# Notas Clase

Dave Alsina

27 de julio de 2022

> Nota:

## 1. Operacion

sea X un conjungo una operación (binaria) es una función $f : X \times X \to X$, se denota $F(x, y) = x * y = x \cdot y$.

#### 1.0.1. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

4 Se llama producto mixto. $(u, v, w) \mapsto (u \wedge v) \cdot w$, $\wedge$ es producto vectorial.

### 1.1. Propiedades

#### 1.1.1. Cerradura

una operacion es necesariamente cerrada, $\forall x, y \in X$, $x \cdot y \in X$.
unos ejemplos de operación con cerradura:

- op. numerica.
- op. matrices.
- op. vectorial.

> Nota: Si X es finito podemos definir F a través de una tabla. por ejemplo una tabla de verdad.

### 1.1.2. Asociatividad

Una operación es asociativa si $\forall x, y, x \in X$, $(x * y) * z = x * (y * z)$. Un contraejemplo:

$$e_1 \cdot e_1 \cdot e_3 = e_1 \cdot (e_1 \cdot e_3) \neq (e_1 \cdot e_2) \cdot e_3 = 0 \cdot e_2 \tag{1}$$

### 1.1.3. Conmutativa

si $\forall x, y, z \in X$, se tiene que $x * y = y * x$.
Pueden existir elementos especiales:

- *Neuto:* $\exists e \in X$ *tal que* $\forall x \in X$, $e * x = x$ *and* $x * e = x$.
- *inverso:* $\forall x \in X$, $\exists y \in X$: $x * y = e = y * x$, *el inverso me lleva al neutro.*

*¿pueden existir múltiples neutros en una operación?:*
*Dem: Supongamos que* $e, e' \in X$ *son elementos neutros.*
*porque* $e' = e * e' = e$, *porque* $e'$ *es neutro, nos lleva a que son iguales ya que ambos dan neutro.*

# 2. Clase de congruencia

*Sea* $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, *Dos enteros* $a, b$ *son congrentes módulo* $m$.
*sii:*

$$m|(x - y) \iff x - y = mt, t \in Z \tag{2}$$

*esta es relacion de equivalencia en* $\mathbb{Z}$ *se denota* $x \equiv y(mod\, m)$.

$$[x] = y \in Z : x \equiv y(mod\, n) \tag{3}$$

### 2.0.1. Division euclidea:

*si* $a, b \in Z, b \neq 0, \exists q, r \in Z$. *t.q* $0 \leq z|b|$ *y* $a = bq + r$, $r$ *de residuo*
*Si* $x = mq + r$ *entonces:* $[x] = [r]$. *porque*

$$x - r = mq \iff m|(x - r) \iff x \equiv r(mod\, m) \tag{4}$$

*Existen tantas clases de congruencia cuantos residuos en la division euclidea por m.*
$\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], ..., [m - 1]\}$

*Queremos definir operaciones sobre el conjunto $\mathbb{Z}_m$. Empecemos entonces por:*

*Definimos:*

$$[x]_m + [y]_m = [x+y]_m \tag{5}$$

$$[x]_m \cdot [y]_m = [x \cdot y]_m \tag{6}$$

*Un ejemplo de lo anterior es:* $[11]_{12} + [4]_{12} = [15]_{12} = [3]_{12}$

*otro ejemplo:* $[3]_4 \cdot [3]_4 = [9]_4 = [1]_4$

*Uno complicado:* $[2]_4 \cdot [2]_4 = [0]_4$.

*Otro ejercicio:*

$$\begin{aligned} 3^{2001} &\equiv 3 \cdot 3^{2000}(mod 10) && (7)\\ &\equiv 3 \cdot 3(3^4)^{500}(mod 10) && (8)\\ &\equiv 3 \cdot 1^{500} && (9)\\ &\equiv 3 && (10) \end{aligned}$$

*<u>dem:</u> Queremos Demostrar que estas operaciones están bien definidas, es decir:*

*si* $[x]_m = [x']_m$ *y* $[y]_m = [y']_m$.

*Luego:*

$$\begin{aligned} [x+y]_m &= [x'+y']_m && (11)\\ [xy]_m &= [x'y']_m && (12) \end{aligned}$$

*Siendo:*

$$\begin{aligned} [x]_m &= [x']_m \\ x &\equiv x' && (mod\ n) \end{aligned}$$

*equivalentemente* $m|(x-x')$, *es decir* $\exists n$

*Nota:*

- *Hacer ejercicios como los anteriores de operación de módulo.*
- *Hacer la demostración del caso de la multiplicación, demostrar que está bien definida. Estudiar la demostración completa.*