Taller Preparcial #2

Estudiante: ____ **Nota:**______

1. **[1 pt]** Sea D un dominio de integridad y sean $a, b \in D$. Asuma que $a^n = b^n$ y $a^m = b^m$ para dos enteros positivos n y m primos entre sí. Demuestre que $a = b$.

2. **[1 pt]** Sea A un PID y sea $a \in A$ con $a \neq 0$. Demuestre que $\langle a \rangle$ es un ideal maximal de A si y solo si a es irreducible.

3. **[2 pts]**

   a) Sea p un número entero primo. Demuestre que o p sigue siendo primo en $\mathbb{Z}[i]$ o p es el producto de dos primos en los enteros de Gauss conjugados: $p = \pi\overline{\pi}$;
   [*Sugerencia:* $\pi \mid p \implies \overline{\pi} \mid p$.]

   b) Sea π un primo en los enteros de Gauss. Luego o $\pi\overline{\pi}$ es un primo en $\mathbb{Z}$ o es el cuadrado de un primo en $\mathbb{Z}$.
   [*Sugerencia: una factorización en primos en* $\mathbb{Z}$ *es todavía una factorización en* $\mathbb{Z}[i]$, *no necesariamente en irreducibles.*]

   Observación: este ejercicio implica que los primos en $\mathbb{Z}[i]$ *son los primos* $p \in \mathbb{Z}$ *que no se pueden escribir como suma de cuadrados o los elementos de la forma* $a + bi$ *tales que* $a^2 + b^2$ *sea un primo en* $\mathbb{Z}$*. Un teorema de teoría de los números dice que* $p \in \mathbb{Z}$ *es una suma de cuadrados si y solo si* $p = 2$ *o* $p \equiv 1 \pmod 4$.

4. **[1 pt]** Demuestre que los enteros de Gauss son un dominio euclídeo con función euclidea: $d(x + iy) = x^2 + y^2$.

   [*Sugerencia: si* $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$, *con* $z_2 \neq 0$, *se puede escribir* $z_1/z_2 = u + iv \in \mathbb{C}$, *con* u, v *racionales. Razonando geometricamente, encuentre* $m, n \in \mathbb{Z}$ *tales que* $|(u + iv) - (m + in)| \leq 1/\sqrt{2}$.]