8 Sea V una variable aleatoria vectorial con un vector medio $E(V) = \mu_v$ y una matriz de covarianza $E((V-\mu_v)\cdot(V-\mu_v)') = \Sigma_v$. Demuestre que:

$E[X^2] - E[X]^2$

$$E(VV') = \Sigma_v + \mu_v \mu_v'$$

$$VV' = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{n\times 1} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \end{bmatrix}}_{1\times n} = \begin{bmatrix} x_1^2 & \cdots & x_{i+n}x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n x_1 & \cdots & x_{i+n}^2 \end{bmatrix}$$

$$E(VV') = \begin{bmatrix} E(x_1^2) & \cdots & E(x_{i+n}x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(x_n x_1) & \cdots & E(x_{i+n}^2) \end{bmatrix}$$

, Note que esto es análogo a $E(x^2)$ para cada entrada de la matriz.

Vea que $\mu_v \mu_v'$ es otra matriz de la forma:

$$\mu_v\mu_v' = \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_{v_1} \\ \mu_{v_2} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{n\times 1} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_{v_1} & \mu_{v_2} & \cdots \end{bmatrix}}_{1\times n} = \begin{bmatrix} \mu_{v_1}^2 & \cdots & \mu_{v_{i+n}}\mu_{v_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{v_n}\mu_{v_1} & \cdots & \mu_{v_{i+n}}^2 \end{bmatrix}$$

, vea que esto es análogo a $E(x)^2$

Usando $Var(x) = E(x^2) - E(x)^2$ podemos llegar a:

$$\Sigma_v = \begin{bmatrix} E(x_1^2) & \cdots & E(x_{i+n}x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(x_n x_1) & \cdots & E(x_{i+n}^2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{v_1}^2 & \cdots & \mu_{v_{i+n}}\mu_{v_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{v_n}\mu_{v_1} & \cdots & \mu_{v_{i+n}}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix}$$

Recuerde que $cov(x,y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

en otras palabras:

$$\Sigma_v + \begin{bmatrix} \mu_{v_1}^2 & \cdots & \mu_{v_{i+n}}\mu_{v_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{v_n}\mu_{v_1} & \cdots & \mu_{v_{i+n}}^2 \end{bmatrix} = \Sigma_v + \mu_v\mu_v' = E(VV')$$

■