Subsucesiones

Def: Sea x_n una sucesión de números reales consideremos la cadena de enteros positivos:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$$

entonces la sucesión $Y = (x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de x.

Ej: $x = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$

$$y_k = x_{2k}$$

$$Y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right)$$

Y es una subsucesión de X.

$$z_k = x_{2^k}$$

$$z = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$$

z es una subsucesión de X (también de Y)

Teorema Si una sucesión $X = (x_n)$ de números reales que converge a $x \in \mathbb{R}$, entonces cualquier subsucesión X' de X converge a x.

Dem: Supongamos $x = (x_n)$ que converge a $x \in \mathbb{R}$

Consideremos $x' = (x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de X.

índice sucesión. índice de la subsucesión.

Afirmación: $k \leq n_k$ « inducción sobre k »

* Si $k=1$ entonces $n_1 \in \{1, 2, 3, \dots\}$
  Así $1 \leq n_1$.

* H.I.) Supongamos que $k \leq n_k$

* T.I) mostramos que $k+1 \leq n_{k+1}$

$$\begin{aligned} k+1 &\leq n_k + 1 \quad \text{por H.I.} \\ &\leq n_{k+1} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por lo tanto $k \leq n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Como $x_n \to x$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces

$$|x_k - x| < \varepsilon$$

Así si $k \geq k_0$, entonces $n_k \geq k \geq k_0$ y $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$, $\therefore$ $x_{n_k} \to x$.

ej: Demuestre que $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$, si $0 < b < 1$ (Demuestre que $(b^n)_{n=1}^{\infty}$ si $0<b<1$ es convergente y encuentre el límite).

$0 < b < 1 \Rightarrow 0 < b^n < 1$. Así (x_n) es acotada $b^n \geq b^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así b_n es decreciente. Entonces (x_n) converge.

Consideremos la subsucesión

$$(y_n)_{n=1}^{\infty} \qquad y_n = x_{2n} = b^{2n} \text{ de } X$$

que también es convergente.

$$\lim_{n\to\infty} b^n = X = \lim_{n\to\infty} b^{2n}$$

$$X = \lim_{n\to\infty} b^{2n} = \lim_{n\to\infty} (b^n)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} b^n\right)^2$$

$$= X \cdot X$$

$$\Rightarrow \quad x = x^2 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ó} \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Como b^n es decreciente y $0 < b^n < 1$ entonces $x \neq 1$. Así $x = 0$.

Ejercicio: Razonando similarmente

$$\lim_{n\to\infty} c^{1/n} = 1 \left\langle \begin{array}{l} 0 < c < 1 \\ c = 1 \\ c > 1 \end{array} \right.$$

Criterios de divergencia

Una Sucesión Se dice divergente si no existe el límite.

Una Sucesión $X = (x_n)$ de números reales es divergente si ocurre una de las siguientes proposiciones:

1. X tiene dos sucesiones que son subsucesiones convergentes a diferentes números reales.

2. X no es acotada.

Ej: Sea $X = (x_n)$

$$x_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$X' = (x_{2n})_{n=1}^{\infty} = (2, 2, \ldots, 2, \ldots)$$

$$X'' = (x_{2n-1})_{n=1}^{\infty} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

$x' \to 2$, $x'' \to 0$. entonces X es divergente

Teorema