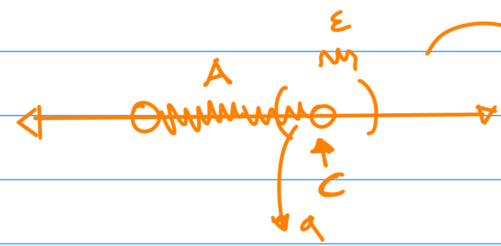
Limites de funciones

Def: [Punto de acumulación]

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que $c \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de A, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $a \neq c$ y

$$|a - c| < \varepsilon$$

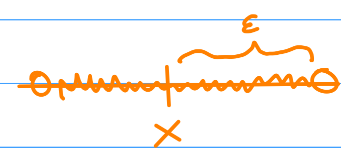
Obs:



en otras palabras el c está cerquita de A.

si yo me muevo un poquito desde c, me encuentro con un a

$$V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \text{ donde } x \in \mathbb{R} \text{ y } \varepsilon > 0$$



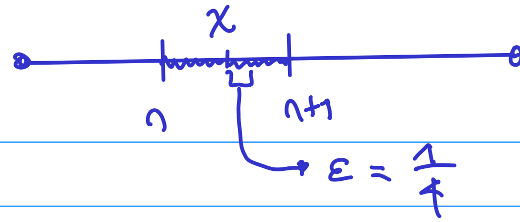
C es un punto de acumulación de A si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, $(V_\varepsilon(c) - \{c\}) \cap A \neq \emptyset$.

Vecindad.

En otras palabras $(V_\varepsilon(c) - \{c\}) \cap A \ni a$.

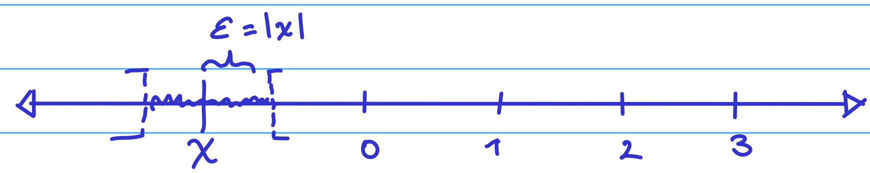
Ej: Consideremos $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
Ningún número real es punto de Acumulación.

$x \in \mathbb{R}$



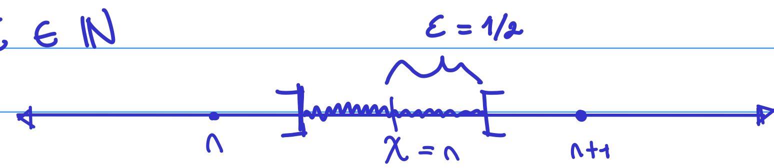
$$\left(V_{1/4}(x) - \{x\} \right) \cap \mathbb{N} = \emptyset$$

$x < 0$



$$\left(V_{|x|}(x) \setminus \{x\} \right) \cap \mathbb{N} = \emptyset$$

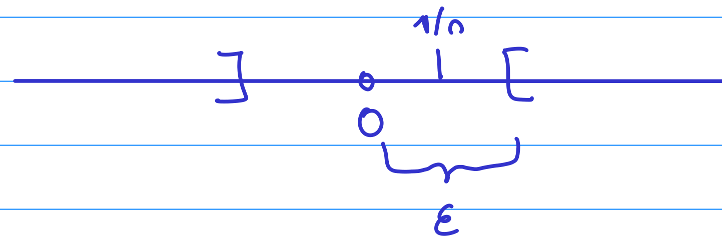
$x \in \mathbb{N}$



$$\left(V_{1/2}(x) \setminus \{x\} \right) \cap \mathbb{N} = \emptyset$$

Ej: $A = (1/n)_{n=1}^{\infty}$ 0 es un punto de acumulación.

Tarea



$$\frac{1}{n} \in \left(V_{\varepsilon}(0) \setminus \{0\} \right) \cap A \neq \emptyset$$

Verifique que 0 es el único punto de acumulación de la sucesión.

Ej: $A = [0, 1)$

x es un punto de Acumulación de A si $0 \leq x \leq 1$.

Límite de una función

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y c un punto de acumulación de A. Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, decimos que un número real $L \in \mathbb{R}$ es el límite de f en un punto c si $\forall\, \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ entonces $0 < |x - c| < \delta$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$

Obs: