

Retornando desde la def. anterior
de sucesión monótona.

Hasta ahora hemos estudiado la convergencia de sucesiones conociendo los límites de las sucesiones. ¿pero cómo analizamos la convergencia de una sucesión sin conocer el límite?

La definición que tenemos solo nos dice que si dado x límite ese \lim , converge a x o no.

pero no tenemos como decir directamente que es convergente.

ej: ① $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots) = (x_n)^\infty$

donde $x_n = n \rightarrow$ es creciente
(estrictamente creciente)

② $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n, \dots)$

es una sucesión creciente.

③ $(1/2^n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión decreciente monótona.

Una sucesión monótona y acotada es convergente.

Teorema: [convergencia monótona]

Una sucesión monótona de números reales es convergente si es acotada. Además

a) Si $X = (x_n)$ es creciente y acotada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \sup \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$$

b) Si $X = (x_n)$ es decreciente y acotada entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \inf \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$$

Dem:

(\Rightarrow) Ya se demostró que una sucesión convergente es acotada.

(\Leftarrow) Si una sucesión es acotada y monótona, entonces ...

Supongamos ahora que $X = (x_n)$ es una sucesión monótona y acotada

Caso 1: Supongamos que $X = (x_n)$ es creciente, es decir $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como $X = (X_n)$ genera al conjunto
 $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $X = (X_n)$ es
 acotada, entonces $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es
 acotado y no vacío.

Así por el Axioma de completitud en \mathbb{R}
 existe

$$X = \sup \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Veamos ahora que $X_n \rightarrow X$

(Ahora si usamos nuestra vieja def.
 para probar que $\sup(\{X_n\})$ es el lim.)

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. (queremos llegar a
 $|X_n - X| < \varepsilon$
 $\Leftrightarrow X - \varepsilon < X_n < X + \varepsilon$)
 De esta manera $X - \varepsilon$ no
 es una cota superior
 de $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$
 de esta manera $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
 $X - \varepsilon < X_{n_0}$ (de lo contrario llegamos a un absurdo)

Así si $n \geq n_0$, entonces:

$$X - \varepsilon < X_{n_0} \leq X_n$$

→ pues X_n
 es creciente

$$X - \varepsilon < X_{n_0} \leq X_n \leq X \leq X + \varepsilon$$

entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq n_0$

$$|X_n - X| < \varepsilon$$

$$\therefore X_n \rightarrow X.$$

Caso 2: Supongamos ahora que $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente.

Consideremos

$$y = -x = (-x_n)_{n=1}^{\infty}$$

$$\begin{aligned} x_n &\geq x_{n+1} & \forall n \in \mathbb{N} \\ -x_{n+1} &\leq -x_n & \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Así la sucesión $y = (-x_n)$ es creciente. Note que y también es acotada pues x es acotada.

Luego por caso 1 tenemos $y = (-x_n)$ converge a

$$-x = \sup \{ -x_n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} -(-x_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) \\ &= -(-x) = x \end{aligned}$$

Así $x_n \rightarrow x$.

Ej: Demuestre que $(1/\sqrt{n})_{n=1}^{\infty}$ es convergente, encuentre su límite.

Sol

$$\textcircled{1} \quad n \leq n+1 \Leftrightarrow \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

\therefore la sucesión es decreciente.

② $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \quad \left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{Pues la sucesión} \\ \text{es decreciente.} \end{array} \right.$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es $\inf \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Por teorema de convergencia monótona,
tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \inf \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Mostremos que $\inf \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$

②.1 Note que $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Así
0 es cota inf.

②.2 veamos que ningún número positivo
puede ser cota inferior del $\omega_{j\infty}^{\text{mo}}$.

Sea $\varepsilon > 0$, $\varepsilon^2 > 0$

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon^2$$

$$0 < \sqrt{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

entonces hay un elemento de (x_n)
más pequeño que la cota inferior
positiva $\varepsilon > 0$ no puede ser cota
inf. lo que nos deja que 0 es el inf.

Digresos trucoito chumba; \leadsto quiero llegar a $\frac{1}{n-2} < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_0} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< n_0 < n_0 + 2 = m_0 \\ &\quad \downarrow \\ &\quad n_0 = m_0 - 2 \\ \frac{1}{n_0} &< \varepsilon \\ \frac{1}{m_0 - 2} &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ej: Demuestre que $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$
 $\forall n \in \mathbb{N}$ es Divergente.

Sol:
$$X_{(2^n)} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

Después el 8 seq. completos
 así el ejercicio:

ej: $\sum \frac{1}{n} \rightarrow$ Queremos decir que diverge.

entonces Comparamos con una sucesión más pequeña

$$X_{(2^n)} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right)}^{2^{2-1}} + \overbrace{\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right)}^{2^{3-1}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1} \text{ veces}}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + 2^{2-1} \left(\frac{1}{2^2}\right) + 2^{3-1} \left(\frac{1}{2^3}\right) + \dots + 2^{n-1} \left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \frac{n}{2}$$

De esta manera $X_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$

Así (x_n) no es acotada. Por tanto
no es convergente.

Ejercicio:

muestre que

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ es}$$

Convergente (creciente y acotada)

Con binomio de Newton

esta sucesión converge a e .