Ecuaciones diferenciales Separables de primer orden

Luz Myriam Echeverry N

28/01/2022

Forma general de las EDO de primer orden

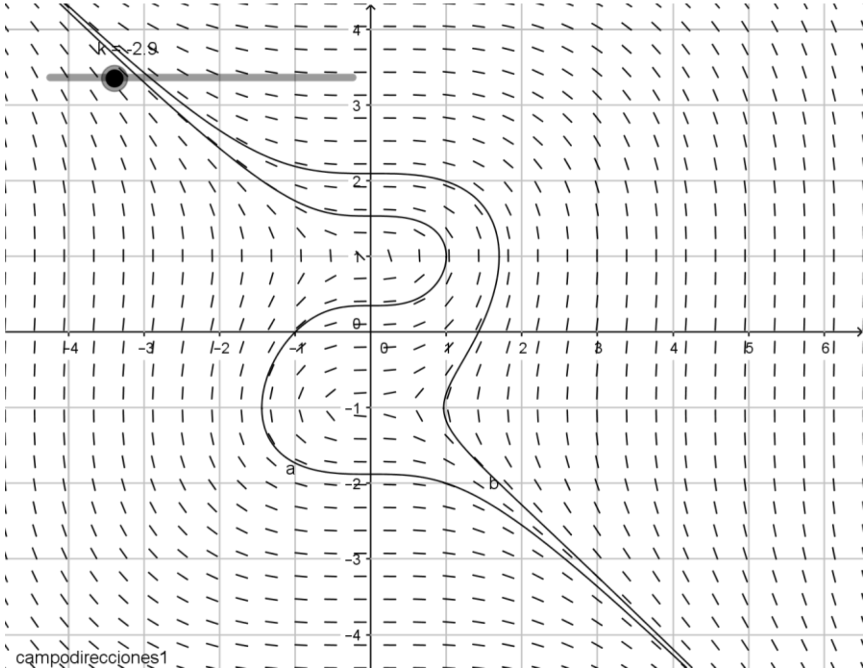
- La forma general de una EDO
  - $F(t, y, y') = 0$
- Pero usualmente se presenta:
  - $y' = f(t, y)$
- o
  - $M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$
- En el caso particular en que $M(x)$, no depende de y y $N(y)$, no depende de x, podemos separar la ecuación
  - $M(x)dx = -N(y)dy$
- E integrar

Ejemplo 1 hallar la solución

- Resolver
  - $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$
- Se puede separar
  - $(1 - y^2)\frac{dy}{dx} - x^2 = 0$
- Recordando derivación implícita el primer termino s la derivada de $y - \frac{y^3}{3}$ con respecto a x y el segundo la derivada de $\frac{x^3}{3}$ con respecto a *x*.
  - $\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3} + y - \frac{y^3}{3}\right) = 0$
  - $-\frac{x^3}{3} + y - \frac{y^3}{3}$=C

Graficas

- El campo direccional, $y' = \frac{x^2}{1-y^2}$, a cada (x, y) le asigna la pendiente dada.
- Una solución o curva integral
- $-x^3 + 3y - y^3 = c$
- Es una solución implícita
- No es posible despejar y



Ejemplo 2

- Resolver
  - $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \leftrightarrow 2(y-1)dy = (3x^2+4x+2)dx$
- Aquí separamos variables!
- Integrando a ambos lados
  - $y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C$
- Aquí es una familia de soluciones, si hay una condición inicial $y(0) = -1$
- C=3, y podemos usar la formula cuadrática pata despejar y(x)
  - $y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 2x + 3) = 0$
- $y(x) = \frac{2 \pm \sqrt{4+4(x^3+2x^2+2x+3)}}{2} = 1 \pm \sqrt{(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)}$

- Tenemos dos soluciones
  - $y = 1 \pm \sqrt{(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)}$

Pero una sola cumple $y(0) = -1$, la del signo menos

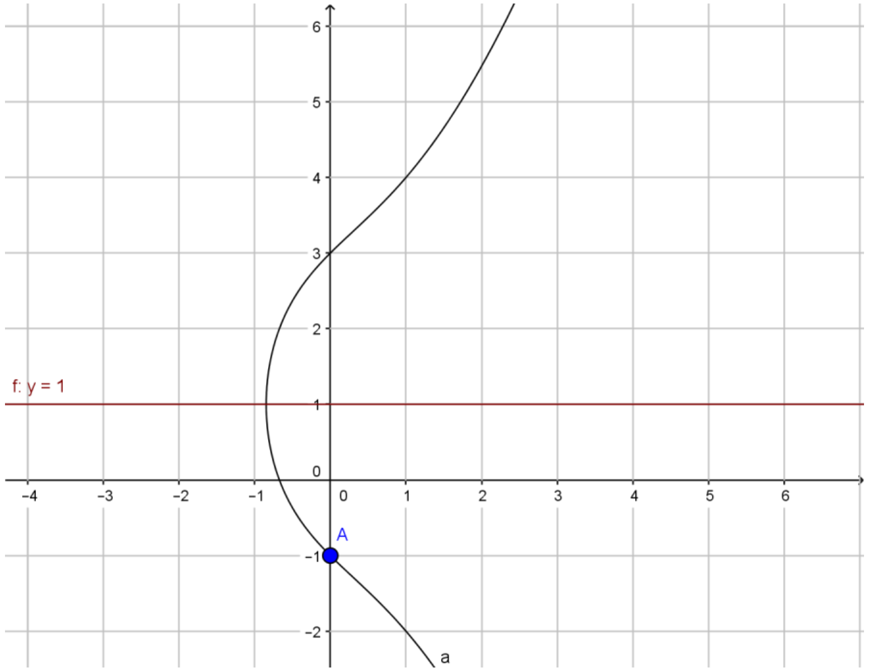
La solución al problema de valor inicial

$$y = 1 - \sqrt{(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)}$$

En y=1, tiene una pendiente

vertical.

La función esta definida para $x \geq 2$



Ejercicios

- Resolver y hacer las graficas de algunas soluciones
- 1.$y' + y^2 sen(x) = 0$
- 2. $y' = \frac{x^2}{y(1+x^2)}$
- 3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$
- 4.$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$

Bibliografia

- W.E. Boyce, R.C. DiPrima, “Elemtary Differential Equations and Boundary Value Problems”. Willey, 8e ed.