Ecuaciones exactas

- Clase #6 febrero15/2022
- Luz Myriam Echeverry N

Ch 2.6:
Ecuaciones Exactas y Factores Integrantes

- Considere la EDP de primer orden de la forma

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0$$

- Por otro lado suponga que existe una función ψ tal que

$$\psi_x(x,y)=M(x,y),\ \ \psi_y(x,y)=N(x,y)$$

y tal que $\psi(x,y) = c$ define una función $y = \phi(x)$ implícitamente. .

$$M(x,y)+N(x,y)y'=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\psi\left[x,\phi(x)\right]$$

y la EDP original se convierte en

$$\frac{d}{dx}\psi\left[x,\phi(x)\right]=0$$

- Entonces $\psi(x,y) = c$ define la solución implícitamente.
- En este caso , se dice que la EDP es **exacta**.

Teorema 2.6.1

- Suponga que la EDP se puede escribir

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \qquad (1)$$

con las funciones M, N, M_y y N_x continuas en el rectángulo R: $(x, y) \in (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$. Ent. La Ec. (1) es una ecuación **exacta** si y sólo si

$$M_y(x,y) = N_x(x,y), \ \forall (x,y) \in R \qquad (2)$$

- Es decir , existe ψ tal que

$$\psi_x(x,y) = M(x,y), \ \psi_y(x,y) = N(x,y) \qquad (3)$$

si y sólo si M y N cumplen la ecuación (2).

Ejemplo 1: Ecuaciones Exactas (1 of 4)

- Sea la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+4y}{4x-y} \quad \Leftrightarrow \quad (x+4y)+(4x-y)y' = 0$$

- Entonces

$$M(x,y) = x+4y \quad \text{y} \quad N(x,y) = 4x-y$$

- y

$$M_y(x,y) = 4 = N_x(x,y)$$

- Es exacta y por el teorema 2.6.1,

$$\psi_x(x,y) = x+4y, \;\; \psi_y(x,y) = 4x-y$$

- Entonces

$$\psi(x,y) = \int \psi_x(x,y)dx = \int (x+4y)dx = \frac{1}{2}x^2 + 4xy + C(y)$$

Ejemplo 1: Solución (2 of 4)

- Tenemos

$$\psi_x(x,y) = x + 4y, \;\; \psi_y(x,y) = 4x - y$$

y

$$\psi(x,y) = \int \psi_x(x,y)dx = \int \left(x + 4y\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + 4xy + C(y)$$

- Se sigue

$$\psi_y(x,y) = 4x - y = 4x + C'(y) \;\; \Rightarrow \;\; C'(y) = -y \;\; \Rightarrow \;\; C(y) = -\frac{1}{2}y^2 + k$$

- Entonces

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 4xy - \frac{1}{2}y^2 + k$$

- Por el teorema 2.6.1, la solución implícita es

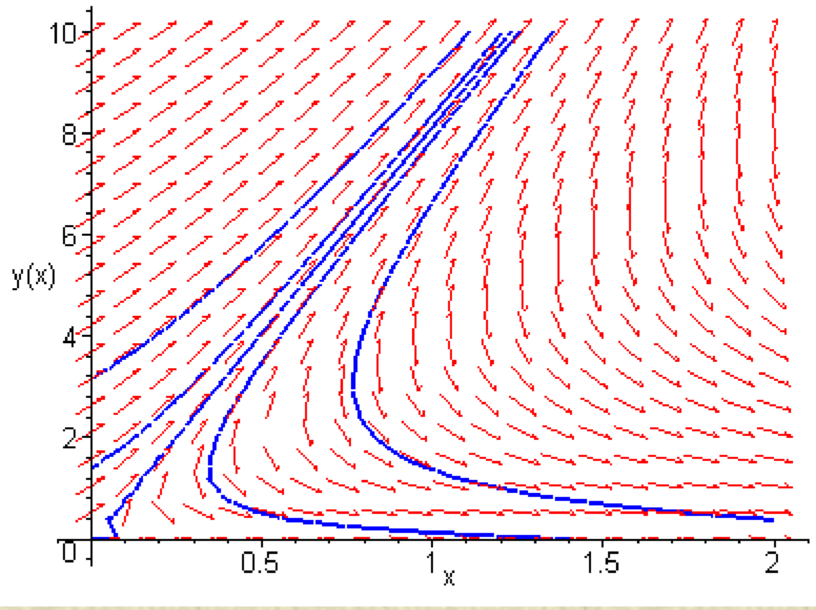
$$x^2 + 8xy - y^2 = c$$

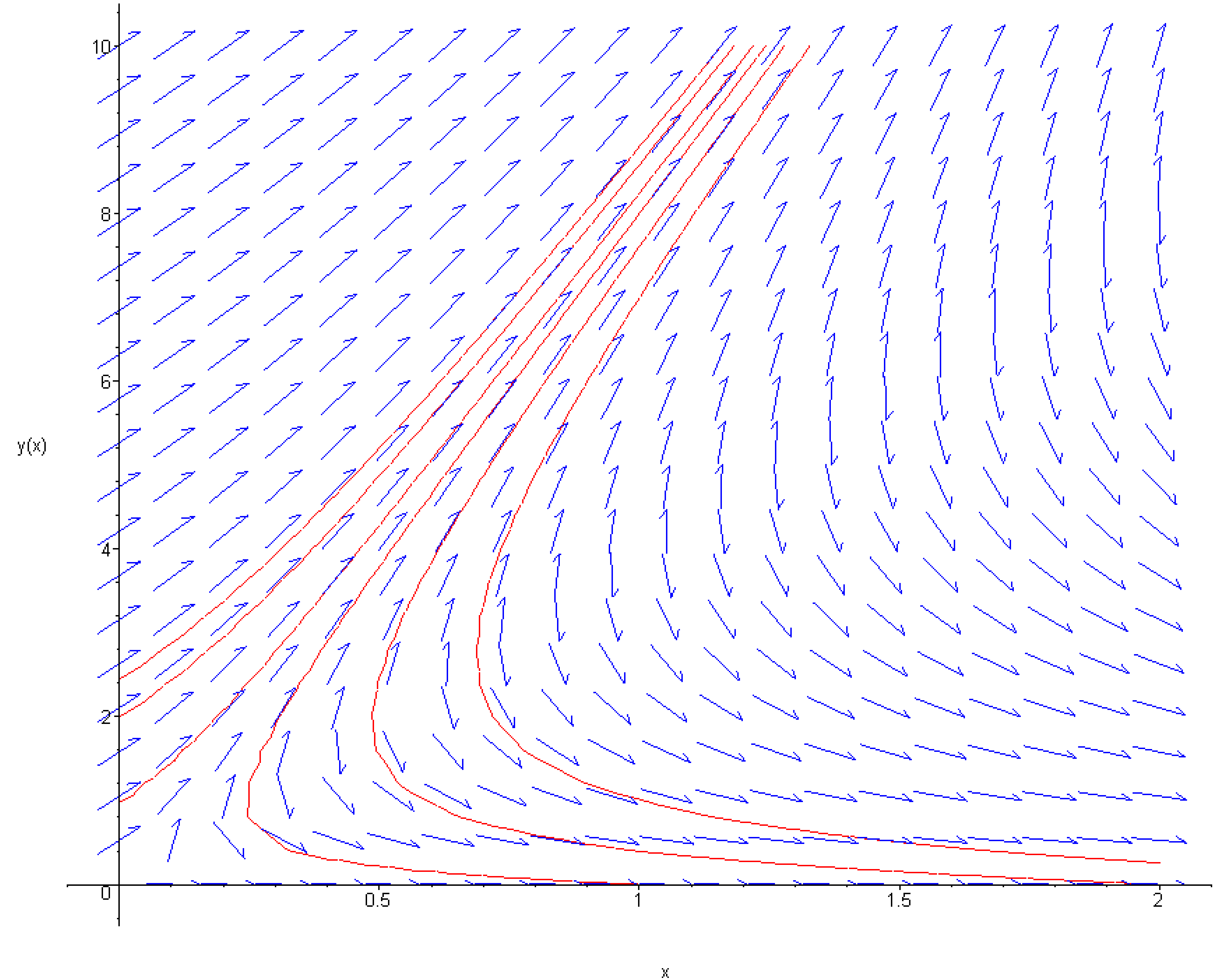
Ejemplo 1:
Campo direccional y curvas solución (3 of 4)

- La ecuación diferencial dada

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+4y}{4x-y} \quad \Leftrightarrow \quad (x+4y)+(4x-y)y' = 0 \Rightarrow \; x^2+8xy-y^2 = c$$

- Las graficas se muestran en la figura.





10
8
6
4
2
0
y(x)
0.5
1
1.5
2
x

Ejemplo1:Soluciones explícitas y gráficas(4 of 4)

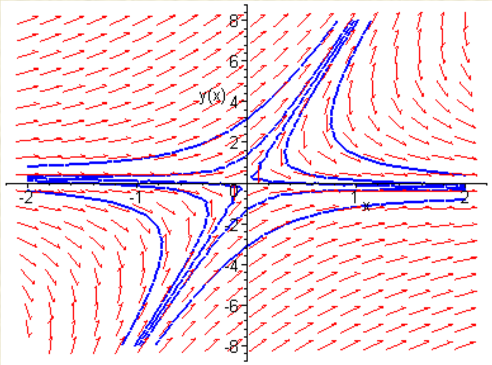
- La solución implícita.

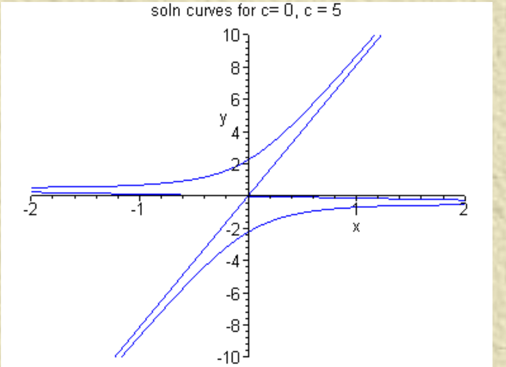
$$x^2 + 8xy - y^2 = c$$

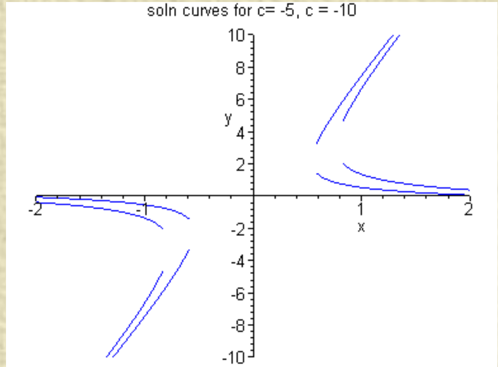
- En esta caso se puede despejar *y*:

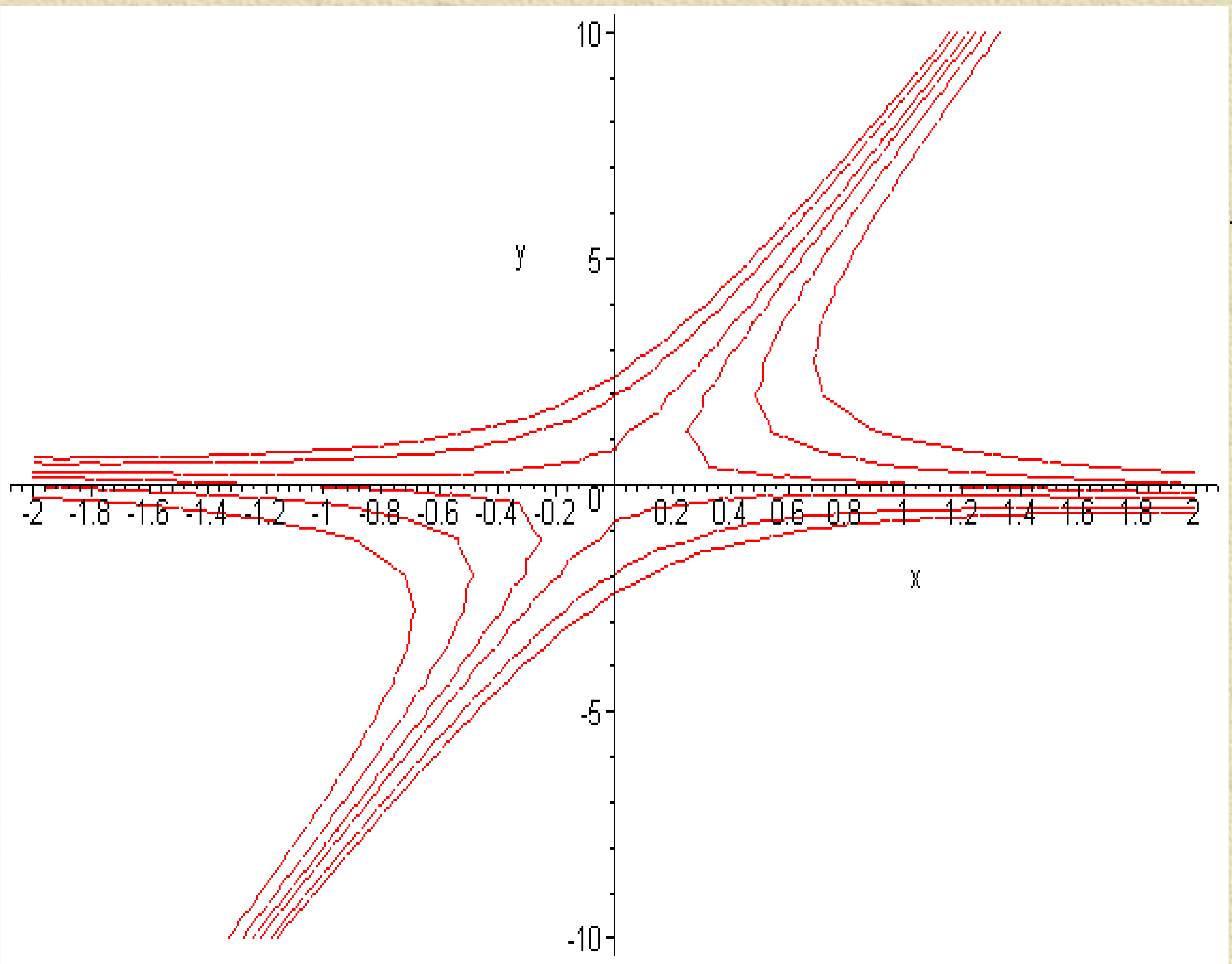
$$y^2 - 8xy - x^2 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 4x \pm \sqrt{17x^2 + c}$$

- Las curvas solución para diferentes valores de c .









10
5
-5
-10
y
x
-2 -1.8 -1.6 -1.4 -1.2 -1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2

Ejemplo 2: Ecuaciones Exactas (1 of 3)

- Sea

$$(y\cos x + 2xe^{y}) + (\sin x + x^{2}e^{y} - 1)y' = 0$$

- Entonces

$$M(x,y) = y\cos x + 2xe^{y},\ N(x,y) = \sin x + x^{2}e^{y} - 1$$

Y

$$M_{y}(x,y) = \cos x + 2xe^{y} = N_{x}(x,y)\ \Rightarrow\ \text{ODE es exacta}$$

- Por el teorema 2.6.1,

$$\psi_{x}(x,y) = M = y\cos x + 2xe^{y},\ \psi_{y}(x,y) = N = \sin x + x^{2}e^{y} - 1$$

- tenemos

$$\psi(x,y) = \int \psi_{x}(x,y)dx = \int \left(y\cos x + 2xe^{y}\right)dx = y\sin x + x^{2}e^{y} + C(y)$$

Ejemplo 2: Solución (2 of 3)

- Tenemos

$$\psi_x(x,y) = M = y\cos x + 2xe^y, \;\; \psi_y(x,y) = N = \sin x + x^2 e^y - 1$$

y

$$\psi(x,y) = \int \psi_x(x,y)dx = \int \left(y\cos x + 2xe^y\right)dx = y\sin x + x^2 e^y + C(y)$$

- Se sigue

$$\psi_y(x,y) = \sin x + x^2 e^y - 1 = \sin x + x^2 e^y + C'(y)$$

$$\Rightarrow \; C'(y) = -1 \;\; \Rightarrow \;\; C(y) = -y + k$$

- entonces

$$\psi(x,y) = y\sin x + x^2 e^y - y + k$$

- Por el teorema 2.6.1, la solución en forma implícita es

$$y\sin x + x^2 e^y - y = c$$

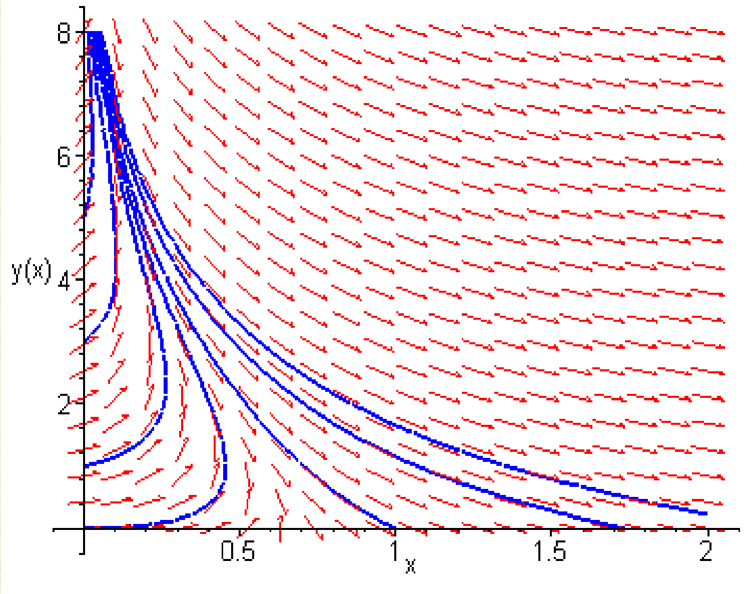
Ejemplo 2:
campo direccional y curvas integrales (3 of 3)

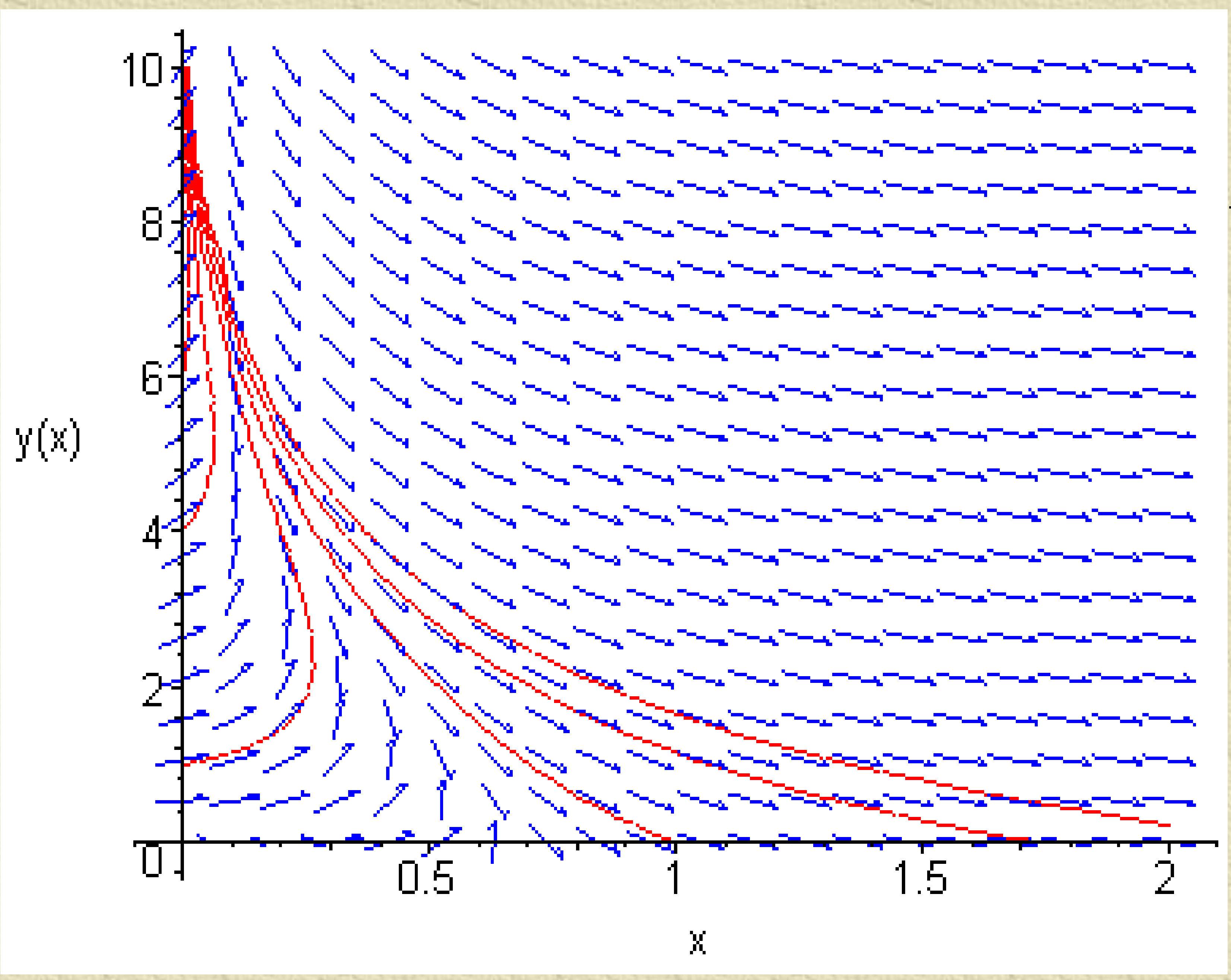
- La ecuación diferencial y su solución

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0,$$

$$y\sin x + x^2e^y - y = c$$

- El campo direccional y algunas curvas integrales (solución).





10
8
6
4
2
0
y(x)
0.5
1
1.5
2
x

Ejercicios

- Decidir si la ecuación es exacta o no, si ex exacta hallar la solución general.
- 1-$(2x+3)+(2y-2)y' = 0$
- 2-(2x+4y)+(2x-2y)y´=0
- 3-$(3x^2-2xy+2)dx+(6y^2-x^2+3)dy = 0$
- 4-$(2xy^2+2y)+(2x^2y+2x)y' = 0$
- 5-$(e^x sen(y) - 2y sen(x))dx + (e^x \cos(y) + 2\cos(x))dy = 0$

Ejemplo 3: Ecuaciones no exactas (1 of 3)

- Sea la ecuación diferencial.

$$(3xy + y^2) + (2xy + x^3)y' = 0$$

- entonces

$$M(x, y) = 3xy + y^2, \; N(x, y) = 2xy + x^3$$

y

$$M_y(x, y) = 3x + 2y \neq 2y + 3x^2 = N_x(x, y) \;\Rightarrow\; EDO \text{ no es exacta}$$

- Para ver la dificultad , busquemos ψ tal que

$$\psi_x(x, y) = M = 3xy + y^2, \; \psi_y(x, y) = N = 2xy + x^3$$

- Entonces

$$\psi(x, y) = \int \psi_x(x, y)dx = \int \left(3xy + y^2\right)dx = 3x^2 y/2 + xy^2 + C(y)$$

Ejemplo 3: Ecuaciones no exactas (2 of 3)

- ψ debe cumplir

$$\psi_x(x,y) = M = 3xy + y^2, \;\; \psi_y(x,y) = N = 2xy + x^3$$

y

$$\psi(x,y) = \int \psi_x(x,y)\,dx = \int \left(3xy + y^2\right)dx = 3x^2y/2 + xy^2 + C(y)$$

- Entonces

$$\psi_y(x,y) = 2xy + x^3 = 3x^2/2 + 2xy + C'(y)$$

$$\Rightarrow \; C'(y) \overset{?}{=} x^3 - 3x^2/2 \;\Rightarrow\; C(y) \overset{??}{=} x^3y - 3x^2y/2 + k$$

- No existe ψ. Si insistimos (incorrectamente) en seguir el método

$$x^3y + xy^2 = c$$

nuestra y, no es solución.

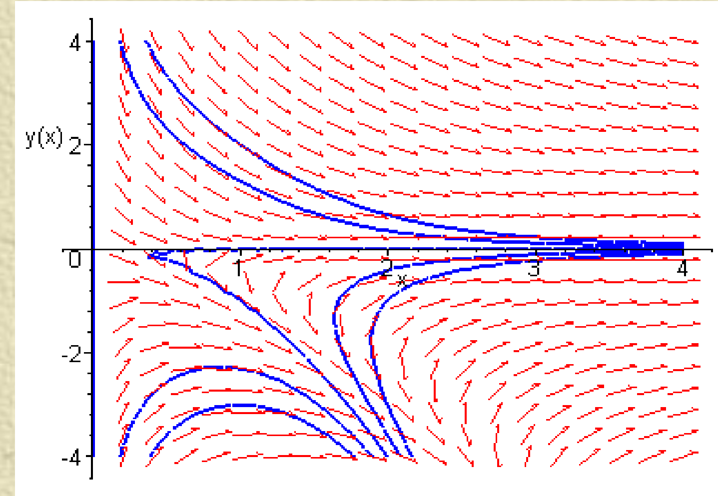
Ejemplo 3: Gráficas (3 of 3)

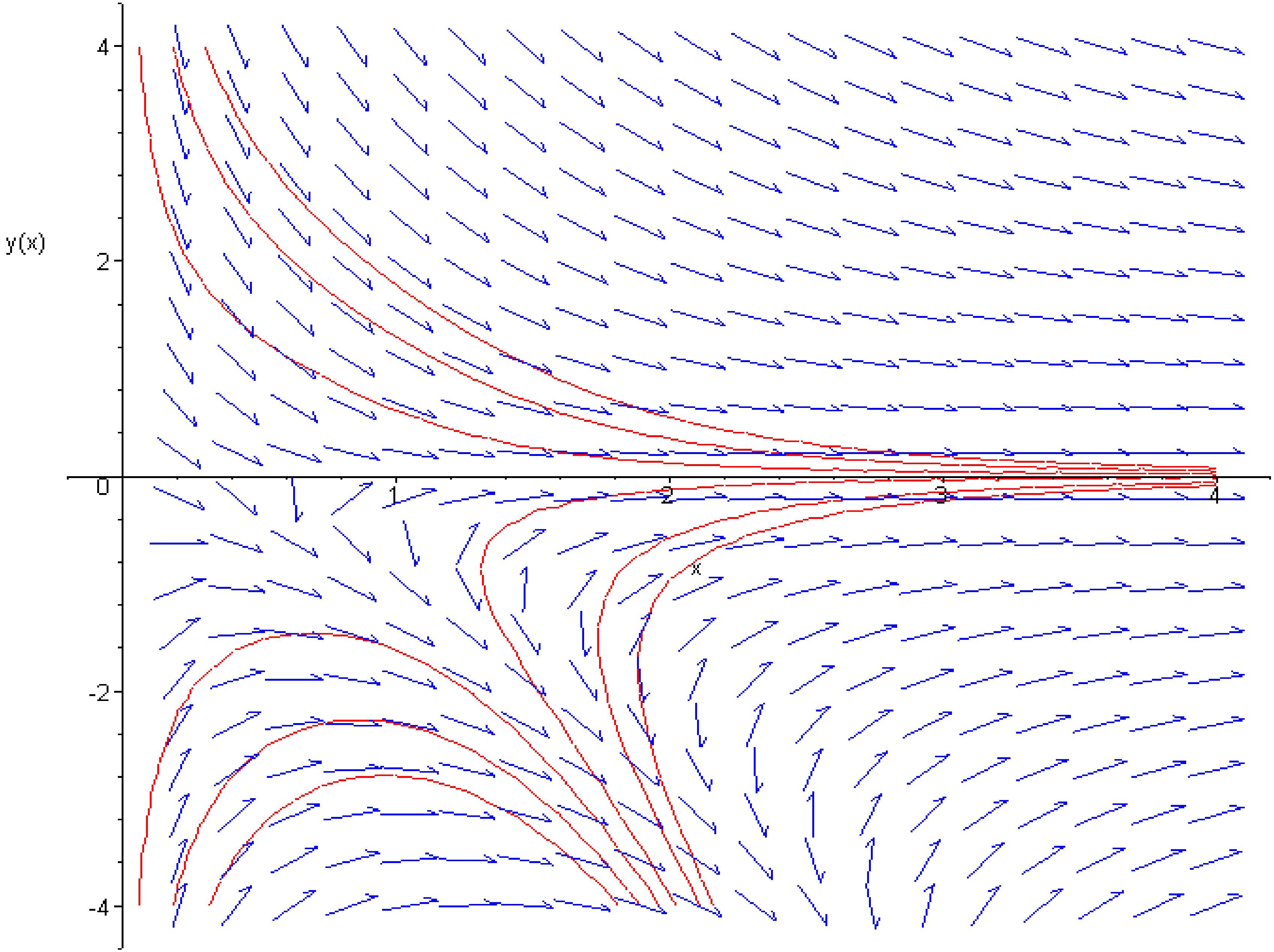
- La ecuación diferencial y nuestra *y*

  $$(3xy + y^2) + (2xy + x^3)y' = 0,$$

  $$x^3 y + xy^2 = c$$

- Las gráficas se ven abajo.
- De las gráficas tenemos evidencia de que NO es Solución.





y(x)
4
2
0
-2
-4
1
2
3
4
x

Derivando

$$(3xy + y^2) + (2xy + x^3)y' = 0,$$

$$x^3 y + xy^2 = c$$

$$3x^2y + x^3y` + y^2 + 2xyy` = 0$$

Y

$$y`(x^3 + 2xy) + (3x^2y + y^2)$$

Factor Integrante

- Algunas ecuaciones se convierten en exactas al multiplicar por una función $\mu(x,y)$:

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0$$

- Para que sea exacta debe cumplir:

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \iff M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0$$

- Esta ecuación puede ser muy difícil. Pero si μ depende sólo de x, y $\mu_y = 0$ se simplifica

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu,$$

siempre y cuando dependa de x solamente. Similarmente μ sólo depende de y se hace algo similar.

Ejemplo 4:Ecuación no exacta

- Retomado la ecuación.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

- Para hallar el factor integrante

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x} \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = x$$

- Multiplicando por μ, obtenemos una ecuación exacta

$$(3x^2 y + xy^2) + (x^3 + x^2 y)y' = 0,$$

cuya solución es:

$$x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 = c$$

Traducido de la página web

W.E. Boyce, R.C. DiPrima, “Elemtary Differential Equations and Boundary Value Problems”. Willey, 8e ed.

http://jwsedcv.wiley.com/college/bcs/redesign/instructor/0,,_047143339X_BKS_1873____,00.html

Ejercicios