David Alsina

Taller Preparcial

1. [1 pt] Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ se vuelve un anillo conmutativo con identidad bajo las siguientes operaciones:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

a) Diga cuál es el elemento 0, cuál es la identidad y el inverso para la suma de una función f.

b) Cuales elementos son invertibles en $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

c) ¿Es $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ un campo? ¿Por qué?

a) Diga cuál es el elemento neutro de $F(\mathbb{R})$.

Sea $g, f \in F(\mathbb{R})$ con $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= 0 + g(x), \quad 0, g(x) \in \mathbb{R} \\ &= g(x)\end{aligned}$$

Cuál es la identidad.

Sea $g, f \in F(\mathbb{R})$ con $f(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= 1 \cdot g(x), \quad 1, g(x) \in \mathbb{R} \\ &= g(x)\end{aligned}$$

inverso para la suma de una función f

Sea g tal que $g(x) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

b) Cuales elementos son invertibles en $\mathcal{F}(\mathbb{R})$:

Sabemos que $\frac{1}{a}$, $a \in \mathbb{R}$ no es invertible cuando $a = 0$, a partir de esto decimos entonces que si existe una inversa para $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ entonces esta es de la forma $\frac{1}{f}$, pero note que cero no puede estar

en el rango de f porque de lo contrario tenemos $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0}$, lo cual no es posible.

entonces decimos que los elementos de $f(x)$ son invertibles si no tienen cero en su rango.

c) ¿es $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ un campo? ¿por qué?

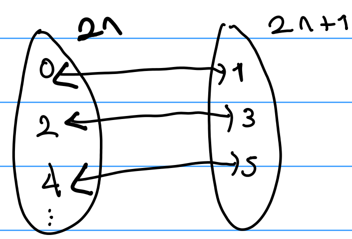
1) conmutativo Sean $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

$$(f \cdot g) = f(x) \cdot g(x), \text{ como } f(x), g(x) \in \mathbb{R}$$
$$= g(x) \cdot f(x), \text{ luego es conmutativo}$$

✓

2) Con Identidad (mostrado en 1.9.3) ✓

3) Con inverso tal que $f(x)g(x) = 1$ para $f(x) \neq 0$. Pero note que puedo hacer esta función



y su inversa no produce 1 en ningún momento.

luego $F(\mathbb{R})$ no es un campo.

2

2. [1 pt] Sea $I \subset \mathbb{Z}[i]$ un ideal, con $I \neq \{0\}$. Demuestre que I contiene un entero distinto de 0.

Sea $I \subset \mathbb{Z}[i]$ un ideal, con $I \neq \{0\}$. Demuestre que I contiene un entero distinto de 0.

Sea I un ideal de $\mathbb{Z}[i]$ note que I ha de tener elementos de la forma $a+bi$, $a,b \in \mathbb{Z}$ (puesto que sabemos que $I \neq \{0\}$, y I es un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}[i]$, que sólo tiene elementos de la forma $a+bi$).

Si tomamos un elemento de I arbitrario, digamos $j = a+bi$ y un elemento del anillo $\mathbb{Z}[i]$, $\bar{j} = a-bi$ note como por la definición de anillo tenemos:

$$
\begin{aligned}
j \cdot \bar{j} &= (a+bi)(a-bi) \\
&= a^2 \cancel{- abi + abi} + b^2 \\
&= a^2 + b^2, \text{ dado } a,b \in \mathbb{Z} \\
c &= a^2 + b^2, \quad c \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

luego I contiene un entero distinto de cero.

3

3. [1.5 pt]. Sea $\varphi\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos. Demuestre que:

a) Si A es conmutativo entonces $\mathrm{Im}(A)$ es conmutativo;

b) Si A tiene identidad 1, $B \neq \{0\}$ y φ es sobreyectiva, entonces $\varphi(1)$ es la identidad de B;

c) Si $I \subset B$ es un ideal entonces $\varphi^{-1}(I) = \{a \in A : \varphi(a) \in I\}$ es un ideal de A.

a) Si A es conmutativo entonces $Im(A)$ es conmutativo.

Sabemos que A y B son anillos, dado que A es conmutativo decimos:

$$\varphi(a_1)\cdot\varphi(a_2) = \varphi(a_1\cdot a_2)$$
$$= \varphi(a_2\cdot a_1)$$
$$\varphi(a_2)\cdot\varphi(a_1) =$$

luego la imagen de A también es conmutativa.

b) si A tiene identidad 1, $B \neq \{0\}$ y φ es sobreyectiva, entonces:

$\varphi(1)$ es la identidad de B

Dado $1 \in A$, $B \neq \{0\}$ y φ sobreyectiva decimos que para cada elemento de B (imagen) existe un elemento de A (preimagen) Como $|A| \geq 1$ entonces $|B| \geq |A| \geq 1$, luego B tiene otros elementos

$\exists\, b_1 = \varphi(a)$, $a \in A$. como $1 \in A$ también hay $b_2 = \varphi(1)$, así :

$$b_1 \cdot b_2 = \varphi(a) \cdot \varphi(1) = \varphi(a \cdot 1) = \varphi(1 \cdot a)$$
$$= \varphi(a)$$

luego $\varphi(1)$ es un elemento de B tal que al multiplicarse por otro elemento arbitrario de B $(\varphi(a))$ da como resultado $\varphi(a)$. Así $\varphi(1)$ es identidad de B.

c) Si $I \subset B$ es un ideal entonces

$$\varphi^{-1}(I) = \{a \in A : \varphi(a) \in I\}$$, es un ideal de A.
$$= \{a \in A : b \in I\}$$

a) Sea $a_1, a_2 \in \varphi^{-1}(I)$ note que

$$\varphi(a_1), \varphi(a_2) \in I$$

por lo que:

$$\varphi(a_1) - \varphi(a_2) \in I$$
$$= \varphi(a_1 - a_2), \quad a_1 - a_2 \in A.$$

b) también se cumple entonces que para un $\varphi(a_1) \in I$, y un $\varphi(a_2) \in B$

$$\varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \in I$$
$$= \varphi(a_1 \cdot a_2), \quad a_1 \cdot a_2 \in A.$$

luego $\varphi^{-1}(I)$ es un anillo de A.

4. [1.5 pt]. Sea

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sea $I \subset A$ el conjunto formado por las matrices con $a = c = 0$. Sea B el conjunto de las matrices con $b = 0$. Demuestre que:

a) I es un ideal de A;

b) B es un subanillo de A. ¿Es un ideal?

c) $A/I \cong B$.

a) I es ideal de A:

1) Sean elementos de I:

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = b_1 - b_2, \quad j \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

2) para un elemento de I arbitrario

$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y otro cualquiera de A $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & bd \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = bd, \quad j \in \mathbb{R}$$

b) B es un subanillo de A. ¿Es ideal?

Sea un elemento de A $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ y un subanillo de la forma $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$ note que si:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aj & bK \\ 0 & cK \end{pmatrix} \in A$$
$$\notin B$$

luego no cualquier subanillo de A es ideal.

c) $A \setminus I \cong B$