Función Continua

Def: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Consideremos $f: A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$. Decimos que f es continua en c si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ t.q. $\forall x \in A$, si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Note que ahora x puede ser c

Obs: Podemos reescribir la definición anterior en términos de vecindades

Def:

f es continua en $c \in A \iff$ Para todo $V_\varepsilon(f(c))$ $(\varepsilon > 0)$ existe $V_\delta(c)$ $(\delta > 0)$ t.q. si:

$$x \in A \cap V_\delta(c) \text{ entonces } f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$$

$$\left(f\left(A \cap V_\delta(c)\right) \subseteq V_\varepsilon(f(c)) \right)$$

Obs:

$c \in A = Dom(f)$

① Si c es un punto de Acumulación de A. ($c \in A'$).

entonces la definición de continuidad implica la def. de límite.

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

De esta manera tenemos:

* $c \in A = Dom(f)$, es decir $f(c)$ existe.

* $\lim f(x)$ existe.

* $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

---

② Si c no es un punto de acumulación $c \notin A'$. entonces existe $V_\delta(c)$ tal que $(V_\delta(c) \setminus \{c\}) \cap A = \phi$

$V_\delta(c) \cap A = \{c\}$ ⟹ estos puntos se llaman puntos aislados.

En estos puntos la función es continua pues para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (δ definido anteriormente) tal que si $x \in A$ y $|x - c| < \delta$ entonces

$x = c$. Así $|f(x) - f(c)| = |f(c) - f(c)|$
$= 0 < \varepsilon$

Concluyo que una función $f: A \to \mathbb{R}$ es continua de manera natural sobre los puntos aislados del dominio, por lo tanto nos interesarán los puntos de acumulación.

Podemos analizar la continuidad de una función utilizando sucesiones:

Teorema: [Criterio de Sucesiones para Continuidad]

Una función $f: A \to \mathbb{R}$ es continua en $c \in A$ sii para toda sucesión (x_n) en A que converge a c implica que $(f(x_n))$ converge a $f(c)$.

Teorema: [Criterio de Sucesiones para discontinuidad]

Una función $f: A \to \mathbb{R}$ es discontinua en $c \in A$ sii existe una sucesión x_n en A, convergente a c, tal que $(f(x_n))$ no converge a $f(c)$.

Ej:

$$f: A \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1/x$$, no es continua en $x = 0$

$x_n = 1/n \Rightarrow x \to 0$

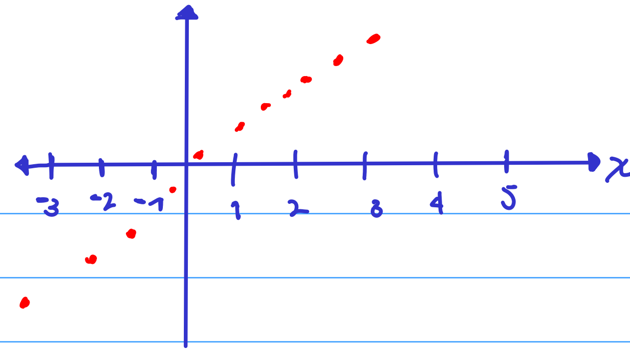
$f(x_n) = f(1/n) = n$, no converge

no es continua en $x = 0$.

Ej:

$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x$$

Es continua en todo x punto de $\mathbb{Z}$, pues todos los puntos de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ son puntos aislados.



Def [continuidad Global]

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función. Consideremos $B \subseteq A$. Decimos que f es continua en B sii es continua en todo punto B.

Ej: 1) $g(x) = x$ es continua en $\mathbb{R}$

Note que $Dom(g) = \mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}$ todo punto es de acumulación.

$c \in \mathbb{R}$ cualquiera.

1) $c \in Dom(g) = \mathbb{R}$

2) $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$

$\lim_{x \to c} x = c$

3) $\lim_{x \to c} g(x) = c = g(c)$

g es continua en $x = c$.

2) $h(x) = x^2$ es continua en $\mathbb{R}$

Note que $c \in \mathbb{R}$ cualquiera es un punto de acumulación

1) $c \in dom(h)$

② $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$, mostrado en clase anterior.

③ $\lim_{x \to c} h(x) = h(c)$

h es continua en $c \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\underline{\text{Ejercicio}}}$ Muestre que $f(x) = \frac{1}{x}$ es cont. en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

<u>Ej</u>: Consideremos la función signo

$$\operatorname{Sgn}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \operatorname{Sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Consideremos $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ note que $x_n \to 0$

$f(x_n) = f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, no converge.

$$\left.\begin{aligned} y_n &= f\left(\frac{(-1)^{2n}}{2n}\right) \Rightarrow y_n = 1 \\ z_n &= f\left(\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right) \Rightarrow z_n = -1 \end{aligned}\right\}$$

Como $f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ tiene 2 subsucesiones convergentes a numeros diferentes, no puede ser convergente.

Concluyo que Sgn no es continua en cero.