Sucesiones

Def: una sucesión X es una función

$$\begin{aligned} X : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ 1 &\longmapsto x(1) = x_1 \\ 2 &\longmapsto x(2) = x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Obs: una sucesión X es una función

$$X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}} = X_n = (x_n)_{n=0}^{\infty}$$

$$= \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$= (x : n \in \mathbb{N})$$

ejemplos de sucesiones:

a) $X = \left((-1)^n : n \in \mathbb{N}\right) = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$= (-1, 1, -1, 1, \ldots)$

b) $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$

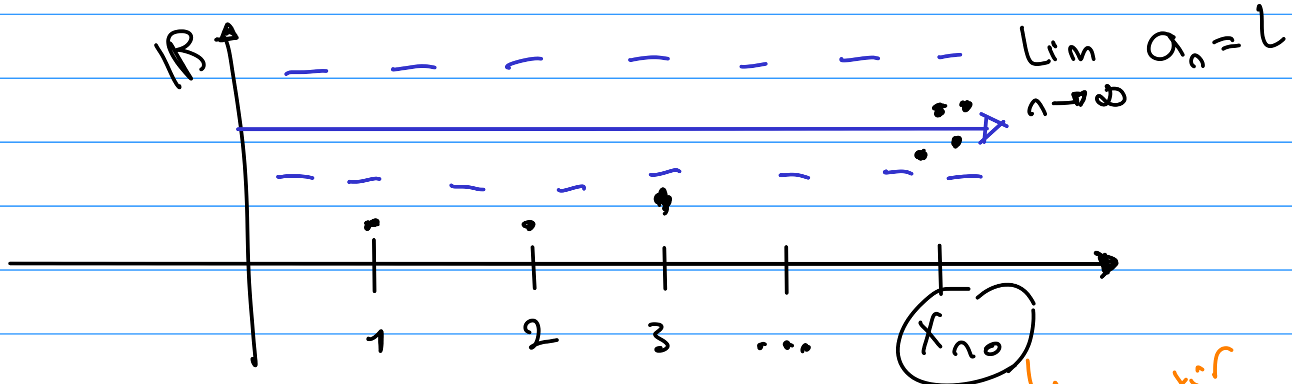
$X = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $a_n = \frac{1}{2^n}$

c) Sucesion en forma recursiva

$$B = (b_n)_{n=1}^{\omega} \quad \text{donde } b_1 = b_2 = 1$$

$$b_{n+1} = b_n + b_{n-1} \quad \text{para } n \geq 2$$

Limites de sucesiones



a partir de x_{n_0} todos los elementos van a quedar en el intervalo

Def: [Limite de una sucesión]

Dada una sucesión $X = (x_n)$, decimos que X converge a $L \in \mathbb{R}$ si $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|x_n - L| < \varepsilon$.

Obs: Note que $n_0 = n_0(\varepsilon)$ depende de ε.

- Cuando X converja a L escribimos

$$x_n \to L \quad \text{o} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = L$$

ej: Consideremos $X = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ sucesión

muestre que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

sol: supongamos $\varepsilon > 0$ cualquiera. por propiedad arquimediana $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

$$|x_n - 0| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

Si $n \geq n_0$ entonces

$$|x_n - 0| = |x_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$$

entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Teorema

el límite de una sucesión, si existe es único.

Dem: Supongamos $X = (x_n)$ una sucesión que converge a L_1 y L_2

Como X converge a L_1, para $\varepsilon/2 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.:

$$|x_n - L_1| < \varepsilon/2, \quad n \geq n_0$$

Como X también converge a L_2, para $\varepsilon/2 > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L_2| < \varepsilon_2, \quad n \geq n_1$$

Sea $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ de esta manera si $n \geq n_2$ entonces $n \geq n_0$ y $n \geq n_1$.

Así si $n \geq n_2$

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |(L_1 - X_n) + (X_n - L_2)| \\ &\leq |L_1 - X_n| + |X_n - L_2| \\ &= |X_n - L_1| + |X_n - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Desigualdad triangular

Por tanto $|L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

Así $L_1 = L_2$.

Obs: $|L_1 - L_2| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$ entonces $L_1 = L_2$.

Razonando por contradicción suponga

Sin pérdida de generalidad que $L_1 \neq L_2$
en particular que $L_1 > L_2$:

Por propiedad Arq. $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$
t.q.

$$0 < \underbrace{\frac{1}{n_0}}_{\varepsilon} < L_2 - L_1 = |L_1 - L_2|$$

Por lo anterior contradice la hipótesis.

Por lo tanto $L_1 \neq L_2$ no ocurre
entonces que $L_1 = L_2$.

ej: Demuestre que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$$

Sol: Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera por
prop. arquimediana existe
$n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.:

$$0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

De esta manera si $n \geq n_0$
entonces

$$\left| \frac{1}{n^2+1} - 0 \right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Por tanto $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$

Teorema: Sea (x_n) una sucesión de números reales y $x \in \mathbb{R}$.

Si (a_n) es una sucesión de números reales positivos con $\lim(a_n) = 0$ y existe una constante $C > 0$ tal que para algún $m \in \mathbb{N}$

$$|x_n - x| = C \cdot a_n \text{ para } n \geq m$$

entonces $\lim(x_n) = x$.

Dem: Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera.

Como $\lim(a_n) = 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon / c$$

Sea $n_1 = \max\{m, n_0\}$. De esta manera si $n \geq n_0$ entonces $n \geq n_0$ y $n \geq m$. Así:

$$|x_n - x| < c\, a_n = c|a_n| \text{ pues } a_n > 0$$

$$< c\left(\frac{\varepsilon}{c}\right) = \varepsilon$$

Así si $n \geq n_1$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon$

Por tanto $\lim\limits_{x \to \infty} (x_n) = x$.