Matrices, valores y vectores propios

22 de marzo 2022

Luz Myriam Echeverry N

Valores y vectores propios de una matriz

- Definición
- Dada una matriz cuadrada A, un vector **x** diferente de cero y un número λ que cumplen la ecuación
  - $A\boldsymbol{x} = \lambda\mathbf{x}$ (1)
- decimos que λ es un valor propio de A y x su vector propio asociado.
- Nota pedimos **x** diferente de cero porque el vector cero siempre cumple la ecuación (1)
- La interpretación geométrica es que el multiplicar el vector propio por la matriz, asociada, simplemente produce un vector múltiplo (multiplica por λ)

Ejemplo 1

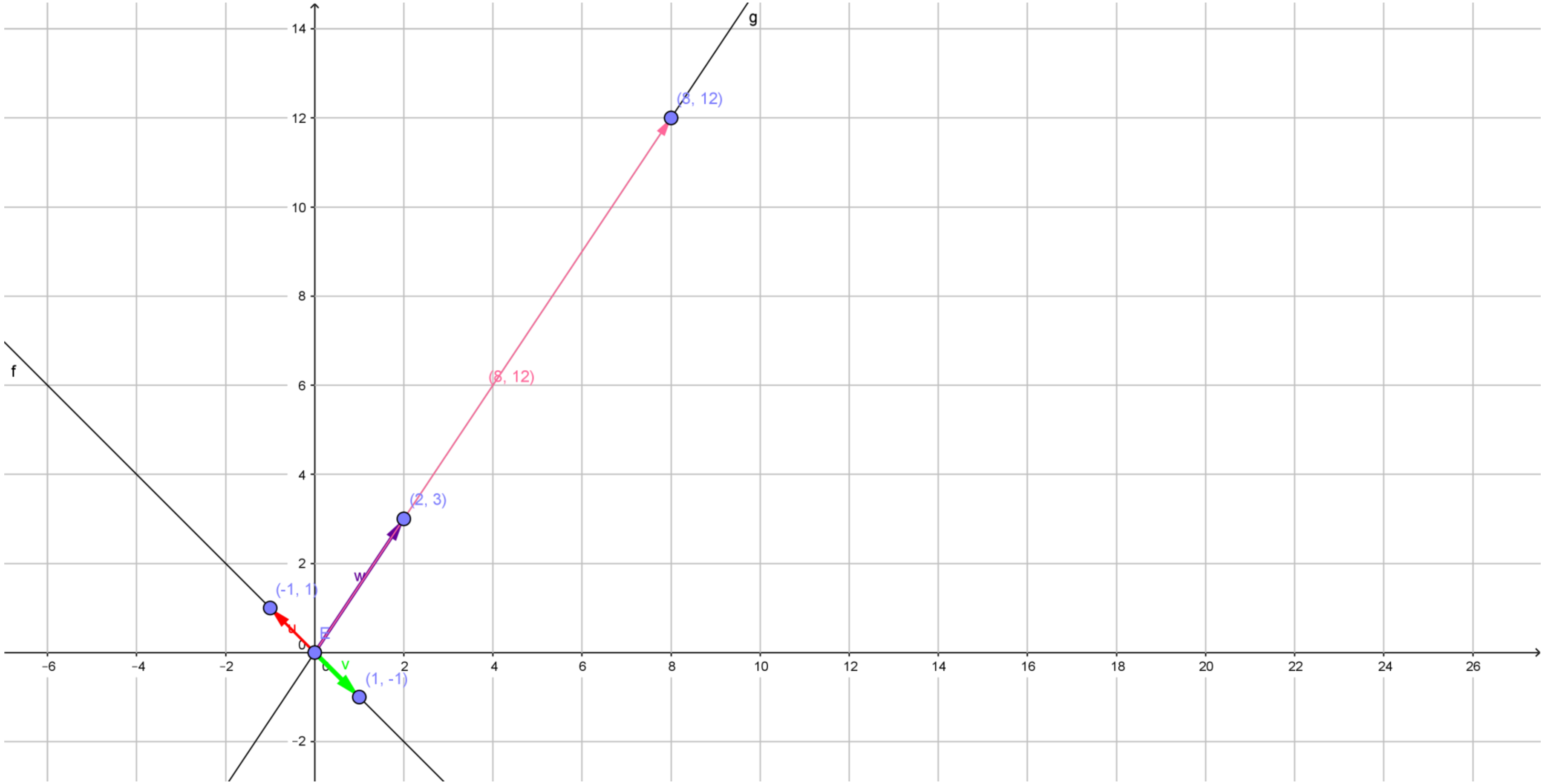
- Hallar los valores propios de
  - $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
- Hallar $\mathbf{x} \neq 0$ tal que $A\boldsymbol{x} = \lambda\mathbf{x}$ equivalente a $A\boldsymbol{x} - \lambda\mathbf{x}$=0
- Resolver el sistema
  - $A\boldsymbol{x} - \lambda I\boldsymbol{x} = (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0$ (2)
- Para que la ecuación (2) tenga solución diferente de cero se necesita que el determinante sea cero, es decir
  - $\det(A - \lambda I) = 0$

- Con la matriz dada
  - $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}$
- Determinante
- $\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = -4 - 3\lambda + \lambda^2 =$
  - $(\lambda + 1)(\lambda - 4)$
- Los valores propios $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$
- Falta calcular los vectores propios, es decir con los valores anteriores resolver dos sistemas, uno por cada valor.
- $\lambda = -1 \; A\boldsymbol{x} - (-\mathbf{1})\boldsymbol{x} = 0$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 2y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 3x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Dos ecuaciones con dos incógnitas

- $\begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 3x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Son dos ecuaciones que una es múltiplo de la otra, basta resolver
  - $2x + 2y = 0 \leftrightarrow x + y = 0 \leftrightarrow x = 1, y = -1$
- Hay infinitas soluciones, lógico el determinante es cero, todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}, a \neq 0$
- Verificamos
  - $A \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ a \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$
- Para el otro valor propio
- $\lambda_2 = 4$, vamos directamente a
- $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

- Resolver el sistema
- $(A-4I)\boldsymbol{x}=0$
  - $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{matrix} -3x+2y=0 \\ 3x-2y=0 \end{matrix}$
- Dos ecuaciones semejantes, una múltiplo de la otra
- $3x=2y$ tiene infinitas soluciones, la más cómoda $x=2, y=3$
- También $y=\frac{3x}{2}$, en forma general $x=a, y=\frac{3a}{2}, a\neq 0$
- Verificamos
- $A\begin{bmatrix} a \\ 3a/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 3a/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4a \\ 3a+3a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4a \\ 6a \end{bmatrix}=4\begin{bmatrix} a \\ 3a/2 \end{bmatrix}$

Gráficamente



Matriz triangular

- En este caso matriz triangular tiene todos sus valores cero, debajo de la diagonal, triangular superior
  - $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$
- Cero arriba de la diagonal, triangular inferior
  - $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$
- Los valores propios son fáciles de calcular.
- $\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ 0 & c - \lambda \end{bmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) = 0$
- Los valores propios son exactamente los valores en la diagonal

Valores propios complejos

- En algunos casos resultan valores propios complejos, el determinante nos da un polinomio de grado dos y sus raíces pueden ser complejas por ejemplo
  - $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
- Para calcular los valores propios el determinante a calcular
  - $\det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$
- Las raíces son
  - $\lambda = \pm i$
- En números complejos $i = \sqrt{-1}$
- Los vectores propios serán complejos

- Para
  - $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, λ=$\pm i$
- Calculo de los vectores propios, mejor en complejos , $\lambda = -i$
  - $(\mathrm{A} - \lambda I)\vec{v} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Una sola ecuación,
  - $\mathrm{i}z + w = 0 \;\rightarrow w = -iz, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$
- Para el otro valor propio, $\lambda = i$
- $(\mathrm{A} - \lambda I)\vec{u} = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -iz + w = 0 \rightarrow w = iz \rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

- Los valores propios son conjugados los vectores propios también.

Ejercicios calcular valores y vectores propios

- Para cada matriz (1)calcule los valores propios y los vectores propios correspondientes.(2) verifique la propiedad que dice que la suma de los valores propios es la traza de la matriz y el producto de los valores propios es el determinante.
- . También pinte $v, y\ Av.\ v$ el vector propio
- 1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$
- 3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- 5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Bibliografía

- Boyce DiPrima 7.3