Centro de masa

$$M_{x\,c.m.} = \sum m_i x_i \quad , \quad M = \sum m_i$$

$$M_{y\,c.m.} = \sum m_i y_i$$

$$\vec{r}_{cm} = x_{c.m}\,\hat{i} + y_{c.m.}\,\hat{j} + z_{c.m.}\,\hat{k}$$

$$M_{r_{cm}} = \int \vec{r}\, dm$$

Mov. Centro de masas

$$M \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$M \vec{V}_{cm} = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots = \sum m_i \vec{V}_i$$

$$M \vec{a}_{cm} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots = \sum m_i \vec{a}_i$$

Conservación de Momento lineal

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

$$= m\vec{a} + \frac{dm}{dt}\vec{v} = F$$

$MV \rightarrow$ es constante

Impulso

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{P}}{dt}\, dt = \vec{P}_{f} - \vec{P}_i = \Delta \vec{P}$$

$$\vec{F}_{media} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{P}}{dt}\, dt = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$$

Colisiones 1D

Colision elástica

① $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$ → conservación del momento lineal

② $\frac{m_1}{2} v_{1i}^2 + \frac{m_2}{2} v_{2i}^2 = \frac{m_1}{2} v_{1f}^2 + \frac{m_2}{2} v_{2f}^2$ → conservación de energía

Coeficiente de restitución

$$e = \frac{V_{2f} - V_{1f}}{V_{2i} - V_{1i}}$$

1 colisión elástica

0 colisión inelástica

Sistema de referencia del centro de masa

$$V_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Velocidades Relativas: $U_1 = v_1 - v_{cm}$

$U_2 = v_2 - V_{cm}$

→ Usar velocidad del centro de masa y velocidades relativas es más fácil.

¿Cómo usarlas?

1. Calcular V_{cm}
2. Calcular las $V_{iniciales}$ relativas con: $U_{inicial\ i} = V_{inicial\ i} - V_{cm}$
3. Calcular las $V_{finales}$ relativas con:

$$U_{final\ i} = - U_{inicial\ i}$$

4. despejar las $V_{finales}$ con: $U_{final\ i} + V_{cm} = V_{final\ i}$

Mov. oscilatorio masa resorte

$$x = A \cos(\omega t) \quad \text{Donde} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\dot{x} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$E_{cinetica}(t) = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2}\left(-A\omega \operatorname{sen}(\omega t)\right)^2 = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t)$$

$$= \frac{m}{2} v_{max}^2 \operatorname{sen}^2(\omega t)$$

$$E_{Elastica}(t) = \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} k \left(A \cos(\omega t)\right)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t)$$

$$= \frac{m}{2} v_{max}^2 \cos^2(\omega t)$$

Movimiento de un satelite

$$F_{Grav.}(r) = \frac{G M_T m}{r^2}$$

$$K(R_f) - K(R_i) = \int_{R_i}^{R_f} F_{Grav.}(r)\, dr = G M_T m \cdot \int_{R_i}^{R_f} \frac{1}{r^2}\, dt$$

$$= G M_T m \cdot \int_{R_i}^{R_f} \frac{1}{r^2}\, dr = -G M_T m \cdot \frac{1}{r}\Big|_{R_i}^{R_f}$$

$$\frac{1}{2} m\, v(R_f)^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = G M_T m \cdot \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_f}\right)$$

en el punto más alto $v(R_f) = 0$ entonces:

$$-\frac{1}{2} m V_0^2 = G M_T m \cdot \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_f}\right)$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} V_0^2 = G M_T \cancel{m} \cdot \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i}\right)$$

$$V_0^2 = 2\underbrace{G}_{\frac{N\cdot \cancel{mt^2}}{\cancel{kg^2}}} \cdot \underbrace{M_T}_{\cancel{kg}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i}\right)}_{\cancel{\frac{1}{mt}}}$$

$\rightarrow \frac{\cancel{kg}\, mt}{s^2} \frac{mt}{\cancel{kg}}$

$\rightarrow \underbrace{\frac{mt^2}{s^2}}$

Si cuadran las unidades

→ el profesor llegó a: → gracias a cambio de var $g = \frac{G M_T}{R_T^2}$

$$V_0^2 = 2 g R_T \left(1 - \frac{R_T}{r_{max}}\right)$$

$$r_{max} = \frac{R_T}{1 - \frac{V_0^2}{2 g R_T}}$$

$$V_{escape} = \sqrt{2 g R_T} \Rightarrow r_{max} = \frac{R_T}{1 - \frac{V_0^2}{V^2_{escape}}}$$

Fuerzas conservativas

Fuerza	Energía
$\vec{W} = -mg\, \hat{j}$	$U_y = mgy$
$\vec{F}_{elástica} = -kx\, \hat{i}$	$U = \frac{1}{2} k x^2$
$\vec{F}_{Grav.} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\, \hat{r}$	$U_y = -\frac{G m_1 m_2}{r}$

$$\vec{W} = -\frac{d}{dy}(mgy)\, \hat{j} = -mg\, \hat{j}$$

$$\vec{F}_{elástica} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} k x^2\right) \hat{i} = -kx\, \hat{i}$$

$$\vec{F}_{Grav.} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{G m_1 m_2}{r}\right) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\, \hat{r}$$

Si $\vec{\nabla} \times F = 0 \Rightarrow$ es conservativa

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{Momento Angular de una partícula}}$

$$\underbrace{\vec{L}}_{\text{Momento angular}} = \vec{r} \times \underbrace{\vec{p}}_{\text{momentum}}$$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} = (x p_y - y p_x)\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Calcular para un aro

$$I = \int r^2\, dm = m r^2$$

Momento de Inercia para diferentes Cuerpos

Esfera hueca $\frac{2}{3} m r^2$

Esfera maciza $\frac{2}{5} m r^2$

aro $I = m r^2$

disco $I = \frac{1}{2} m r^2$

Teorema de ejes paralelos

$$\boxed{I = I_0 + M l^2}$$

I_0 = Momento de Inercia con respecto al centro de masa

$l =$

$$I = \frac{M_p R^2}{2}$$

$$a = \frac{(M_1 - M_2)\, g}{M_1 + M_2 + \frac{M_p}{2}}$$ → Para poleas con masa