Parcial #3

Estudiante: ____ **Nota:**______

Todos los ejercicios valen **1 punto**

1. Sea G un grupo abeliano, y sea $H = \{x \in G, x = y^2, \text{ por algún } y \in G\}$. Demuestre que H es un subgrupo de G. Explique porque esto es falso si G no es abeliano.

2. Una *involución* en un grupo G es un elemento g con orden 2, i.e., $g \neq 1$ y $g^2 = 1$. Demuestre que:

   a) Si G es un grupo con orden impar, G no contiene involuciones.

   b) Si G es un grupo con orden par, G contiene por lo menos una involución.

3. Sean N un subgrupo normal de un grupo G y H un subgrupo cualquiera. Definamos $NH = \{nh, n \in N, h \in H\}$. Demuestre que NH es un subgrupo de G. Además demuestre o falsifique lo siguente: si H es un subgrupo normal, entonces NH es un subgrupo normal.

4. Demuestre que si p y q son dos primos diferentes, entonces $C_p \times C_q \cong C_{pq}$.

5. Demuestre que el grupo alterno A_4, que tiene orden 12 no contiene ningún subgrupo de orden 6.