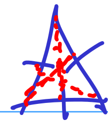
ej:



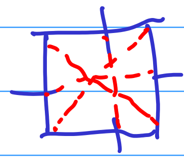
equilatero

Rot. $120 = \frac{360}{3} = \frac{2\pi}{3}$

no altera ni traslada la figura.

Reflexión.

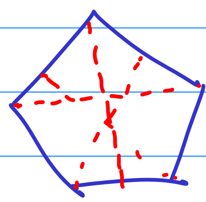
5 simetrías



cuadrado

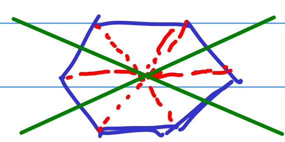
Rot. $90° = \frac{2\pi}{4}$

Rot $\frac{2\pi}{5}$



Pentágono

siempre tengo n rot. y n reflexiones



hexágono

Sea $n \geq 3$, D_n grupo diedral de orden n son las simetrías de un n-ágono regular

$$|D_n| = 2n$$

Permutación

Consideramos

$$X = \{1, 2, \dots, n\}$$

Una función biyectiva

$$\pi : X \to X$$

Se llama permutación.

$$S_n = \{\text{permutación de } \{1, 2, \dots, n\}\}$$

grupo simétrico sobre n elementos.

$$|S_n| = n! \longrightarrow$$ cantidad de funciones biyectivas que puedo hacer de X a X.

Notaciones:

$\pi(1) = 4$

$\pi(2) = 3$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$

$\pi(3) = 2$

$\pi(4) = 1$

Notación en ciclo:

$1 \longrightarrow 4$ $\qquad$ $2 \longrightarrow 3$, $\pi = (1\ 4)(2\ 3)$

Más en general

$$\begin{tikzcd} (i \arrow[r, "\pi"] & j \arrow[r, "\pi"] & \cdots \arrow[r, "\pi"] & k) \arrow[lll, bend left, "\pi"] \end{tikzcd}$$

$$\pi(i) = j$$

ej:

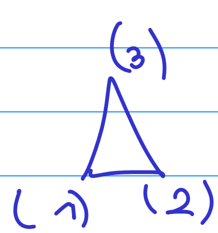
$$\tau(1) = 2 \qquad \pi(1) = 4$$
$$\tau(2) = 3 \qquad \pi(2) = 3$$
$$\tau(3) = 1 \qquad \pi(3) = 2$$
$$\tau(4) = 4 \qquad \pi(4) = 1$$

$$\pi \circ \tau = \pi \tau = (1\ 4)(2\ 3)(1\ 2\ 3)$$
$$= (1\ 3\ 4)$$

$$(1\ 3\ 5\ 2\ 4)(1\ 6\ 3)(2\ 4\ 5)$$
$$= (1\ 6\ 5\ 4\ 2)$$

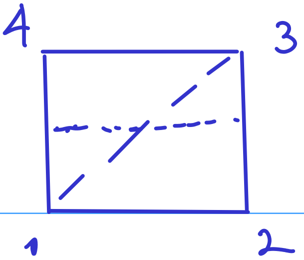
identidad de S_n (1).

ej:



Puedo escribir las transformaciones como permutación de los vértices.

Reflexion $| = (1 2)$, Rot $120° = (1 2 3)$



Rot : $(1\ 2\ 3\ 4)$

Refl $/$: $(2\ 4)$

Refl $—$: $(1\ 4)(2\ 3)$

No se demostrarán después y se tomarán como hechos de la vida:

Sea G un grupo:

- asociatividad en n elementos.
- unidad en neutro e inverso.
- $xg = yg \Rightarrow x = y$
- $gx = gy \Rightarrow x = y$
- $1^{-1} = 1$, $(g^{-1})^{-1} = g$, $(hg)^{-1} = g^{-1}h^{-1}$

$$g^n = \begin{cases} \overbrace{g \cdot \ldots \cdot g}^{n \text{ veces}}, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \\ \underbrace{g^{-1} \cdot \ldots \cdot g^{-1}}_{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

Precaución: $(gh)^n = (gh) \cdot \ldots \cdot (gh)$

Si son conmutativos $gh = hg$ entonces

$$(gh)^n = g^n h^n.$$

ej:
las matrices no conmutan.

Subgrupo

Sea G grupo, un subconjunto $H \subseteq G$ no vacío es un subgrupo si es un grupo con la misma operación de G. En este caso escribimos

$$H \leq G.$$

$H \neq \emptyset$ es un subgrupo si:

- $h_1 h_2 \in H$ si $h_1, h_2 \in H$.
- $1 \in H$.
- $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$.

Prop. (test de subgrupo)

Sea G grupo, $H \subseteq G$ no vacío es un subgrupo sii $\forall\, h_1, h_2 \in H$ $h_1 h_2^{-1} \in H$.

Dem: Si $h_1 h_2^{-1} \in H$ podemos tomar $h_1 = h_2 = h \in H$.

y obtener

$$1 = h \cdot h^{-1} \in H.$$

Ahora si $h_1 = 1$, tenemos

$$h_2^{-1} = 1 \cdot h_2^{-1} \in H$$

finalmente si $h_1, h_2 \in H$:

$$h_1 \cdot (h_2^{-1})^{-1} = h_1 h_2 \in H. \blacksquare$$

con operación suma

ej: Si $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H \leq G \iff H = m\mathbb{Z}$