David Alsina

1

Dado el problema de valor inicial

$5y' + 4y = e^{-\pi t/3}, \quad y(0) = a$

a) Resuelva el problema de valor inicial

b) Usted tiene la colución en función del valor inicial a, analice cuidadosamente el comportamiento de la solución buscando el valor inicial \(a\=a_0) crítico, en el que aparece un cambio drástico de las soluciones, ¿en qué consiste ese cambio?

c) ¿Cómo se comporta la solución para el valor crítico hallado en el numeral anterior?

a)

$$5y' + 4y = e^{-\pi t/3}$$

$$y' + \underbrace{\frac{4}{5}}_{p(t)} y = \underbrace{\frac{1}{5} e^{-\pi t/3}}_{g(t)}$$

buscamos el factor integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)} = e^{\int \frac{4}{5} dt} = e^{\frac{4}{5}t + c} = e^{\frac{4}{5}t} \cdot \cancel{k} \xrightarrow{} 1$$

Ahora:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t) y(t)] = \mu(t) y' + \mu(t) \frac{4}{5} y = \frac{1}{5} e^{-\pi t/3} \cdot \mu(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\mu(t) y(t)] = \frac{1}{5} e^{-\pi t/3} \cdot e^{4/5 t}$$

$$\frac{d}{dt}[\mu(t) y(t)] = \frac{1}{5} e^{(\frac{4}{5} - \frac{\pi}{3})t}$$

$$\mu(t) y(t) = \frac{1}{5} \int e^{(\frac{4}{5} - \frac{\pi}{3})t} dt$$

$$\mu(t) y(t) = \frac{15 e^{(4/5 - \pi/3)}}{12 - 5\pi} + c$$

$$\cancel{\mu(t)} y(t) = \frac{15}{12 - 5\pi} \cdot e^{(\frac{4}{5} - \frac{\pi}{3})t} \cdot e^{(-\frac{4}{5}t)} + c e^{-4/5 t}$$

$$y(t) = \frac{15}{12 - 5\pi} \cdot e^{(-\pi/3)t} + c e^{(-4/5)t}$$

evaluando en $y(0) = a$:

$$y(0) = \frac{15}{12 - 5\pi} \cdot \cancel{e^{(-\pi/3)t}} \xrightarrow{} 1 + c\, \cancel{e^{(-4/5)t}} \xrightarrow{} 1$$

$$= \frac{15}{12 - 5\pi} + c = a$$

$$c = a - \frac{15}{12 - 5\pi}$$

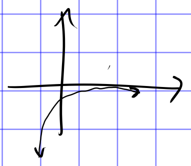
entonces tenemos: $y(t) = \overbrace{\frac{15}{12 - 5\pi}}^{<0} \cdot e^{(-\pi/3)t} + \left(a - \frac{15}{12 - 5\pi}\right) e^{(-4/5)t}$

b) de la fórmula podemos ver que es la suma de 2 exponenciales decrecientes ponderada por sus factores, el cambio drástico ocurre si el valor de C cambia de signo.

$$a - \frac{15}{12 - 5\pi} > 0$$

$$a > \frac{15}{12 - 5\pi}$$, cuando a queda igual a $\frac{15}{12 - 5\pi}$ un lado de la ecuación se va a cero.

(c) Cuando $a = \frac{15}{12 - 5\pi}$ entonces se comporta como una exponencial decreciente ponderada por un coeficiente negativo.



---

(2)

Dada la ecuación

$\frac{dy}{dx} = f(y) = 3y^2 - 3y, \quad y(0) = y_0 \geq 0$

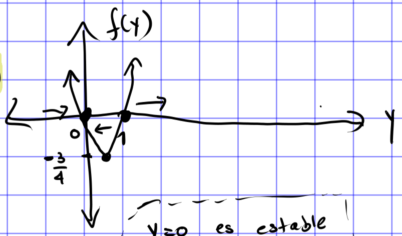
a) Haga un bosquejo de la gráfica de la función $f(y)$ versus y.

b) Determine los puntos de equilibrio y clasifíquelos. ¿asintóticamente estables? ¿asintóticamente inestables?

c) Dibuje la línea de fase.

d) Haga un bosquejo de las diferentes soluciones de la ecuación en el plano $t - y$. Ayuda, determine cuando es creciente, decreciente, tiene puntos de inflexión.

(a) y (b) y (c)



$y = 0$ es estable
$y = 1$ es inestable

$f(y) = 3y^2 - 3y = 0$

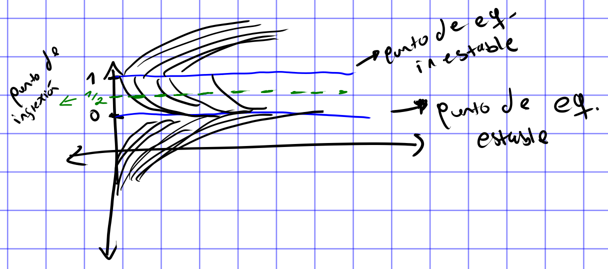
→ Para $y = 0$ y $y = 1$ encontramos raíces

$f'(y) = 6y - 3 = 0$

$y = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$

(d)



---

(3)

Una cubeta de 5 galones está llena de agua pura, Supónga que empezamos a añadir sal a la cubeta a razón de 1/4 libra por minuto. Además abrimos el grifo de manera que salga 1/2 galón por minuto de la cubeta, y agregamos agua limpia para mantener llena la cubeta. Si la solución de sal está siempre bien mezclada.

a)¿Cuál es la cantidad de sal en la cubeta en el tiempo t ?

b)¿Cuál es la cantidad de sal en la cubeta en el tiempo t=10 ?

c)¿Cuál es la cantidad de sal en la cubeta después de un tiempo muy grande ?

$V_{max} = 5 \text{ gal}, \quad Q_0 = 0 \text{ lb}, \quad rb = \frac{1}{4}\frac{\text{lb}}{\text{min}}, \quad S = \frac{1}{2}\frac{\text{gal}}{\text{min}}$

$V_{inicial} = 5 \text{ gal}$

$r = 1/2 \text{ gal/min}$

$b = 1/2 \text{ lb/gal}$

(a) Para hallar $Q(t)$ planteamos:

$$\frac{dQ(t)}{dt} + Q(t)\frac{1/2}{(5 + (\cancel{1/2 - 1/2})t)} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} + Q(t)\underbrace{\frac{1}{10}}_{p(t)} = \underbrace{\frac{1}{4}}_{g(t)}$$

Encontramos fact. integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt} = e^{\frac{1}{10}t + C} = e^{\frac{1}{10}t} \cdot \cancel{K}^{1}$$

Ahora con $\mu(t)$:

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)Q(t)) = \mu(t)\frac{dQ(t)}{dt} + \mu(t)Q(t)\frac{1}{10} = \frac{1}{4}\mu(t)$$

$$\mu(t)Q(t) = \frac{1}{4}\int \mu(t)\,dt = \frac{1}{4}\int e^{1/10\, t}\,dt$$

$$\mu(t)Q(t) = \frac{5}{2}e^{t/10} + C$$

$$Q(t) = \frac{5}{2}\left(\cancel{e^{t/10 - t/10}}^{1}\right) + Ce^{-t/10}$$

$$Q(t) = \frac{5}{2} + Ce^{-t/10}$$

Sabemos que $Q(0) = 0$ entonces:

$$Q(0) = \frac{5}{2} + C\cancel{e^{-t/10}}^{1}$$

$$= \frac{5}{2} + C = 0$$

$$C = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore Q(t) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}e^{-t/10}$$

b) $Q(10) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}e^{-10/10} = 1.58$ lb

c) $\lim_{t \to \infty} \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\cancel{e^{-t/10}}^{0} = \frac{5}{2} = 2.5$ lb

4)

a) Dado el problema de valor inicial

$y' = ty(3-y)/4, y(0) = y_0,$

resuelva el problema y estudie el comportamiento de la solución cuando varía la condición inicial.

b) Determine si la ecuación dada es exacta, si lo es, halle la solución general

$y' = \frac{ax+by}{bx+cy}$

a) $\frac{dy}{dt} = t \cdot \frac{y(3-y)}{4}$, $y(0) = y_0$

$$\frac{1}{y(3-y)}\,dy = \frac{t}{4}\,dt$$

$$\int \frac{1}{y(3-y)}\,dy = \int \frac{t}{4}\,dt \Rightarrow \frac{1}{3}(\log(y) - \log(3-y)) + C = \frac{t^2}{8}$$

Solucionamos para y:

$$\frac{1}{3}\left(\log(y)-\log(3-y)\right)+C=\frac{t^2}{8}$$

$$e^{1/3\log(y)-\frac{1}{3}\log(3-y)+c}=t^2/8$$

$$e^{\log(y^{1/3})}\div e^{\log((3-y)^{-1/3})}\cdot e^{c}=t^2/8$$

$$y^{1/3}\div(3-y)^{-1/3}\cdot K=t^2/8$$

$$y^{1/3}\div(3-y)^{-1/3}=t^2/8K$$

$$\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{3-y}}=t^2/8K$$

$$\frac{y}{3-y}=\left(t^2/8K\right)^3$$

b)

$$y'=\frac{ax+by}{bx+cy}\quad,\quad(bx+cy)y'=(ax+by)$$

$$\underbrace{(ax+by)}_{M(x,y)}-\underbrace{(bx+cy)}_{N(x,y)}y'=0$$

$$M_y(x,y)=b \quad y \quad N_x=b$$

Si es exacta entonces:

$$\int M\,dx=\int ax+by\,dx=\frac{a}{2}x^2+byx+c(y)$$

$$\psi(x,y)=\frac{a}{2}x^2+byx+c(y)\quad,\quad\psi_y(x,y)=bx+c'(y)$$

entonces vea que $\psi_y(x,y)=N(x,y)$:

$$\psi_y(x,y)=\cancel{bx}+c'(y)=\cancel{bx}+cy$$

$$\psi_y(x,y)=\int cy$$

$$=\frac{c}{2}y^2$$