Taller Preparcial #2

Estudiante: David Alsina **Nota:** 5.0?

1. [1 pt] Sea D un dominio de integridad y sean $a, b \in D$. Asuma que $a^n = b^n$ y $a^m = b^m$ para dos enteros positivos n y m primos entre sí. Demuestre que $a = b$.

Como D es un dominio de integridad sabemos que es conmutativo con identidad y sin divisores de cero.

tenemos $a^n = b^n$ y $a^m = b^m$, para dos enteros positivos primos entre sí.

- $\gcd(m,n) = 1$, m no es multiplo de n y viceversa
- Si n y m son primos entre sí entonces $\exists x, y : nx + my = 1$ (Bezóuts identity)

$$a^n = b^n \qquad a^m = b^m$$
$$a^n - b^n = 0 \qquad a^m - b^m = 0$$

$$a^n - b^n = a^m - b^m$$
$$a^n - a^m = b^n - b^m$$

Si $n < m$:

$$\cancel{a^n}(a^{m-n} - 1) = \cancel{b^n}(b^{m-n} - 1)$$
$$a^{m-n} \cancel{-1} = b^{m-n} \cancel{-1}$$
$$a^{m-n} = b^{m-n}$$
$$(a^{m-n})^{x-y} = (b^{m-n})^{x-y} \qquad \exists x, y$$

$$a^{mx - nx - my + ny} = b^{mx - nx - my + ny}$$
$$(a^{-nx-my})\, a^{mx+ny} = (b^{-nx-my})\, b^{mx+ny}$$

$$(a^{-nx-my})\, a^{mx+ny} = (b^{-nx-my})\, b^{mx+ny}$$

$$(a^{nx+my})^{-1}\, a^{mx+ny} = (b^{nx+my})^{-1}\, b^{mx+ny}$$

$$(a^{1})^{-1}\, a^{mx+ny} = (b^{1})^{-1}\, b^{mx+ny}$$

$$a^{-1}\, a^{mx+ny} = b^{-1}\, b^{mx+ny}$$

$$a^{mx}\, a^{ny} = a\, b^{-1}\, b^{my}\, b^{ny}$$

$$\frac{\cancel{a^{my}}\,\cancel{a^{ny}}}{\cancel{b^{my}}\,\cancel{b^{ny}}} = a\, b^{-1}$$

1 1

$$1 = a b^{-1}$$

$$b = a(b^{-1} b)$$

$$b = a \quad \blacksquare$$

2. [1 pt] Sea A un PID y sea $a \in A$ con $a \neq 0$. Demuestre que $\langle a \rangle$ es un ideal maximal de A si y solo si a es irreducible.

Dado A PID digamos $\langle c \rangle$ genera A y además A es un dominio de Integridad. En el cual cualquier ideal es principal.

$(\Rightarrow)$ Suponga que $\langle a \rangle$ es un maximal de A. luego si J es un ideal t.q. $\langle a \rangle \subseteq J \subseteq A$ tenemos que $\langle a \rangle = J$ ó $J = A$.

Asuma por Absurdo entonces que a es reducible luego:

Como $\langle a \rangle$ es maximal hay 2 casos:

Caso 1) $\langle a \rangle = \langle c_1 \rangle$, $a = c_1 \cdot \ldots \cdot c_n$
donde cada c_i es un factor irreducible.

$$\{ax : x \in A\} = \{c_1 x : x \in A\}$$
$$\{c_1 \cdot \ldots \cdot c_n x : x \in A\} = \{c_1 x : x \in A\}$$

Como A es PID el hecho de que $\langle a \rangle = \langle c_1 \rangle$ implica que a y c_1 son asociados

más claramente $c_1 \cdot \ldots \cdot c_n$ y c_1 son asociados
$(\Rightarrow)(\Leftarrow)$

Caso 2) $\langle c_1 \rangle = A$, $\langle a \rangle \subseteq \langle c_1 \rangle \subseteq A$
$a = c_1 \cdot \ldots \cdot c_n$
Cada c_i es irreducible.

$$A = \langle c_1 \rangle = \{c_1 x : x \in A\}$$

$$\langle a \rangle = \{ax : x \in A\} = \{c_1 \cdot \ldots \cdot c_n x : x \in A\}$$

Porque $A = \langle c_1 \rangle$ $= \{c_1^2 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n x : x \in A\}$

lo anterior nos dice $\langle a \rangle = \langle c_1 a \rangle$

Así a es asociado de $c_n a$, más claramente $c_1 \cdot \ldots \cdot c_n$ es asociado de $c_1^2 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n$. $(\Longrightarrow \Longleftarrow)$

Contradicción que surge en ambos casos por asumir que a es reducible, luego a debe ser irreducible.

$(\Longleftarrow)$ Sea a irreducible. recordemos que $a \in A$, A es PID.

luego podemos crear un subanillo de A $\langle a \rangle$ y por qué no otro $\langle b \rangle$ con el requisito $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$, naturalmente

$$\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle \subseteq A.$$

tenemos 2 casos:

Caso 1) $a \mid b$, $ak = b$, $k \in A$

$$\langle a \rangle = \{ax : x \in A\}$$

$$\langle b \rangle = \langle ak \rangle = \{akx : x \in A\}$$

Como $\langle a \rangle$ y $\langle ak \rangle$, como $\langle a \rangle$ es ideal se puede decir $a_i \in \langle a \rangle$ y multiplicarlo por k, $a_i k \in \langle a \rangle$ porque es ideal.

luego $\langle a \rangle = \langle ak \rangle = \langle b \rangle$.

Caso 2) $a \nmid b$, $\gcd(a,b) = 1 = am + bn$

$m, n \in A$.

$\langle 1 \rangle = \langle am + bn \rangle$

$= \langle am \rangle + \langle bn \rangle$ → Por la def. de suma

$= \langle a \rangle + \langle b \rangle$ → porque $m, n \in A$ y $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ son ideales.

$\langle 1 \rangle = \{ 1x : x \in A \} = A$

$A = \underbrace{\langle a \rangle} + \langle b \rangle$

→ Necesito mutar esto.

3. [2 pts]

a) Sea p un número entero primo. Demuestre que o p sigue siendo primo en $\mathbb{Z}[i]$ o p es el producto de dos primos en los enteros de Gauss conjugados: $p = \pi\overline{\pi}$;
[*Sugerencia:* $\pi \mid p \implies \overline{\pi} \mid p$.]

b) Sea π un primo en los enteros de Gauss. Luego o $\pi\overline{\pi}$ es un primo en $\mathbb{Z}$ o es el cuadrado de un primo en $\mathbb{Z}$.
[*Sugerencia: una factorización en primos en* $\mathbb{Z}$ *es todavía una factorización en* $\mathbb{Z}[i]$, *no necesariamente en irreducibles.*]

Observación: este ejercicio implica que los primos en $\mathbb{Z}[i]$ *son los primos* $p \in \mathbb{Z}$ *que no se pueden escribir como suma de cuadrados o los elementos de la forma* $a + bi$ *tales que* $a^2 + b^2$ *sea un primo en* $\mathbb{Z}$. *Un teorema de teoría de los números dice que* $p \in \mathbb{Z}$ *es una suma de cuadrados si y solo si* $p = 2$ *o* $p \equiv 1 \pmod 4$.

a Sea p un número entero primo

1 Sea π un entero de gauss primo
(π, su norma es mayor que 1 y no puede descomponerse en un producto de dos gausianos enteros, cuyas normas sean menores que π)

Supongo que $\pi \mid p \therefore \exists\, \pi_* \text{ t.q. } p = \pi \pi_*$

$$\begin{aligned} p &= (a+bi)(c-di) \\ &= ac - adi + bci + bd \\ &= (ac+bd) + i(bc - ad) \end{aligned}$$

Como p es entero no debe tener parte imaginaria luego

$$ad = bc \implies d = \frac{bc}{a} \quad (1)$$

Así:

$$\begin{aligned} p &= ac + bd \\ p &= ac + \frac{b^2 c}{a} \\ p &= \frac{a^2 c}{a} + \frac{b^2 c}{a} = \frac{c(a^2+b^2)}{a} \quad (2) \end{aligned}$$

Como p debe ser entero no puede ser de una forma racional como tenemos, lo que nos lleva a 2 casos:

(1) $a \mid (c\, a^2 + b^2)$

Suponga que $a \mid (a^2+b^2)$, $aK = (a^2+b^2)$

$$K = \frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{a}$$

$$K = a + \frac{b^2}{a}$$

Pero K es entero por lo que es necesario $a \mid b^2$, $am = b^2$ retomando (2):

$bb = an$
$\Rightarrow a = b$ ó $b = m$
ej: $4 \cdot 4 = 8 \cdot 2$

$$p = \frac{a^2c}{a} + \frac{b^2c}{a} = \frac{c(a^2+b^2)}{a}$$

$$= \frac{c\, a(a+m)}{a}$$

$$= c\,(a+m)$$

para que p siga siendo primo o c es ± 1 o $(a+m)$ es ± 1.

(6) Considere $c = \pm 1$

(2) $a \mid c$, $c = aK$, $K \in \mathbb{Z}^+$.

$$p = \frac{a^2c}{a} + \frac{b^2c}{a} = \frac{c(a^2+b^2)}{a} = \frac{\cancel{a}K(a^2+b^2)}{\cancel{a}}$$

$$p = K(a^2+b^2) = Kq, \quad q = (a^2+b^2)$$

para no llegar a un absurdo $p = kq$ debe tener como unidad a uno de sus factores, vea note que debe ser k, luego $c = a$.

Por (2) decimos que

$$p = \frac{\cancel{a}(a^2+b^2)}{\cancel{a} \to 1} = a^2+b^2$$
$$= (a+bi)(a-bi)$$
$$= \pi \overline{\pi}$$

en particular $\pi_{\gamma} = \overline{\pi}$.

Así llegamos a que p primo es $p = \pi\overline{\pi}$.

luego si $\pi | p \Rightarrow p = \pi\overline{\pi}$, note que el caso contrario es directo, si $p = \pi\overline{\pi}$ entonces $\pi | p$. ergo $\pi | p \Leftrightarrow \pi\overline{\pi}$

en particular decimos que dado p primo G podemos escribir como producto de complejos en particular $p = \pi\overline{\pi}$. ■

2 Sea p primo podemos escribirlo en $\mathbb{Z}[i]$ como $p = p + 0i$.

2.1 note que por poco $p = \pm 2 + 0i$ y $\|p\| > 1$ en este caso, entonces $|p|$ siempre será mayor a 1.

2.2 Por absurdo suponga que $p + 0i$ se puede descomponer en producto de 2 complejos de norma menor a p.

No sé cómo seguir ¿ (:) ?

Luego $p = \pi\overline{\pi}$

$= (a+bi)(a-bi)$

$= a^2+b^2$

b) Sea π un primo en los enteros de Gauss. Luego o $\pi\overline{\pi}$ es un primo en $\mathbb{Z}$ o es el cuadrado de un primo en $\mathbb{Z}$.
[*Sugerencia: una factorización en primos en $\mathbb{Z}$ es todavía una factorización en $\mathbb{Z}[i]$, no necesariamente en irreducibles.*]

$\pi = a+bi \quad , \quad \|\pi\| > 1$

$\pi\overline{\pi} = a^2+b^2$

$k = c_1 \cdots c_n$

4. [1 pt] Demuestre que los enteros de Gauss son un dominio euclídeo con función euclidea: $d(x+iy) = x^2 + y^2$.

[*Sugerencia: si $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$, con $z_2 \neq 0$, se puede escribir $z_1/z_2 = u + iv \in \mathbb{C}$, con u, v racionales. Razonando geometricamente, encuentre $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $|(u+iv) - (m+in)| \leq 1/\sqrt{2}$.*]

observe nuestra función d es la norma al cuadrado entonces para decir que los enteros de gauss son dominio euclideo hay que probar 2 cosas sobre nuestra función d.

1. $d(ab) \geq d(a)$ para $a, b \neq 0$ y $a, b \in \mathbb{Z}[i]$

$a = k + mi$, $b = l + ni$, $k, m, n, l \in \mathbb{Z}$

$$ab = (kl - mn) + i(ml + kn)$$
$$\Rightarrow d(ab) = (kl - mn)^2 + (ml + kn)^2$$
$$= (kl)^2 - \cancel{2klmn} + (mn)^2 + (ml)^2 + \cancel{2klmn} + (kn)^2$$
$$= (kl)^2 + (mn)^2 + (ml)^2 + (kn)^2$$
$$= k^2(l^2 + n^2) + m^2(l^2 + n^2)$$
$$= (l^2 + n^2)(k^2 + m^2)$$
$$= d(a) \cdot d(b)$$, note que como $b \neq 0$ $d(b) \geq 1$

$$\Rightarrow d(ab) = d(a) \cdot d(b) \geq d(a)$$

2. Sean $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, $b \neq 0$ queremos decir que $\exists\, q, r \in R$ con $a = bq + r$ y hay 2 casos: $r = 0$ ó $d(r) < d(b)$

digamos $\frac{a}{b} = \frac{k+mi}{l+ni} \cdot \frac{(l-ni)}{(l-ni)} = \frac{kl - kni + mli + mn}{l^2+n^2}$

$$= \frac{(kl+mn) + i(ml-kn)}{l^2+n^2}$$

$$= \frac{kl+mn}{l^2+n^2} + i\,\frac{ml-kn}{l^2+n^2}$$

Aquí tendremos que usar la sugerencia:

① encuentre $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$|(u+iv) - (m+in)| < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{z_1}{z_2} = u+iv,\ u,v \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{\delta((u+iv)-(m+in))} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\delta((u+iv)-(m+in)) < \frac{1}{2}$$

Note que $\frac{kl+mn}{l^2+n^2}$ es racional y $\frac{ml-kn}{l^2+n^2}i$ también (obviando su parte compleja).

luego u es parecido a $\frac{kl+mn}{l^2+n^2}$,

también vi es parecido a $\frac{ml-kn}{l^2+n^2}i$.

el ejercicio consiste en encontrar un entero "m" para $\frac{kl+mn}{l^2+n^2}$ (parecido a u) y otro entero "n" para $\frac{ml-kn}{l^2+n^2}$ (parecido a v), respectivamente estos enteros serán: q_1 y q_2.

función techo

$$\left\lfloor \frac{kl+mn}{l^2+n^2} \right\rfloor \leq \frac{kl+mn}{l^2+n^2} \leq \left\lceil \frac{kl+mn}{l^2+n^2} \right\rceil$$

función piso

luego $q_1 = \left\lfloor \frac{kl+mn}{l^2+n^2} \right\rfloor$ ó $q_1 = \left\lceil \frac{kl+mn}{l^2+n^2} \right\rceil$

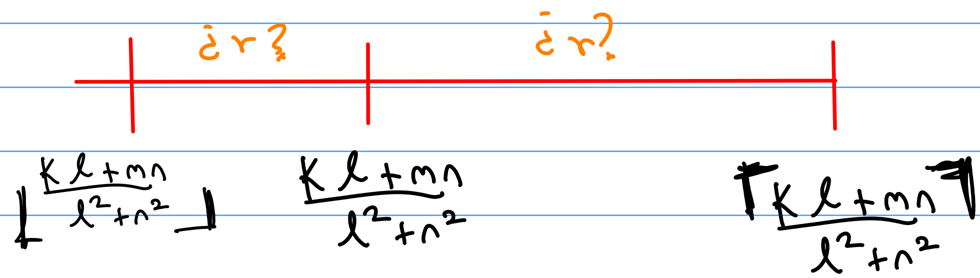
Análogamente $q_2 = \left\lfloor \frac{ml-kn}{l^2+n^2} \right\rfloor$ ó $q_2 = \left\lceil \frac{ml-kn}{l^2+n^2} \right\rceil$

entonces hemos encontrado q_1 y q_2

$$re(a) = q_1 b + r_1$$
$$Im(a) = q_2 b + r_2$$

Como vemos

Nos falta hablar sobre r_1, r_2 ya que bq_1, $b_2 q_2$ produce un número un poco más grande o más pequeño que $re(a)$, $Im(a)$ respectivamente.



Para caracterizar r_1 y r_2 tenga en cuenta el hecho de que:

$$\left\lceil \frac{kl+mn}{l^2+n^2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{kl+mn}{l^2+n^2} \right\rfloor = 1$$

luego análogamente r_1, r_2 van a ser a lo sumo $\frac{1}{2}$.

todo junto es:

$$a = (q_1 + q_2)b + r_1 + r_2 i$$

luego

$$d(r_1 + r_2 i) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}$$

Vea que $d(b)$ es claramente más grande que $\frac{1}{2}$.

Por otra parte el caso $r = 0$ es solo otro caso particular de lo construido anteriormente.