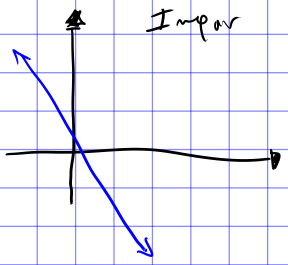
Ejercicios

- Calcular la serie de Fourier de
- 1) $f(x) = -x, -L \le x < L, f(x + \overset{2}{2L}) = f(x)$, L=1

Impar



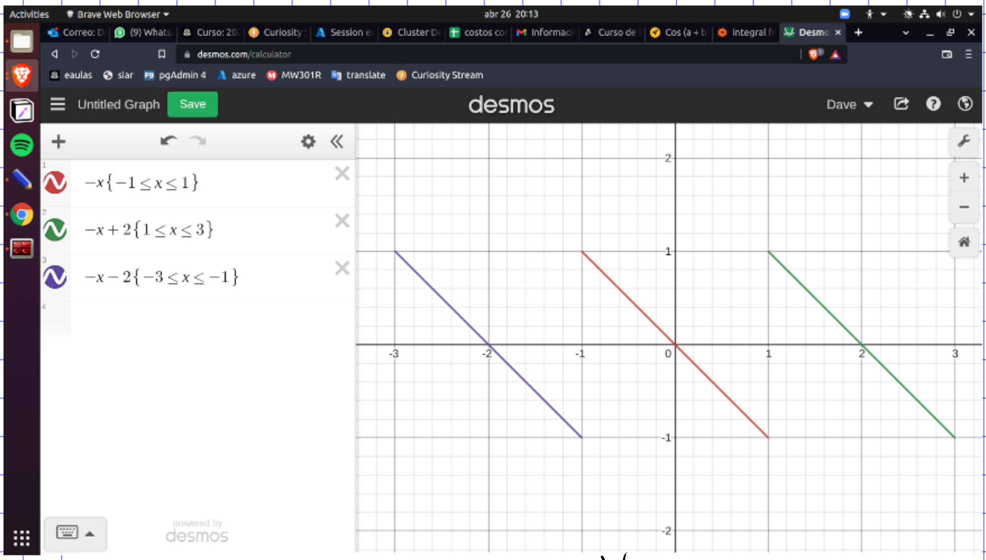
- $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$, n=0,1,2,... $\to 0$
- $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\,\frac{n\pi x}{L}dx$

$$b_n = \frac{1}{1}\cdot\int_{-1}^{1} -x\,sen\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx$$

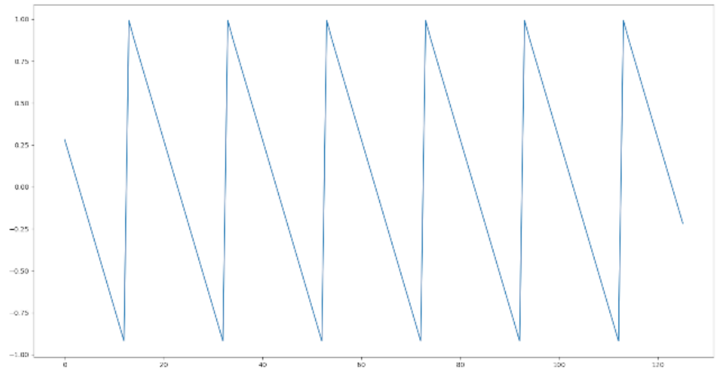
$$= -\int_{-1}^{1} x\,sen(n\pi x)\,dx$$

$$= 2\frac{(-1)^n}{\pi n}$$

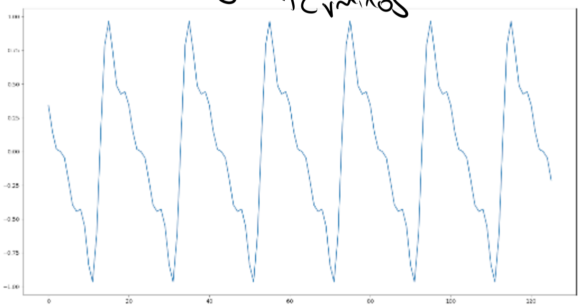
$$\sum_{i=2k+1}^{\infty} b_n\,sen(n\pi x), \quad a_n = 0, \ \forall n$$



1000 términos



5 términos



Series trigonométricas

Periodo fundamental $T_m = \frac{2L}{\pi}$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

la serie converge a la función f

Periodicidad

$$f(x + nT) = f(x), \quad n \in \mathbb{Z}$$

- Si f y g tienen periodo T, cualquier comb. lineal de las dos funciones también tiene periodo T.

$$F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$$

$$F(x+T) = c_1 f(x+T) + c_2 g(x+T)$$

$$= c_1 f(x) + c_2 g(x) = F(x)$$

- $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \dots, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}$

es ortogonal con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg \, dx = 0$$

$\Downarrow$

las funciones f y g son ortogonales con producto interno

- $\{1, cosx, senx, \cos 2x, sen\ 2x, \dots \cos nx\ , sen\ nx \dots\}$ ortogonal con el producto interno, producto escalar entre dos funciones diferentes es cero
- A ver
- 0=<1, f > = $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos nx\, dx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} 1 \operatorname{sen} nx\, dx = 0$, n=1,2,...
- $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, f función impar ...
- 1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx$=? $f(x) = -f(-x)$. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$
- 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0,\ n \neq m$
- 3) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = 0,\ n \neq m$
- 4) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0$, impar
- $\cos(A+B) = cosAcosB - senAsenB$, $\cos(A-B) = cosAcosB + senAsenB$

Fórmulas

- Para encontrar a_n y b_n, usaremos la ortogonalidad:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{Sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (*)$$

Multiplicamos por el $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ para calcular a_n:

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \int_{-L}^{L} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

(Pero $m=n$)

$$= a_n \int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= a_n \cdot L$$

para b_n es análogo, Así:

$$a_n = \frac{1}{L} \int f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad , n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$