Raíces Complejas de la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0$$ → eqn característica

$$r_1 = pi + q \quad r_2 = zi + w$$

$$Y_1(t) = e^{tr_1} = e^{t(pi+q)} = e^{tp} e^{tqi} = e^{tp}(\cos(tq) - i\,\mathrm{sen}(tq))$$

$$Y_2(t) = e^{tr_2} = e^{t(zi+w)} = e^{tw} e^{tzi} = e^{tw}(\cos(tz) - i\,\mathrm{sen}(tz))$$

Soluciones reales

Por principio de superposición, sabemos que cualquier combinación lineal de las operaciones es solución

$$y_1(t) = e^{t(\mu + i\lambda)} = e^{\mu t}(\cos(\lambda t) + i\,\mathrm{sen}(\lambda t))$$

$$y_2(t) = e^{t(\mu - i\lambda)} = e^{\mu t}(\cos(\lambda t) - i\,\mathrm{sen}(\lambda t))$$

entonces

- $y_1 + y_2 = \underbrace{2}_{} e^{\mu t} \cos(\lambda t)$ → también es solución
- $y_1 - y_2 = \underbrace{2i}_{} e^{\mu t} \mathrm{sen}(\lambda t)$ → también es solución

dividiendo en 2 y 2i ← olvidando el 2 y 2i tenemos 2 soluciones reales

$$u(t) = e^{\mu t} \cos(\lambda t), \quad v(t) = e^{\mu t} \mathrm{sen}(t\lambda)$$

Verificando con el Wronskiano

$$W(u, v) = \lambda e^{2\mu t} \neq 0$$

entonces hay 2 soluciones u y v lin. indep y que forman la solución:

$$y = c_1 e^{\mu t} \cos(\lambda t) + c_2 e^{\mu t} \mathrm{sen}(\lambda t)$$

Raíces repetidas

ej: $y'' + 4y' + 4y = 0$

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r+2)^2 = 0$$, única raíz $r = -2$

Método D'Alembert

tomamos por y_1 a la raíz única encontrada. Asumimos que y_2 es de la forma:

$$y_2 = v(t)\, y_1(t)$$

entonces calculamos $v(t)$ tal que tengamos una solución.

Para ello asumimos $y = y_2(t)$ y obtenemos y'' e y', con estos reemplazamos en la ecuación original y despejamos $v(t)$ de ahí.

hecho esto ya tenemos $y_2 = v(t)\, y_1$ y la solución es de la forma

$$y = v(t)\, y_1 + y_1$$

Si $W(y_2, y_1) \neq 0$ se tiene un conjunto fundamental de soluciones.

En general si hay una raíz repetida r, el conjunto fundamental es:

$$\{ e^{rt}, t e^{rt} \}$$