Teorema: Densidad de los números racionales en $\mathbb{R}$

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, arbitrarios t.q. $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$

Dem:

Idea $\quad nx < m \leq ny$ (entero)

$$x < \frac{m}{n} \leq y$$

(1) Vamos a suponer que $0 < x < y$ entonces $y - x > 0$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $0 < \frac{1}{n} < y - x$ por prop. arquimediana:

$$1 < ny - nx$$
$$1 + nx < ny$$

Por teorema anterior, como $1 + nx > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ t.q.:

$$m_0 - 1 < nx < m_0$$
$$m_0 < 1 + nx < m_0 + 1$$

entonces:

$$nx < m_0 \leq nx + 1 < ny$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{nx}{n}} < \frac{m_0}{n} < \cancel{\frac{ny}{n}}$$

$$x < \frac{m_0}{n} < y \quad \blacksquare$$

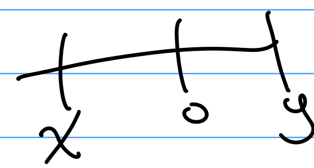
(2) $x = 0$, $x < y$

Por prop. arquimediana $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q.

$$x = 0 < \frac{1}{n} < y$$

(3) $x < 0 \qquad x < y$

(3.1) si $y > 0$



entonces $r = 0$, así $x < 0 = r < y$

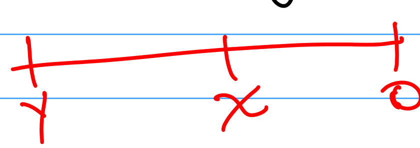
(3.2) $x < 0$, $y = 0$

entonces $-x > 0$. Por prop. arq. existe $n \in \mathbb{N}$ t.q.

$$0 < \frac{1}{n} < -x, \text{ Así}$$

$$x < -\frac{1}{n} < 0 = y, \quad r = -\frac{1}{n}$$

(3.3) Suponer $x < 0$, $y < 0$, $x < y$



entonces $0 < -y < -x$ Por (1)

existe $r \in \mathbb{Q}$ t.q. $-y < r < -x$

Así $x < -r < y$ donde $r \in \mathbb{Q}$.

Tarea: Densidad de irracionales en $\mathbb{R}$

Como acomodar $x < r < y$ para llegar $x < r\sqrt{2} < y$

Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, entonces $\exists\ z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.

Sugerencia: Aplique teorema anterior a $\frac{x}{\sqrt{2}}$ y $\frac{y}{\sqrt{2}}$.

Intervalos en $\mathbb{R}$

Queremos caracterizar los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

llegar a prop.

Tipos de intervalos en $\mathbb{R}$

- Acotados $[\ ]$ $(\ )$ $[\ )$ $(\ ]$
- No acotados
  $(\ , \infty)$ $(-\infty, \ ]$,
  $(-\infty, \ )$ $[\ , \infty)$

$\boxed{\text{Teorema:}}$

Si $S \subseteq \mathbb{R}$ y $|S| \geq 2$ y tiene la propiedad:

$\circledast$ $(x, y \in S$ y $x < y)$
$\Rightarrow [x, y] \subseteq S$

entonces S es un intervalo.

intuición:

① Suponga S acotado y $S \neq \emptyset \Rightarrow$
$a = \inf(S)$
$b = \sup(S)$
$\Rightarrow S \subseteq [a,b]$
muestre que
$(a,b) \subseteq S \subseteq [a,b]$