Teorema [Criterio de convergencia de cauchy]

Una sucesión de números reales es convergente sii es de cauchy.

Dem: [$\Rightarrow$] sale por teorema anterior

[$\Leftarrow$] Sea $X=(X_n)$ una sucesión de cauchy, entonces por teorema anterior $X=(x_n)$ es acotada. Luego por T.B.W existe una subsucesión (x_{n_k}) de X que converge. Vamos a suponer que $x_{n_k}\to X^*$ sea $\varepsilon>0$ cualquiera. Como (x_n) es de cauchy, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $m,n\geq n_0$ entonces

$$|X_m-x_n|<\varepsilon/2 \qquad (*)$$

Por otro lado como $x_{n_k}\to X^*$, existe $n_1\in\mathbb{N}$ tal que si $k\geq n_1$ entonces

$$\left|x_{n_k}-x^*\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

Sea $n_2=\max\{n_0,n_1\}$. Si $n\geq n_2$ tenemos:

$$|X_n-X^*|=|X_n-X_{k_{n_2}}+x_{k_{n_2}}-x^*|$$

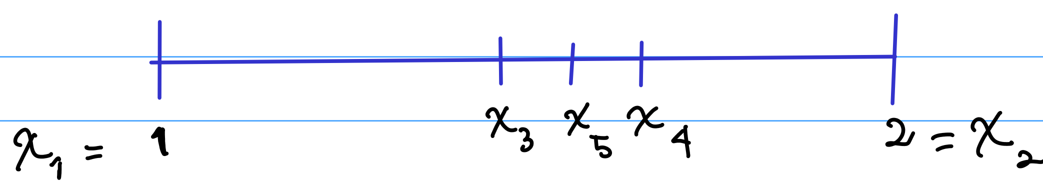
Como $n \geq n_2$, $k_{n_2} \geq n_2$ podemos aplicar (*) y (**).

$$\leq |x_n - x_{k_{n_2}}| + |x_{k_{n_2}} - x^*| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Por lo tanto $x_n \longrightarrow x^*$. Así $X = (x_n)$ converge!.

Ej: Sea $X = (x_n)$ dada por $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \quad \text{si } n > 2.$$



① << inducción >>

$k = 1$, $\quad 1 \leq x_1 = 1 \leq 2$,

$k = 2$, $\quad 1 \leq x_2 = 2 \leq 2$

H.I. Supongamos que $1 \leq x_i \leq 2$ para $i = 1, 2, 3, \dots, k$

Paso inductivo: Veamos que $1 \leq x_{k+1} \leq 2$

$$1 \le x_k \le 2$$
$$1 \le x_{k-1} \le 2$$

$$1+1 \le x_k + x_{k-1} \le 2+2$$
$$2 \le x_k + x_{k-1} \le 4$$
$$1 \le \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \le 2$$
$$1 \le x_{k+1} \le 2$$

1) entonces todo término de (x_n) es entre 1 y 2.

2) $|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}$ $\boxed{\text{ejercicio por inducción}}$

Supongamos $m > n$, entonces

$$|x_m - x_n| = |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \dots + (x_{m-1} - x_m)|$$

$$\le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \dots + |x_{m-1} - x_m|$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^{m-2}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$

Nota:

$Z = 1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2^t}}$, $-\frac{Z}{2} = -\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{4}} \dots -\cancel{\frac{1}{2^t}} - \frac{1}{2^{t+1}}$

$$\frac{z}{2} = z - \frac{z}{2} = 1 - \frac{1}{2^{t+1}}$$

$$z = 2 - \frac{1}{2^t}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left(2 - \frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$

$$= \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{m-2}}$$

$$\leq \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}$$

Sea $\varepsilon > 0$ entonces por propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{n_0} < 4\varepsilon.$$

$$\left(2^{n_0} \geq n_0 \rightarrow \frac{1}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{n_0}\right)$$

Así $\frac{1}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{n_0} < 4\varepsilon$, es decir $\frac{1}{2^{n_0-2}} < \varepsilon$

por tanto si, $n\,m \geq n_0$ entonces $m > n$

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{2^{n-2}} \leq \frac{1}{2^{n_0-2}} < \varepsilon$$

Concluyo que (x_n) es de cauchy y por tanto convergente. ∎

[Series] → Son un caso particular de sucesiones

Consideremos la sucesión $X = (x_n)$. A partir de esta sucesión generemos la sucesión,

(S_n) dónde $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

$x_n \to$ término n-ésimo.

$S_n \to$ suma parcial.

Si S_n converge entonces la serie S_n se dice convergente. A este límite le llamaremos suma de la serie.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \underbrace{S}_{\text{Suma de la serie.}}$$

Ej: Serie geométrica

$X = (r^n)$ entonces (S_n) donde

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1}$$

Encontraremos una fórmula para S_n.

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \dots + \cancel{r^{n-1}} \\
-rS_n &= -\cancel{r} - \cancel{r^2} - \dots - \cancel{r^{n-1}} - r^n \\
\hline
(1-r)S_n &= 1 - r^n \\
S_n &= \frac{1 - r^n}{1 - r}
\end{aligned}
$$

Si $r = 1$ entonces $S_n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}} = n$, no converge.

Si $r \neq 1$ $\boxed{S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r}}$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} \lim_{n \to \infty} (1 - r^n)$$

$$= \frac{1}{1-r} \left(1 - \lim_{n \to \infty} r^n\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & |r| < 1 \\ \text{Divergente} & |r| \geq 1. \end{cases}$$