Taller Preparcial #2

Estudiante: David Alsina **Nota:** 5.0?

1. [1 pt] Sea D un dominio de integridad y sean $a, b \in D$. Asuma que $a^n = b^n$ y $a^m = b^m$ para dos enteros positivos n y m primos entre sí. Demuestre que $a = b$.

Como D es un dominio de integridad sabemos que es conmutativo con identidad y sin divisores de cero.

tenemos $a^n = b^n$ y $a^m = b^m$, para dos enteros positivos primos entre sí.

- $\gcd(m,n) = 1$, m no es multiplo de n y viceversa
- Si n y m son primos entre sí entonces $\exists x, y : nx + my = 1$ (Bezóuts identity)

$$a^n = b^n \qquad a^m = b^m$$
$$a^n - b^n = 0 \qquad a^m - b^m = 0$$

$$a^n - b^n = a^m - b^m$$
$$a^n - a^m = b^n - b^m$$

Si $n < m$:

$$\cancel{a^n}(a^{m-n} - 1) = \cancel{b^n}(b^{m-n} - 1)$$
$$a^{m-n} \cancel{-1} = b^{m-n} \cancel{-1}$$
$$a^{m-n} = b^{m-n}$$
$$(a^{m-n})^{x-y} = (b^{m-n})^{x-y} \qquad \exists x, y$$

$$a^{mx - nx - my + ny} = b^{mx - nx - my + ny}$$
$$(a^{-nx-my})\, a^{mx+ny} = (b^{-nx-my})\, b^{mx+ny}$$

$$(a^{-nx-my})\, a^{mx+ny} = (b^{-nx-my})\, b^{mx+ny}$$

$$(a^{nx+my})^{-1}\, a^{mx+ny} = (b^{nx+my})^{-1}\, b^{mx+ny}$$

$$(a^{1})^{-1}\, a^{mx+ny} = (b^{1})^{-1}\, b^{mx+ny}$$

$$a^{-1}\, a^{mx+ny} = b^{-1}\, b^{mx+ny}$$

$$a^{mx}\, a^{ny} = a\, b^{-1}\, b^{my}\, b^{ny}$$

$$\frac{\cancel{a^{my}}\, \cancel{a^{ny}}}{\cancel{b^{my}}\, \cancel{b^{ny}}} = a\, b^{-1}$$

$$1 = a b^{-1}$$

$$b = a(b^{-1} b)$$

$$b = a \quad \blacksquare$$

2. [1 pt] Sea A un PID y sea $a \in A$ con $a \neq 0$. Demuestre que $\langle a \rangle$ es un ideal maximal de A si y solo si a es irreducible.

Dado A PID digamos $\langle c \rangle$ genera A y además A es un dominio de Integridad. En el cual cualquier ideal es principal.

$(\Rightarrow)$ Suponga que $\langle a \rangle$ es un maximal de A. luego si J es un ideal t.q. $\langle a \rangle \subseteq J \subseteq A$ tenemos que $\langle a \rangle = J$ ó $J = A$.

Asuma por Absurdo entonces que a es reducible luego:

Caso 1) a es cero o es una unidad.
(Busco llegar a un absurdo en cada caso)

- Si a es cero entonces $\langle 0 \rangle$ no puede ser maximal ya que si tomamos cualquier elemento de A, digamos x_1 entonces $\langle x_1 \rangle$ tiene más elementos que $\langle 0 \rangle$, contradicción que surge de asumir que si $\langle a \rangle$ es maximal a puede ser cero. Luego a no puede ser cero.

- Si a es una unidad,

$$\{ax : x \in A\} = \{x : x \in A\} = A$$

¿Qué procede aquí?

Caso 2) a, se puede factorizar en irreducibles.
(esto porque todo PID es UFD).
$a = c_1 \cdots c_n$, donde c_i es irreducible.

$$\text{luego } \langle a \rangle = aR = \{ax : x \in A\}$$
$$= \{c_1 \cdots c_n x : x \in A\}$$

Como A es PID todo sub Anillo es principal entonces considere $\langle c_1 \rangle$.

$$\langle c_1 \rangle = c_1 R = \{c_1 x : x \in A\}$$

Note que $\langle a \rangle \subseteq \langle c_1 \rangle \subseteq A$

Considere entonces $X_{min} = \min\{x : x \in A\}$

$$c_1 X_{min} < c_1 \cdots c_n X_{min}$$

luego $c_1 X_{min} \in \langle c_1 \rangle$, $c_1 X_{min} \notin \langle a \rangle$ $\langle c_1 \cdots c_n \rangle$

entonces $\langle a \rangle \neq \langle c_1 \rangle$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

luego a debe ser irreducible

Así considere otro Ideal de A tal que también es principal $\langle c \rangle = cR = \{cx : x \in A\}$

(Quiero decir que $\langle a \rangle \neq \langle c \rangle$, es decir que hay un elemento en $\langle c \rangle$ que no está en $\langle a \rangle$ ó vicevesa).

Como $\langle a \rangle = J = \langle c \rangle \Rightarrow \langle a \rangle = \langle c \rangle$

$$\langle a \rangle = \langle cd \rangle = \{cdx : x \in A\}$$

$$\langle c \rangle = \{cx : x \in A\}$$

Sea c_1 un elemento arbitrario de $\langle c \rangle$ y a_1 uno de $\langle a \rangle$ particularmente

$$a_1 = c_1$$
$$cd\,x_{a_1} = c\,x_{c_1}$$
$$d\,x_{a_1} = x_{c_1}$$

Así cualquier $x_1 \in A$ es de la forma dx_2

$$\langle c \rangle \neq \langle d \rangle = A$$

???