y' = f(t, y)$, no es simple.
- Las singularidades de la solución dependen de la función y del punto inicial. .

Soluciones Generales

- En el caso lineal se tienen TODAS las soluciones.
- En el caso no lineal es posible que la solución no exista.
- Considere el Ejemplo 4: La función $y = 0$ es solución, pero ningún c nos la da:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1}{t+c}$$

Soluciones explícitas: Ecuaciones Lineales

- Por el Teorema 2.4.1, una solución al PVI

$$y' + p(t)y = g(t), \;\; y(0) = y_0$$

existe en el intervalo en el que esté $t = t_0$ y p y g son continuas, la solución es única.

- Es explícita,

$$y = \frac{\int_{t_0}^{t} \mu(t)g(t)dt + y_0}{\mu(t)}, \quad \text{where } \mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds},$$

puede evaluarse en cualquier valor t.

Aproximación de la solución

- Para las ecuaciones lineales se conoce la fórmula.
- Si no podemos integrar, se aproxima numéricamente.

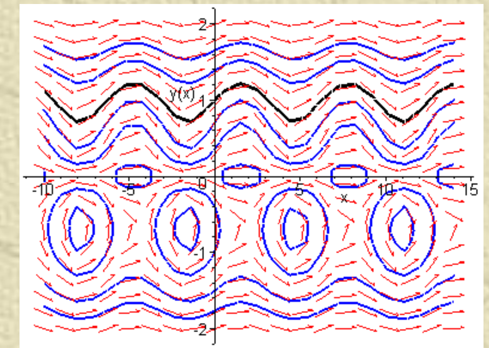
$$y = \frac{\int_{t_0}^{t} \mu(t) g(t) dt + C}{\mu(t)}, \quad \text{where } \mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s) ds}$$

$$\int_{t_0}^{t} \mu(t) g(t) dt \approx \sum_{k=1}^{n} \mu(t_k) g(t_k) \Delta t_k$$

Soluciones Implícitas: Ecuaciones no lineales

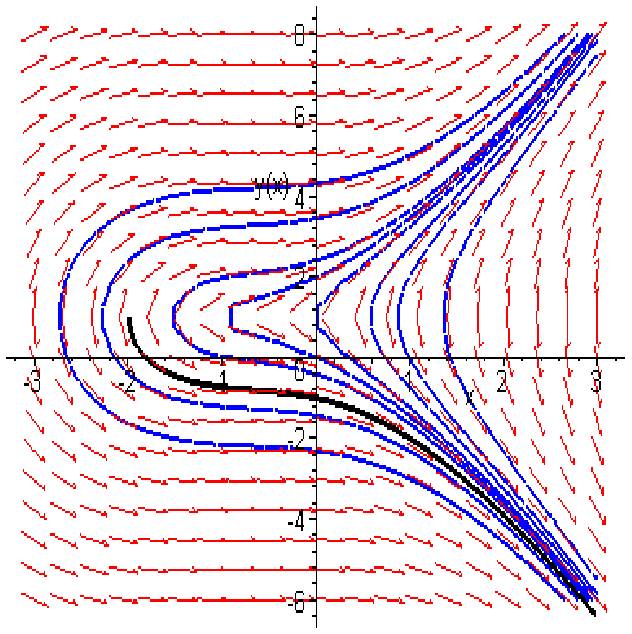
- La solución explicita en el caso no lineal usualmente no existe.
- En los ejemplos se vieron varias soluciones implícitas.
- Es decir se necesitan soluciones numéricas de *y* para los valores deseados de *t*. Se representan usualmente de manera gráfica.
- Recordemos el ejemplo

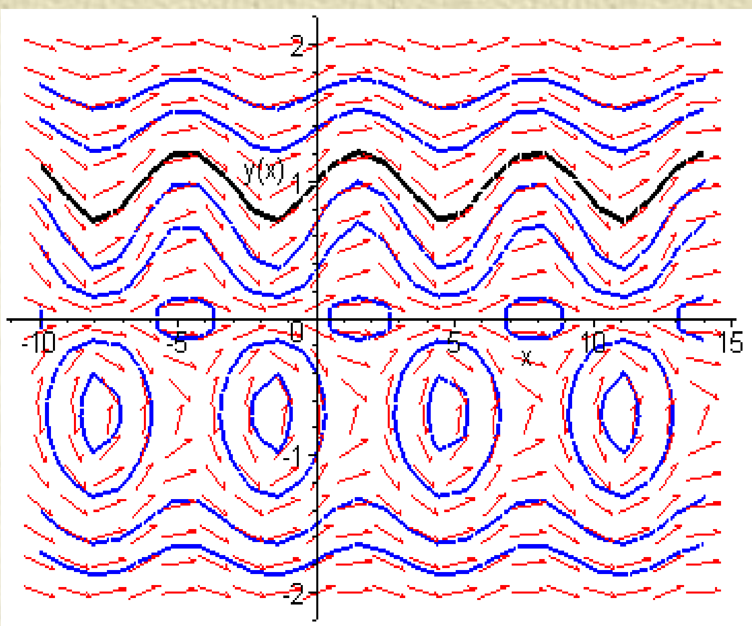
$$y' = \frac{y\cos x}{1+3y^3}, \quad y(0)=1 \;\Rightarrow\; \ln y + y^3 = \sin x + 1$$



Campos direccionales

- El bosquejo del campo direccional es de gran ayuda.
- Da una idea del comportamiento de la solución, identifica regiones en el plano *ty*-en donde es interesante la solución..
- El 2.7 y cap. 8 se ven métodos numéricos.





Ejercicios

- Sin resolver el problema determine el intervalo más grande en donde la solución existe
- 1-$(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2\ y(1) = -3$
- 2-$(\ln t)y' + y = \cot t, y(2) = 3$
- Establezca el rectángulo más grande en donde se cumplen las hipótesis del teorema 2.4.2
- 3-$y' = \frac{\ln t}{1-t^2+y^2}$

Bibliografía

- W.E. Boyce, R.C. DiPrima, “Elemtary Differential Equations and Boundary Value Problems”. Willey, 8e ed.
- https://www.geogebra.org/m/Pd4Hn4BR