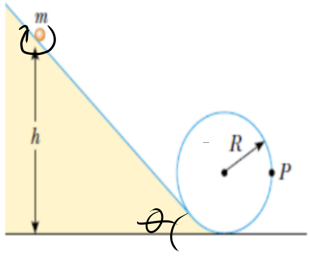
Paul Alsina, Juan Caballero, Nicolás Dussan

1. Problema 1



hay fricción

Una esfera solida de masa m y radio r rueda $\boxed{\text{sin deslizarse}}$ a lo largo de la pista como se muestra en la figura. Si inicia desde el reposo. Cual es la minima altura h desde que se debe dejar caer de tal manera que complete el giro. b. Cual es la fuerza neta en el punto P.

$$E_{pot} = E_{cinetica} + E_{pot} + E_{fricción}$$

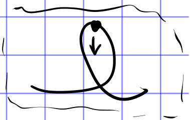
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2R-r) + \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{v}{\cancel{r}}\right)^2\left(\frac{\cancel{2}}{5}m\cancel{r^2}\right)$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}g(2R-r) + \frac{1}{5}v^2\cancel{m}$$

$$gh = \frac{7}{10}v^2 + g(2R-r)$$

$$h = \frac{7}{10g}v^2 + (2R-r)$$

buscamos v:



$$-N - mg = m a_c = -m\frac{v^2}{R}$$

$$a_c \to -\frac{v^2}{R}$$

la Normal debe ser mayor a cero.

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg > 0$$

$$\cancel{m}\frac{v^2}{R} > \cancel{m}g$$

$$v^2 > Rg$$

$$v > \sqrt{Rg}$$

Reemplazando

$$h = \frac{7}{10\cancel{g}}R\cancel{g} + (2R-r)$$

$$h = \frac{7}{10}R + (2R-r)$$

Fuerza Neta:

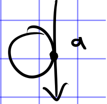
$a_{tangencial} = \alpha r$

$a_{centripeta} = \frac{v^2}{R} = \omega v$

① $\sum F_y = -mg - f_{fricción} = -m a_{tangencial}$

② $\sum F_x = -N = -m a_{centripeta}$

③ $r f_{fricción} = I_0 \alpha = \frac{2}{5}mr^2\alpha$



$$f_{\text{fricción}} = \frac{2}{5} m r \alpha = \frac{2}{5} m\, a_{\text{tangencial}}$$

① a ③:

$$\sum F_y = -mg - \frac{2}{5} m\, a_{\text{tangencial}} = -m a_{\text{tangencial}}$$

$$\cancel{-m} g = \cancel{-}\frac{3}{5} \cancel{m}\, a_{\text{tangencial}}$$

$$\frac{5}{3} g = a_{\text{tangencial}}$$

Necesitamos $a_{\text{centrípeta}}$:

Para ello necesitamos la velocidad en P:

P

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + mg(R) + \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{v}{\cancel{r}}\right)^2\left(\frac{\cancel{2}}{5} m \cancel{r^2}\right)$$

$$\cancel{m} gh = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 + \cancel{m} g(R) + \frac{1}{5} v^2 \cancel{m}$$

$$gh = \frac{7}{10} v^2 + g(R)$$

$$g\left[\frac{7}{10}R + (2R - r)\right] = \frac{7}{10} v^2 + g(R)$$

$$g\left[\frac{7}{10}R + (2R - r)\right] - (gR) = \frac{7}{10} v^2$$

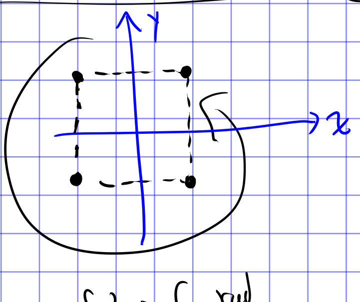
$$v = \sqrt{\left[g\left[\frac{7}{10}R + (2R - r) - R\right]\right] \times \frac{10}{7}}$$

$$a_{\text{centrípeta}} = \left[\left[g\left[\frac{7}{10}R + (2R - r) - R\right]\right] \times \frac{10}{7}\right] \div R$$

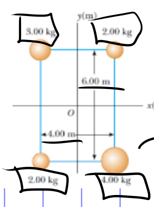
Con esto puede usar distancia euclidiana para calcular la magnitud.

3. Problema 3

Las cuatro particulas estan conectadas por barras rigidias de masa despreciable. El origen esta en el centro del rectangulo. Si el sistema rota en el plano XY alrededor del eje z con una velocidad angular $6 rad/s$ calcule a. El momento de inercia del sistema alrededor del eje z. b. La energia cinetica rotacional del sistema

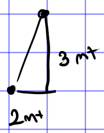


$$\omega = 6 \frac{rad}{s}$$



esferas muertas

a) Momento inercia del sistema Alrededor del eje Z



$$d = \sqrt{4\,mt^2 + 9\,mt^2} = \sqrt{13}\,mt$$

$$\text{Momento Inercia} = \sum m_i d_i^2 = d^2 \sum m_i = 13\,mt^2\,(3kg + 2kg + 2kg + 4kg) = 13\,mt^2\,(11kg) = 143\,(mt^2 \cdot kg)$$

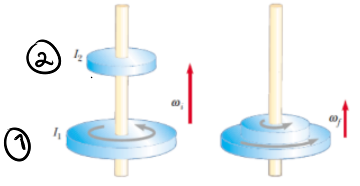
b) energía cinética rotacional del sistema

$\omega = 6$ rad/s

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \omega^2 r^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}(143\,mt^2 \cdot kg)\left(6\,\frac{rad}{s}\right)^2 = 2574\,\frac{mt^2 \cdot rad^2 \cdot kg}{s^2}$$

4. Problema 4

Un cilindro con momento de inercia I_1 rota alrededor de un eje vertical con una velocidad angular ω_i. Un segundo cilindro con momento de inercia I_2 e inicialmente en reposo es soltado sobre el primer disco, calcule ω_f. b. Muestre que la energia cinetica decrece.



a) Calcule ω_f → Conservación de momento de inercia

$$I_1 \omega_i = (I_1 + I_2)\,\omega_f$$

$$\frac{I_1}{I_1 + I_2}\,\omega_i = \omega_f$$

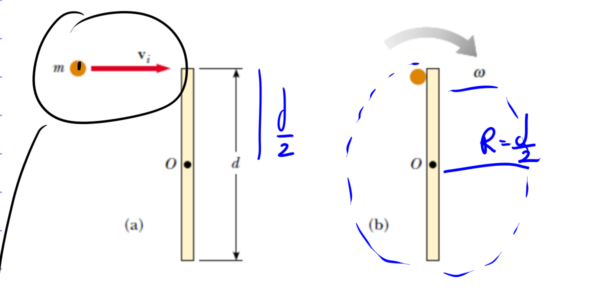
b) Post: $\frac{1}{2} m v^2 \rightarrow \frac{m_1 + m_2}{2}\left(\left(\frac{I_1}{I_1 + I_2}\,\omega_i\right) r\right)^2$

$$= \frac{m_1 + m_2}{2}\,\boxed{\frac{I_1^2}{(I_1 + I_2)^2}}\,\omega_i^2 r^2 \rightarrow < 1$$

Prc: $\frac{1}{2}\, m v^2 \rightsquigarrow \frac{m}{2}\cdot \omega_i^2\, r^2$

5. Problema 5

Un proyectil de $\boxed{\text{masa } m}$ se mueve hacia la derecha con una velocidad inicial V_i. El proyectil golpea el extremo de la $\boxed{\text{barra}}$ de masa M y longitud d. Encontrar la velocidad angular despues de la colision. Determine la energia perdida debido a la colision.



$$L = I\omega = r \times p$$

a) Momento angular

$$L_{inicial} = \vec{r} \times \vec{p} = r \times (mv) = \left(\frac{d}{2}\right)(mV_i)$$

$$L_{final} = I_{total}\,\omega = \left(I_{barra} + I_{proyectil}\right)\omega$$

con respecto al centro de la barra

$$= \left(\frac{1}{12} M d^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)\omega$$

$$L_{Inicial} = L_{final}$$

$$\frac{\cancel{d}}{2}(mV_i) = d^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{12}M + \frac{1}{4}m\right)\omega$$

$$\frac{(mV_i)}{2d\left(\frac{1}{12}M + \frac{1}{4}m\right)} = \omega$$

b)

$$E_{inicial} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$E_{final} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}\cancel{d}\,\cancel{\left(\frac{1}{12}M + \frac{1}{4}m\right)} \cdot \left(\frac{(mV_i)}{2d\left(\frac{1}{12}M + \frac{1}{4}m\right)}\right)^2$$

$$= \frac{m^2 V_i^2}{8d\left(\frac{1}{12}M + \frac{1}{4}m\right)}$$

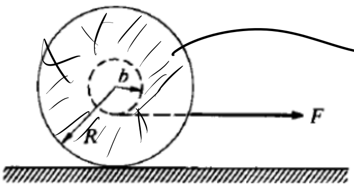
$$E_{inicial} - E_{final}$$

$$= \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{m^2 v_i^2}{8d\left(\frac{1}{12}M + \frac{1}{4}m\right)} = \frac{1}{2} m v_i^2 \boxed{\left(1 - \frac{m}{4d\left(\frac{1}{12}M + \frac{1}{4}m\right)}\right)} \rightarrow > 0$$

$$1 > \frac{m}{4d\left(\frac{1}{12}M + \frac{1}{4}m\right)}$$

6. Problema 6

Un yoyo de masa M tiene un radio interno b y un radio externo R. El yoyo es halado con una fuerza horizontal F. El coeficiente de friccion entre el yoyo y el piso es μ. caul es el maximo valor de F para el cual el yoyo rueda sin deslizarse. b. Si la fuerza forma un angulo θ con la horizonta, a que angulo el sistema no rota.

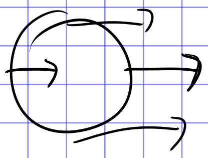


$I_{\text{cilindro hueco}} \rightarrow \frac{M}{2}(b^2 + R^2)$

• Rodar sin deslizarse

$$V_{\text{centro masa}} = R\omega$$

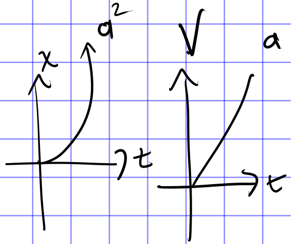
a)



$F \sim m \cdot a$

↓

la velocidad crece cte



$R\ \overset{\uparrow}{\omega}$ ω crece proporcional a la velocidad

⇓

hay una aceleración Angular

$v = a t$

$\omega = \alpha t$

$$\tau = I \cdot \alpha \qquad F = m \cdot a$$

$$V_{cm} = (a_{cm} t) = R\omega = R(\alpha t)$$

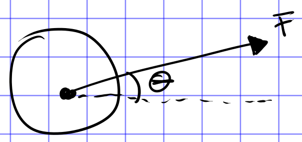
$$a_{cm} t = R(\alpha t)$$

$$a_{cm} = R\alpha$$

$$\boxed{\sum F_x = F_{\text{aplicada en } x} - F_{\text{fricción}}} = \overset{\text{cte}}{m}(\overset{\text{cte}}{R}\underset{\text{var}}{\alpha})$$

↓

d)



$\boxed{0 \le \theta \le 180}$

$F\cos(\theta) = F_{\text{aplicada en } x}$

$$\tau = I\alpha = \vec{r} \times \vec{F}$$

Note que si $\alpha = 0 \Rightarrow$ No hay torque y no hay rotación

$$\Rightarrow \sum F_x = \overbrace{F\cos(\theta)}^{F \text{ en } x} - F_{fricción} = \overset{cte}{m}(\overset{cte}{R}\overset{var}{\alpha}) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$F\cos(\theta) = F_{fricción}$$

$$F = F_{fricción}/\cos(\theta)$$

Adicionalmente no puedo rotar en Y:

$$\sum F_Y = Mg - N - F\sin(\theta) = 0$$

$$\frac{Mg - N}{\sin(\theta)} = F$$

Ahora:

$$\frac{Mg - N}{\sin(\theta)} = F_{fricción}/\cos(\theta)$$

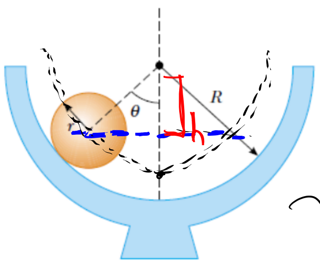
$$\frac{Mg - N}{\sin(\theta)} = \frac{\mu N}{\cos(\theta)}$$

$$Mg - N = \tan(\theta)\,\mu N$$

$$\frac{Mg - N}{\mu N} = \tan(\theta)$$

$\rightsquigarrow$ No hay ángulo que haga que el yoyo no rote

2. Problema 2



$\rightsquigarrow$ No hay fricción

Una esfera solida de masa y radio r esta ubicada dentro de un cascaron con radio R. La esfera es soltada desde el reposo en un angulo θ con respecto a la vertical y rueda sin deslizarse. Determine la velocidad angular de la esfera cuando alcanza el fondo de la superficie.

$V_{cm} = R\omega$

$$E_{potencial} = mg(\text{Altura}) = mg\left[R - (R-r)\cos(\theta)\right]$$

$$E_{\substack{cinetica \\ Rotacional}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} m r^2\right)\omega^2$$

$$E_{cinetica} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (R\omega)^2$$

$$E_{pot} = E_{cinetica} + E_{\substack{cinetica \\ rot}}$$

$$\cancel{m} g\left[R - (R-r)\cos(\theta)\right] = \frac{1}{2}\cancel{m}(R\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\cancel{m} r^2\right)\omega^2$$

$$g\left[R - (R-r)\cos(\theta)\right] = \frac{1}{2}\omega^2\left(R^2 + \frac{2}{5}r^2\right)$$

$$\sqrt{\frac{2g\left[R-(R-r)\cos(\theta)\right]}{\left(R^2 + \frac{2}{5}r^2\right)}} = \omega(\theta)$$, Sea $\theta = 0$ tenemos:

$$\omega(0) = \sqrt{2g \cdot \frac{\left[R-(R-r)\right]}{\left(R^2 + \frac{2}{5}r^2\right)}} = \sqrt{2g \cdot \frac{r}{\left(R^2 + \frac{2}{5}r^2\right)}}$$