Dependencia lineal

⊛ 2 funciones f y g definidas en el intervalo $I = (a, b)$ son linealmente dependientes si existen k_1 y k_2 no nulas tales que

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Si no son dependientes entonces decimos independientes.

Teorema

Sea f y g funciones diferenciables en el intervalo I, si $W(f,g)(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in I$, entonces f, g son linealmente independientes en I.

Si f y g fuesen dependientes $\Rightarrow W(f,g)(t) = 0 \ \forall t \in I$.

Teorema de Abel

Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación diferencial $L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ con p, q funciones continuas en el intervalo I entonces

$$W(y_1, y_2)(t) = \underbrace{c}_{\text{depende de } y_1 \text{ y } y_2 \text{ pero no de } t} \cdot e^{-\int p(t)\, dt}$$

$W(y_1, y_2)$ es cero en todo el intervalo o nunca es cero.

Resumen

- en el intervalo en que p, q son continuas tenemos estas equivalencias:

1. y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones en I
2. Las funciones y_1 y y_2 son lin. independientes en I.
3. $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in I$.
4. $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ en todo el intervalo I.

y_1 y y_2 son la base del subespacio de dimensión 2 que es el espacio de solución de la eqn.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$