Relación

Es un conjunto de pares ordenados, es un conjunto
de tuplas.

Exótico a recordar:

Sea R una relación, si aRa entonces esto es por que $R \subset A \times A$. De igual modo si aRb entonces $R \subset A \times B$.

Properties of Relations

We introduce special terms to describe relations.

Definition 14.7 **(Properties of relations)** Let R be a relation defined on a set A.

- If for all $x \in A$ we have $x \; R \; x$, we call R *reflexive*.
- If for all $x \in A$ we have $x \not R \; x$, we call R *irreflexive*.
- If for all $x, y \in A$ we have $x \; R \; y \implies y \; R \; x$, we call R *symmetric*.
- If for all $x, y \in A$ we have $(x \; R \; y \wedge y \; R \; x) \implies x = y$, we call R *antisymmetric*.
- If for all $x, y, z \in A$ we have $(x \; R \; y \wedge y \; R \; z) \implies x \; R \; z$, we call R *transitive*.

Relación de equivalencia

Una relación es de equivalencia si es **reflexiva, simetrica y transitiva.**

Se denota por ejemplo $a \sim b$ y se lee **a** es equivalente a **b**.

ej:

Verifique si la siguiente relación es de equivalencia:

- sea R una relación en los numeros reales tal que aRb
  sii $a - b$ es un entero.

→ es reflexiva? aRa, tenemos entonces: $a - a = 0$, $0 \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto es reflexiva.

→ es simetrica? $aRb \to bRa$, así si $a - b = c$, $c \in \mathbb{Z}$, entonces $b - a = -(a - b) = -c$, y además $-c \in \mathbb{Z}$, por lo tanto también es simética.

→ es transitiva? $(aRb) \wedge (bRc) \to aRc$, por hipotesis tenemos $a - b = d, \; d \in \mathbb{Z}$, también hay que $b - c = e, e \in \mathbb{Z}$.
$a = b + d$ y $c = b - e$, entonces:

$$a - c = (b + d) - (b - e)$$

$$= d + e = f, f \in \mathbb{Z}$$

entonces dado que se cumplen las 3, la relación aRb, es de equivalencia.

Congruencia módulo N

sea $n \in \mathbb{Z}^+$, decimos que x e y son congruentes módulo n, y se escribe:

$$x \equiv y \ \ (mod\, n)$$

Esto no es más que $(x - y)$ es un múltiplo de n.
en notación: $n|(x - y)$.

Una afirmación importante es que $\equiv$ (congruencia módulo n) en el conjunto de los enteros:

1. es la congruencia módulo n ***reflexiva***? Debemos verificar que xRx o lo que es lo mismo $x \equiv x$.

tenemos $(x - x) = 0$, no es difícil notar que $n|0$ por lo tanto es reflexiva.

2. es la congruencia módulo n ***simétrica***? $x \equiv y \rightarrow y \equiv x$.

Partiendo de $n|(x - y)$, tenemos entoces que existe un entero z tal que $n \cdot z = (x - y)$, si ahora hacemos $n \cdot -z$ vemos que esto es: $(y - x)$. puesto que z era entero tenemos que la congruencia módulo n es simética en el conjunto de los enteros.

3. es la congruencia módulo n ***transitiva***? $(x \equiv y) \wedge (y \equiv z) \rightarrow x \equiv z$.

Partiendo de $n|(x - y)$ y $n|(y - z)$, entonces $n \cdot w$ y $n \cdot k$ son $(x - y)$ y $(y - z)$ respectivamente, donde $w, k \in \mathbb{Z}$.
Ahora

$$x - z = x - z + 0$$

$$= x - z + y - y = (x - y) + (y - z)$$

$$= (n \cdot w) + (n \cdot z)$$

$$= n(w + z)$$

dado que $w, z \in \mathbb{Z}$ tenemos que la operación módulo es transitiva.

Finalmente tenemos que la operación cumple reflexividad, simetría y transitividad. Por lo que cumple con la relación de equivalencia.