

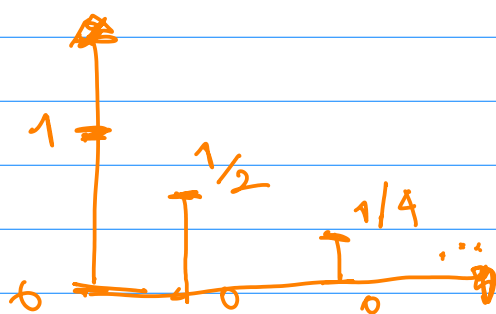
TALLER: COMPLETITUD EN \mathbb{R} Y FINITUD
10 de Agosto de 2022

Indicaciones generales

- El taller es una evaluación, por lo tanto se debe entregar en físico y de manera presencial.
- La fecha de entrega es el Miércoles 17 de Agosto al inicio de la clase.

- Considere el conjunto $A = \{\frac{1}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Demuestre que $\inf(A) = 0$.
- Sea E un subconjunto no vacío y acotado superiormente de los números reales y considere el conjunto $U = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es cota superior de } E\}$. Demuestre que $\sup(E) = \inf(U)$.
- Sea $f : A \rightarrow B$ una función inyectiva. Muestre que si B es finito, entonces A es finito.
- Sea A un conjunto no finito y B un subconjunto finito de A . Muestre que $A - B$ no es finito y en consecuencia $A - B \neq \emptyset$.

$$\textcircled{1} \quad A = \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} = [0, \frac{1}{2^{2-1}}]$$



este es encajado.

Supongamos que existe la cota inferior x y que esta es la mayor de las cotas inferiores, adicionalmente

$$\inf(A) = x \neq 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Caso 1)} \quad x > 0 \equiv \inf(A) > 0$$

Por prop. arquimediana dado que $x \in \mathbb{R}$, sabemos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < \frac{1}{n}$.

lo pruebo más tarde.

$$x \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

$$x \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{x} \geq 2^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$x > \frac{1}{x} > \frac{1}{2^{n-1}} \quad (\Rightarrow) (=)$$

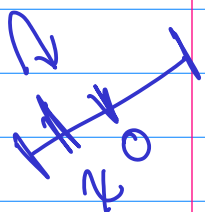
esto es para cualquier $x > 0$ luego garantizado que habrá un $a \in A$ tal que $\inf(A) = x > a$.

Contradicción que surge de asumir que $x > 0$.

$$\text{Caso 2)} \quad x < 0 \equiv \inf(A) < 0$$

$$-x > 0$$

Siguiendo la estructura del caso 1 con la prop. arquimediana:



$$-x > \frac{1}{-x} > \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x \leq -\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\inf(A) \leq -\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$$

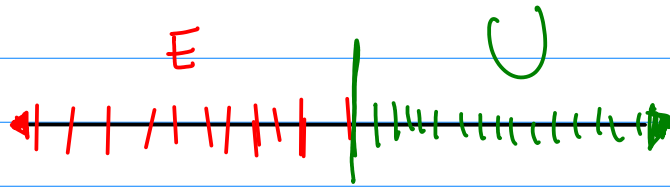
hay una cota inferior: $-\frac{1}{2^{n-1}}$ más grande que el ínfimo.

De lo anterior se deduce que $\inf(A) = x = 0$.

② Sea $E \neq \emptyset$ y $E \subseteq \mathbb{R}$, acotado. Supriormente considere el conjunto

$$U = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es cota sup de } E\}$$

Demuestre que $\sup(E) = \inf(U)$

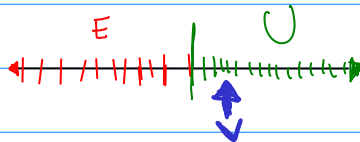


Dado $E \subseteq \mathbb{R}$ y $E \neq \emptyset$, además acotado superiormente por Completitud Sabemos que existe $V = \sup(E)$.

Note que $\forall x \in E$ $x < y$, donde y es un elemento arbitrario de U , luego U está acotado inferiormente, note también que $U \neq \emptyset$ y $U \subseteq \mathbb{R}$.
Luego tiene un infimo w .

Suponga por absurdo que $V = \sup(E) \neq \inf(U) = w$

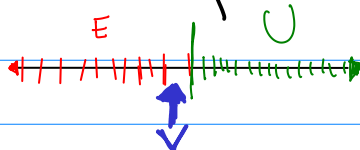
Caso 1) $V > w$ ($\sup(E) > \inf(U)$)



Recuerde que V es el conjunto de las cotas superiores de E , luego si $V > w$

Se tendría que hay otra cota superior (w) más pequeña que el supremo V ($\Rightarrow <$)

Caso 2) $V < w$ ($\sup(E) < \inf(U)$)



Ver que $\sup(E)$ es cota superior de E
 Pero w es el infimo del conjunto de las
 cotas superiores de E , luego hay un
 elemento del conjunto U que es más
 pequeño que su infimo ($\Rightarrow <$)

Contradicción que surge en ambos casos de
 asumir $\sup(E) \neq \inf(U)$. por lo que
 $\sup(E) = \inf(U)$. □

3) Sea $f: A \rightarrow B$ una función inyectiva, muestre que
 si B es finito, entonces A es finito.

Suponga $f: A \rightarrow B$ es inyectiva y B
 finito, por Absurdo considere A infinito

Dado que f es inyectiva sabemos que
 todo elemento de A va a un elemento
 de B , pero como $|A| > |B|$ por
 principio de palomar existirá c, d t.q.

$$f(c) = f(d) \text{ y } c \neq d$$

lo cual niega el hecho de que f es inyectiva
 $(\Rightarrow < =)$

Contradicción que surge de asumir que
 A es infinito. luego A debe ser finito

4) Sea A un conjunto no finito y B un subconjunto finito de A muestre que $A - B$ no es finito y en consecuencia $A - B \neq \emptyset$

Caso 1) $B = \emptyset \Rightarrow A - B = A - \emptyset = A$
 Como sabemos $A - B = A$ es no finito luego tiene elementos es decir $A - B \neq \emptyset$.

Caso 2) $B \neq \emptyset$

Si A es no finito entonces no existe una biyección de A en \mathbb{I}_n

$A \rightarrow \mathbb{I}_n$
 $\mathbb{I}_n \rightarrow A$

$$A - B = \{ a \in A \mid a \notin B \}$$

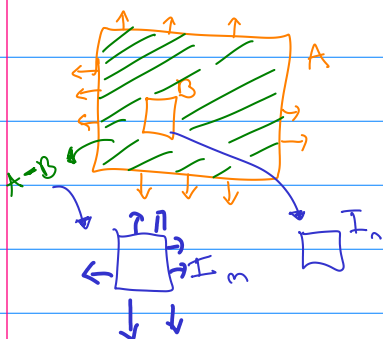
Suponga que $A - B$ es finito luego existe una biyección $A - B$ en \mathbb{I}_m , Recuerde que $B \subseteq A$ es finito entonces existe una biyección de B en \mathbb{I}_n

$$1) f: A - B \rightarrow \mathbb{I}_m$$

$$g: \mathbb{I}_m \rightarrow A - B$$

$$2) h: B \rightarrow \mathbb{I}_n$$

$$j: \mathbb{I}_n \rightarrow B$$



Ahora considere la idea de $(A - B)$ (finito) unido B (finito)

$(A - B) \cup B$, dado que ambos son finitos
 puedo probar de crear unas funciones

entonces puedo crear una función

$$f(\omega): \begin{cases} \text{si } \omega \in A - B \Rightarrow f(\omega) \in \mathbb{I}_m \\ \text{si } \omega \in B \Rightarrow f(\omega) \in \mathbb{I}_n \end{cases}$$

Así mismo puedo crear otra función tal que

$$\Phi(\varphi): \begin{cases} \text{si } \varphi \in \mathbb{I}_m \Rightarrow g(\varphi) \\ \text{si } \varphi \in \mathbb{I}_n \Rightarrow j(\varphi) \end{cases}$$

entonces $f: (A - B) \cup B \mapsto \mathbb{I}_m \cup \mathbb{I}_n$

$$\Phi: \mathbb{I}_m \cup \mathbb{I}_n \mapsto (A - B) \cup B$$

es decir, existe una biyección de
 $(A - B) \cup B$ en $\mathbb{I}_K = \mathbb{I}_m \cup \mathbb{I}_n$, pero note
 que $(A - B) \cup B$ es A , luego existe una
 biyección de A en \mathbb{I}_K esto contradice el
 hecho de que A sea infinito.

$$(=\Rightarrow) \angle (=)$$

esto surge por asumir que $A = B$ con B
 finito, es finito, luego $A - B$ debe
 ser infinito y con ello es claro que $A - B$
 tiene al menos un elemento luego $A - B \neq \emptyset$.

ejercicio 1 Cont.

hacia faltar probar que

Por inducción: $n \leq 2^{n-1}, n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

1) Sea $n=1$ note que

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2^{1-1} \\ 1 &\leq 2^0 \\ 1 &\leq 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

H.I) Asuma que $k \leq 2^{k-1}$

2) Ahora si tenemos $k+1$:

$$k+1 \leq 2^k \leq 2^{(k-1)+1}, k \in \mathbb{N}$$

↓
Paso base)

$$\begin{aligned} 1+1 &\leq 2 \\ 2 &\leq 2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

H I)

$$k+1 \leq 2^k$$

Paso inductivo)

$$\begin{aligned} k+1+1 &\leq 2^k+2 \\ (k+1)+1 = k+2 &\leq k+3 \leq 2(k+1) \quad \checkmark \\ (k+1)+1 &\leq 2(k+1) \end{aligned}$$



Ejercicio 1 Versión 2

Considere el conjunto $A = \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$
Demuestre que $\inf(A) = 0$.

Sea $a_n \in A$ note que $a_n \in \mathbb{R}^+$ luego por prop. arquimediana

$$\exists n_q \in \mathbb{N}: 0 < \frac{1}{n_q} < a_n$$

luego Cero es Cota inferior de $a_n \forall a \in A$.

Suponga por absurdo que w es una cota inf. mas grande que 0, en particular $w = \inf(A) > 0$
note que $w \in \mathbb{R}^+$

luego por prop. arg. $\exists n_w$ t. q.

$$n_w - 1 \leq w \leq n_w$$

$$2^{n_w-1} \leq 2^w \leq 2^{n_w}$$

$$w > \frac{1}{2^{n_w-1}} > \frac{1}{2^w} > \frac{1}{2^{n_w}}$$

luego existe un elemento de A más grande que su cota inferior.

Contradicción que surge de asumir que $\inf(A) \neq 0$.

