MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Análisis Real
2022-1

Universidad del Rosario

TALLER: COMPLETITUD EN $\mathbb{R}$ Y FINITUD

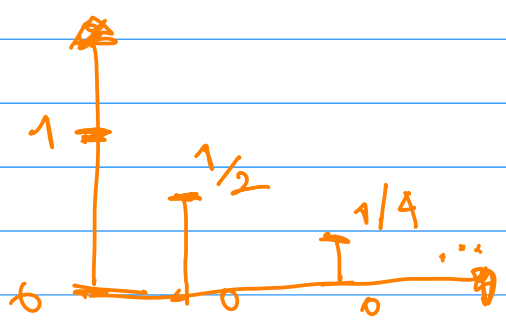
10 de Agosto de 2022

Indicaciones generales

- El taller es una evaluación, por lo tanto se debe entregar en físico y de manera presencial.
- La fecha de entrega es el Miércoles 17 de Agosto al inicio de la clase.

1. Considere el conjunto $A = \{\frac{1}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Demuestre que $Inf(A) = 0$.
2. Sea E un subconjunto no vacío y acotado superiormente de los números reales y considere el conjunto $U = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es cota superior de } E\}$. Demuestre que $Sup(E) = Inf(U)$.
3. Sea $f : A \to B$ una función inyectiva. Muestre que si B es finito, entonces A es finito.
4. Sea A un conjunto no finito y B un subconjunto finito de A. Muestre que $A - B$ no es finito y en consecuencia $A - B \neq \emptyset$.

1 $A = \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{Z} \right\} = \left[0, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$



→ este es encajado.

Suponga que existe la cota inferior x y que esta es la mayor de las cotas inferiores, adicionalmente

$$\inf(A) = x \neq 0 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Caso 1) $x > 0 \equiv \text{Inf}(A) > 0$

Por prop arquimediana dado que $x \in \mathbb{R}$, sabemos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \quad n$.

$$x \leq n \leq 2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

$$x \leq 2^{n-1}$$

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{2^{n-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

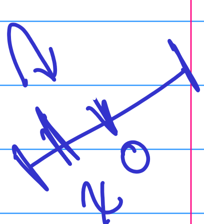
$$x > \frac{1}{x} > \frac{1}{2^{n-1}} \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$$

esto es para cualquier $x > 0$ tengo garantizado que habrá un $a \in A$ tal que $\text{Inf}(A) = x > a$.

Contradicción que surge de asumir que $x > 0$.

Caso 2) $x < 0 \equiv \text{Inf}(A) < 0$

$-x > 0$



Siguiendo la estructura del caso 1 con la prop. arquimediana:

$$-x > \frac{1}{-x} > \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x \le \frac{1}{x} \le -\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x \le -\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\mathrm{Inf}(A) \le -\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

hay una cota inferior: $-\frac{1}{2^{n-1}}$ más grande que el ínfimo.

De lo anterior se deduce que $\mathrm{Inf}(A) = x = 0$.