$I \subseteq A$ es ideal si I subanillo

$$\forall x \in I, \quad a \in A$$

$$\Rightarrow ax, xa \in I$$

Prop: Sea $I \subseteq A$ subconjunto no vacío luego I es un ideal si:

$$\forall a, b \in I, \quad a - b \in I$$

$$\forall a \in A, \quad x \in I$$

$$ax, xa \in I$$

En $\mathbb{Z}$ ideales $=$ subanillos

$= m\mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Ej:}}$

Sea $a \in \mathbb{R}$

$$\varphi_a : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) \longmapsto f(a)$$

$\ker \varphi_a = \{ f \in F(\mathbb{R}) : f(a) = 0 \}$

es ideal porque φ_a es homogeneo

$\boxed{\text{ej:}}$

Sea A un anillo conmutativo, $a \in A$ el ideal generado por a es:

Ideal generado $\langle a \rangle = \{ ab = ba \, , \, b \in A \}$

En $\mathbb{Z}$ todos los ideales son de la forma $\langle n \rangle = n\mathbb{Z}$.

Ideal generado

Siempre hay 2 ideales en A:

$\{0\} = \langle 0 \rangle$ significa ideal generado

$A = \langle 1 \rangle$

si A es con identidad

Si $a_1, \dots, a_n \in A$

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \{ a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \, , \, b_i \in A \}$

significa ideal generado

$\boxed{\text{ej:}}$ → un anillo sin identidad

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Soporte de la función → Puntos donde no es cero

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

cierre

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ conjunto,

$\bar{A} = \{$ límites de sucesiones de elemento en $A\}$

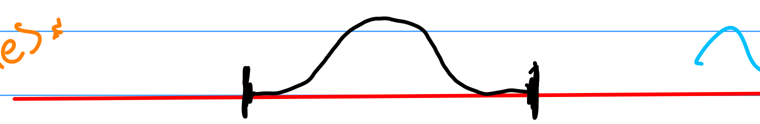
$$\overline{(0,1)} = [0,1]$$

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

Compacto → Soporte cerrado y limitado.

Sea $F_0(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supp f ~~es~~ está contenido en (a, b), $-\infty < a < b < \infty \}$

es anillo porque cumple las propiedades de los subanillo y es funciones reales.



esta función es drosito

Arregla funciones no sé como.

$f(x) = 1$, $\forall x$ es distinta de F_0

Si me muevo a infinito en ambas direcciones la función en algún momento muere, es decir sale del cierre.

Teorema: Si tengo un anillo sin identidad luego existe un anillo A^* con identidad t.q.

A es isomorfo a un subanillo de A^*

Dem: $A^* = A \times \mathbb{Z}$ como conjunto

Operaciones:

$$(a_1, n_1) + (a_2, n_2) = (a_1 + a_2, n_1 + n_2)$$

$$(a_1, n_1) \cdot (a_2, n_2) = \Big(a_1 a_2 + \underbrace{n_1 a_2 + n_2 a_1}, n_1 n_2\Big)$$

hace falta ver que significa $n_1 a_2$ y $n_2 a_1$.

Con:

$$na = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ -\sum_{i=1}^{n} a, & n < 0, \end{cases}$$

creanme, no lo voy a copiar

la intuición

Tenemos:
- A^* es Anillo
- $(0_A, 1_{\mathbb{Z}})$ es identidad de A^*
- $A' = \{(a, 0_{\mathbb{Z}}), a \in A\}$, A' es subanillo de A^*
- $\varphi : A \to A'$, $a \mapsto (a, 0)$ es isomorfismo

$$(a,n)\cdot(0_A,1) = (a\cdot 0_A + n\cdot 0_A + 1_{\mathbb{Z}}\cdot a, n\cdot 1)$$
$$= (0_A + 0_A + a, n)$$
$$= (a,n)$$

esto demuestra que $(0_A, 1)$ es la identidad

De la misma manera;

$$(0_A, 1_{\mathbb{Z}})\cdot(a,n) = (a,n)$$

tenemos que en A^*

$$-(a,n) = (-a,n)$$

Sean $(a,0)$ y $(b,0)$ elementos de A'

$$(a,0)-(b,0) = (a,0)+(-b,0)$$
$$= (a-b,0)$$

Siendo un anillo $(a-b)\in A$ y por lo tanto $(a-b,0)\in A'$.

$$(a,0)\cdot(b,0) = (ab + 0\cdot a + 0\cdot b,\ 0)$$
$$= (ab + 0 + 0,\ 0)$$
$$= (ab,\ 0)$$

Siendo A un anillo $a-b \in A$ y por lo tanto $(a-b, 0) \in A$.

Mostramos que φ es homomorfismo:

$$\varphi(a+b) = (a+b,\ 0)$$
$$= (a+b,\ 0+0)$$
$$= (a,0) + (b,0)$$
$$= \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\varphi(a)\,\varphi(b) = (a,0)\cdot(b,0)$$
$$= (ab,\ 0)$$
$$= \varphi(ab)$$

Sea $\varphi^{-1}\ A' \longrightarrow A$
$$(a,0) \mapsto a.$$

Tenemos $(\varphi^{-1}\circ\varphi)(a) = \varphi^{-1}(a,0) = a$
y $(\varphi\circ\varphi^{-1})(a,0) = \varphi(a) = (a,0)$

Por lo tanto φ^{-1} es la inversa de φ y φ es un isomorfismo.