Ecuaciones lineales homogeneas
Coefs. constantes

1) Hallar solución general de $4y'' - 9y = 0$

el polinomio característico es:

$$4r^2 - 4 = 0, \quad r = \pm 1$$

entonces aplicamos:

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$
$$y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}$$

---

2) Resolver el problema de valor inicial

$$6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$$

el polinomio característico es:

$$6r^2 - 5r + 1 = 0, \quad r_1 = \frac{1}{2} \quad r_2 = \frac{1}{3}$$

entonces la solución general queda:

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$
$$= C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 e^{\frac{t}{3}}$$

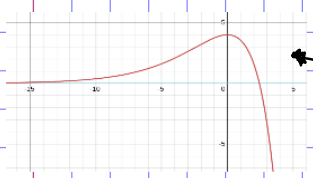
Para solucionar el PVI sabemos:

- $y(0) = C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 e^{\frac{0}{3}} = 4$
  $= C_1 + C_2 = 4$

- $y'(0) = \frac{C_1}{2} e^{\frac{0}{2}} + \frac{C_2}{3} e^{\frac{0}{3}} = 0$
  $= \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} = 0$
  $= \frac{C_1}{2} = -\frac{C_2}{3}, \quad C_1 = \frac{-2}{3} C_2$

Reemplazando:

$$-\frac{2}{3} C_2 + C_2 = 4$$
$$\frac{1}{3} C_2 = 4$$
$$C_2 = 12 \quad \therefore \quad C_1 = -8$$



$$y(t) = -8 e^{\frac{t}{2}} + 12 e^{\frac{t}{3}}$$

---

3) encuentre la eqn. diff. cuya solución general es:

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}$$

$r_1 = 2$, $r_2 = -3$

$$(r+2)(r-3) = r^2 - r - 6$$

entonces:

$$y'' - y' - 6y = 0$$

---

4) encuentre la eqn. diff. cuya solución general es:

$$y(t) = C_1 e^{-t/2} + C_2 e^{-2t}$$

Sabemos que $r_1 = -1/2$ y $r_2 = -2$ son raíces entonces podemos rehacer el polinomio caract.

$$\left(r - \tfrac{1}{2}\right)(r-2) = r^2 - \frac{5}{2} r + 1 = 0$$

entonces la eqn:

$$y'' - \frac{5}{2} y' + y = 0$$

---

5) Resolver el problema de Valor inicial

$$y'' - y' - 2y = 0 , \quad y(0) = \alpha \quad y'(0) = 2$$

Calcular α tal que la solución tienda a cero si $t \to \infty$

Para lograr esto debemos garantizar que $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$ o que $y_1 - y_2 \to 0$ cuando $t \to \infty$.

$$y'' - y' - 2y = 0$$

$$r^2 - r + 2 = 0 , \quad r_1 = \overbrace{\frac{1}{2}}^{\mu} + \overbrace{\frac{\sqrt{7}}{2}}^{\lambda} i$$

$$r_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

Usando el método para raíces complejas:

$$U(t) = e^{\mu t} \cos(\lambda t) \qquad V(t) = e^{\mu t} \operatorname{sen}(\lambda t)$$

$$= e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\sqrt{\tfrac{7}{2}}\, t\right) \qquad = e^{\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\tfrac{7}{2}}\, t\right)$$

$$y = C_1 \cdot e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\sqrt{\tfrac{7}{2}}\, t\right) + C_2 \cdot e^{\frac{t}{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{\tfrac{7}{2}}\, t\right)$$

$$y(0)=\alpha \quad , \quad y'(0)=2 \quad , \quad t_0=0$$

Por calculo previo sabemos

$$C_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2} \cdot \cancel{e^{-r_1 t_0}}^{\,1} \qquad C_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2} \cdot \cancel{e^{-r_2 t_0}}^{\,1}$$

$$C_1 = -C_2$$

$$\frac{\cancel{y_0'} - y_0 r_2}{\cancel{r_1 - r_2}} = \frac{-y_0 r_1 + \cancel{y_0'}}{\cancel{r_1 - r_2}}$$

$$-\cancel{y_0} r_2 = -\cancel{y_0} r_1$$

$$r_2 = r_1$$

Pero vea que $r_1 \neq r_2$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

---

6) Determine el valor de α, si existe, tal que la solución de

$$y'' - (2\alpha - 1)y' + \alpha(\alpha - 1)y = 0$$

$$\underbrace{r^2}_{a} - \underbrace{(2\alpha-1)}_{b} r + \underbrace{\alpha(\alpha-1)}_{c} = 0$$

tiende a cero cuando t tiende a infinito

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-(2\alpha-1)) \pm \sqrt{(2\alpha-1)^2 - 4\alpha(\alpha-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2\alpha - 1 \pm \sqrt{\cancel{4\alpha^2} - \cancel{4\alpha} + 1 - \cancel{4\alpha^2} + \cancel{4\alpha}}}{2}$$

$$= \frac{2\alpha - 1 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$r_1 = \frac{2\alpha \cancel{-1+1}^{\,0}}{2} = \alpha \qquad r_2 = \frac{2\alpha - 1 - 1}{2} = \alpha - 1$$

Si queremos que la solución tienda a cero entonces α debe ser menor que cero o cero.

Soluciones fundamentales de las ecuaciones lineales homogéneas

1) Encuentre el intervalo más grande en el que el problema de valor inicial dado, con seguridad, tiene una única solución.

$$t(t-1)y'' + 3ty' + 4y = 2 \quad , \quad y(3) = 0 \quad , \quad y'(3) = -1$$

$$y'' + \frac{3\cancel{t}}{\cancel{t}(t-1)}y' + \frac{4}{t(t-1)}y = 2$$

$$y'' + \frac{3}{t-1}y' + \frac{4}{t(t-1)}y = 2$$

Vea que hay 3 intervalos $(0,1)$ y $(-\infty, 0)$ y $(1,\infty)$

el intervalo más grande que contiene $t_0 = 3$, y_0 e y'_0 es $(1,\infty)$

2) Halle un conjunto fundamental de soluciones:

$$y'' + 4y' - 2y = 0, \quad t_0 = 0, \quad y_1(t_0) = 1, \; y_1'(t_0) = 0$$
$$, \; y_2(t_0) = 0, \; y_2'(t_0) = 1$$

$$r^2 + 4r - 2 = 0 \quad , \quad r_1 = -2 + \sqrt{6} \quad , \quad r_2 = -2 - \sqrt{6}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

entonces existe un conjunto fundamental de soluciones:

$$\left\{ e^{(-2+\sqrt{6})t} \; , \; e^{(-2-\sqrt{6})t} \right\}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y'_0 & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{W}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{W}$$

Para calcular c_1 y c_2

$$y(t) = c_1 e^{(-2+\sqrt{6})t} + c_2 e^{(-2-\sqrt{6})t}$$

3) Halle un conjunto fundamental de soluciones:

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \quad , \quad t_0 = 1 \quad , \quad y_1(t_0) = 1 \quad , \quad y_1'(t_0) = 0$$
$$y_2(t_0) = 0 \quad , \quad y_2'(t_0) = 1$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y'_0 & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{W}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{W}$$

Para calcular c_1 y c_2

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$
$$r^2 + 4r + 3 = 0$$
$$(r+3)(r+1) = 0 \; , \; r_1 = -3 \; , \; r_2 = -1$$

$$\left\{ e^{-3t} \; , \; e^{-t} \right\} \; , \; y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}$$

Independencia lineal

1) estudie la dependencia lineal de $f(x) = x^3$, $g(x) = |x|^3$.

Si $x \leq 0$:

$$k_1 x^3 + k_2 |x|^3 = 0 \quad , \text{ si } k_1 < 0 \text{ y } k_1 = k_2$$

Si $x > 0$:

$$k_1 x^3 + k_2 x^3 = 0 \quad , \text{ si } k_1 = -k_2$$

2) $(1-x^2)y'' - 2xy' + a(a+1)y = 0$, eqn. de Legendre

$$y'' - \underbrace{\frac{2x}{1-x^2}}_{p(t)} y' + \underbrace{\frac{a(a+1)}{1-x^2}}_{q(t)} y = \underbrace{0}_{g(t)}$$

$$W(y_1, y_2)(x) = C \cdot \exp\left(-\int \frac{2x}{1-x^2}\, dx\right)$$
$$= C \cdot \exp\left(-\int \frac{2x}{(1-x)(1+x)}\, dx\right)$$
$$= C \cdot \exp\left(-(-\ln(x^2-1))\right)$$
$$= C \cdot (x^2-1)$$

---

3) Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de $ty'' - 2y' + te^t = 0$ y $W(y_1, y_2)(1) = 2$, ¿Cuál es el valor de $W(y_1, y_2)(5)$?

$$ty'' - 2y' + te^t = 0$$
$$y'' - \frac{2}{t}y' + e^t = 0$$

$$W(y_1, y_2) = C \cdot \exp\left(-\int p(t)\, dt\right) = C \cdot \exp\left(-2\int \frac{1}{t}\, dt\right)$$
$$= C \cdot \exp(-2\ln(t))$$
$$= C \cdot \exp(\ln(t^{-2}))$$
$$= C \cdot t^{-2}$$

$$W(y_1, y_2)(1) = C(1)^{-2} = 2$$
$$= C = 2$$

$$\Rightarrow W(y_1, y_2)(5) = 2 \cdot (5)^{-2} = \frac{2}{25}$$

---

4) Si el Wronskiano de dos soluciones de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ es constante ¿Qué podemos decir de los coeficientes $p(t)$ y $q(t)$?

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 = cte$$

$$W(y_1, y_2) = \underbrace{C}_{\text{depende de } y_1 \text{ e } y_2 \text{ pero no de } t.} \cdot \exp\left(-\int p(t)\, dt\right) = cte$$

(No se :c)

5) Pruebe que si y_1, y_2 tiene un máximo o un mínimo en el mismo punto t_0 no puedan ser conjunto fundamental en ese intervalo.

$\odot$ $y'_1(t_0) = y'_2(t_0) = 0$, $W(y_1,y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Dado $W(y_1,y_2) = 0$ y_1, y_2 No puede ser conjunto fundamental en ese intervalo

---

Raíces Complejas

1) $y'' + 2y' + 1.25y = 0$

$r^2 + 2r + 1.25 = 0$, $r_1 = \underbrace{-1}_{\mu} + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\lambda} i$

$r_2 = -1 - \frac{1}{2} i$

Aplicamos:

$u(t) = e^{\mu t}\cos(t\lambda)$, $v(t) = e^{\mu t}\operatorname{sen}(t\lambda)$

$= e^{-t}\cos(\frac{t}{2})$ $\qquad = e^{-t}\operatorname{sen}(\frac{-t}{2})$

entonces:

$$y = C_1 e^{-t}\cos(\tfrac{t}{2}) + C_2 e^{-t}\operatorname{sen}(\tfrac{-t}{2})$$

2) $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 2$ [Grafique]

el polinom. caract.:

$r^2 - 2r + 5 = 0$

$r_1 = \underbrace{1}_{\mu} + \underbrace{2}_{\lambda} i$, $r_2 = \underbrace{1}_{\mu} - \underbrace{2}_{\lambda} i$

$u(t) = e^t\cos(2t)$ $\qquad v(t) = e^t\sin(2t)$

$y(t) = C_1 e^t\cos(2t) + C_2 e^t\sin(2t)$ $\quad \left| \begin{array}{l} v'(t) = e^t\sin(2t) + 2e^t\cos(2t) \\ u'(t) = e^t\cos(2t) - 2e^t\sin(2t) \end{array} \right.$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y'_0 & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}{W}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y'_1(t_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{W}$$

Para calcular C_1 y C_2

$C_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2e^{\frac{\pi}{2}} \end{vmatrix}}{W} = \dfrac{0}{W} = 0$

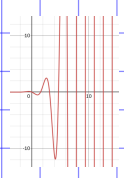
$C_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} -e^{\frac{\pi}{2}} & 0 \\ -e^{\frac{\pi}{2}} & 2 \end{vmatrix}}{W} = \dfrac{-2e^{\frac{\pi}{2}}}{W}$

$= \dfrac{-\cancel{2}e^{\frac{\pi}{2}}}{\cancel{2}e^{2t}}$

$= \dfrac{-e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}} = -e^{-\frac{\pi}{2}}$

Sabemos que para estas soluciones W es de la forma $\lambda e^{2\mu t}$

Grafica:



3) $y'' - 2y' + y = 0$, $r^2 - 2r + 1 = 0$, $r_1 = 1 = r_2$

Asumimos $y_1 = e^{r_1 t}$ y consideramos y_2 de la forma:

$$y_2 = v(t)\, y_1 = v(t)\, e^{r_1 t}$$

Así entonces vamos a buscar $v(t)$:

$$y_2'(t) = v' e^{r_1 t} + v r_1 e^{r_1 t}$$

$$y_2''(t) = \underbrace{v' r_1 e^{r_1 t}} + v'' e^{r_1 t} + \underbrace{v' r_1 e^{r_1 t}} + v r_1^2 e^{r_1 t}$$

Reemplazamos en la eqn. diferencial

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$(\cancel{2v' e^t} + v'' e^t + \cancel{v e^t}) - 2(\cancel{v' e^t} + \cancel{v e^t}) + \cancel{v e^t} = 0$$

$$v'' e^t = 0 \quad , \quad e^t > 0 \text{ dado } t > 0$$

esto quiere decir que v'' es cero $\therefore$ $v' = C_1$, $v = C_1 t + C_2$.
finalmente encontramos $v(t)$

$$y_2 = v(t)\, e^{r_1 t} = v(t)\, e^t$$
$$= C_1 \underbrace{t e^t}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^t}_{y_2}$$

Mas fácilmente pudimos haber usado el hecho de que el conjunto solución es de la forma:

$$\{ e^{rt}, t e^{rt} \}$$

Reemplazar y obtener la rta.

4) $9y'' - 12y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

$$9r^2 - 12r + 4 = 0 \quad , \quad r_1 = r_2 = \frac{2}{3}$$

Sabemos $\{ e^{rt}, t e^{rt} \}$ entonces $y = C_1 \underbrace{e^{\frac{2t}{3}}}_{y_1} + C_2 \underbrace{t e^{\frac{2}{3}t}}_{y_2}$

$$y_1' = \frac{2}{3} e^{\frac{2t}{3}} \quad , \quad y_2' = \frac{2t}{3} e^{\frac{2t}{3}} + e^{\frac{2}{3}t}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{W}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{W}$$

Para calcular C_1 y C_2

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{W} = \frac{2}{W} = \frac{2}{e^{2rt}} = \frac{2}{e^{\frac{4}{3}(0)}} = 2$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{rt} & t e^{rt} \\ r e^{rt} & e^{rt}(1 + rt) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2rt}(1 + \cancel{rt}) - \cancel{rt e^{2rt}}$$

$$= e^{2rt}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{W} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{vmatrix}}{W} = \frac{\left(1 - \frac{4}{3}\right)}{1} = \frac{-1}{3}$$

5) Sea $9y'' + 12y' + 4y = 0$, $y(0) = a > 0$, $y'(0) = -1$

$$9r^2 + 12r + 4 = 0, \quad r_1 = -\frac{2}{3} = r_2$$

el conjunto solución es $\{e^{rt}, te^{rt}\}$

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{2t}{3}} + C_2 t e^{-\frac{2}{3}t}$$

Queremos calcular el "a" que separa soluciones negativas de las positivas entonces primero calculemos el wronskiano.

$$W(y_1, y_2) = e^{2rt} = e^{2 \cdot -\frac{2}{3}t} = e^{-\frac{4}{3}t}$$

Ahora

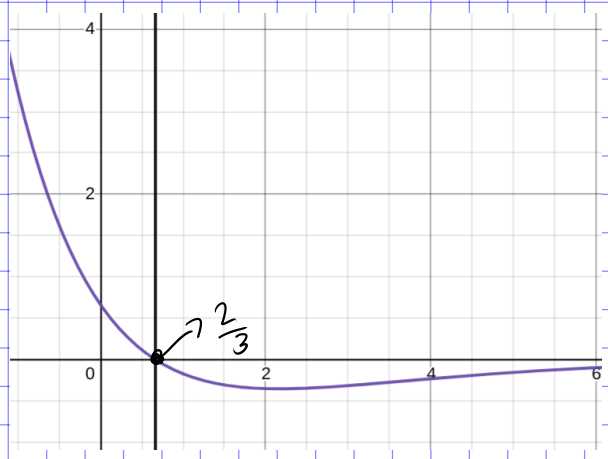
$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(0) \\ y_0' & y_2'(0) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(0)} = \begin{vmatrix} a & te^{rt} \\ -1 & e^{rt}(1 + rt) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & -\frac{2}{3}e^{-\frac{2t}{3}} \\ -1 & e^{-\frac{2t}{3}}\left(1 - \cancel{\frac{2}{3}(0)}^{\,0}\right) \end{vmatrix}$$

$$= a e^{-\frac{2(0)}{3}} - \frac{2}{3} e^{-\frac{2(0)}{3}} > 0$$

$$a > \frac{2}{3}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(0) & y_0 \\ y_1'(0) & y_0' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(0)} = \frac{\begin{vmatrix} e^{rt} & a \\ re^{rt} & -1 \end{vmatrix}}{1}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = XD$$

$$= -1$$