MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Análisis Real
2022-1

Universidad del Rosario

Taller: Completitud en $\mathbb{R}$ y finitud

10 de Agosto de 2022

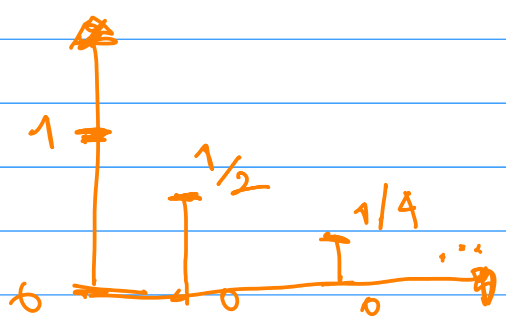
Indicaciones generales

- El taller es una evaluación, por lo tanto se debe entregar en físico y de manera presencial.
- La fecha de entrega es el Miércoles 17 de Agosto al inicio de la clase.

1. Considere el conjunto $A = \{\frac{1}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Demuestre que $Inf(A) = 0$.
2. Sea E un subconjunto no vacío y acotado superiormente de los números reales y considere el conjunto $U = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es cota superior de } E\}$. Demuestre que $Sup(E) = Inf(U)$.
3. Sea $f : A \to B$ una función inyectiva. Muestre que si B es finito, entonces A es finito.
4. Sea A un conjunto no finito y B un subconjunto finito de A. Muestre que $A - B$ no es finito y en consecuencia $A - B \neq \emptyset$.

1

$$A = \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{Z} \right\} = \left[0, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$



→ este es encajado.

Suponga que existe la cota inferior x y que esta es la mayor de las cotas inferiores, adicionalmente

$$\inf(A) = x \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Caso 1) $x > 0 \equiv \operatorname{Inf}(A) > 0$

Por prop arquimediana dado que $x \in \mathbb{R}$, sabemos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \quad n$.

lo pruebo más tarde.

$$x \leq n \leq 2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

$$x \leq 2^{n-1}$$

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

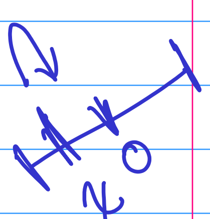
$$x > \frac{1}{x} > \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

esto es para cualquier $x > 0$ tengo garantizado que habrá un $a \in A$ tal que $\operatorname{Inf}(A) = x > a$.

Contradicción que surge de asumir que $x > 0$.

Caso 2) $x < 0 \equiv \operatorname{Inf}(A) < 0$

$-x > 0$



Siguiendo la estructura del caso 1 con la prop. arquimediana:

$$-x > \frac{1}{-x} > \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x \leq -\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\operatorname{Inf}(A) \leq -\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$$

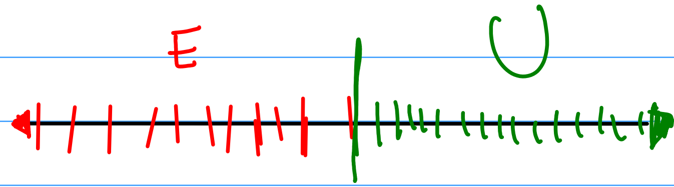
hay una cota inferior: $-\frac{1}{2^{n-1}}$ más grande que el ínfimo.

De lo anterior se deduce que $\operatorname{Inf}(A) = x = 0$.

2 Sea $E \neq \emptyset$ y $E \subseteq \mathbb{R}$, acotado superiormente considere el conjunto

$$U = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es cota sup de } E\}$$

Demuestre que $\sup(E) = \operatorname{Inf}(U)$

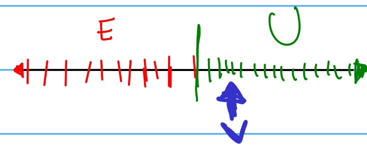


Dado $E \subseteq \mathbb{R}$ y $E \neq \emptyset$, además acotado superiormente por Completitud sabemos que existe $V = \sup(E)$.

Note que $\forall x \in E$ $x < y$, donde y es un elemento arbitrario de U, luego U está acotado inferiormente, note también que $U \neq \emptyset$ y $U \subseteq \mathbb{R}$. luego tiene un ínfimo w.

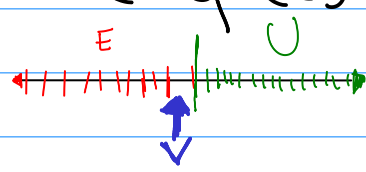
Suponga por absurdo que $V = \sup(E) \neq \operatorname{Inf}(U) = w$

Caso 1) $V > w$ $\left(\sup(E) > \inf(U)\right)$



Recuerde que U es el conjunto de las cotas superiores de E, luego si $V > w$ se tendría que hay otra cota superior (w) más pequeña que el supremo V $(\Rightarrow\Leftarrow)$

Caso 2) $V < w$ $\left(\sup(E) < \inf(U)\right)$



Vea que $\sup(E)$ es cota superior de E pero ω es el ínfimo del conjunto de las cotas superiores de E, luego hay un elemento del conjunto U que es más pequeño que su ínfimo $(\Rightarrow\Leftarrow)$

Contradicción que surge en ambos casos de asumir $\sup(E) \neq \inf(U)$. por lo que $\sup(E) = \inf(U)$.

$\blacksquare$

3) Sea $f: A \mapsto B$. una función inyectiva, muestre que si B es finito, entonces A es finito.

Suponga $f: A \to B$ es inyectiva y B finito, por Absurdo considere A infinito

Dado que f es inyectiva sabemos que todo elemento de A va a un elemento de B, pero como $|A| > |B|$ por principio de palomar existirá c, d tq.

$$f(c) = f(d) \text{ y } c \neq d$$

lo cual niega el hecho de que f es inyectiva

$$(\Rightarrow\Leftarrow)$$

Contradicción que surge de asumir que A es infinito. luego A debe ser finito

Demostración de palomar abajo

4) Sea A un conjunto no finito y B un subconjunto finito de A muestre que $A-B$ no es finito y en consecuencia $A-B \neq \emptyset$

Caso 1) $B = \emptyset \Rightarrow A - B = A - \emptyset = A$

Como sabemos $A-B = A$ es no finito luego tiene elementos es decir $A-B \neq \emptyset$.

Caso 2) $B \neq \emptyset$

$A \to I_k$
$I_k \to A$

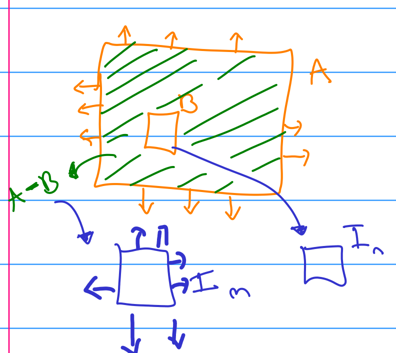
Si A es no finito entonces no existe una biyección de A en I_n

$$A - B = \{ a \in A \mid a \notin B \}$$

Supoga que $A-B$ es finito luego existe una biyección $A-B$ en I_m, Recuerde que $B \subseteq A$ es finito entonces existe una biyección de B en I_n

1) $f: A-B \longmapsto I_m$
   $g: I_m \longmapsto A-B$

2) $h: B \longmapsto I_n$
   $J: I_n \longmapsto B$



Ahora considere la idea de $(A-B)$ (finito) Unido B (finito)

$(A-B) \cup B$, dado que ambos son finitos puedo probar el crear unas funciones

entonces puedo crear una función

$$\Lambda(\omega): \begin{cases} \text{si } \omega \in A-B \Rightarrow f(\omega) \in I_m \\ \text{si } \omega \in B \Rightarrow h(\omega) \in I_n \end{cases}$$

Así mismo puedo crear otra función tal que

$$\Phi(\varphi): \begin{cases} \text{si } \varphi \in I_m \Rightarrow g(\varphi) \\ \text{si } \varphi \in I_n \Rightarrow J(\varphi) \end{cases}$$

entonces $\Lambda: (A-B) \cup B \longmapsto I_m \cup I_n$

$\Phi: I_m \cup I_n \longmapsto (A-B) \cup B$

es decir, existe una biyección de $(A-B) \cup B$ en $I_K = I_m \cup I_n$, pero note que $(A-B) \cup B$ es A, luego existe una biyección de A en I_K esto contradice el hecho de que A sea infinito.

$$(\Rightarrow) \angle \Rightarrow)$$

esto surge por asumir que $A-B$ con B finito, es finito, luego $A-B$ debe ser infinito y con ello es claro que $A-B$ tiene almenos un elemento luego $A-B \neq \emptyset$.

ejercicio 1 cont.

hacía falta probar que

$$n \leq 2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

Por inducción:

1) Sea $n = 1$ note que

$$1 \leq 2^{1-1}$$
$$1 \leq 2^0$$
$$1 \leq 1 \quad \checkmark$$

H.I) Asuma que $k \leq 2^{k-1}$

2) Ahora si tenemos $k+1$:

$$k \leq 2^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}$$
$$k+1 \leq 2k \leq 2^{(k-1)+1}$$

Paso base)

$$1+1 \leq 2$$
$$2 \leq 2 \quad \checkmark$$

H I)

$$k+1 \leq 2k$$

Paso inductivo)

$$k+1+2 \leq 2k+2$$
$$(k+1)+1 = k+2 < k+3 \leq 2(k+1) \quad \checkmark$$
$$(k+1)+1 < 2(k+1)$$

∎

Ejercicio 1 Versión 2

Considere el conjunto $A = \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

Demuestre que $\text{Inf}(A) = 0$.

Sea $a_m \in A$ note que $a_m \in \mathbb{R}^+$ luego por prop. arquimediana

$$\exists n_a \in \mathbb{N} : \ 0 < \frac{1}{n_a} < a_m$$

luego Cero es Cota inferior de $a_m \ \forall a \in A$.

Suponga por absurdo que w es una cota inf. mas grande que 0, en particular $w = \inf(A) > 0$ note que $w \in \mathbb{R}^+$

luego por prop. arq. $\exists n_w$ t.q.

$$n_w - 1 \leq w \leq n_w$$

$$2^{n_w - 1} \leq 2^w \leq 2^{n_w}$$

$$w > \frac{1}{2^{n_w - 1}} > \frac{1}{2^w} > \frac{1}{2^{n_w}}$$

luego existe un elemento de A más grande que su cota inferior.

Contradicción que surge de asumir que $\inf(A) \neq 0$.

Demostración de Palomar

Por inducción

Caso Base) Sea $B=\emptyset$, entonces note que no puede existir una función de $A \to B$, donde $|A|>|B|$, en particular es imposible una función inyectiva.

H.I.) Asuma que es cierto para $|A|>|B|$ con $|B|=n$. (No hay inyectividad)

Caso inductivo) Asuma por absurdo que $|A|>|B|=n+1$ es inyectiva.

Sea $|A|>|B|=n+1$

Note que puedo hacer $B/\{f(n+1)\}$ y también $|A|/\{n+1\}$ pero note que esto es el caso anterior donde $|A|>|B|=n$, así eliminé la imagen y la preimagen de B y A respectivamente y obtuve una función no inyectiva de una originalmente inyectiva $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

Luego debe tenerse que tampoco $|A|>|B|=n+1$ es inyectiva para este caso