Note:

Importante recordar que los reales son un conjunto completo.

Prop. de completitud.

- Si cojo un conjunto $\mathbb{N}$, este sí o sí tiene mínimo
- si tengo un conjunto S y lo trasladó "$+a$" $\sup(S+a) = U+a$.

- Supongamos que A y $B \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$ tal que $a \leq b$ $\forall a \in A$ y $b \in B$. entonces $\sup(A) \leq \inf(B)$

DM:

$\sup(A)$ existe, como $B \neq \emptyset$ existe al menos un $b \in B$, así $a \leq b$ $\forall a \in A$. así b es una cota superior de A.

Como $A \neq \emptyset$, por Axioma de comp. existe el supremo de A. $\sup(A)$

Tarea: $\odot$ $\text{Inf}(B)$ existe.

Sabemos $a \leq b$ $\forall\, a \in A$ y $b \in B$.
de esa manera $\sup(A) \leq b$, $\forall\, b \in B$.
Así el supremo de A, $\sup(A) \leq \text{Inf}(B)$.

Así $\sup(A)$ es una cota inferior de B. Pero $\text{Inf}(B)$ es la mayor de las cotas inf. de B, luego:

$$\sup(A) \leq \text{Inf}(B)$$

Teorema: [Propiedad Arquimediana]

cr "cada vez que tengo un $\mathbb{R}^+$, yo encuentro un $\mathbb{N}$ más grande".

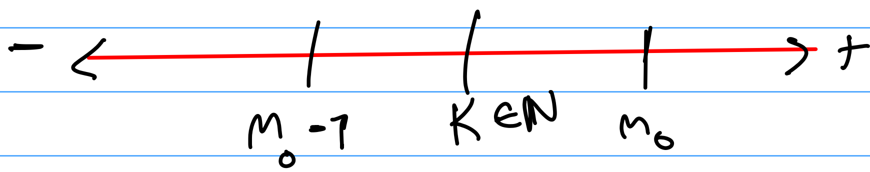
Sea $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists\, n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_x$.

Dem: Razonando por contradicción, supongamos que $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \geq n$.

De esta manera $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ no vacío acotado superiormente luego por axioma de comp. existe $m_0 = \sup(\mathbb{N})$
$m_0 \in \mathbb{R}$.

Así $(m_0 - 1) \in \mathbb{R}$ que no es supremo de $\mathbb{N}$, es decir que existe $k \in \mathbb{N}$:

$$m_0 - 1 < k \leq m_0$$



$$m_0 < k+1 \leq m_0 + 1 \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

hay un natural $(k+1)$ más grande que $\sup(\mathbb{N})$.

Por lo tanto para $x \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_x$.

$\boxed{\text{Corolario} \equiv \text{Prop. arquimediana}}$

Dado $t \in \mathbb{R}^+$, $\exists\, n_t \in \mathbb{N}$ t.q.

$$0 < \frac{1}{n_t} < t$$

se puede ver así: $0 < \frac{1}{t} < n_t$

Dem:

Sea $t \in \mathbb{R}^+$ por prop. arquimediana aplicada a $x = \frac{1}{t}$, $\exists\, n_t \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{t} < n_t, \text{ es decir:}$$

$$\frac{t}{n_t} \cdot 0 < \cancel{\frac{t}{n_t}} \cdot \cancel{\frac{1}{t}} < \cancel{\frac{t}{n_t}\, n_t}$$

$$0 < \frac{1}{n_t} < t$$

Ej: Sea $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ demuestre que $\inf(S) = 0$.

Sol: Notamos que $0 \leq \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$. entonces 0 es cota inf. de S. Así $0 \leq \inf(S)$.

mantener en vez de $<$

Supongamos $\omega = \text{Inf}(S)$ el cual existe por que $S \subseteq \mathbb{R}$ y $S \neq \emptyset$

Queremos mostrar que $\omega = 0$. Por reducción al absurdo supongamos que $0 < \omega$.

Así por prop. Arquimediana $\exists\, n_\omega$ en naturales t.q. $0 < \frac{1}{n_\omega} < \omega$. lo cual es absurdo ya que

$$\frac{1}{n_\omega} \in S.$$

Portanto $0 = \omega = \inf(S)$.

Corolario de prop. arq.

Se usa para decir que los racionales son "Densos" $\mathbb{Q}$ llena a $\mathbb{R}$.

Sea $y \in \mathbb{R}^+$, $\exists\, n_y \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n_y - 1 \leq y \leq n_y$$

Dem: Supongamos $y \in \mathbb{R}^+$, consideremos el conjunto

$$E_y = \{ m \in \mathbb{N} : y < m \}$$

es un subconjunto de $\mathbb{N}$, no vacío por la prop. arquimediana. Así por principio de Buena ord. $\exists$ $\min(E_y) = m_0$,

me garantiza que es $\mathbb{N}$

Así $(m_0 - 1) \notin E_y$ es decir $m_0 - 1 \leq y$

- $m_0 \in E_y \Rightarrow y < m_0$

- Por tanto existe $m_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m_0 - 1 \leq y \leq m_0$.

Teorema: existe un real positivo x tal que $x^2 = 2$.

Dem: Consideremos el conjunto

$$S = \{t \in \mathbb{R} : t > 0,\ t^2 < 2\}$$

① $S \neq \phi$ pues $0 \in S$.

② S es acotado superiormente.
en efecto 2 es una cota sup. de $S \subseteq \mathbb{R}$.

Si no fuese así existiría un $t \in S$ t.q. $2 < t$

$$2 < t \Rightarrow 4 < t^2$$

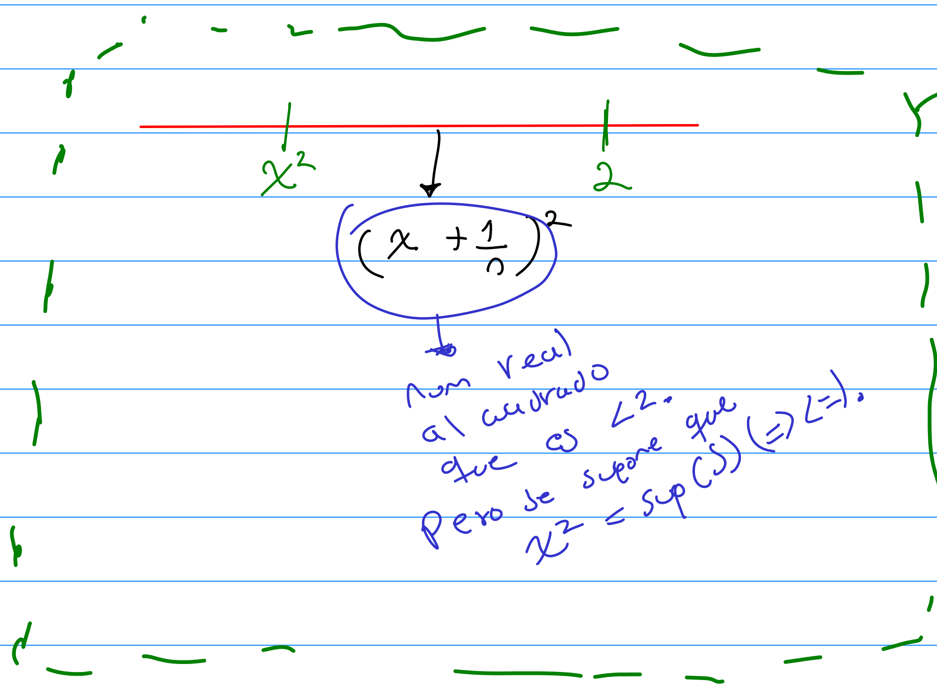
Pero si $t^2 \in S$, $4 < t^2 < 2$ ($\Rightarrow\Leftarrow$)
por tanto 2 es cota sup.

De ① y ② tenemos $\exists\ x = \sup(S)$ por Axioma de completitud.

Afirmo que $x^2 = 2$.

Por reducción al absurdo tome $x^2 \neq 2$, luego surgen casos:

1) $x^2 < 2$, no ocurre



Idea general

Tarea $\rightarrow$ Completar la dem.

Dem: Consideremos el conjunto

$$S = \{t \in \mathbb{R} : t > 0,\ t^2 < 2\}$$

① $S \neq \phi$ pues $0 \in S$.

② S es acotado superiormente. en efecto 2 es una cota sup. de $S \subseteq \mathbb{R}$.

Queremos mostrar que $x^2 = 2$

(1) $x^2 < 2$

Si $x^2 < 2$ entonces $2 - x^2 > 0$
como $2x + 1 > 0$ entonces

$$\frac{2 - x^2}{2x+1} > 0$$

Por la prop arquimediana $\exists\, n \in \mathbb{N}$
tal que

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2-x^2}{2x+1}$$

$\left(\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}\right)$

Ahora bien

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$$
$$< x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n}$$
$$= x^2 + \frac{1}{n}(2x+1)$$
$$< x^2 + (2-x^2)$$

pues

$$\frac{2x+1}{n} < 2 - x^2$$

$$= 2$$

Así $\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$, es decir $x + \frac{1}{n} \in S$
lo cual es absurdo $x = \sup(S)$, $x < x + \frac{1}{n}$

Por tanto $x^2 \not< 2$

(2)

$2 \quad (x-\frac{1}{n})^2 \quad x^2$

$(x-\frac{1}{n})^2 \rightsquigarrow x - \frac{1}{n} < x$

$2 < (x-\frac{1}{n}) < s^2 \leq x^2$

Se supone $x^2 < 2$.

tengo que encontrar n.

$$(x-\tfrac{1}{n})^2 = x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} > x^2 - \frac{2x}{n}$$

$$\frac{2x}{n} < x^2 - 2$$

$$\frac{1}{n} < \frac{x^2-2}{2x}$$

Si $2 < x^2$ entonces $x^2 - 2 > 0$ Además como $1 \in S$ entonces $1 \leq \sup(S) = x$ entonces

$$\frac{x^2-2}{2x} > 0$$

Por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $0 < \frac{1}{n} < \frac{x^2-2}{2x} \quad \left(\frac{2x}{n} < x^2 - 2\right)$

Así

$$(x-\tfrac{1}{n})^2 = x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} > x^2 - \frac{2x}{n}$$

$$> \underbrace{x^2 - (x^2-2)}_{=2}$$

Tarea: muestre que $\sqrt{3}$ no es racional.

Como $x = \sup(S)$ $x - \frac{1}{n} < x$ entonces $\exists\, t_0 \in S$ tal que

$$x - \frac{1}{n} < t_0 \leq x$$

Así

$$2 < \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 < t_0^2 < 2$$

Absurdo!

De (1) y (2) tenemos que $x^2 = 2$.

obs: Antes se mostró que x en el teorema anterior no es racional pero sí $\mathbb{R}$. Así

Así $x \in \mathbb{R}$, $x \notin \mathbb{Q}$

Tarea: muestre que $\sqrt{3}$ no es racional.

→ lo mismo pero con $\sqrt{4}$ (este último es opcional)