Obs: nos va a interesar de ahora en adelante el poder enumerar conjuntos.

Si X es conj. finito diferente de vacío existe $\varphi: X \to I_n$ biyectiva para algún $n \in \mathbb{N}$. $|X| = n$

$$X = \{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2) \ldots \varphi^{-1}(n)\}$$

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

Teorema: Si X es un conjunto finito y $A \subseteq X$ entonces A es finito.

Dem:

- si $X = \emptyset \Rightarrow A \subseteq X$ implica que $A = \emptyset$. Así A es finito.

- si $X \neq \emptyset$ y $A \subseteq X$:

Caso 1) $A = \emptyset$ entonces es finito

Caso 2) $A \neq \emptyset$, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Consideremos $\{i \in \mathbb{N} : x_i \in A\}$, conjunto distinto de vacío. Como es subconjunto de $\mathbb{N}$

por el principio de buena ordenación existe

$$K_1 = \min\{ i \in \mathbb{N} : x_i \in A \}$$

Consideremos ahora el conjunto

quito el mínimo anterior $\{ i \in \mathbb{N} : x_i \in A \text{ y } x_i \neq x_{K_1} \}$

- Si este conjunto es vacío entonces $A = \{ x_{K_1} \}$

- Si este conjunto no es vacío entonces como es subconjunto de $\mathbb{N}$ por el principio de buen orden existe

$$K_2 = \min\{ i \in \mathbb{N} : x_i \in A \ x_i \neq x_{K_1} \}$$

Continuando de esta manera, este proceso debe acabar en algún K_r

$$A = \{ x_{K_1}, \ldots, x_{K_r} \}$$

Así A es finito.

obs: Note que si X es finito y $A \subseteq X$ $|A| \leq |X|$.

Teorema: Si X y Y son conjuntos finitos entonces $X \cap Y$ es finito.

$$|X \cap Y| \leq |X|$$
$$|X \cap Y| \leq |Y|$$

Teorema: Si X y Y son conjuntos finitos, disyuntos $(X \cap Y = \emptyset)$ entonces $X \cup Y$ es finito

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|$$

Dem: ⓐ Si X o Y son conjuntos vacíos entonces

$$X \cup Y = X \quad \text{o} \quad X \cup Y = Y$$

en cualquier caso $X \cup Y$ es finito

ⓐ $|X \cup Y|$ —
- $|X|$ $\quad Y = \emptyset \Rightarrow |X \cup Y| = |X| + \underbrace{|Y|}_{0}$
- $|Y|$ $\quad X = \emptyset \Rightarrow |X \cup Y| = \underbrace{|X|}_{0} + |Y|$

ⓑ Si ambos son finitos, no vacíos podemos suponer que $|X| = n$ y $|Y| = m$

donde $n, m \in \mathbb{N}$

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

$$\varphi : X \cup Y \longrightarrow I_{n+m}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &\longrightarrow 1 \\
x_2 &\longrightarrow 2 \\
&\vdots \\
x_n &\longrightarrow n \\
y_1 &\longrightarrow n+1 \\
y_2 &\longrightarrow n+2 \\
&\vdots \\
y_m &\longrightarrow n+m
\end{aligned}$$

$$\varphi : X \cup Y \longrightarrow I_{n+m}$$

$$z \longmapsto \varphi(z) = \begin{cases} i & \text{si } z = x_i \\ n+i & \text{si } z = y_i \end{cases}$$

$\blacksquare$

Ejercicio: Verificar que φ es biyectiva

$$|X \cup Y| = n + m = |X| + |Y|$$

Teorema: Si X y Y son conjuntos finitos entonces $X \cup Y$ es finito y

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

Demostración es ejercicio

obs: Por inducción se puede demostrar que la unión finita de conjuntos finitos es finita.

Teorema: Si X y Y son conj. finitos entonces $(X \times Y)$ es finito.
Además
$$|X \times Y| = |X|\,|Y|$$

Dem: Ejercicio $\rightsquigarrow$ $X \times \underbrace{Y}_{\{\emptyset\}} = \{\emptyset\}$

inducción caso $\neq \emptyset$

obs: Con esto cerramos la parte de finitud.

Conjuntos Numerables:

la idea final será decir que la cardinalidad de $|\mathbb{R}|$ no es numerable.

uno puede mostrar que

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}|$$

$$\aleph_1 = |\mathbb{R}|$$

Def: [conjuntos infinitos numerables]

Un conjunto X se dice infinito numerable sii existe $\varphi : \mathbb{N} \to X$ función biyectiva.

Obs: Si X es inf. numerable, entonces podemos escribir:

$$X = \{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n), \dots\}$$
$$= \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$
$$= \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$$

ó se escribe así el conj. ó encuentro la biyección.

Teorema: Un subconjunto infinito de un conjunto infinito numerable es infinito numerable.

Dem: misma idea de la demostración de la finitud de subconjuntos en un conj. finito.

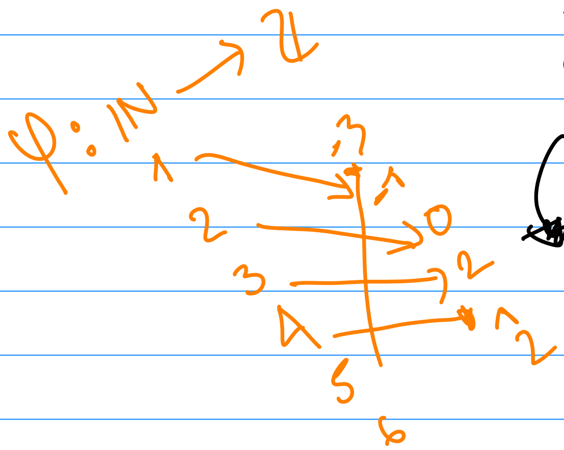
Ej: ⊙ $\mathbb{N}$ es un conj. infinito numerable

$$Id: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

⊙ $\mathbb{Z}$ es un conj. infinito numerable.

a los neg. impares.

a los positivos pares.



$$\varphi(x) = \begin{cases} n-1 & x = 2n \\ -n & x = -n \end{cases}$$

Ej: los primos son un conj. infinito numerable. pues son un conjunto infinito contenido en los naturales, solo falta demostrar que los primos son infinitos.

Supongo que son finitos luego

$$[a_i, a_k]$$

pero si $\left(\prod_{i=a_1}^{a_k} a_n + 1 \right)$ es un número no divisible en los $[a_i, a_k]$

Ejercicio

$\boxed{\text{ej:}}$ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable

<< teorema fundamental de la aritmetica >> $\rightsquigarrow$ todo $\mathbb{N}$ lo puedo descomponer en primos

Consideremos $M = \{ 2^k \cdot 3^l : k, l \in \mathbb{N} \}$

este conj. es infinito (suponga que no y contradice el teorema fundamental de la aritmética). Además $M \subseteq \mathbb{N}$, luego por teorema anterior es infinito numerable.

$$\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow M$$
$$(k, l) \longrightarrow 2^k 3^l$$

φ es biyectiva

Como M es infinito numerable existe una función:

$$\theta : \mathbb{N} \longrightarrow M \quad \text{biyectiva}$$

Así $\varphi^{-1} \circ \theta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una función biyectiva por tanto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es conjunto infinito numerable.

Obs: $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$$(n, k) \longrightarrow f(n,k) = 2^n(2k+1)+1$$