Importante:

los ejercicios que toca ir haciendo están señalados en la guía académica.

Talleres individuales - todo individual.
Parciales sin apuntes :c.

Repaso - propiedades:

Operaciones algebraicas y de orden.

Propiedades algebraicas de R:

El conjunto de los reales tiene 2 operaciones, suma y producto que satisfacen:

Propiedades de la suma:

1. $a, b \in \mathbb{R}, a+b=b+a$
2. $a+(b+c)=(a+b)+c$, permite extender la operación de suma a multiples elementos (ya que se suele considerar la suma una operación binaria). Por ejemplo $\rightarrow$ no es un operador asociativo, pero es binario.
3. $0+x=x+0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neutro aditivo.
4. para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $-x \in \mathbb{R}$ tal que:

$$-x+x=x-x=0$$

propiedades multiplicación:

1. $a \cdot b=b \cdot a$
2. $a \cdot(b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$
3. El neutro multiplicativo: $1 \cdot x=x \cdot 1=x$.
4. $x \cdot \frac{1}{x}=\frac{1}{x} \cdot x=1$, inverso multiplicativo.

Propiedad común a suma y mult.

5. $x(y+z)=x \cdot y+x \cdot z$,
   $(y+z) \cdot x=y \cdot x+z \cdot x$

Teorema:

Tareita demostrar estos de aquí:

1. Si z, a están en $\mathbb{R}$ tales que $z + a = a$, entonecs $z = 0$. (hay un solo neutro aditivo, es *único*).
2. si $u, b \neq 0$ son elementos de $\mathbb{R}$ con $ub = b$, entonces $u = 1$. (unicidad del neutro multiplicativo).
3. si $a \in \mathbb{R}$ entonces $a \cdot 0 = 0$.
4. si $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$, tales que $a \cdot b = 1$, entonces $b = \dfrac{1}{a}$.
5. si $ab = 0$ entonces $a = 0$, ó $b = 0$.

Demostración:

1. sea $z, a \in R$ tales que $z + a = a$. $z = z + 0$ por propiedad 3 de aditividad.

Por Propiedad 3 de la aditividad.

$$z = z + 0$$

$$= z + (a + (-a))$$

$$= (z + a) - a$$

Por hipótesis $(z + a) = a$

$$= a - a$$

$$= 0$$

5. Supongamos que $ab = 0$

$$ab(\frac{1}{b}) = 0\frac{1}{b}$$

$$a \cdot 1 = 0$$

$$a = 0$$

Conjunto de los numeros naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto de los numeros enteros

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, \dots, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto de los numeros racionales

sea $x \in \mathbb{R}$. Decimos que x es racional si existen a, b enteros con $b \neq 0$ tales que $x = \dfrac{a}{b}$.

Numero irracional

$x \in R$, se dice irracional si $x \notin \mathbb{Q}$.

Teorema:

No existe un nimero racional r tal que $r^2 = 2$.

Demostración:

Por contradicción supongamos que existe tal $r \in \mathbb{Q}$, tal que $r^2 = 2$. Luego existen $a, b \in Z$, con $b \neq 0$, tal que $r = a/b$.
Asumamos que a y b son primos relativos.

$$r^2 = 2 \rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$a^2 = 2b^2$$

entonces a^2 es un entero par.
Quiero verificar que a es un entero par.
Por contradicción, Si a fuese impar entonces $a = 2z - 1$ para algún $z \in Z$.

$$a^2 = (2z-1)^2 = 4z^2 - 4z + 1$$
$$= 2(z^2 - 2z + 1) - 1$$

Donde $(z^2 - 2z + 1)$ es entero, lo que implica que a^2 es impar, lo cual es absurdo. Por lo que a es par.

De esta manera $a = 2p$, $p \in Z$.

$$a^2 = 2b^2 \rightarrow (2p)^2 = 2b^2 \rightarrow 4p^2 = 2b^2 \rightarrow 2p^2 = b^2$$

b^2 es par por lo que b también es par (dado lo anterior).

Por lo tanto 2 divide a a y b. Lo cual es absurdo, ya que no serían primos relativos. Con lo que se concluye que no existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$. Entonces $r \notin \mathbb{Q}$.

Propiedades de orden:

- Si $a, b \in R^+ \rightarrow ab \in R^+$
- Si $a, b \in R^+ \rightarrow a + b \in R^+$
- Si $a \in R^+ \rightarrow a \in R^+, ó\ a \in R^-, ó\ a = 0$

Notación

- $a \in R^+ \iff a > 0 | 0 < a$
- $-a \in R^+ \iff a < 0 | 0 > a$
- $a \in R^+ \vee a = 0 \iff a \geq 0 | 0 \leq a$

- $-a \in R^{+} \vee a = 0 \iff a \leq 0 | 0 \geq a$

Teorema:

(son tareita)

1. Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.
2. Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$
3. si $a < b$, y $c > 0$ entonces $ac > bc$.
   si $a > b$ y $c < 0$ entonces $ac < bc$.

- Teorema de desigualdad de bernoulli:
  $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ entocnes $(x+1)^n \geq nx + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Def. Valor absoluto:

$a \in R$.

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Teorema:

a) $|ab| = |a| \cdot |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

b) $|a|^2 = a^2$

c) Si $c \geq 0$ entonces

$$|a| < c \Leftrightarrow -c < a < c$$

d) $-|a| \leq a \leq |a|$

e) Desigualdad Triangular

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

f) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

g) $|a-b| \leq |a| + |b|$