ej: Si $a>0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+na} = 0$

Sol: $X_n = \frac{1}{1+na}$, veamos que $X_n \to 0$.

$$|X_n - 0| = \left|\frac{1}{1+na}\right| < \frac{1}{na} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{converge a cero}} \underbrace{\frac{1}{a}}_{\text{cte}}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ y $\frac{1}{a} > 0$ por teorema

Concluyo que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+na} = 0$.

tarea

Ejercicio: si $c>0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} c^{1/n} = 1$

Algunos teoremas de límites

Def: [Sucesión Acotada]

Una sucesión $X = (x_n)$ se dice acotada en $\mathbb{R}$ (o simplemente acotada) si existe $M \in \mathbb{R}^+$ t.q.

$$|X_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ej: $X_n = (1/2)^n$ es una sucesión acotada.

Teorema: toda sucesión convergente en $\mathbb{R}$ es acotada.

Dem:

Supongamos $X = (x_n)$ una sucesión en $\mathbb{R}$ convergente a x.
Para $\varepsilon = 1$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces:

$$|x_n - x| < 1$$

$$|x_n| - |x| \leq \big|\, |x_n| - |x| \,\big| \leq |x_n - x| < 1$$

$$|x_n| < 1 + |x|, \text{ siempre que } n \geq n_0$$

tomemos $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1+|x|\}$

De esta manera $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto (x_n) es acotada.

¿el recíproco de teorema es cierto?

No! Sea (x_n) la sucesión acotada por

$$x_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si es impar} \end{cases}$$

$$(x_n) = 0, 2, 0, 2, 0, 2 \ldots$$

es acotada pero no convergente.

$$x_n \to x \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon)$$

$$x_n \not\to x \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n > n_0 \wedge |x_n - x| \geq \varepsilon)$$

Operaciones con sucesiones

Sean $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$ sucesiones en $\mathbb{R}$ y considere $c \in \mathbb{R}$.

Definimos:

- $X + Y = (x_n + y_n)_n$
- $X - Y = (x_n - y_n)_n$
- $cX = (c\,x_n)_n$
- $XY = (x_n y_n)_n$
- $\frac{X}{Y} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)_n$, Si $y_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema: Sean $X = (x_n)$ y $Y = (y_n)$ sucesiones de números reales, que convergen a x y a y respectivamente.

Considere $c \in \mathbb{R}$, entonces las sucesiones $X+Y$, $X-Y$, XY y cX convergen a $x+y$, $x-y$, xy, cx respectivamente.

Además si $x = (x_n)$ converge a x y $z = (z_n)$ es una sucesión de números reales tales que $z_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, que converge a $z \neq 0$, entonces

x/z es convergente $\frac{x}{z_0}$

Demostración:

- Supongamos que $X = (x_n)$ converge a x y $Y = (y_n)$ converge a y.

Consideremos $\varepsilon > 0$ cualquiera. Como $x_n \to x$ (para $\varepsilon/2$) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\text{si } n \geq n_0, \quad |x_n - x| < \varepsilon/2 \quad (*)$$

Análogamente

$$\text{si } n \geq n_1, \quad |y_n - y| < \varepsilon/2 \quad (**)$$

tomemos $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$

de esta manera si

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x+y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Así $x_n + y_n \to x + y$.

xy:

Supongamos que $x_n \to x$ y $y_n \to y$

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Como (y_n) es una sucesión convergente existe $M \in \mathbb{R}^+$ t.q. $|y_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

tomemos $T = \max\{M, |x|\}$

Como $x_n \to x$ (para $\varepsilon/2T$) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$n \geq n_0 \quad |x_n - x| < \varepsilon/2T \quad (*)$$

Analogo:

$$n \geq n_1 \quad |y_n - y| < \varepsilon/2T \quad (**)$$

De esta manera

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| \\
&= |y_n(x_n - x) + x(y_n - y)| \\
&\leq |y_n(x_n - x)| + |x(y_n - y)| \\
&= |y_n| \cdot |x_n - x| + |x||y_n - y| \\
&\leq M|x_n - x| + |x||y_n - y|
\end{aligned}$$

Sea $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ así $n \geq n_2$

$$|x_n y_n - xy| \leq M\,|x_n - x| + |x|\,|y_n - y|$$

$$\leq T\,|x_n - x| + T\,|y_n - y|$$

$$< T\left(\varepsilon/_{2T}\right) + T\left(\varepsilon/_{2T}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

luego $XY \longrightarrow xy$