Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Clase 9, febrero 22

Luz Myriam Echeverry N

Ecuaciones lineales homogéneas

Una **ecuación lineal homogénea** tiene la forma general:

$$y'' = f(t, y, y')$$

con f función dada.

- La ecuación es **lineal** si f es lineal en y y y':

$$y'' = g(t) - p(t)y' - q(t)y$$

Si no se dice que es **no lineal**.

- Una ecuación de segundo orden tiene la forma:

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t)$$

- Si $G(t) = 0$ para todo t, se llama **homogénea**. Si no, **no homogénea**.

Ecuaciones Homogéneas, coeficientes constantes, PVI

- En las secciones 3.6 y 3.7, veremos una solución de la ecuación homogénea, y como es posible resolver la ecuación no homogénea, o al menos expresar la solución como una integral.
- El tema es ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

  Los coeficientes variables quedan para más adelante.

- Las condiciones iniciales tienen la forma:

$$y(t_0) = y_0, \ \ y'(t_0) = y_0'$$

- La solución pasa por (t_0, y_0), con pendiente en (t_0, y_0) igual a y_0'.

Ejemplo 1: Infinitas Soluciones (1 of 3)

- Sea la ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' - y = 0$$

- Dos soluciones son

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{-t}$$

- Otras

$$y_3(t) = 3e^t, \quad y_4(t) = 5e^{-t}, \quad y_5(t) = 3e^t + 5e^{-t}$$

- Con estas observaciones, vemos que hay infinitas soluciones de la forma

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

- En la sección 3.2 veremos que todas las soluciones se escriben de esta forma..

Ejemplo 1: Condiciones iniciales (2 of 3)

- Ahora sea el siguiente PVI para la misma ecuación:

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 1$$

- Encontramos la solución general:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

- Con las condiciones iniciales,

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 3 \\ y'(0) &= c_1 - c_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 2,\ c_2 = 1$$

- Tenemos

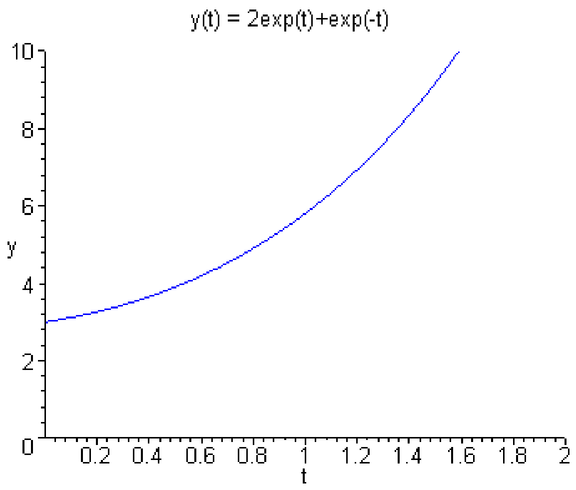
$$y(t) = 2e^t + e^{-t}$$

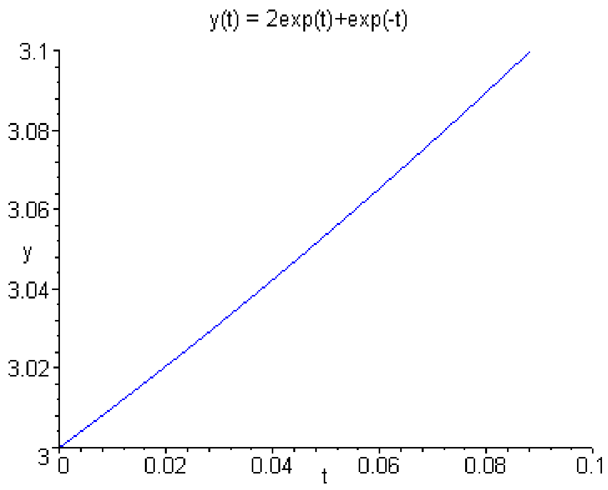
Ejemplo 1: Gráficas (3 of 3)

- Nuestro problema:

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 1 \ \Rightarrow \ y(t) = 2e^{t} + e^{-t}$$

- Las gráficas están abajo. La de la derecha sugiere que se cumplen las condiciones iniciales.





Ecuación Característica

- Para resolver la ecuación de 2nd orden con coeficientes constantes,

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

Suponemos que la solución tiene la forma $y = e^{rt}$

- Sustituyendo, tenemos

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

- Simplificando,

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

y , $e^{rt} \neq 0, \forall t$

$$ar^2 + br + c = 0$$

- Esta ecuación se llama la **ecuación característica** de la ecuación diferencial.
- Resolviendo para r factorizando o con la cuadrática.

Solución general

- Usando la fórmula cuadrática

$$ar^2 + br + c = 0,$$

  se tienen dos soluciones, r_1 y r_2.

- Con tres posibilidades:
  - Las raíces r_1, r_2 son reales y $r_1 \neq r_2$.
  - Las raíces r_1, r_2 son reales y $r_1 = r_2$.
  - Las raíces r_1, r_2 son complejas.

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- En esta sección suponemos r_1, r_2 reales y $r_1 \neq r_2$.
- En este caso la solución general es

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Ecuación Característica

- Para resolver la ecuación de 2^{nd} orden con coeficientes constantes,

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

  Suponemos que la solución tiene la forma $y = e^{rt}$

- Sustituyendo, tenemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

- Simplificando,

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

  y , $e^{rt} \neq 0, \forall t$

$$ar^2 + br + c = 0$$

- Esta ecuación se llama la **ecuación característica** de la ecuación diferencial.
- Resolviendo para r factorizando o con la cuadrática.

Condiciones Iniciales

- Para el problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0',$$

usamos la solución general

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Junto con las condiciones iniciales para hallar c_1 y c_2. Es decir,

$$\left.\begin{aligned} c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} &= y_0 \\ c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0} &= y_0' \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0}, \; c_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0}$$

Se supone $r_1 \neq r_2$, y entonces la ecuación $y = e^{rt}$ es solución de y siempre existe, para cualquier par de condiciones.

$$y(t_0) = y_0, \; y'(t_0) = y_0'$$

Ejemplo 2

- Sea el problema de valor inicial

$$y'' + y' - 12y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$$

- La ecuación característica:

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^2 + r - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; (r+4)(r-3) = 0$$

- Factorizando, r_1 = -4 y r_2 = 3
- La solución general tiene la forma

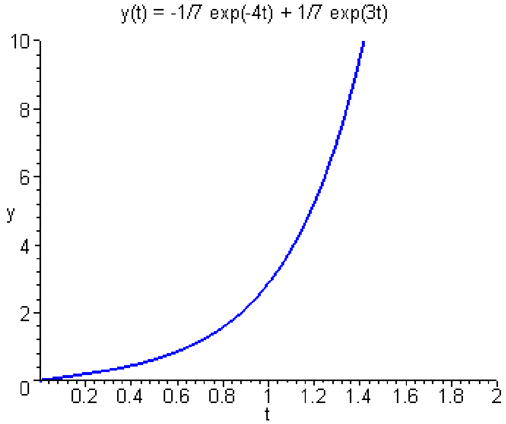
$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{3t}$$

- Las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -4c_1 + 3c_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = \frac{-1}{7},\; c_2 = \frac{1}{7}$$

- Entonces

$$y(t) = \frac{-1}{7} e^{-4t} + \frac{1}{7} e^{3t}$$



Ejemplo 3

- Sea el problema de valor inicial

$$2y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

- Entonces

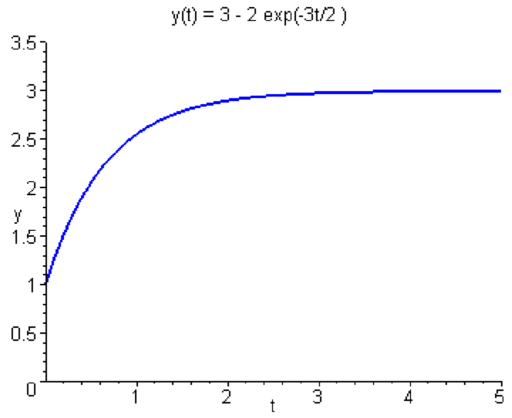
$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad 2r^2 + 3r = 0 \;\Leftrightarrow\; r(2r+3) = 0$$

- Factorizando, $r_1 = 0$ y $r_2 = -3/2$
- La solución general tiene la forma

$$y(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{-3t/2} = c_1 + c_2 e^{-3t/2}$$

- Usando las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ -\frac{3c_2}{2} &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 3, \; c_2 = -2$$



- Entonces

$$y(t) = 3 - 2e^{-3t/2}$$

Ejemplo 4: Problema de valor inicial   (1 of 2)

- Sea el problema de valor inicial PVI

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3$$

- Entonces

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^2 + 5r + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; (r+2)(r+3) = 0$$

- Factorizando, r_1 = -2 y r_2 = -3
- La solución general tiene la forma

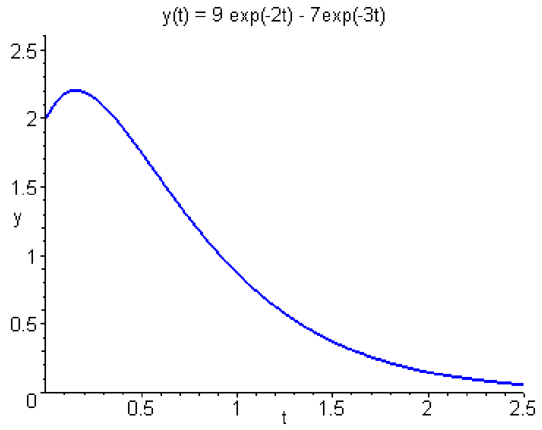
$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

- Usando las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ -2c_1 - 3c_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 9,\; c_2 = -7$$

- Entonces

$$y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$



Ejemplo 4: Hallar el valor máximo (2 of 2)

- Hallar el máximo alcanzado por la solución.

$$y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$

$$y'(t) = -18e^{-2t} + 21e^{-3t} \overset{set}{=} 0$$

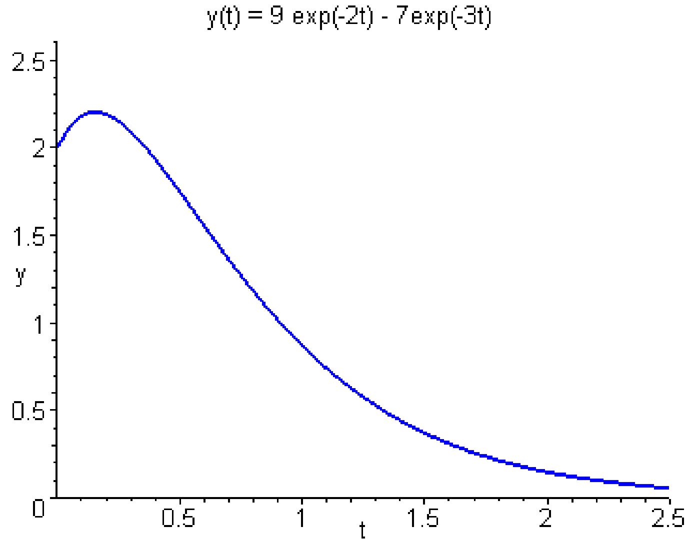
$$6e^{-2t} = 7e^{-3t}$$

$$e^{t} = 7/6$$

$$t = \ln(7/6)$$

$$t \approx 0.1542$$

$$y \approx 2.204$$



Ejercicios

- 1) Hallar la solución general de $4y'' - 9y = 0$
- 2) Resolver el problema de valor inicial $6y'' - 5y' + y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 0$
- 3) Encuentre la ecuación diferencial cuya solución general es
  - $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$
- 4) Encuentre la ecuación diferencial cuya solución general es
  - $y(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-2t}$
- 5) Resolver el problema de valor inicial
- $y'' - y' - 2y = 0,\ y(0) = \alpha, y'(0) = 2$,calcular α tal que la solución tienda a cero si $t \to \infty$
- 6) Determine el valor de α, si existe, tal que la solución de
  - $y'' - (2\alpha - 1)y' + \alpha(\alpha$-1)y=0
- Tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Bibliografía

- W.E. Boyce, R.C. DiPrima, “Elemtary Differential Equations and Boundary Value Problems”. Willey, 8e ed.

- http://jws-edcv.wiley.com/college/bcs/redesign/instructor/0,,_047143339X_BKS_1873____,00.html