Conjuntos finitos

Si un conjunto es equipotente a

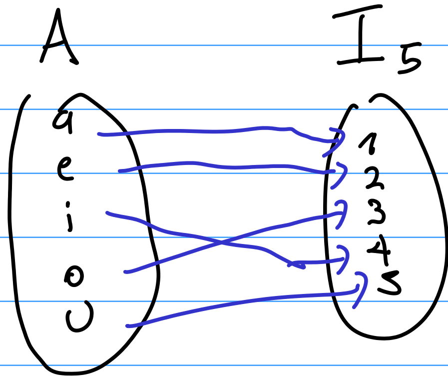
$$I_n = \{1, \dots, n\}$$

Def: conjunto finito

Se dice que un conjunto A es finito si es vacío o si existe una función $f: A \mapsto I_n$ biyectiva para algún $n \in \mathbb{N}$.

Según lo anterior si $A = \emptyset$ escribiremos $|A| = \#(A) = 0$ ó $A \neq \emptyset$ y $f \to I_n$ es una biyección $|A| = \#(A) = n$ para denotar el cardinal de A.

ej: Sea $A = \{\text{vocales}\}$



¿es el cardinal único?

Teorema: Si $n \in \mathbb{N}$ no existe una función inyectiva de I_n sobre un subconjunto propio $X \subsetneq I_n$.

subconjunto contenido estrictamente (no igual) $\Rightarrow$ sub c. propio

Dem: << Inducción sobre n >>

⊙ $n=1$, si $n=1$ entonces $I_n = I_1 = \{1\}$

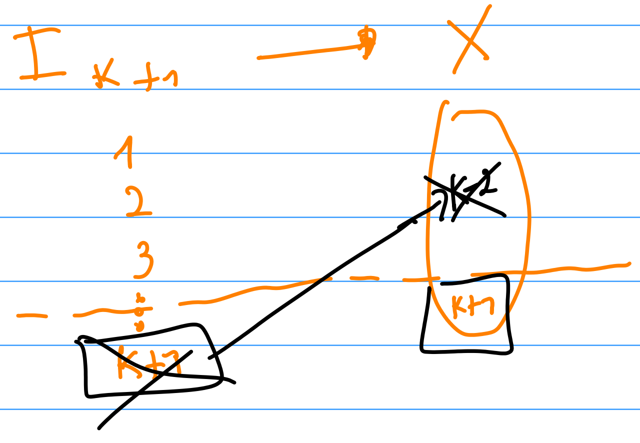
Si $X \subsetneq I_1$ entonces $X = \emptyset$. Note que no existe una función inyectiva $f: I_1 \to \emptyset$.

(H.I) Supongamos que para $n=k$ no existe una función inyectiva $f: I_k \to X$ donde $X \subsetneq I_k$

Razonando por contradicción supongamos

$$\exists f: I_{k+1} \to X \text{ inyectiva donde } X \subsetneq I_{k+1}.$$

intuición:



$X \nsubseteq I_K$

Caso 1: $k+1 \notin X$

entonces consideramos

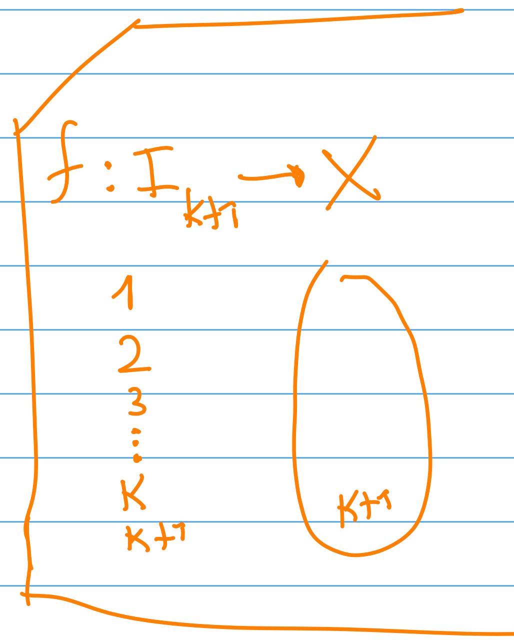
$$f|_{I_k} : I_k \to X \setminus \{f(k+1)\}$$

Restringida

esta función es inyectiva y además

$$X \setminus \{f(k+1)\} \subsetneq I_k$$

$\Rightarrow\Leftarrow$ lo cual es absurdo por hipótesis de inducción.



Caso 2: $k+1 \in X$

Caso 2.1: $k+1 \notin$ rango(f)

Entonces consideramos

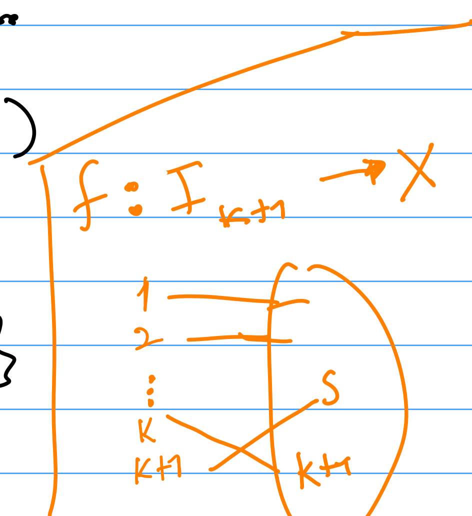
$$f|_{I_k} : I_k \to X \setminus \{k+1, f(k+1)\}$$

es subconjunto propio de I_k, lo que contradice la H.I.

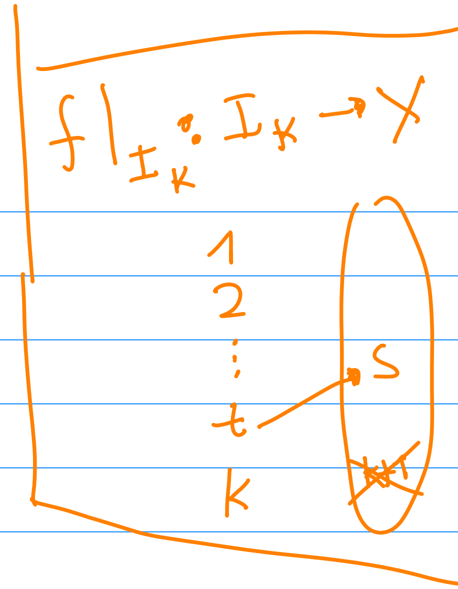
caso 2.2: $k+1 \in$ ran(f)

Definimos una nueva función

$$\varphi : I_k \to X \setminus \{k+1\}$$



$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq k+1 \\ f(t) \mapsto f(k+1) & \end{cases}$$



φ es inyectiva y

$$X \setminus \{k+1\} \subsetneq I_k$$

esto contradice la H. I

Por tanto no existe una función inyectiva de I_{k+1} en un subconjunto propio.

$\therefore$ la cardinalidad es única.

Teorema:

a) Si $m \neq n$ entonces no existe una biyección de I_m en I_n

b) Si $\#(S) = n$ y $\#(S) = m$ entonces $m = n$.

c) $\mathbb{N}$ es infinito.

Dem: Supongamos que $m \neq n$ razonando por contradicción supongamos que existe.

$$\varphi : I_m \to I_n \text{ biyectiva}$$

- Si $n < m$ entonces $I_n \subsetneq I_m$ Así

$\varphi : I_m \to I_n$ sería una función inyectiva de I_m en un subconjunto propio.
lo cual es absurdo por teorema anterior.

- Si $m < n$ entonces $I_m \subsetneq I_n$. Así $\varphi^{-1} : I_n \to I_m$ es una función inyectiva de I_n en un subconjunto propio.
lo cual es absurdo por el teorema anterior.

Por tanto no existe una biyección de I_m en I_n.

b) Supongamos que $\#(S) = n$ y $\#(S) = m$.

(1) Si $S = \emptyset$ entonces $n = 0 = m$ por def. de conj. finito.

(2) Si $S \neq \emptyset$ entonces existen biyecciones

$$\varphi_1 : S \to I_n$$
$$\varphi_2 : S \to I_m$$

De esta manera

$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : I_m \to I_n$ es una fn. biyectiva.

Así por apartado a) del teorema $m = n$.

c) Supongamos que $\mathbb{N}$ es finito razonando por contradicción entonces existe $r \in \mathbb{N}$ y una biyección

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow I_r$$

$$\varphi|_{I_r} : I_r \longrightarrow \varphi(I_r)$$

es una función inyectiva de I_r en un subset propio. Absurdo.