Raíces complejas de la ecuación característica

Clase #12, 3 de febrero 2022

Luz Myriam Echeverry N

Ejemplo, resolver $y'' + y' + y = 0$

- El polinomio característico
  - $r^2 + r + 1 = 0$
  - $r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$
- La solución tiene la forma
  - $y_1(t) = e^{t\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}, y_2(t) = e^{t\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$
- Para trabajar esta soluciones la gran ayuda es la fórmula de Euler.

Fórmula de Euler

- Necesitamos la definición de la función exponencial para números complejos, debe coincidir con la de números reales, una motivación es la siguiente, partiendo de la serie de Taylor
  - $e^{t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n}/n!$
- válida para todos los reales.
- Sustituimos it por t
  - $e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty}(it)^{n}/n!$
- Recordemos $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1,$ así sucesivamente. Separamos la parte real de la parte imaginaria teniendo en cuenta que:
  - $i^{2k} = (-1)^{k}, i^{2k+1} = i(-1)^{k}, k = 0,1,2..$
  - $e^{it} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k} t^{2k}}{2k!} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{-k-1} t^{2k-1}}{(2k-1)!}$
  - $e^{it} = \cos(t) + isen(t)$

Fórmula de Euler $e^{it} = \cos(t) + isen(t)$

$e^{-it} = \cos(t) - isen(t)$

- Las soluciones encontradas
  - $y_1(t) = e^{t\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}, y_2(t) = e^{t\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$
- Con las leyes de exponentes, $e^{\mu+i\lambda} = e^{\mu}e^{i\lambda} = e^{\mu}(\cos\lambda + isen\,\lambda)$
- tenemos
  - $y_1 = e^{-\frac{t}{2}}\left(e^{i\frac{t\sqrt{3}}{2}}\right) = e^{\frac{-t}{2}}\left(\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} + isen\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$
  - $y_2 = e^{-\frac{t}{2}}\left(e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} - isen\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$
- Son complejas, pero se sigue cumpliendo que
  - $\frac{de^{rt}}{dt} = re^{rt}$
- Así *r* sea complejo

Soluciones reales

- La ecuación tiene coeficientes reales y esperamos una solución real, los números reales son un subconjunto propio de los complejos y por otra parte sabemos por el principio de superposición, o mejor por la linealidad del operador $L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)$ que cualquier combinación lineal de soluciones es solución.
- Tomemos el caso general
  - $y_1(t) = e^{t(\mu+i\lambda)} = e^{\mu t}(\cos t\lambda + isen\ (\lambda t))$
  - $y_2(t) = e^{t(\mu-i\lambda)} = e^{\mu t}(\cos t\lambda - isen\ (\lambda t))$
- Entonces
  - $y_1 + y_2 = 2e^{\mu t}\cos t\lambda$
  - $y_1 - y_2 = 2ie^{\mu t}\operatorname{sen} t\lambda$
- Olvidando las constantes 2 y 2i tenemos dos soluciones reales
- $u(t) = e^{\mu t}\cos t\lambda$ y $v(t) = e^{\mu t}\operatorname{sen}\ t\lambda$

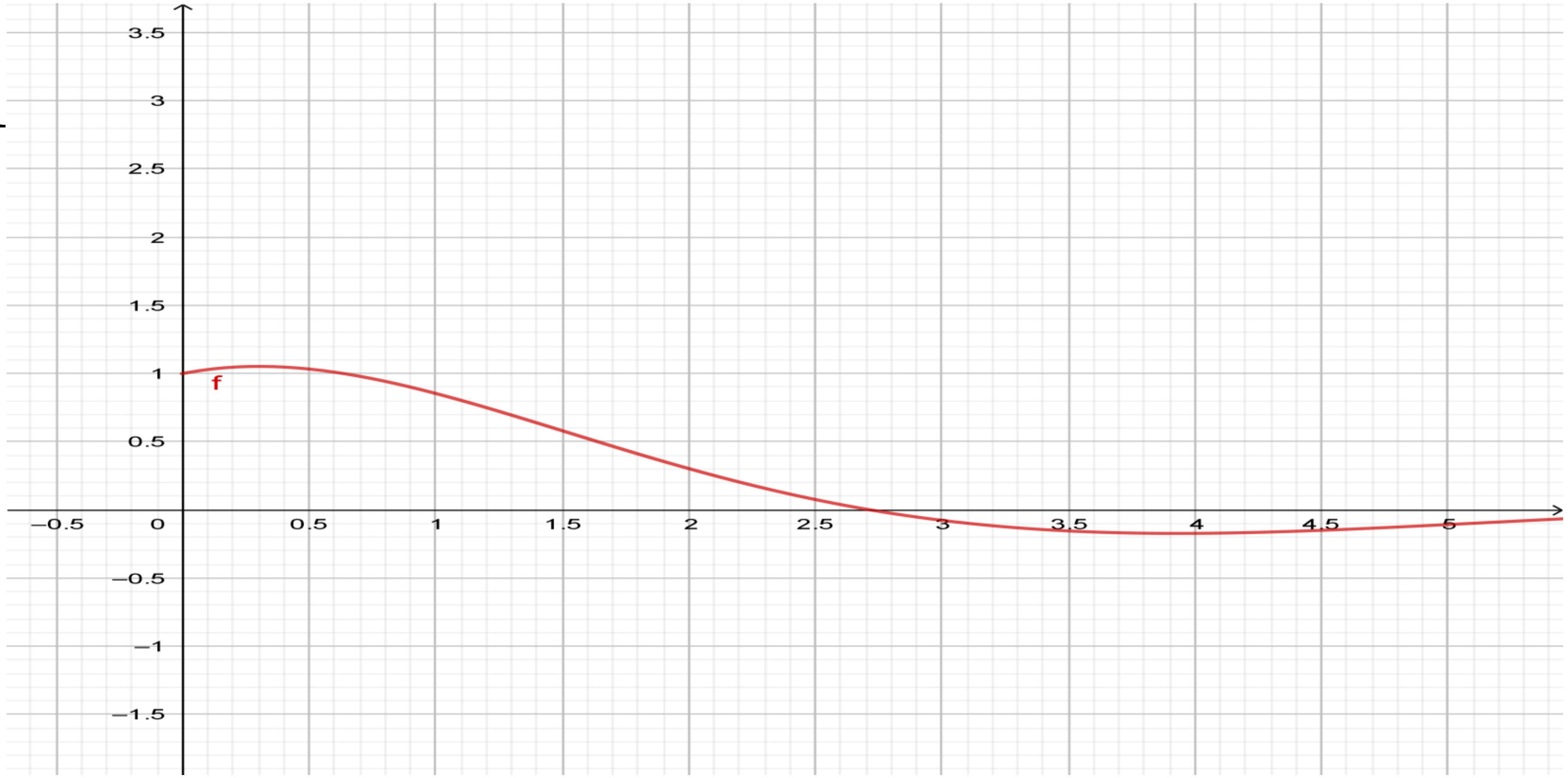
Wronskiano

- Las dos $u(t) = e^{\mu t}\cos t\lambda$ y $v(t) = e^{\mu t}\operatorname{sen} t\lambda$ soluciones cumplen
  - $W(u,v) = \begin{vmatrix} e^{\mu t}\cos t\lambda & e^{\mu t}\operatorname{sen} t\lambda \\ \mu e^{\mu t}\cos t\lambda - \lambda e^{\mu t} sen\ t\lambda & \mu e^{\mu t}\operatorname{sen} t\lambda + \lambda\, e^{\mu t}\cos t\lambda \end{vmatrix} =$
  - $e^{2\mu t}\begin{vmatrix} \cos\lambda t & sen\ \lambda t \\ \mu\cos\lambda t - \lambda sen\ \lambda t & \mu sen\ \lambda t + \lambda\cos\lambda t \end{vmatrix}$
- Factorizando $e^{\mu t}$ en el determinante, uno por cada columna
- $W(u,v) = e^{2\mu t}\big(\cos\lambda t\,(\mu sen\ \lambda t + \lambda\cos\lambda t) - sen\ \lambda t(\mu\cos\lambda t - \lambda sen\ \lambda t)\big)$=
  - $e^{2\mu t}(\lambda\cos^2\lambda t + \lambda sen^2\lambda t) = \lambda e^{2\mu t} \neq 0$
- Tenemos dos soluciones linealmente independientes y cualquier solución es de la forma
  - $y = c_1 e^{\mu t}\cos\lambda t + c_2\, e^{\mu t} sen\ \lambda t$

Ejemplo resolver $y'' + y' + y = 0$

- Ya tenemos las soluciones
  - $y_1(t) = e^{t\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}, y_2(t) = e^{t\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$
  - $y_1(t) = e^{\frac{-t}{2}}\left(\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\ sen\ t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- Pero ya sabemos que la parte real de una solución es solución
  - $y_1 = e^{\frac{-t}{2}}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- y la parte imaginaria es la otra solución
  - $y_2 = e^{-\frac{t}{2}} sen\ \left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

- Solución general
    - $y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\frac{-t}{2}} \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{c}_2\, e^{-\frac{t}{2}} sen\, \left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- Si las condiciones iniciales determinan las constantes
- Ejemplo $c_1 = 1, c_2 = 1$



Raíces repetidas

- Ejemplo
  - $y'' + 4y' + 4y = 0$ (1)
- Polinomio característico
  - $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$
- Sólo hay una raíz, $r = -2$ una sola solución $\mathrm{y}_1 = e^{-2t}$
- Co un método ideado por D´Alembert, siglo XVIII sea
  - $y_2 = v(t)y_1(t) = v(t)\, e^{-2t}$
- Vamos a calcular $v(t)$ tal que tengamos una segunda solución
- Basta reemplazar en la ecuación (1)

- $y'' + 4y' + 4y = 0$ (1)
- Sea $y = v(t)\, e^{-2t}$
- Entonces
- $y' = v'e^{-2t} - 2v\, e^{-2t}$, y $y'' = v''e^{-2t} - 2v'e^{-2t} - 2v'e^{-2t} + 4ve^{-2t}$
- Reemplazando
- $v''e^{-2t} - 4v'e^{-2t} + 4ve^{-2t} + 4v'e^{-2t} - 8ve^{-2t} + 4v\, e^{-2t}$=0
- $e^{-2t}(v'') = 0$
- Entonces $v' = c_1$, $v = c_1 t + c_2$
- La solución $y(t) = ve^{-2t} = c_1 te^{-2t} + c_2 e^{-2t}$
- Tenemos dos soluciones $y_1 = e^{-2t} y_2 = te^{-2t}$

- Tenemos dos soluciones $y_1 = e^{-2t} y_2 = te^{-2t}$
- El wronskiano
  - $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & e^{-2t} - 2te^{-2t} \end{vmatrix}$
  - $= e^{-4t} - 2te^{-4t} + 2te^{-4t} = e^{-4t} \neq 0$
- Entonces
  - $\{e^{-4t}, te^{-4t}\}$
- Forma un conjunto fundamental de soluciones.
- En general si se tiene una raíz repetida r, el conjunto fundamental es
  - $\{e^{rt}, te^{rt}\}$

Ejercicios

- Resolver
- 1) $y´´ + 2y´ + 1.25y = 0$
- 2) $y´´ - 2y´ + 5y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, grafica
- 3) $y'' - 2y' + y = 0$
- 4) $9y'' - 12y' + 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -1$
- 5) sea $9y'' + 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = a > 0, y'(0) = -1$
- Resuelva el problema de valor inicial y calcule *a* tal que separa las soluciones que son siempre positivas de las que tienen valores negativos, gráficas

Bibliografía

- W.Boyce, R. DiPrima, “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems” 8Ed