E.D.O
7.7 Matrices fundamentales

31/03/2022

Luz Myriam Echeverry N

Motivación

- Lenguaje Matemático
- Una característica en matemáticas es tener un lenguaje muy sintético, con pocos signos se expresan muchas ideas.
- Aquí:
  - $y' = ay,$ escalares.
  - $\overrightarrow{x'} = A\vec{x}$ vectores
  - $\Psi' = P(t)\,\Psi$ matrices
- En los tres casos es la misma ecuación. La derivada igual a un factor de la función

Ejemplo

- El primer ejemplo en sistemas.
  - $\dot{\vec{x}} = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$
- Tenemos dos soluciones linealmente independiente para calcular la solución general:
  - $X_1 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, X_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Sea:

$$\Psi = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

- Afirmación
  - $\Psi = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$
- Cumple:
  - $\Psi' = A\Psi$
- Es decir :
  - $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$
- Veamos:

Ejemplo

- Por partes:
- $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3e^{3t} & -e^{-t} \\ 6e^{3t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}$
- Por otra parte:
  - $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3e^{3t} & e^{-t}-2e^{-t} \\ 4e^{3t}+2e^{3t} & 4e^{-t}-2e^{-t} \end{pmatrix}=$
  - $\begin{pmatrix} 3e^{3t} & -e^{-t} \\ 6e^{3t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}$
- Se cumple!!!
  - $\Psi' = A\Psi$

Forma compacta de la solución general

- La solución general:
  - $\vec{x} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Es igual a:
  - $\vec{x} \ = \Psi\, \vec{c} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$
- La solución del problema de valor inicial:
  - $\vec{x}\,(0) = \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$
- También es fácil:

Problema de valor inicial

- Entonces
  - $\vec{x}\,(0)=\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\Big|_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$
- Matricialmente:
  - $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$
- La matriz Ψ es invertible si las soluciones linealmente independientes.
- Las constantes quedan en función del valor inicial, en este caso:
  - $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Problema de valor inicial

- Simbólicamente:
  - $\Psi(t_0)\vec{c} = \overrightarrow{x_0}$
  - $\vec{c}=\Psi(t_0)^{-1}\,\overrightarrow{x_0}$

- Y la solución : $\vec{x}(t) = \Psi(\mathrm{t})\,\Psi(t_0)^{-1}\,\overrightarrow{x_0}$

Así como hay muchas soluciones linealmente independientes, cualquier combinación lineal de soluciones es solución. Podemos buscar una muy particular

Primero dos soluciones de valor inicial:

La solución fundamental

- Primero:
- $\vec{x}\,' = A\vec{x},$ con $\vec{x}(t_0)$=$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_1}$
- Y
- $\vec{x}\,' = A\vec{x},$ con $\vec{x}(t_0)$=$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_2}$
- Cos esas dos soluciones se puede formar la matriz fundamental:
  - Φ(t),
- Que va a cumplir $\Phi(t_0)$=I, la identidad y la inversa es sencilla.

En el ejemplo

- Teníamos
  - $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
- La primera solución:
  - $\overrightarrow{y_1} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{3t}}{2} + e^{-t}/2 \\ e^{3t} - e^{-t} \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$
- La segunda:
  - $\overrightarrow{y_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} e^{3t} - \frac{1}{4} e^{-t} \\ \frac{1}{2} e^{3t} + \frac{1}{2} e^{-t} \end{pmatrix}$

La matriz fundamental

- Finalmente:
  - $\Phi(t)=\begin{pmatrix} \frac{e^{3t}}{2}+e^{-t}/2 & \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$

  - $\Phi(0)=I$
- La solución general:
- $\vec{x}=\Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}\,\overrightarrow{x_0}=\Phi(t)\,\overrightarrow{x_0}$
- La inversa de la identidad es I
  - $\vec{x}=\Phi(t)\,\overrightarrow{x_0}$

- Nota reservamos la notación $\Phi(\mathrm{t})$ para la matriz fundamental que cumple
  - $\Phi(\mathrm{t}_0) = I$
- Aunque el calculo de Φ es mas complicado ayuda mucho cuando tenemos que resolver el mismo problema de valor inicial varias veces, diferentes condiciones iniciales. La matriz $\Phi(\mathrm{t})$ permite ver como la condición inicial $\overrightarrow{x_0}$ se transforma en la solución $\vec{x}(\mathrm{t})$.
- Tenemos
  - $\vec{x}(t) = \Psi(\mathrm{t})\ \Psi(t_0)^{-1}\ \overrightarrow{x_0}$
- Y
  - $\vec{x}(t) = \Phi(\mathrm{t})\ \overrightarrow{x_0}$
  - Entonces $\Psi(\mathrm{t})\ \Psi(t_0)^{-1} = \Phi(\mathrm{t})$

Ejercicio Hallar una matriz fundamental y Hallar también la matriz Φ(t) que cumple Φ(0)=I.

- 1. $\dot{\vec{x}} = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$

2. $\dot{\vec{x}} = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$

4) $\dot{\vec{x}} = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$

Use lo anterior, en cada caso resuelva el problema con $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Psi(t)\ \Psi(t_0)^{-1} = \Phi(t)$

Matriz exp(At)

- La idea de compactar las fórmulas sigue:
- Recordemos:
  - $e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n a^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} a^n$ (1)
- Sabiendo que la solución de y´=ay es
  - $\mathrm{y}(t) = y_0 e^{at}$
- Vamos a definir la exponencial de una matriz:
- Definición:
  - $Exp(At) = I + \sum_{n=1}^{\infty} {(At)^n}/{n!} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots \frac{(At)^n}{n!} + \ldots\ldots$
- Cada elemento es una matriz, y cada elemento de la matriz es una exponencial que converge para todo *t* por la convergencia de (1)

Cumple la ecuación diferencial

- Ejemplo
- $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$, At=t $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} t/2 & 0 \\ 0 & t/4 \end{pmatrix}$

- $(tA)^n = t^n A^n$,
- Diagonal, es fácil calcular su derivada y sus potencias.
  - $A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{pmatrix}$
  - $A^n = \begin{pmatrix} 1/2^n & 0 \\ 0 & 1/4^n \end{pmatrix}$
- La derivada de At es A, y la derivada de $t^n A^n$, es $nt^{n-1}A^n$

Derivada de la exponencial

- La derivada de :
  - $Exp(At) = I + \sum_{n=1}^{\infty} {(At)^n}/{n!}$
  - $\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, t^{n-1} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, t^{n-1} \frac{A^n}{(n-1!)n}$
- Simplifica *n*,
  - $\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} A^{n-1} A \frac{1}{(n-1)!} = \mathrm{A} \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} A^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} =$
  - $A \left(I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots \frac{(At)^n}{n!} + \ldots\ldots \right) = \mathrm{A}\, e^{At}$
- Cumple la ecuación:
  - $\frac{d}{dt} e^{At} = \mathrm{A}\, e^{At}$

Matrices diagonalizables

- Al presentar los sistemas lineales se dijo que el cambio en la variable *x(t)* dependía también del de la variable *y*(t).
  - $\frac{dx}{dt} = x(t) + y(t)$
- En el primer ejemplo pero si la matriz es diagonalizable se desacopla el sistema, en cambio en *x*, solo depende de *x.*
- Es más claro en el ejemplo:
  - $\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X$
- La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

Diagonalización

- A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, sus vectores propios :$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, r=3.
  - $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, r=-1
- Con los vectores propios se diagonaliza la matriz.
  - T=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, inversa $T^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
- El producto:
  - $T^{-1}AT = T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$
  - = $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D$

Diagonalización y ecuaciones diferenciales

- Volviendo a la ecuación
  - $X' = AX$
  - El cambio de variable: X=TY, recuerde X depende de t y T no!
  - X´=Ty´ por otro lado
  - $TY' = ATY$
- Si T <u>es a matriz de vectores propios , T </u>es invertible.
- $Y' = T^{-1}ATY = DY$
- Aquí, en el primer ejemplo, T=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,
- Queda:
  - $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = DY = \begin{pmatrix} 3y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix}$

Desacopladas

- El sistema:
- $\begin{pmatrix} y_1' \\ y'_2 \end{pmatrix} = DY = \begin{pmatrix} 3y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix}$, es $y_1{}' = 3y_1$ y $y_2{}' = -y_2$
- Se resuelven separadamente!
- D= $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, diagonal, sus valores y vectores propios son:
- r_1 =3, $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r_2 = -1$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- $y_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- La matriz fundamental $\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

Sistema original

- Recordando que
  - X=TY
- Se tiene:
  - $\psi = T\,\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$
- Original

- Para el ejercicio anterior, calcular T, resolver el sistema lineal y mostrar que se obtiene la matriz fundamental correspondiente.

Matriz exponencial

- Para la matriz :
  - $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, D^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D^n \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$
- Entonces:
  - exp(tD)= $I + \sum_{n=1}^{\infty} {(Dt)^n}/_{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 3^n t^n & 0 \\ 0 & (-1)^n t^n \end{pmatrix}$=
  - $\begin{pmatrix} 1 + \sum_n^{\infty} (3t)^n /n! & 0 \\ 0 & 1 + \sum_n^{\infty} (-t)^n /n! \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$
- Como X=TY,
- Ψ=T$e^{tD} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$

Tres dimensiones

- Un ejemplo para una matriz 3x3.
- Sea
  - $\dot{X} = AX$
  - $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- El mismo procedimiento: valores propios
  - $\begin{vmatrix} -2-r & 3 & 0 \\ 3 & -2-r & 0 \\ 0 & 0 & -1-r \end{vmatrix}$
- Se desarrolla por la última fila:
  - $p(r) = (-1-r)[(-2-r)(-2-r) - 9]$

Tres dimensiones cont.

- $p(r) = (-1-r)[(-2-r)(-2-r)-9] = -(1+\mathrm{r})[(2+r)^2-9]$

- $-(1+\mathrm{r})[r^2+4r+4-9] = -(1+\mathrm{r})[r^2+4r-5] =$
- $-(r+1)(r-1)(r+5) = 0$
- Vectores propios, $r_1 = 1$
- $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, z=0 y x=y, es decir $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Vectores propios, $r_2 = -1$
- $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, z= libre, x=3y, y=3x, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tres dimensiones cont.

- Vectores propios, $r_3 = -5$
- $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, z=0 y x=-y, es decir $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- La solución:
- $X = c_1 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\ y$
- $\Psi = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & e^{-5t} \\ e^{t} & 0 & -e^{-5t} \\ 0 & e^{-t} & 0 \end{pmatrix}$

Diagonaliza

- Aquí también tenemos
  - T=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ que desacopla el sistema. $T^{-1}AT = D$
- Y´=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}Y$ $\quad \psi_y(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} {y_1}' \\ {y_2}' \\ {y_3}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_2 \\ -5y_3 \end{pmatrix}$

  - Con X=TY, X´=TY´, $\psi = T\psi_y(t)$
    - X´=AX queda TY´=ATY
      - Y´=$T^{-1}ATY = DY$

Ejercicio

- Resolver:
  - $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X$
  - Calcular $\Psi(t) = \begin{pmatrix} sen\, t & -\cos t & 0 \\ \cos t & sen\, t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$
- 1) Valores y vectores propios, $r_3 = 2, v_3 = (0,0,1)^T$
- 2) Soluciones, $\overrightarrow{x_1},\ \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3},, \overrightarrow{x_3(t)} = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_1}(t) = e^{it}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} (\cos t + isen\ t)(-i) \\ cost + isen\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\ t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -\cos t \\ sen\ t \\ 0 \end{pmatrix}, r_2 = \overline{r_1}, \overrightarrow{\xi_2} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ejercicios

- En cada ejercicio hallar la matriz fundamental del sistema de ecuaciones y también en cada caso hallar la matriz fundamental $\Phi(t)$ que cumple $\Phi(t)$ =I, resolver el problema de valor inicial con la matriz fundamental $\Phi(t)$
- 1) $\dot{\vec{x}} = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$, con $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- 2) $\dot{\vec{x}} = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$ con $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 3) $\dot{\vec{x}} = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$ con $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Bibliografía

- W. Boyce and R DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Wiley, 8ª ed.