... Seguimos con series, y Ahora telescópicas

ej: [Series telescópicas]

Consideremos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(1)(2)} + \frac{1}{(2)(3)} + \frac{1}{(3)(4)} + \dots$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \iff 1 = n(n+1)\left[\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}\right]$$

$$1 = A(n+1) + Bn$$

- Si $n=0 \Rightarrow 1 = A(1) + B(0) \Rightarrow \boxed{A=1}$
- Si $n=-1 \Rightarrow 1 = A(0) + B(-1) \Rightarrow \boxed{B=-1}$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Somas parciales:

$$l_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1}$$

Tarea: estudie la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Ej: Consideremos $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Rightarrow (-1, 0, -1, 0, \dots) = S_k$$

Analicemos la sucesión (S_k)

$X = (S_{2k}) = (0, 0, 0, \dots)$ converge a 0

$Y = (S_{2k+1}) = (-1, -1, -1, \dots)$ converge a -1

De esta manera (S_k) no puede ser convergente, pues toda subsucesión en una sucesión convergente al límite de la sucesión.

No siempre es posible encontrar una fórmula para las sumas parciales de una serie, esto es lo que hace que estudiar series sea algo más complicado. Estudiemos algunos criterios que ayudan a decidir sobre la convergencia de la serie.

Teorema: [Criterio de n-ésimo término]

Si la serie $\sum x_n$ converge, __entonces__ x_n converge a cero.

Dem Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$, donde $S \in \mathbb{R}$. De esta manera

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k = S_n - S_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

[Corolario] → criterio de divergencia para series

Si x_n no converge a cero (incluya caso divergente) entonces $\sum x_n$ no es convergente.

__Obs__: Note que si $x_n \to 0$ no podemos concluir nada sobre $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → Serie armónica y se mostró que no converge.

Note que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

② Veamos de aquí en breve que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ Converge. note } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Ej: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$ diverge pues $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1$

Teorema [Criterio de cauchy para series]

$\sum x_n$ es convergente sii para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t. q.

Si $m > n \geq n_0$ entonces

$$|S_m - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m| < \varepsilon$$

[Dem] ($\Rightarrow$) si $\sum x_n$ Converge.

Así (S_n) es de cauchy. Así para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si

$m > n \geq n_0$ entonces

$$|S_m - S_n| < \varepsilon.$$

$(\Leftarrow)$ (s_n) Cauchy $\Rightarrow$ (s_n) converge

$\Rightarrow$ $\sum x_n$ converge

Teorema Sea (x_n) una sucesión de números reales no negativos. entonces la serie $\sum x_n$ converge sii la sucesión $S = (s_n)$ de las sumas parciales es acotada. En este caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_i \in \mathbb{N}\}$$

Dem: Supongamos que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$

$(\Rightarrow)$ Supongamos que $\sum x_n$ converge, entonces (s_n) es convergente, por tanto (s_n) es acotada.

$(\Leftarrow)$ Supongamos ahora que (s_n) es acotada. Además

$$s_n \leq s_n + x_{n+1} = s_{n+1}$$

pues $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Así (s_n) es una sucesión creciente que

Además es acotada luego (S_n) es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \sup\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$$

Ej: Consideremos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Veamos que esta serie converge.

① note que $\frac{1}{n^2} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

② Veamos que las sumas parciales son acotadas.

* $S_n < S_n + \frac{1}{(n+1)^2} = S_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

* si (S_{n_k}) es una subsucesión de (S_k) entonces

$$k \leq n_k \Rightarrow S_k \leq S_{n_k}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}$$

De esta manera si $(S_{n_k}$ es acotada también lo será (S_k))

$$n_k = 2^k - 1$$

$$n_1 = 2^1 - 1 = 1 \Rightarrow S_{n_1} = S_1 = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$n_2 = 2^2 - 1 = 3 \Rightarrow S_{n_2} = S_3 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$$

$$\leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}$$

$$n_3 = 2^3 - 1 = 7 \Rightarrow$$

$$S_{n_3} = S_7 = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{7^2}\right)$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$\vdots$

$$S_{n_k} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$$