Soluciones Fundamentales de las ecuaciones lineales homogeneas

Sean p y q funciones continuas en el intervalo $I=(\alpha,\beta)$
Para cualquier función 2 veces diferenciable definimos el operador diferencial L:

$$\underbrace{L(y)}_{\text{es una función en el intervalo } I=(\alpha,\beta)} = y'' + py' + qy$$

Teorema 3.2.1

- $L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$
- $y(t_0) = y_0 \,,\quad y'(t_0) = y'_0$

dados p, q y g continuas en un intervalo $I=(\alpha,\beta)$ abierto. que contiene a t_0 existe una unica solución $y=\phi(t)$.

ej: Determine el intervalo más grande donde el PVI tiene solución.

$$(t+1)y'' - \cos(t)y' + 3y = 1 \,,\quad y(0)=1 \,,\quad y'(0)=0$$

a formato estándar

$$y'' - \frac{\cos(t)}{(t+1)}y' + \frac{3}{(t+1)}y = \frac{1}{t+1}$$

el intervalo que contiene t_0 más grande posible es $(-1,\infty)$.

Teorema 3.2.2
(Principio de superposición)

- Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación
- $L(y)(t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$
  entonces cualquier combinación lineal
  $$(c_1\ c_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1y_1 + c_2y_2 \,, \forall z$$
  es solución.
- entonces con cualquier par de soluciones y_1 y y_2 podemos construir una familia infinita de soluciones
- Para saber si se pueden escribir así todas las soluciones podemos usar el Wronskiano

Determinante Wronskiano

Por teorema de superposición sabemos que $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ es una solución pero esta debe satisfacer:

$$y(t_0) = y_0 \quad y \quad y'(t_0) = y'_0$$

entonces hay que resolver

$$C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) = y_0$$
$$C_1 y'_1(t_0) + C_2 y'_2(t_0) = y'_0$$

Para resolver las eqns:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t) \\ y'_0 & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}, \quad C_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & \\ y'_1(t_0) & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}$$

Determinante Wronskiano (No te que no puede ser cero)

$$W = y_1(t_0)\, y'_2(t) - y_2(t_0)\, y'_1(t_0) \neq 0$$

↳ Notación : $W(y_1, y_2)(t_0)$

Teorema 3.2.3

Sean y_1 y y_2 soluciones de la eqn.

- $L(y)(t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)\,y(t) = 0$

tales que el Wronskiano no es cero en t_0 entonces existe un par C_1 y C_2 tal que

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

que soluciona la eqn. diff. y pasa por las condiciones iniciales en t_0.

ej: $y'' - y = 0$, $y'' = y$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$

$$\Rightarrow y(t) = 2\underbrace{e^{t}}_{y_1} + \underbrace{e^{-t}}_{y_2}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -e^t e^{-t} - e^t e^{-t}$$
$$= -2e^t e^{-t} = -2$$

dado que $W \neq 0 \ \forall t$ las combinaciones lineales de y_1 y y_2 se pueden usar para construir soluciones PVI

Teorema 3.2.4 (soluciones fundamentales)

- Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación
- $L(y)(t) = y''(t) + p(t)\,y'(t) + q(t)\,y(t) = 0$

Si existe un punto t_0 tal que $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ entonces la familia de soluciones $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ con coeficientes arbitrarios c_1 y c_2 incluye todas las soluciones de la eqn.

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$] → solución general

$\{y_1, y_2\}$] → conjunto fundamental de soluciones

Para el caso de solución de la ecuación característica (con $r_1 \neq r_2$ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$:

$$y_1 = e^{r_1 t}, \quad y_2 = e^{r_2 t}, \quad r_1 \neq r_2$$

$ar^2 + br + c = 0$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = r_2 e^{(r_1+r_2)t} - r_1 e^{(r_1+r_2)t}$$
$$= e^{(r_1+r_2)t}(r_2 - r_1) \neq 0$$

Note como $e^{(r_1+r_2)t}(r_2 - r_1) \neq 0 \ \forall t$ $\therefore$ si la solución de la eqn. característica es $r_1 \neq r_2$ siempre hay solución general.

Teorema 3.2.5 Existencia del conjunto fundamental de soluciones

$$L(y) = y''(t) + \underbrace{\underbrace{p(t)}\,y'(t) + \underbrace{q(t)}}_{\text{continuos en el intervalo } I = (\alpha, \beta)}\,y(t) = 0$$

Sea t_0 un punto en $I = (\alpha, \beta)$ donde y_1 y y_2 (soluciones) cumplen las condiciones iniciales entonces y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental para la ecuación dada.

(Note como en este teorema el conjunto fundamental de soluciones debe satisfacer las condiciones iniciales) Además de $W \neq 0$.

The algorithm

- Solucionar $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$ hayamos entonces y_1 y y_2
- hay que verificar si $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ en el intervalo.
- Si $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ entonces forman un conjunto de soluciones, solución general $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$
- dado t_0 despeje c_1 y c_2 con las condiciones iniciales