Metodo de Separación de Variables

Suponemos que la solución tiene forma particular:

$$U(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Constante que depende del material

Longitud de la barra

$$U_t - k U_{xx} = 0 \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \qquad (1)$$

$$U(0,t) = U(L,t) = 0 \qquad t \geq 0 \qquad (2)$$

→ la temperatura en los extremos es cero

$$U(x,0) = \boxed{f(x)} \qquad (3)$$

representa el estado inicial de la barra

Ahora

$$U(x,t) = X(x)\,T(t)$$
$$U_t = X(x)\,T'(t)$$
$$U_{xx} = X''(x)\,T(t)$$

Reemplazamos en: $U_t - kU_{xx} = 0 \quad 0 < x < L, \ t > 0 \ (1)$ Así:

$U_t = kU_{xx}$

$$X(x)\,T'(t) = k\,X''(x)\,T(t)$$

Separamos Variables:

$$\boxed{\frac{T'(t)}{T(t)}} = \boxed{k\,\frac{X''(x)}{X(x)}} = -\lambda$$

Depende solo de t

Depende solo de x

Decimos que ese ratio es igual a una constante arbitraria $\in \mathbb{R}$

$$T'(t) = -k\lambda\,T(t) \quad , \quad t > 0$$
$$X''(x) = -\lambda\,X(x) \quad , \quad 0 < x < L$$

Recordemos las condiciones de frontera:

$$U(0,t) = U(L,t) = 0 \ ; \ t \geq 0$$
$$= X(0)\,T(t) = X(L)\,T(t)$$

Para que $T(t) \neq 0 \Rightarrow X(0) = 0$

Entonces tenemos para solucionar:

- $X(0) = X(L) = 0$
- $X''(x) = -\lambda X(x)$

entonces tenemos una ecn. diferencial:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \Rightarrow r^2 + \lambda = 0$$
$$r^2 = -\lambda$$

Surgen casos para la solución:

- $\lambda < 0 \Rightarrow -\lambda > 0, \quad X(x) = A e^{\sqrt{-\lambda x}} + B e^{-\sqrt{-\lambda x}}$
- $\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$
- $\lambda > 0 \Rightarrow X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\, x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, x)$

Un análisis más detallado:

⇒ Caso 1 $\lambda < 0$: , $X(x) = A e^{\sqrt{-\lambda x}} + B e^{-\sqrt{-\lambda x}}$

* Dado que cualquier comb. lineal de soluciones también es solución:

• $\cosh(\sqrt{-\lambda}x) = \frac{e^{\sqrt{-\lambda}x} + e^{-\sqrt{-\lambda}x}}{2}$, y $\operatorname{senh}(\sqrt{-\lambda}x) = \frac{e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}}{2}$

• $X(x) = \alpha\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + \beta\operatorname{senh}(\sqrt{-\lambda}x)$

esta es nuestra nueva forma bonita de escribirlo

pero:

$$X(0) = X(L) = 0, \quad \propto x < L$$

note que $\cosh(x) \neq 0$ y $\operatorname{senh}(x) \neq 0$

entonces $\alpha = 0 = \beta$, es decir $X(x) = 0 \quad \forall x$

entonces $\boxed{U(x,t) = X(x)\,T(t) = 0}$

⇒ caso 2 $\lambda = 0$:

$$X(0) = X(L) = 0$$
$$X(x) = Ax + B$$
$$\Rightarrow B = 0 = A \quad \therefore \quad \boxed{X(x) = 0}$$

⇒ Caso $\lambda > 0$:

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\, x) + B \operatorname{sen}(\lambda x)$$
$$X(0) = X(L) = 0$$

dado que $X(0) = 0 \Rightarrow A\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0) = 0, \quad A = 0$

Pero $B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, L) = 0$ es posible si hay un periodo de L:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Rightarrow X_n(x) = B \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad , n \in \mathbb{Z}$$

Ahora que tenemos $X_n(x)$ solución entonces revisemos $T(t)$

Dado que $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

recuerde que $T''(t) = -k\lambda T(t) \quad , t > 0$:

Vea que la siguiente def. lo satisface:

$$T(t) = e^{-k\lambda t}$$
$$= e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad , n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$U_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad , n = 1, 2, 3 \ldots$$

Cualquier combinación lineal de soluciones también es solución:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{N} B_n \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Caso general:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-k\frac{n\pi}{L}t}$$

Si $\quad U(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

Series de Fourier, 10.2

- Dada una función periódica de periodo T se busca una serie de la forma:
  - $a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$
- Las funciones en la serie tienen período:
  - T=$\frac{2L}{m}$
- Recordemos que $sen\ \alpha x, cos\alpha x$ tienen período $\frac{2\pi}{\alpha}$.

Ortogonalidad

- Dos vectores son ortogonales si su producto interno es cero.
- Definición dadas dos funciones *u,v* en un intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$
- El producto interno de las dos funciones de valor real se define:
  - $< u, v > = \int_{\alpha}^{\beta} uvdx$
- Tienen las propiedades del producto interno:
- i) $< x, x > \geq 0, y\ \ < x, x >$=0 si y sólo si x=0
- ii$< x, y > = < y, x >$
- Iii $< \alpha x, y > = \alpha < x, y >, < x, y + z > = < x, y >$+$< x, z >$