(4) Consider the folowing second order difference equation:

$$x(k+2) - 2a\,x(k+1) + a^2 x(k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

a) muestre que $x(k) = a^k$ y $x(k) = k a^k$ son soluciones.

observe que es un problema de coeficientes constantes para el caso homogeneo, luego puedo asumir que la solución es de la forma λ^k, el polinomio caract. es:

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0$$

$$(\lambda - a)^2 = 0 \quad \therefore \lambda = a$$

luego $x(k) = a^k$ es una solución.
Como sabemos la combinación lineal de soluciones para el problema también es solución entonces si luego:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i a^k, \quad y \; n_i = 1 \; \forall i \in \mathbb{N}.$$

tengo que:

$$\sum_{i=1}^{k} (1) a^k = k a^k \quad \therefore \text{ también es solución}$$

b) find the general solution to the equation, given that this is the homogeneous problem and what we found with

$$\sum_{i=1}^{K} q^K = K q^K$$

A general solution would be:

$$x(K) = m\, q^K \quad , \quad m \in \mathbb{R}$$

2 consider the following difference equation

$$(k+1)^2\, x(k+1) - k^2\, x(k) = 1 \, , \quad k \in \mathbb{N}$$

a) write the difference equation in terms of the differences $\Delta^0(K), \Delta^1(K), \ldots$

Keep in mind that an equation of order m must be expressed as an equation involving the m^{th} difference

$$\Delta^0(K) = x(K)$$

$$\Delta^1(K) = \Delta^0(K+1) - \Delta^0(K)$$

$$\Delta^2(K) = \Delta^1(K+1) - \Delta^1(K)$$

$$(k+1)^2 \cdot x(k+1) - k^2\, x(k) = 1$$

$$= (k+1)^2 x(k+1) - (k+1)^2 x(k) - k^2 x(k) = 1 - (k+1)^2 x(k)$$

$$= (k+1)^2 \cdot \Delta^1(k) - k^2 \Delta^0(k) = 1 - (k+1)^2 x(k)$$

$$= (k+1)^2 \Delta^1(k) - k^2 \Delta^0(k) + (k+1)^2 \Delta^0(k) = 1$$

$$= (k+1)^2 \Delta^1(k) + \left((k+1)^2 - k^2\right) \Delta^0(k) = 1$$

b) find the general solution of the equation.

$$(k+1)^2\, x(k+1) - k^2\, x(k) = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$