Retomando desde la def. anterior de sucesión monótona.

hasta ahora hemos estudiado la convergencia de sucesiones conociendo los límites de las sucesiones. ¿Pero cómo analizamos la convergencia de una sucesión sin conocer el límite?

↳ la definición que tenemos solo nos dice que si dado x límite ese lím. converge a x o no.

Pero no tenemos como decir directamente que es convergente.

ej: ① $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots) = (x_n)^{\infty}$

donde $x_n = n \longrightarrow$ es creciente (estrictamente creciente)

② $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n, \dots)$

es una sucesión creciente.

③ $\left(1/2^n\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente monótona.

Una sucesión monótona y acotada es convergente.

Teorema: [convergencia monótona]

Una sucesión monótona de números reales es convergente sii es Acotada. Además

a) Si $x = (x_n)$ es creciente y acotada

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

b) Si $X = (x_n)$ es decreciente y acotada entonces:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Dem:

($\Rightarrow$) Ya se demostró que una sucesión convergente es acotada.

($\Leftarrow$) Si una sucesión es acotada y monótona, entonces ...

Supongamos ahora que $X = (x_n)$ es una sucesión monótona y acotada

Caso 1: Supongamos que $X = (x_n)$ es creciente, es decir $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como $X = (X_n)$ genera al conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $x = (x_n)$ es acotada, entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado y no vacío.

Así por el Axioma de completitud en $\mathbb{R}$ existe

$$x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Veamos ahora que $x_n \to x$

(Ahora sí usamos nuestra vieja def. para probar que $\sup(\{x_n\})$ es el lím.)

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. (queremos llegar a $|x_n - x| < \varepsilon \iff x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$)

De esta manera $x - \varepsilon$ no es una cota supervor de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

de esta manera $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x - \varepsilon < x_{n_0}$ (de lo contrario llegamos a un absurdo)

Así si $n \geq n_0$, entonces:

$$x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n$$

$\to$ pues x_n es creciente.

$$x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x \leq x + \varepsilon$$

entonces $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq n_0$

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

$\therefore$ $x_n \to x$.

Caso 2: Supongamos ahora que $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente.
Consideremos

$$y = -x = (-x_n)_{n=1}^{\infty}$$

$$x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$-x_{n+1} \leq -x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así la sucesión $y = (-x_n)$ es creciente. Note que y también es acotada pues x es acotada.

Luego por caso 1 tenemos $y = (-x_n)$ converge a

$$-x = \sup\{-x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} -(-x_n) = -\lim_{n\to\infty} (-x_n)$$
$$= -(-x) = x$$

Así $x_n \to x$.

Ej: Demuestre que $\left(1/\sqrt{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es convergente, encuentre su límite.

Sol

① $n \leq n+1 \iff \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$
$$\iff \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\therefore$ la sucesión es decreciente.

② $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}}}_{=1} \quad \Big| \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Pues la sucesión es decreciente.

entonces $\lim \frac{1}{\sqrt{n}}$ es $\inf \left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$

Por teorema de convergencia monótona, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \inf \left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Mostremos que $\inf \left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$

2.1 Note que $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así 0 es cota inf.

2.2 Veamos que ningún numero positivo puede ser cota inferior del conjunto.

Sea $\varepsilon > 0$, $\varepsilon^2 > 0$

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon^2$$

$$0 < \sqrt{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

entonces hay un elemento de (x_n) más pequeño que la cota inferior positiva $\therefore$ $\varepsilon > 0$ no puede ser cota inf. lo que nos deja que 0 es el inf.

Digresión truquito chimba: $\rightsquigarrow$ quiero llegar a $\frac{1}{n-2} < \varepsilon$.

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n_0 < \underbrace{n_0 + 2}_{n_0 = m_0 - 2} = m_0$$

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{m_0 - 2} < \varepsilon$$

Ej: Demuestre que $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ $\forall n \in \mathbb{N}$ es Divergente.

Sol:

$$X_{(2^n)} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$