Series extra en el taller y se evalúa en el Parcial 3.

Teorema: [Propiedades de funciones continuas]

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f, g : A \to \mathbb{R}$. Considere también $b \in \mathbb{R}$. Si f y g son continuas en $c \in A$ entonces

a) $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $b \cdot f$ son continuas en c.

b) Si $h : A \to \mathbb{R}$ es continua en $c \in A$ si $h(x) \neq 0$ $\forall x \in A$, entonces f/h es continua en c.

Dem:

a) * Si c no es un punto de acumulación de A (es un punto aislado en A) entonces se da de forma simple la continuidad en $f+g$, $f-g$, fg y bf.

* Si c es de acumulación de A:

(1) Veamos que $f+g$ es continua en c.
Como f y g son continuas entonces

$\boxed{\cdot}$ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ y $\boxed{\cdot}$ $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$

Así:

(1.1) $c \in Dom(f) \cap Dom(g) = A$

(1.2) $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)]$ existe por teorema anterior

(1.3) $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

$$= f(c) + g(c)$$

Por tanto $(f+g)(x)$ es cont. en c.

$\boxed{\text{Tarea}}$ Para $f-g$, fg, bf y $b)$

Ejemplo: La función $\operatorname{Sen}(x)$ es cont. en $\mathbb{R}$.

- $\operatorname{Sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{Sen}(y)\cos(x)$
- $\operatorname{Sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{Sen}(y)\cos(x)$

- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{Sen}(x)\operatorname{sen}(y)$
- $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \operatorname{Sen}(x)\operatorname{sen}(y)$

$$\Downarrow$$

$$2\operatorname{Sen}\left(\tfrac{1}{2}(\bar{x}+\bar{y})\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}(\bar{x}+\bar{y})\right) = \operatorname{Sen}(\bar{x}) - \operatorname{Sen}(\bar{y})$$

$\boxed{\text{Tarea:}}$

$|\operatorname{Sen} x| \leq x$, $|\cos(z)| \leq 1$

Veamos la continuidad de $\operatorname{sen}(x)$ en $c \in \mathbb{R}$

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Así existe $\delta = \varepsilon \geq 0$ tal que si $|x-c| < \delta$ y $x \in \mathbb{R}$ entonces:

$$|x-c|<\delta$$

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Sen}(x)-\operatorname{Sen}(c)| &= \left|2\operatorname{Sen}\left(\tfrac{1}{2}(x-c)\right)\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}(x-c)\right)\right| \\
&= 2\left|\operatorname{Sen}\left(\tfrac{1}{2}(x-c)\right)\right|\cdot\left|\cos\left(\tfrac{1}{2}(x-c)\right)\right| \\
&\leq \cancel{2}\left|\cancel{\tfrac{1}{2}}(x-c)\right|\cdot(1) \\
&= |x-c| < \varepsilon .
\end{aligned}$$

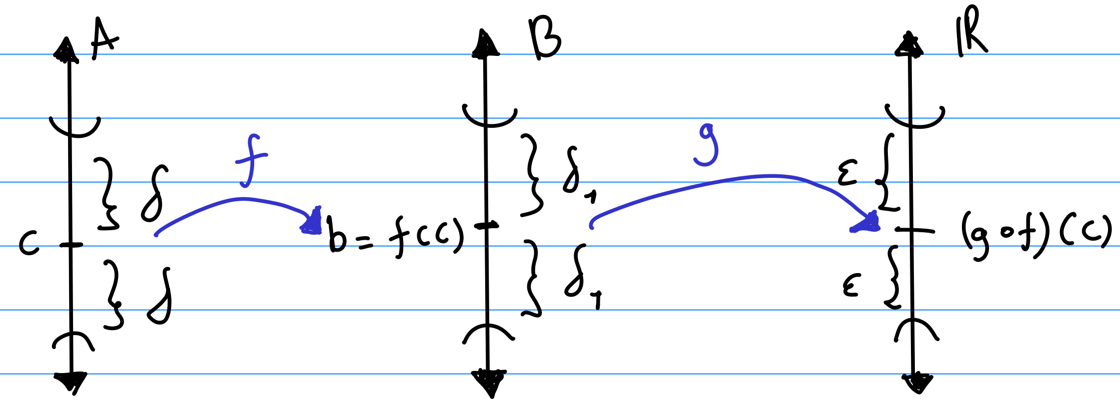
Tarea Demuestre que $\cos(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$(*)$ $\cos(x)-\cos(c) = -2\operatorname{Sen}\left[\tfrac{1}{2}(x+y)\right]\operatorname{Sen}\left[\tfrac{1}{2}(x-y)\right]$

⊙ $|\cos(z)| \leq |z|$ y $|\operatorname{sen}(z)| \leq 1$
para $z \geq \pi/2$

Teorema: Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ tales que $f(A) \subseteq B$. Si f es continua en un punto $c \in A$ y g es continua en $f(c) = b \in B$, entonces la composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en c.

Dem:



Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera como g es continua en $f(c) = b$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que si:

(*)

$z \in B$ y $|z - b| < \delta_1$, entonces $|g(z) - g(b)| < \varepsilon$

$z \in B$ y $|z - f(c)| < \delta_1$ entonces $|g(z) - g(f(c))| < \varepsilon$

Com f es Continua en c, por def. de continuidad para $\delta_1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si (* *)

$x \in A$ y $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \delta_1$

De esta manera para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $|x - c| < \delta$ entonces $f(x) \in B$

Por (* *) tenemos

$$|f(x) - \underbrace{f(c)}_{b}| < \delta_1$$

Por (*) tenemos

$$|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon.$$

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto $g \circ f$ es Cont. en c.

Ej:

- $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $f(x) \geq 0 \; \forall x \in A$ y f es continua en A.

entonces $\sqrt{f(x)}$ es cont. en A.

⊙ $f: A \to \mathbb{R}$ continua entonces
$h(x) = |f(x)|$ es continua en A.

Funciones cont. en intervalos
(cerrados y acotados)

Def: [función acotada]

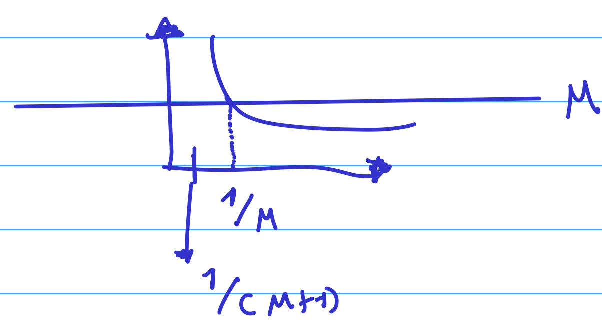
Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es acotada en A si existe $M>0$ tal que

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in A.$$

Ej:

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f no es acotada en A. Sea $M>0$ cualquiera



Existe $M+1>0$ t.q. $0 < \frac{1}{M+1} < \frac{1}{M}$ es decir

$$f(M+1) = M+1 > M$$

Así M no es cota de f en A.

Ej: $f(x) = \operatorname{Sen}(x)$ $A = \mathbb{R} \longrightarrow Dom(f)$

$|f(x)| = |\operatorname{sen} x| \leq 1$ acotada en $\mathbb{R}$,

Teorema de Acotamiento

Supongamos $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua sobre $[a,b]$ Entonces f es acotada en $[a,b]$.

Dem: Supongamos $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, es continua. razonando por contradicción, supongamos que f no es acotada en $[a,b]$.

Así para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a,b]$ tal que $n < f(x_n)$.

De esta manera tenemos una sucesión

$$(x_n) \in [a,b]$$

Como (x_n) es acotada por teorema de B.W. existe una subsucesión (x_{n_K}) de (x_n) que converge (digamos a x), $x_{n_K} \to x$.

$$a \leq x_{n_K} \leq b \Rightarrow a < \lim_{K \to \infty} x_{n_K} \leq b$$

Como f es continua en $[a,b]$ tenemos que

$$f(x_{n_K}) \longrightarrow f(x)$$

De esta manera $(f(x_{n_K}))_K$ es acotada,

Pero $n_K < f(x_{n_K})$ donde $n_K \in \mathbb{N}$

lo cual es absurdo. por tanto f es acotada.