Homomorfismos de Anillos

⊙ la aplicación lineal tiene que ver con la suma.

"Creamos una función de un anillo a otro que respete la def. de ambos" $\rightsquigarrow$ Analogo a una Transformación lineal.

Aplicación lineal:

V espacio vectorial

$T : V \to V$ aplicación

$\boxed{T \text{ es lineal si:}}$

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1)$$

aplicar la transf. antes y/o después da lo mismo

$$\forall\, v_1, v_2 \in V, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Def: Sean A y A' anillos, una aplicación $\varphi : A \to A'$ es un homo-morfismo de Anillos si:

1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

2) $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

$\forall a, b \in A$

ej: $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$

$$n \mapsto \begin{cases} [0] & \text{si es par} \\ [1] & \text{si es impar} \end{cases}$$

Sean n_1, n_2, n_3, ⊙ si n_1, n_2 pares

$$\varphi(n_1 + n_2) = 0$$

Porque $n_1 + n_2$ es par.

$$0 = 0 + 0 = \varphi(n_1) + \varphi(n_2)$$

⊙ Si n_1 par y n_2 impar

$$\varphi(n_1) + \varphi(n_2) = 0 + 1 = 1$$

$$\varphi(n_1 + n_2) = 1$$

⊙ n_1, n_2 impares

$$\varphi(n_1 + n_2) = 0 = 1 + 1 = \varphi(n_1) + \varphi(n_2)$$

entonces es un homomorfismo.

ej: Sea φ un homomorfismo $\varphi : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$

$$z = x + iy \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

Sean $z_1 = x_1 + i y_1$ $\in \mathbb{C}$
$z_2 = x_2 + i y_2$

luego $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$$\varphi(z_1 + z_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -y_1 - y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$$

Obs: esto lo vamos a mostrar una sola vez y ahora en adelante lo tomaremos como hecho

Propiedad

De la definición de homomorfismo sigue que:

$$\varphi(0_A) = 0_{A'}$$

$$\varphi(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b)$$

Demostración

1) $\cancel{\varphi(a)} + 0_{A'} = \varphi(a) = \varphi(a + 0_{A'})$

$$= \cancel{\varphi(a)} + \varphi(0_{A'})$$

$$\Rightarrow 0_A' = \varphi(0_{A'})$$

2) $\varphi(a) = \varphi(a + b - b)$

$$= \varphi(a - b) + \varphi(b)$$

$$\Rightarrow \varphi(\underline{a}) - \varphi(b) = \varphi(a - b)$$

<u>**Def:**</u> Sea A y A' dos anillos un homomorfismo <u>invertible</u>, $\varphi : A \to A'$ se llama:

$\downarrow$ función Biyectiva.

$\boxed{\text{Isomorfismo}}$

Dos anillos son isomorfos si existe un <u>isomorfismo</u> entre ellos

$\downarrow$

son iguales, solo que los objetos se llaman Diferente.

ej:

A es isomorfo a A:

$$A \cong A$$

$$id_A : A \to A$$

$$a \mapsto a$$

ej: es un isomorfo

$$\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}_2$$

porque $|\mathbb{Z}_2| = 2$, $|\mathbb{Z}| = \infty$

Clasificamos homomorfismos

$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. 1) cero debe ir a cero.

llamamos $\varphi(1) = n$, Por inducción $\varphi(k) = kn$

tenemos $n = \varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1)$

$$= \varphi(1) \cdot \varphi(1) = n^2$$

¿qué satisface $n = n^2$? $\rightsquigarrow$ solo $\{0, 1\}$ satisfacen.

Más en general si A es anillo conmutativo con identidad existe un único homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} &\to A \\ 1 &\mapsto 1_A \end{aligned}$$

Def: Sea $\varphi : A \to A'$ homomorfismo

$\mathrm{Im}\,\varphi = \{ b \in A' : \exists a \in A \ \varphi(a) = b \} \subseteq A'$

$\ker \varphi = \{ a \in A : \varphi(a) = 0 \} \subseteq A$

Prop: Sea $\varphi : A \to A'$ homomorfismo

luego:

1) $\mathrm{Im}\, \varphi$ es un subanillo de A'

2) $\ker \varphi$ es un subanillo de A y además si $x \in \ker \varphi$ y $a \in A$. $a \cdot x$ y $x \cdot a$ están en $\ker \varphi$.

3) $\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow a - b \in \ker \varphi$.

Dem:

1) Im es un subanillo de A'

Sean $b_1, b_2 \in \mathrm{Im}\, \varphi$

$\mathrm{Im}\, \varphi = \{ b \in A' : \exists a \in A \ \varphi(a) = b \} \subseteq A$

Por def. de imagen $\exists\, a_1, a_2 \in A$ t.q. $\varphi(a_1) = b_1$ $\varphi(a_2) = b_2$

luego

$$b_1 - b_2 = \varphi(a_1) - \varphi(a_2)$$
$$= \varphi(a_1 - a_2)$$

y $b_1 - b_2 \in \operatorname{Im} \varphi$.

también

$$b_1 b_2 = \varphi(a_1)\varphi(a_2) = \varphi(a_1 a_2)$$

y $b_1 b_2 \in \operatorname{Im} \varphi$.

Por el test 2° de subanillo $\operatorname{Im} \varphi$ es un subanillo de A'.

2) Sean $a_1, a_2 \in \ker \varphi$. luego:

$$\varphi(a_1 - a_2) = \varphi(a_1) - \varphi(a_2) = 0 - 0 = 0$$

$$\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) = 0 \cdot 0 = 0$$

Por el test 2° de subanillo $\ker \varphi$ es un subanillo de A.

Ahora, si $a \in A$ y $x \in \ker \varphi$ tenemos

$$\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = \varphi(a) \cdot 0 = 0$$

y $ax \in \ker \varphi$

De la misma manera $xa \in \ker \varphi$.

3) Tenemos

$$\varphi(a) = \varphi(b) \iff \varphi(a) - \varphi(b) = 0$$
$$\iff \varphi(a-b) = 0$$
$$\iff a - b \in \ker \varphi.$$

$\blacksquare$

Def: Sea A un anillo, un subconjunto no vacío $I \subseteq A$ es un ideal si es un subanillo y si $x \in I$ y $a \in A$ ax y xa $\underbrace{\text{están en } I.}_{\text{absorbe}}$

¡Revisar def de entero módulo n