1. [**2 pt**] Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha}$, si $\alpha > 0$.

Sug: use fracciones parciales.

Note que usando fracciones parciales se puede convertir en una telescópica:

$$\frac{A}{(\alpha+n)} + \frac{B}{(\alpha+n+1)} = \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$$

$$A\alpha + An + A + B\alpha + Bn = 1$$

$$\alpha(A+B) + n(A+B) + A = 1 \Rightarrow A = 1,\ \alpha(A+B) = 0,\ n(A+B) = 0$$

Luego $A = 1$ y $B = -1$

Entonces: $\frac{1}{(\alpha+n)} - \frac{1}{(\alpha+n+1)} = \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$

Así, $S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \sum_{n=0}^{k} \left[\frac{1}{(\alpha+n)} - \frac{1}{(\alpha+n+1)}\right]$

$$= \left(\frac{1}{\alpha+0} - \cancel{\frac{1}{\alpha+1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\alpha+1}} - \cancel{\frac{1}{\alpha+2}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{\alpha+k}} - \frac{1}{\alpha+k+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+k+1}\right)$$

Ahora veamos el límite de las sumas parciales:

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+k+1}\right] = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\alpha} - \cancel{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\alpha+k+1}}^{\to 0}$$

$$\boxed{= \frac{1}{\alpha}}$$

■

b) Si $\sum x_n$ y $\sum y_n$ convergen, entonces $\sum (x_n + y_n)$ converge.

Por definición del criterio de Cauchy para series tenemos que:

Como Σx_n converge, $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq:
Si $m > n > n_0$ entonces:

$$|x_{n+1} + \dots + x_m| = |S_{x_m} - S_{x_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Análogamente para Σy_n existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq:

$$|y_{n+1} + \dots + y_m| = |S_{y_m} - S_{y_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomemos $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ de esta manera si $m > n > n_2$ entonces $m > n > n_0$ y $m > n > n_1$. Así:

$$|x_{n+1} + y_{n+1} + \dots + x_m + y_m| = |(S_{x_m} + S_{y_m}) - (S_{x_n} + S_{y_n})|$$

$$< |x_{n+1} + \dots + x_m| + |y_{n+1} + y_m| = |S_{x_m} - S_{x_n}| + |S_{y_m} - S_{y_n}|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por lo tanto por el criterio de Cauchy para series, $\Sigma(x_n + y_n)$ converge. $\blacksquare$

2. **[1.5 pt]** Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones y $c \in \mathbb{R}$. Demuestre **usando la definición de límites** que si $\lim\limits_{x\to c} f = L$ y $\lim\limits_{x\to c} g = M$, entonces:

a) $\lim\limits_{x\to c}(f - g) = L - M$.

tenemos que existen $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$.

entonces por definición existe $\delta(\varepsilon/2) > 0$ t.q.
si $x \in \mathbb{R}$ y $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon/2)$ entonces:

$$|f(x) - L| < \varepsilon/2$$

Análogamente para $g(x)$ habrá un $\delta'(\varepsilon/2) > 0$
y:

$$|g(x) - M| < \varepsilon/2$$

Considere entonces $\Delta = \operatorname{Inf}\{\delta(\varepsilon/2), \delta'(\varepsilon/2)\}$
consecuentemente para Δ tendremos:

$$|(f(x) - g(x)) - (L - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\boxed{\therefore \lim f(x) - g(x) = L - M}$$

b) $\lim\limits_{x \to c}(fg) = LM.$

tenemos que existen $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$.

entonces por definición existe $\delta(\varepsilon/2) > 0$ t.q.
si $x \in \mathbb{R}$ y $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon/2)$ entonces:

$$|f(x) - L| < \varepsilon/2$$

Análogamente para $g(x)$ habrá un $\delta'(\varepsilon/2) > 0$
y:

$$|g(x) - M| < \varepsilon/2$$

Adicionalmente como $g(x)$ tiene límite en c, entonces $g(x)$ está acotada en alguna vecindad de c.

es decir:

$$|g(x)| \leq M, \quad \text{si } x \in \mathbb{R} \cap V_\delta(c)$$

Con esto tomemos $D = \text{Max}\{M \text{ y } |L|\}$ de esta manera:

$$
\begin{aligned}
|f(x) \cdot g(x) - LM| &= |f(x) \cdot g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\
&= |g(x)(f(x) - L) + L(g(x) - M)| \\
&\leq |g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - M| \\
&\leq M|f(x) - L| + |L||g(x) - M| \\
&\leq D|f(x) - L| + D|g(x) - M| \\
&< D\left(\varepsilon/2D\right) + D\left(\varepsilon/2D\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

■

$$\boxed{\therefore \quad \lim_{x \to c} f(x)\, g(x) = LM}$$

3. [**1.5 pt**] Considere la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x+3}$.

a) Demuestre por definición de límites que $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 2$.

Se necesita controlar $\left|\frac{x^2 - 3x}{x+3}\right|$ para hacerla menor que un $\varepsilon > 0$ arbitrario:

Entonces $\left|\frac{x^2-3x}{x+3}-2\right| = \left|\frac{x^2-3x-2x-6}{x+3}\right| = \left|\frac{x^2-5x-6}{x+3}\right|$

$= \left|\frac{x+1}{x+3}\right| \cdot |x-6|$

Luego si $|x-6| < 1$, tendremos que x va a estar restringida por la condición $5 < x < 7$.

Para x en este intervalo tendremos $x+1 \leq 7+1 = 8$ y $x+3 \geq 5+3 = 8$. Así:

$$\left|\frac{x^2-3x}{x+3}-2\right| \leq \frac{8}{8}|x-6| = 1|x-6|$$

Ahora para un $\varepsilon > 0$ elegimos: $\delta(\varepsilon) := \inf\{5, 1\cdot\varepsilon\}$

Así si $0 < |x-6| < \delta(\varepsilon)$ tenemos:

$$\boxed{\left|\frac{x^2-3x}{x+3}-2\right| < 1|x-6| < 1\delta < 1\cdot\varepsilon = \varepsilon}$$

■

b) ¿Es continua $f(x)$ en $x=6$?

$$\lim_{x\to 6} \frac{x^2-3x}{x+3} = 2 = \frac{6^2-3(6)}{6+3}$$

Como el límite cuando $x\to 6$ es $f(6)$ entonces es Continua en 6.

■