Temas:

No Real

7.9 ← Sist lin. no homos

10.1 ← PBF

10.3 y 10.2 ← Series de Fourier

10.5 ← Ecua Calor

10.4 ← Funciones Pares e impares

10.5 ← Ecua Calor 2.0

10.6 ← Ecua Calor otras Cond. Fronter

10.7 ← Ecua Onda

10.8 ← Ecua Laplace

Medio Entender y Ver Solus en Qlet.

1. Calor
2. Matrices
3. Otros Cortos.

PB. Frontera:

- Frontera es como inicial pero en extremos del dominio.
- Cond frontera no homo Solu única, infit Solu o no Solu.
- Solu homo tiene infinitas Solu única pero siempre tiene.

Los λ que generan Solus no triviales se llaman autovals y las funciones Solu no trivial se llaman eigen funciones autovecs.

Sea $y''+P(t)y'+q(t)y=g(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ y Condiciones $y(\alpha)=y_0$, $y(\beta)=y_1$

Si son iguales se dice homog.

Operador lineal: $D^2: C^2([0,\pi])\to C([0,\pi])$

$$D^2y+\lambda y=0,\quad y(0)=y(\pi)=0$$

- Caso $\lambda>0$, $\lambda=\mu^2$ (Solu gen al ope es $r^2+\mu^2=0$) $r=\pm i\mu$
  - ↳ generalmente buscamos Solus no triviales con $c_2\neq 0$ → Manipulamos μ.

Así para $y(x)=c_1\cos(\mu x)+c_2\sin(\mu x)$, $y(0)=0\to c_1=0$, $y(\pi)=0\to c_2\operatorname{Sen}(\mu\pi)=0$, $\mu=n=\pm1,\pm2,\dots$

↳ Solus no nulas Para $\lambda=n$

Buscamos esto.

- Caso $\lambda<0$, $\lambda=-\mu^2$ Así $r^2-\mu^2=0$, $r=\pm\mu$

Las Solus Generales:

- $y(x)=c_1e^{\mu x}+c_2e^{-\mu x}=c_1\operatorname{Senh}(\mu x)+c_2\operatorname{Cosh}(\mu x)$
  - ↳ Con frontera implica Solu $y=0$.

- Caso $\lambda=0$ ($y''+0y=0$) $r^2=0$, $r=0$, $y=c_1x+c_2$, Con Cond frontera solu es $y=0$.

Ejs:

1. (Libro) $y''+\lambda y=0$, $y(0)=0$, $y(\pi)=0$. → Como no se que comportamiento tiene veremos los casos. Ojo toca derivar.

Caso I. $\lambda<0$. $\lambda=-\mu^2$, $r^2-\mu^2=0\Rightarrow r=\pm\mu$, $y(x)=c_1e^{\mu t}+c_2e^{-\mu t}$

$c_1=c_2=0$ (usando forma Senh y Cosh) Solu trivial $y=0$.

Caso II $\lambda=0$, $r=0$, $y=c_1x+c_2$, $c_2=0=c_1$,

Caso III $\lambda>0$ $\lambda=\mu^2$, $r=\pm i\mu$

$\lambda>0$.

Let $\lambda=\mu^2$, then the given equation becomes

$$y''+\mu^2y=0$$

Then, the general solution is

$$y(x)=c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x$$

Also, the derivative of the equation above is

$$y'(x)=-\mu c_1\sin\mu x+c_2\mu\cos\mu x$$

Paso 6 6 de 8

On using the given condition $y(0)=0$, we get

$$c_1=0$$

Now, apply the second boundary condition $y'(\pi)=0$, to the first derivative of the equation, to get

$$y'(x)=-\mu c_1\sin\mu x+c_2\mu\cos\mu x$$
$$y'(\pi)=-\mu c_1\sin\mu\pi+c_2\mu\cos\mu\pi$$
$$0=c_2\mu\cos\mu\pi$$
$$\cos\mu\pi=0$$
$$\mu\pi=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\cdots$$
$$\mu=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots$$

Therefore, we have

$$\mu_n=\frac{2n-1}{2},n=1,2,\cdots$$

Paso 7 7 de 8

Hence, the eigenvalues are

$$\boxed{\lambda_n=\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2,n=1,2,\cdots}$$

Thus, the eigenfunctions are

$$\boxed{y_n=\sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right),\quad n=1,2,\cdots}$$

Series de Fourier:

Expresar una función como sumatoria de senos o cosenos.
↓
Series trigonométricas.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right) = f(x)$$

Definimos una func f donde la serie converge y la sum $= f(x)$ ent es fourier.

Periodicidad del Seno y el Coseno: $m \in \mathbb{Z}_+$,

- f es periodica con $T>0$ si el dom contiene $x+T$ (Periodo fundy cualquier cl también es periodo) si contiene a x, $f(x+T)=f(x)$ $\forall x$
- Si f,g son periodicas con periodo $=T$ ent $f\cdot g$ y $\underbrace{c_1 f + c_2 g}_{\text{Periodicidad Solus.}}$ tmb son periódicas con periodo $=T$.
- Las funciones $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, $m = 1,2,3,\dots$ son periódicas con periodo fund $T = 2L/m$. ($\sin, \cos$ tienen P.F $= 2\pi$ y $\sin(\alpha x), \cos(\alpha x)$, PF $= 2\pi/\alpha$)

$$(u,v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)\,dx$$

↓
Producto interno de vectores. $\Rightarrow$ ortogonales.

Ortogonalidad del Seno y Coseno: $-L \le x \le L$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}, \quad \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0 \quad \forall\, m,n$$

Pg 587. ←

a_m, b_m consecuencia ortogonalidad

Fórmulas de Euler-Fourier:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad n = 1,2,3,\dots$$

Resolvemos $\forall n$

→ Coef de la serie de Fourier.

Podemos verlo en casos $m=0, m>0, m<0$

Teo Conv de Fourier:

Suponga que f, f' son continuas a trozos en $-L \le x \le L$, f está def fuera de $[-L,L]$ tq tiene periodo $2L$, luego ent f tiene fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

Con a_m, b_m dados por euler-fourier y la serie de Fourier converge a $f(x)$ $\forall x$ donde f es continua y a $\underbrace{[f(x+)+f(x-)]/2}_{\text{Lim por derecha/izquierda de } x}$ $\forall x_0$ donde f es disc.

f cont a trozos en $a \le x \le b$ si $[a,b]$ se puede particionar por un número finito de puntos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tq:

1. f cont $\forall$ subint abierto $x_{i-1} < x < x_i$
2. $f \to$ límite finito si los extremos del int se aprox por el interior del int.

Funciones Pares e impares:

Pares Son Simétricas respecto al eje Y, e impares no lo Son.

Even → Par
Odd → Impar

- Si su dom ≤ 0 ent $f(0)=0$.
- Solo $f(x)=0$ es Par e impar.

Función Par: (→ cos.) f lo es si el $\overset{D}{\text{dom}}$ Contiene a $-x$ Cuando $x \in D$ y $f(-x)=f(x)$ $\forall x \in Dom(f)=D$.

Función Impar: (→ Sin.) f lo es si el $\overset{D}{\text{dom}}$ Contiene a $-x$ Cuando $x \in D$ y $f(-x)=-f(x)$ $\forall x \in Dom(f)=D$.

Propiedades:

1. La Suma (resta) y Producto (Cociente) de 2 Funciones Pares es par.
2. La Suma o resta de 2 impares es impar; El Producto (cociente) de 2 imp es par.
3. La Suma o resta de 1 Par y 1 impar es ninguna (ni par ni impar), Producto (Cociente) de 1 Par y 1 impar es impar.
4. Si f es Par ent $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$
5. Si f es impar ent $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$.

Fourier Para una Par. ←

Series de Coseno: f, f' Const a trozos en $[-L,L]$, f par periódica $=2L$.

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\ n=0,1,2,\ldots,\ b_n=0,\ n=1,2,3,\ldots$$

y f tiene la serie de Fourier $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Fourier Para una impar. ←

Series de Seno: f, f' Const a trozos, en $[-L,L]$, f impar periódica $=2L$.

$$a_n=0,\ b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\ n=1,2,3,\ldots$$

y f tiene fourier $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Si una func es igual a otra en un intervalo ent Convergen a la misma de Fourier.

In solving problems in differential equations, it is often useful to expand in a Fourier series of period $2L$ a function f originally defined only on the interval $[0, L]$. As indicated previously for the function $f(x) = x$, several alternatives are available. Explicitly, we can

1. Define a function g of period $2L$ so that

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le L, \\ f(-x), & -L < x < 0. \end{cases} \tag{10}$$

The function g is thus the even periodic extension of f. Its Fourier series, which is a cosine series, represents f on $[0, L]$.

→ Expansión Serie

Para ver mejor el Comportamiento y usa Periodo 2L

2. Define a function h of period $2L$ so that

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L, \\ 0, & x = 0, L, \\ -f(-x), & -L < x < 0. \end{cases} \tag{11}$$

The function h is thus the odd periodic extension of f. Its Fourier series, which is a sine series, also represents f on $(0, L)$.

3. Define a function k of period $2L$ so that

$$k(x) = f(x), \quad 0 \le x \le L, \tag{12}$$

and let $k(x)$ be defined for $(-L, 0)$ in any way consistent with the conditions of Theorem 10.3.1. Sometimes it is convenient to define $k(x)$ to be zero for $-L < x < 0$. The Fourier series for k, which involves both sine and cosine terms, also represents f on $[0, L]$, regardless of the manner in which $k(x)$ is defined in $(-L, 0)$. Thus there are infinitely many such series, all of which converge to $f(x)$ in the original interval.

Usually, the form of the expansion to be used will be dictated (or at least suggested) by the purpose for which it is needed. However, if there is a choice as to the kind of Fourier series to be used, the selection can sometimes be based on the rapidity of convergence. For example, the cosine series for the triangular wave [Eq. (20)

Separación de Variables Ecu de Calor:

Ecuas de Segundo Orden Son 1 de 3:
- Ecu Calor-Conducción
- Ecu Onda
- Ecu Potencial.

Asumimos $T_1 = T_2 = 0$.

Consideremos problema Conducción de Calor en un cuerpo sólido particularmente un alambre: (Material homogeneo)
- bordes insolados por lo que no pasa calor.
- u es una función en x de t.

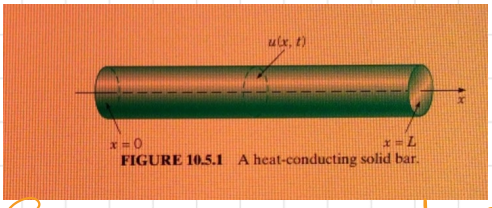


FIGURE 10.5.1 A heat-conducting solid bar.

Ecuación de Conducción de Calor:

① $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, $0<x<L$, $t>0$

Cte llamada Difusividad térmica y dep del material. $\alpha^2 = K/\rho s$ → Conductividad térmica, Densidad, Calor del material en alambre. $(\text{largo})^2/\text{tiempo}$

Además asumimos:

③ ← dada.
- Temp. inicial de la barra es $u(x,0) = f(x)$, $0 \le x \le L$.
- Los bordes de la barra tienen temp fija: T_1 en $x=0$, T_2 en $x=L$

$u(0,t) = T_1$, $u(0,t) = T_2$ Condiciones Frontera ④ (Con $t>0$ el libro las Pone $=0$).
↳ Para x (0 ó L).

$\alpha^2 X''T = XT'$ Ver Cosas: $\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{T'}{T}$

Buscamos proponer una Solu tq $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ } Separación de Vars.

Así $\alpha X''T = XT' \Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{T'}{T}}_{\text{Separamos vars.}}$ → Válida Para $0<x<L$, $t>0$ y además ambos lados han de ser igual a una cte de Separación $-\lambda$.

Ahora tenemos el Sistema:

(☺) $X'' + \lambda X = 0$, (☺) $T' + \alpha^2 \lambda T = 0$.) lineales y homogeneas. Con Coef Ctes.

(☺) $X(0) = 0$, (☺) $X(L) = 0$ Por Cond frontera.

La Solu Para (☺) que no es la trivial son las eigenfunciones $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1,2,3,\ldots$ asociadas a los eigenvals $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1,2,3,\ldots$

↳ Los reemplazamos en (☺) y nos queda $T' + (n^2\pi^2\alpha^2/L^2)T = 0$.

$u_n(x,t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \cdot \sin(n\pi x/L)$, $n = 1,2,3,\ldots$ Es Solución fundamental

Debe cumplir: $u(x,0) = f(x)$, $0 \le x \le L$

Definimos:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \cdot \sin(n\pi x/L)\right)$$ → Converge y Satisface ①④

Solución formal

Con Coef C_n es la Solu al Problema de Conducción de Calor.

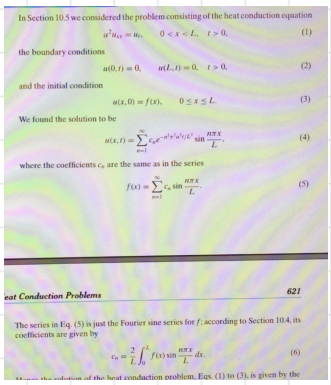
y Para u_{n+1} u_n derivamos término a término.

y Para Satisfacer ③ $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$

Como tiene pinta de Fourier usamos (bn) así: $C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$, $n = 1,2,3,\ldots$

{} en Pg 626.

Otros Problemas de Calor:



In Section 10.5 we considered the problem consisting of the heat conduction equation

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{1}$$

the boundary conditions

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

and the initial condition

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L. \tag{3}$$

We found the solution to be

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{4}$$

where the coefficients c_n are the same as in the series

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{5}$$

eat Conduction Problems 621

The series in Eq. (5) is just the Fourier sine series for f; according to Section 10.4, its coefficients are given by

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{6}$$

f Puede tener Puntos de disc.
↓
Pero la Solu si es Cont.

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \quad \forall x \text{ sin importar la Cond inicial.}$$

Condiciones de frontera no homogeneas:

→ bordes barra en temp cte $T_1 \neq T_2$.

T_1, T_2 Ctes. $\Rightarrow u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2,\ t>0$. Para resolverlo lo reducimos a $T_1 = T_2$ usando $v(x)$.

Con $t\to\infty$, $v(x)$ dist calor tq:

$v''(x) = 0,\ 0<x<L$, $v(x)$ func lineal de x y debe satisfacer

$v(0) = T_1,\ v(L) = T_2$.

Así $v(x) = (T_2 - T_1)\dfrac{x}{L} + T_1$ → Cumple las cond dadas arriba.

$u(x,t) = \underbrace{v(x)}_{\text{Dado.}} + w(x,t)$ Reescribir para usar método de separación de vars en $w(x,t)$.

$w(x,t)$: $\alpha^2 (v+w)_{xx} = (v+w) \to \alpha^2 w_{xx} = w_t$

$v_{xx} = 0$ y $v_t = 0 \Rightarrow w(0,t) = u(0,t) - v(0) = T_1 - T_1 = 0$
↳ $w(L,t) = u(L,t) - v(L) = T_2 - T_2 = 0$ → Ahora es homogeneo ed podemos separar vars.

Por lo tanto:

$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = f(x) - v(x)$.

Reduce Problema no homo a uno homo.
↓
Check ej Pg 623.

$$\boxed{u(x,t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L}\cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - (T_2 - T_1)\frac{x}{L} - T_1\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}$$

Barra Con Extremos aislados: (No les Pasa Calor).

Similar al P.V. de frontera.

Cond de barrera son $u_x(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0,\ t>0$.

Se Puede resolver con Separación de vars:

$u(x,t) = X(x)\cdot T(t) \Rightarrow \dfrac{X''}{X} = \dfrac{1}{\alpha^2}\cdot\dfrac{T'}{T} = -\lambda$ (cte), $X'' + \lambda X = 0,\ T' + \alpha^2\lambda T = 0$ → Sist. a resolver.

Además de $X'(0) = 0,\ X'(L) = 0$

↳ Solus no triviales con $\lambda \in \mathbb{R}$. lo asumen y usan trisotomia

- $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$ ($\mu \in \mathbb{R}_+$), $X'' - \mu^2 X = 0 \xrightarrow{\text{Solu general}} X(x) = k_1 \sinh(\mu x) + k_2 \cosh(\mu x)$ (λ no Puede Ser negativa)
- $\lambda = 0$ $X'' = 0 \to X(x) = k_1 x + k_2$ ($k_1 = 0$ Pero k_2 libre, $T(t)$ es cte así se tiene Solu cte $u(x,t) = k_2$).
- $\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $X'' + \mu^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = k_1 \sin(\mu x) + k_2 \cos(\mu x)$, $k_1 = 0$, $\mu = n\pi/L$, $n = 1,2,3,\ldots$, k_2 libre.

Finalmente se tienen las Solus final: $\circ\ u_0(x,t) = 1$. $\circ\ u_n(x,t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L}\cdot\cos(n\pi x/L)$, $n = 1,2,\ldots$

Solu Para los que tienen bordes aislados.

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{c_0}{2}}_{= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x),\quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad n = 1,2,\ldots$$

y es el valor esperado de la dist o de dist.

For $\alpha^2 = 1$, Figure 10.6.2 shows plots of the temperature distribution in the bar at several times. Again the convergence of the series is rapid so that only a relatively few terms are needed to generate the graphs.

More General Problems. The method of separation of variables can also be used to solve heat conduction problems with other boundary conditions than those given by Eqs. (8) and Eqs. (24). For example, the left end of the bar might be held at a fixed temperature T while the other end is insulated. In this case the boundary conditions are

$$u(0,t) = T, \qquad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0. \tag{43}$$

The first step in solving this problem is to reduce the given boundary conditions to homogeneous ones by subtracting the steady state solution. The resulting problem is solved by essentially the same procedure as in the problems previously considered. However, the extension of the initial function f outside of the interval $[0, L]$ is somewhat different from that in any case considered so far (see Problem 15).

A more general type of boundary condition occurs when the rate of heat flow through the end of the bar is proportional to the temperature. It is shown in Appendix A that the boundary conditions in this case are of the form

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \qquad u_x(L,t) + h_2 u(L,t) = 0, \quad t > 0, \tag{44}$$

where h_1 and h_2 are nonnegative constants. If we apply the method of separation of variables to the problem consisting of Eqs. (1), (3), and (44), we find that $X(x)$ must be a solution of

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X'(0) - h_1 X(0) = 0, \qquad X'(L) + h_2 X(L) = 0, \tag{45}$$

where λ is the separation constant. Once again it is possible to show that nontrivial solutions can exist only for certain nonnegative real values of λ, the eigenvalues, but these values are not given by a simple formula (see Problem 20). It is also possible to show that the corresponding solutions of Eqs. (45), the eigenfunctions, satisfy an orthogonality relation and that we can satisfy the initial condition (3) by superposing solutions of Eqs. (45). However, the resulting series is not included in the discussion of this chapter. There is more general theory that covers such problems, and it is outlined in Chapter 11.

Ecuación de Onda:

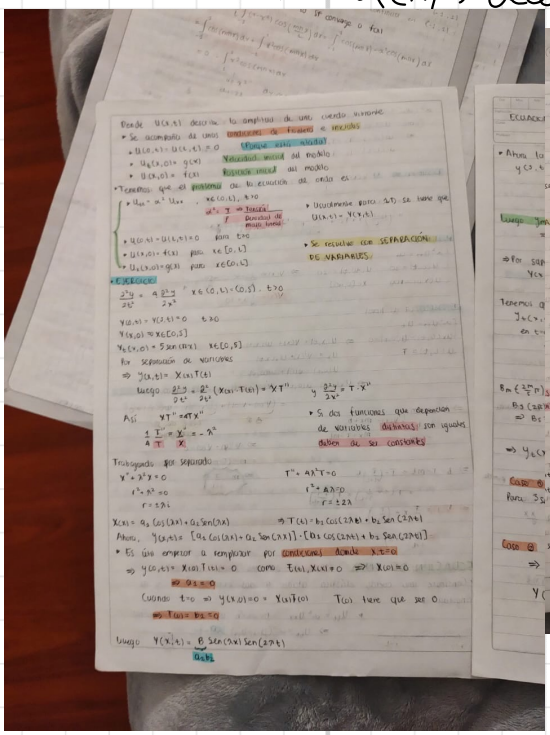
Vibración de una Cuerda elástica

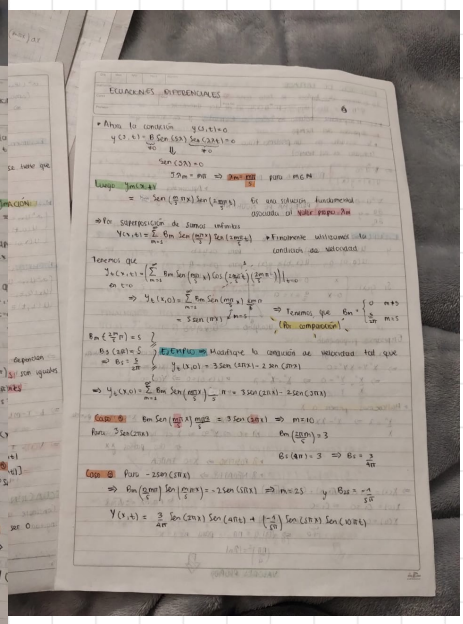
- Considere cuerda elástica atada a 2 extremos fijos y de longitud L.

$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ ecua onda unidimensional

$\Rightarrow u_{tt} = \alpha^2 (u_{xx} + u_{yy})$ ecua onda 2-dimensional.

$u(x,t)$ describe la amplitud de una cuerda vibrante





Laplace:

ECUACIÓN DE LAPLACE

La ecuación de Laplace se halla como ∇ es el LAPLACIANO tal que $\nabla^2 u = 0 = u_{xx} + u_{yy}$ si $u(x,y)$ es de dos dimensiones

- Es independiente totalmente ⇒ Tiene de Fourier y en vemos que no depende del tiempo
- Se estudia en un problema físico con condiciones adicionales (ninguna es del tiempo)

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \nabla^2 u = 0 \\ u(\vec{r}) = g(\vec{r}) \end{array}\right\} \text{PROBLEMA DE DIRICHLET}$$

- Aplicamos separación de variables y SF

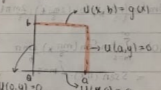
$$\left.\begin{array}{l} \nabla^2 u = 0 \quad x \in D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad x \in \partial D \end{array}\right\} \text{PROBLEMA DE NEUMANN}$$

EJEMPLO ⇒ Encuentre la solución en $D: (0 \le x \le a), (0 \le y \le b)$

y $u(0,y) = u(a,y) = 0$ para $0 \le y \le b$

$u(x,0) = 0$, $u(x,b) = g(x)$ para $0 \le x \le a$

Si $g(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le a/2 \\ a-x & \frac{a}{2} \le x \le a \end{cases}$



Empezamos proponiendo

$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ en la ED

$\Rightarrow X''Y + XY'' = 0$

$\Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$

Analizamos las condiciones de frontera

- $u(0,y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$
- $u(x,0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$
- $u(a,y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0$

- Hallaremos primero a X

$\frac{X''}{X} = \lambda \Rightarrow X'' - \lambda X = 0$

CASOS SOBRE λ

- $\lambda = 0 \Rightarrow X'' = 0 \Rightarrow X$ es lineal y vale 0 en dos puntos $\frac{X}{0}X$ ⇒ $X = 0$ no se puede
- λ POSITIVO ⇒ $X = 0$ TAMBIEN
- λ NEGATIVO ⇒ $X'' - \lambda X = 0$

$\Rightarrow X(x) = C_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}\, x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{|\lambda|}\, x)$ $\Rightarrow r^2 - \lambda = 0$

$X(0) = C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ $\quad r = \pm\sqrt{\lambda} = \pm\sqrt{|\lambda|}\, i$

$X(a) = 0 \Rightarrow X(a) = C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{|\lambda|}\, a) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{|\lambda|}\, a = n\pi$ para $n = 1, \dots, k$

$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = |\lambda_n|$

VALORES PROPIOS

$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \Rightarrow$ FUNCIÓN PROPIA

Ahora con Y

$-\frac{Y''}{Y} = \lambda \Rightarrow Y'' + \lambda Y = 0$

$r^2 + \lambda = 0$

$r^2 + -\lambda = |\lambda| \Rightarrow r = \pm\sqrt{|\lambda|}$

$Y(y) = a_1 e^{\sqrt{|\lambda|}y} + a_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}y}$

$Y(0) = a_1 + a_2 = 0$

$\Rightarrow a_1 = -a_2$

$\left(\Rightarrow Y(y) = a_1 e^{\sqrt{|\lambda|}y} - a_1 e^{-\sqrt{|\lambda|}y}\right)$ Guardar

- Note que si $a_1 = a_2 = 1$

$\Rightarrow Y(y) = \frac{e^{\sqrt{|\lambda|}y} + e^{-\sqrt{|\lambda|}y}}{2} = \cosh(\sqrt{|\lambda|}\, y)$

Por superposición tengo que $Y(y) = d_1 \cosh(\sqrt{|\lambda|}\, y) + d_2 \operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda|}\, y)$

- Si $a_1 = \frac{1}{2}$ $a_2 = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow Y(y) = \operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda|}\, y)$

$Y(0) = d_1 = 0$

$\Rightarrow Y(y) = d_2 \operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda|}\, y)$

Completando $\forall$ tenemos $Y_n = \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$ para $n \ge 1$

$\Rightarrow U_n(x,y) = X_n \cdot Y_n$

$= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$ Ahora proponemos la suma de las fundamentales

$\Rightarrow u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n U_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$

FINALMENTE $U(x,b) = g(x)$

$U(x,b) = \sum \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}_{SF} \underbrace{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) b_n}_{B_n} = g(x)$

Basta entonces calcular la serie de Fourier de senos de $g(x)$ para hallar B_n

$\Rightarrow B_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$

$L = a$ $\quad = \frac{2}{a}\left[\underbrace{\int_0^{a/2} x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}_{I_1} + \underbrace{\int_{a/2}^{a} (a-x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx}_{I_2}\right]$ Por partes $\frac{x}{0}x$

I_1

a_n derivadas	b_n integrales	... Resultado de cálculos
x	$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$	$I_1 = -\frac{a}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left(\frac{a}{n\pi}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2$
1	$-\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left(\frac{a}{n\pi}\right)$	
0	$-\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2$	$I_2 = \frac{a}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left(\frac{a}{n\pi}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2$

$\Rightarrow B_n = \frac{2}{a}\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2\right] \Rightarrow$ Igualando con b_n

$\Rightarrow b_n = \frac{4}{a}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{2}\right)} = \frac{4a}{n^2\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}$ RESPUESTA