Ecuación del Calor

5/05/2022

Luz Myriam Echeverry N

Ecuación homogénea.

- La ecuación:
  - $u_t - ku_{xx} = 0 \quad 0 < x < L, \; t > 0$ (1)
  - $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \geq 0$ (2)
  - $u(x,0) = f(x)$ (3)
- Corresponde al calentamiento de una barra uniforme de longitud L.
- Llegamos a:
  - $u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} B_n sen(\frac{n\pi}{L} x) \exp(-k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \mathrm{t}),$
- Es decir, necesitamos:
  - $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{N} B_n sen(\frac{n\pi}{L} x).$

Series de Fourier

- La serie:
  - $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen(\frac{n\pi}{L}x)$. (4)
- Para usarla rigurosamente necesitamos condiciones fuertes.
-
- Aquí tenemos el dominio de f de cero a L, la prolongamos de manera impar a –L a L. $(x \in [-L, 0], f(x) = -f(-x).)$
- Luego se prolonga a todos los reales y su serie de Fourier es: (4) con
  - $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$
- Ya se tiene formalmente la solución del problema propuesto.

Ejemplo

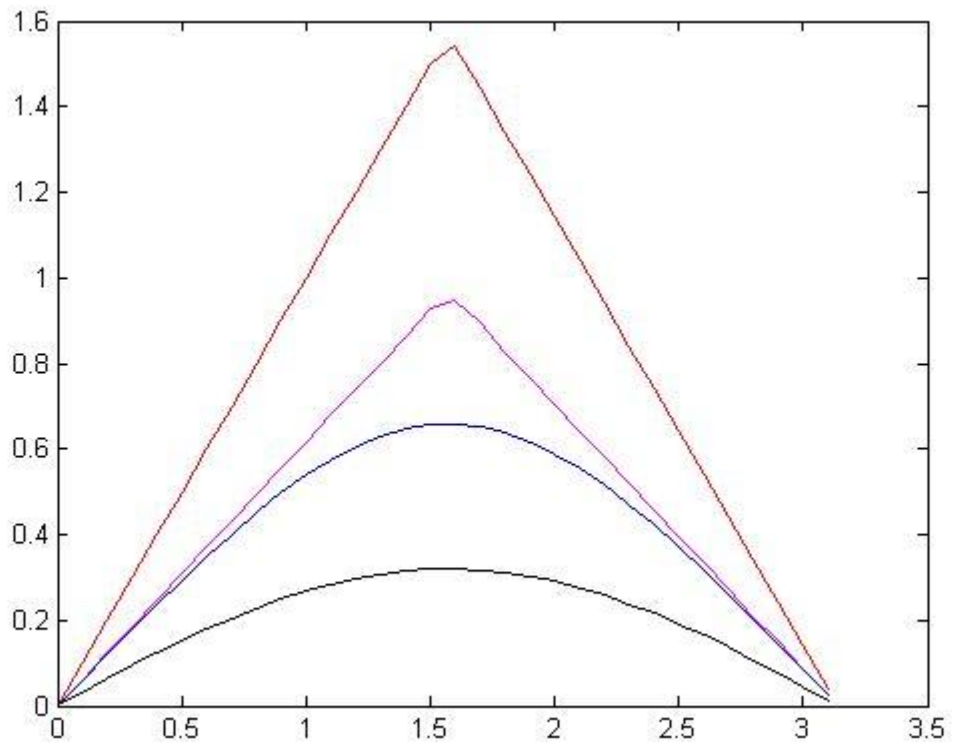
- Sea
  - $u_t - ku_{xx} = 0 \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$ (1)
  - $u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad t \geq 0$ (2)
  - $u(x,0) = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$ (3)
- La solución formal:
- $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen(\frac{n\pi}{L} x) \exp(-k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t)$,
- Con
  - $B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, sen(nx) dx.$ ★

Ejemplo

- Entonces
- $B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ sen(nx)dx$
- $= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\ \ sen(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\ \ sen(nx)dx\right]$
- $=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-xcosnx}{n} + \frac{sinnx}{n^2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi-x)cosnx}{n} - \frac{sinnx}{n^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}$
- $= \frac{2}{\pi}\left[0 - \cancel{\frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}} + \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} + 0 + \cancel{\frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}} + \frac{sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} + 0\right]$ n par, n=2k, $B_n = 0$
- $=\frac{4}{\pi(2k-1)^2}(-1)^{k+1}\ \ n = 1, k = 1.\ \ n = 2k - 1$
- La solución:

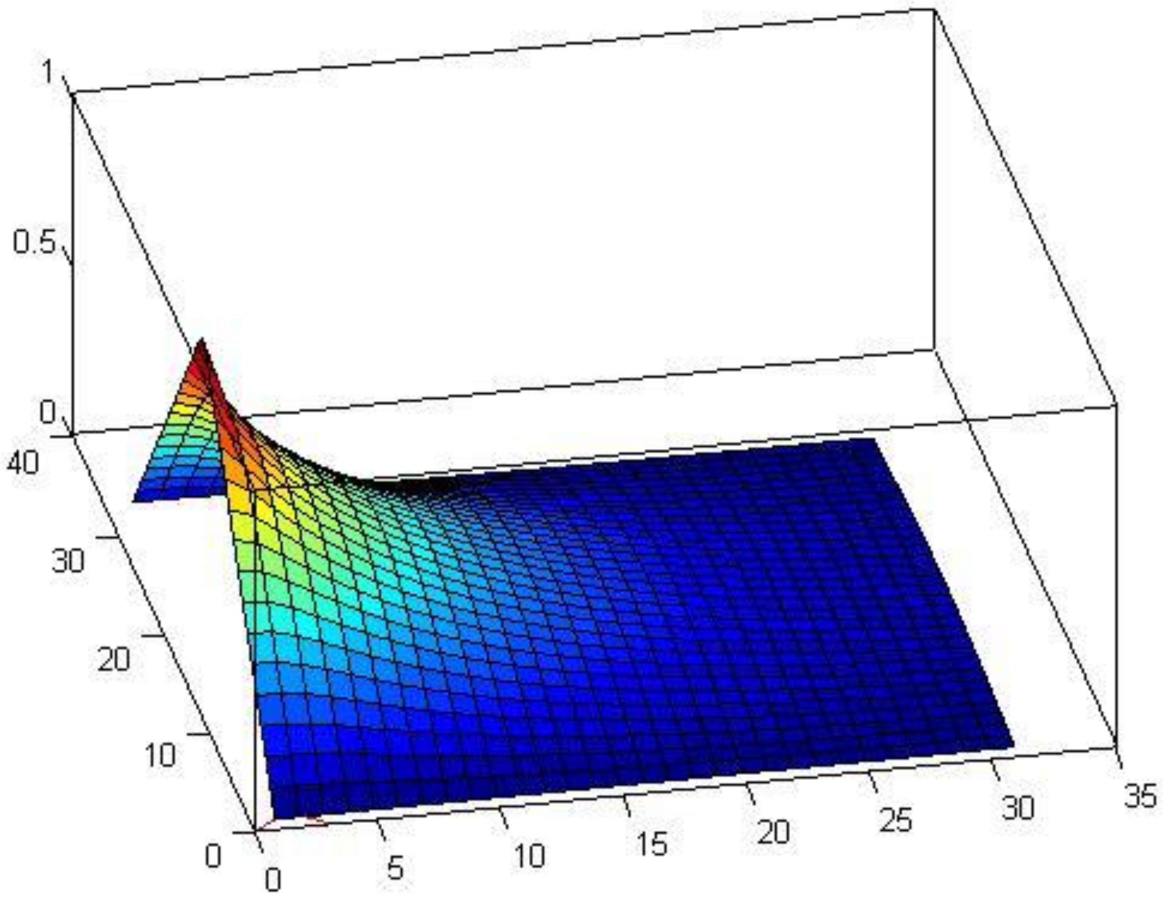
Solución

- Terminar:
- $u(x,t)$
- $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} (-1)^{k+1} sen((2k-1)x)\ \mathrm{exp}(-\ ((2k-1)^2 \mathrm{t}),$



En tres dimensiones

- Gráfica



Ejercicios

- Resolver el problema
  - $u_t - u_{xx} = 0 \quad 0 < x < L, \; t > 0$ (1)
  - $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \geq 0$ (2)
  - $u(x,0) = f(x)$ (3)
- 1-f(x)=$\begin{cases} 0, 0 \leq x \leq 10 \\ 50, 10 < x < 30 \\ 0{,}30 \leq x \leq 50. \end{cases}$
- 2- f(x)=x, $0 \leq x \leq 40$
- 3.$f(x) = 20, \quad L = 50$
- 4. $f(x) = 2sen\left(\frac{\pi x}{2}\right) - sen(\pi x) + 4sen(2\pi x), \; L = 2$
- Gráficas, tres valores de t y la gráfica tridimensional.

Condiciones de frontera no homogéneas

- $u_t - k u_{xx} = 0 \;\; 0 < x < L, \;\; t > 0$ (1)
- $u(0,t) = T_1, u(L,t) = T_2 0 \quad t \geq 0$ (2)
- $u(x,0) = f(x)$ (3)

- La solución es pensar en el problema físico. En un momento se estabiliza la solución, caso estacionario, es decir no cambia con el tiempo.
  - $v''(x)$=0
- La función es lineal y toma la forma
  - $v(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$

Cambio de función

- La solución:
  - $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$
- Se tiene:
  - $u_{xx} = w_{xx},\ u_t = w_t$
- y $\qquad k(v+u)_{xx} = (v+u)_t \leftrightarrow kw_{xx} = w_t$
- Condiciones de frontera:
- $w(0,t) = u(0,t) \quad - v(0) = T_1 - T_1,$
- $w(L,t) = u(L,t) \quad - v(L) = T_2 - T_2$
- La condición inicial:
  - $\text{w}(x,0) = u(x,0) - v(x) = f(x) - ((T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1)$

La solución

- Los coeficientes de w(x,t):
  - $B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left[f(x) - \left((T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1\right)\right] sen(nx)dx.$
- La solución
  - $u(x,t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$+w(x,t)
  - $u(x,t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n^2\pi^2 k}{L^2}} sen(\frac{n\pi x}{L})$
- Ejercicio: resolver el problema con L=30, k=1,
  - $u(0,t) = 20, u(L,t) = 50$
  - $u(x,0) = f(x) = 60 - 2x\ 0 < x < 30$

- resolver el problema con L=30, k=1,
  - $u(0,t) = 20, u(L,t) = 50$
  - $u(x,0) = f(x) = 60 - 2x \; 0 < x < 30$
- Entonces
- $T_2 = 50, T_1 = 20$
- La condición inicial modificada con $\mathrm{w}(\mathrm{x},0) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) - [(T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1]$
- Es decir la solución queda
- $u(x,t) = v(x) + w(x,t) = (30)\frac{x}{30} + 20 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n^2\pi^2 k}{L^2}} sen(\frac{n\pi x}{L})$
  - $B_n = \frac{2}{30}\int_0^{30}[40 - 3x]sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx$

Barra con los extremos aislados

- $u_t - ku_{xx} = 0 \;\; 0 < x < L, \;\; t > 0$ (1)
- $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \quad t \geq 0$ (2)
- $u(x,0) = f(x)$ (3)

- Separación de variables
- Entonces, $u(x,t) = X(x)T(t)$, dos funciones separadas
- $u_t = X(x)T'(t) \quad u_{xx} = X''(x)T(t)$
- La ecuación (1)
  - $X(x)T_t = kX_{xx}T(t)$

- Entonces
  - $\frac{T_t}{kT} = \frac{X_{xx}}{X}$=-λ
- Y
  - $T_t = -k$ λ T $t > 0$
  - $\frac{d^2}{dx^2} X = -$λX, $0 < x < L$
- De manera análoga las condiciones de frontera
  - $u_x(0, t) = X'(0)T(t) = 0 \rightarrow X'(0) = 0$
  - $u_x(L, t) = X'(L)T(t) = 0 \rightarrow X'(L) = 0$
- Por conveniencia tomamos $\lambda = -\mu^2$.
- Ese caso $X'' - \mu^2 X = 0$ tiene la solución
  - $X(x) = c_1 \cosh(\mu x) + c_2 senh\,(\mu x)$
- Las condiciones de frontera llevan a $c_1 = c_2 = 0$

- Para el caso $\lambda = 0$
- La solución de $X''(x) = 0$ es $X = Ax + B$, y $X'(x) = A$
- Las condiciones de frontera $X'(0) = 0 \to A = 0$, B queda libre es decir para este caso tenemos una solución
- $X_0(x) = 1$
- El último caso $\lambda = \mu^2$, positivo
- $X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 sen\, \mu x$ y $X'(x) = -c_1 \mu sen\, \mu x + c_2 \mu cos\, \mu x$
- Las condiciones de frontera, $X'(0) = 0 \to c_2 = 0$
  - $X'(L) = -c_1 \mu sen \mu L = 0 \to \mu L = n\pi \leftrightarrow \mu = \frac{n\pi}{L}$
- La solución
  - $X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{L} x$

- Para T
- Para T: T= $e^{-k\lambda t}$
  - $T_n = \exp(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ t), n=1,2,3...
- Tenemos infinitas soluciones.
  - $u_n(x,t) = cos(\frac{n\pi}{L}x)\exp(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ t), n=1,2,3...
- La solución
- $u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n cos(\frac{n\pi}{L}x)\exp(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ t),
- Para expresar la función:
  - $u(x,0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ =f(x)
- Los coeficientes
  - $c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 0,1,2,\ldots$

Físicamente

- $u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n cos(\frac{n\pi}{L}x)\ \exp(-k\ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ t),
- Cuando $t \rightarrow \infty$ la solución tiende a
  - $\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$
- Que es el promedio de la distribución de la temperatura inicial. No hay pérdida de calor por los extremos porque el flujo es cero.
  - $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \quad t \geq 0$

Hallar la distribución de temperatura de una barra de 25 cm de largo con los extremos aislados y la temperatura inicial $u(x,0) = x, 0 < x < 25$

- $u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n cos(\frac{n\pi}{25} x) \exp(-k \left(\frac{n\pi}{25}\right)^2$ t),
- $c_0 = \frac{2}{25}\int_0^{25} xdx = 25$
- $c_n = \frac{2}{25}\int_0^{25} xcos\left(\frac{n\pi}{25}x\right)dx = \frac{50(\cos n\pi - 1)}{(n\pi)^2} = \begin{cases} -\frac{100}{n\pi^2}, n\ impar \\ 0, n\ par \end{cases}$
- La solución
- $u(x,t) = \frac{25}{2} - \frac{100}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,}^{\infty} \frac{1}{n} cos(\frac{n\pi}{25} x) \exp(-k \left(\frac{n\pi}{25}\right)^2$ t),

Bibliografía

- Boyce DiPrima. ¨ Elementary Differential equations and Boudary problems¨8ª ed.