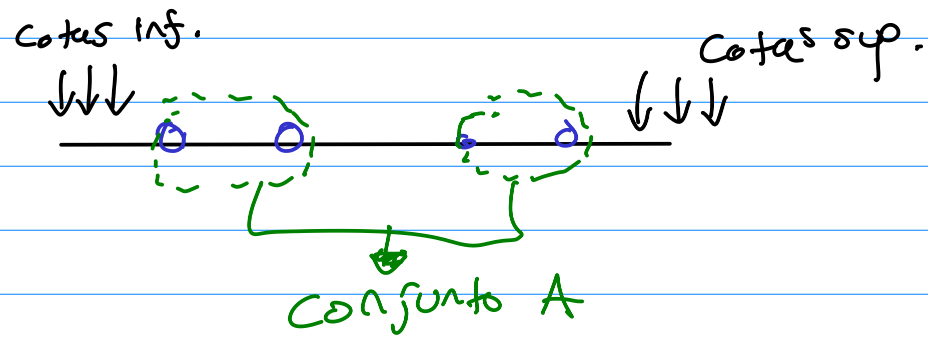
Supremo e ínfimo

Primero debemos hablar de cotas

Def: cota sup. y cota inferior



① Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos $U \in \mathbb{R}$ es cota superior si $x \leq U$ $\forall x \in A$.

Def:

② Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ Decimos que $U \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de $A \subseteq \mathbb{R}$ si $U \leq x$ $\forall x \in A$.

③ $A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado en $\mathbb{R}$ si existe $U \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|x| \leq U \quad (-U \leq x \leq U)$$

$\forall x \in A$.

ej: Sea $A = \{ x \in R : x < -2 \}$
$= (-\infty, 2)$

$\Rightarrow \forall u \in R$, $u \geq -2$ es una cota superior.

$\Rightarrow$ No tiene cotas inf.

Infimo y Supremo

Sea $A \subseteq R$, un subconj. acotado.

1. u es un infimo de $A \subseteq R$ si u es la mayor de las cotas inf.

2. $u \in \mathbb{R}$ es un supremo de A en R si u es la menor cota superior.

Teorema (otra forma de decir lo de arriba)

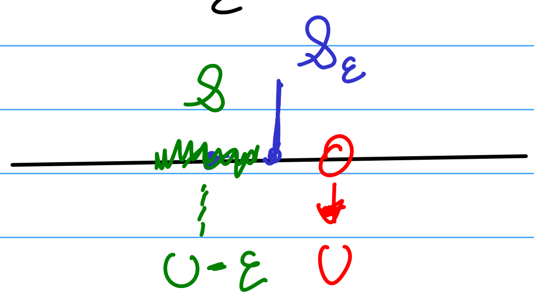
1. $u \in R$ es infimo $\Leftrightarrow$:

   i) u es cota inferior de A en R.

   ii) si $v \in R$ es cota inferior entonces $u \leq v$

Teorema: $A \subseteq \mathbb{R}$ tiene a lo más un supremo (o ínfimo).
a.k.a. los supremos e ínfimos son únicos.

Teorema: Una cota superior u de un conjunto S de $\mathbb{R}$ es <u>el</u> supremo de S sii $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $S_\varepsilon \in S$ tal que $u - \varepsilon < S_\varepsilon$



Dem: Supongamos que u es una cota superior de S en $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$) Supongamos u supremo de S en $\mathbb{R}$, consideremos $\varepsilon > 0$.

Por contradicción supondremos que $\forall\, s \in S$, $u - \varepsilon \geq s$, esto implica que $u - \varepsilon$ es una cota superior de $S \subseteq \mathbb{R}$. Y dado que u es supremo de S

$$u - \varepsilon \leq u$$

($\Leftarrow$ <=) . Por lo que debe existir

$S_\varepsilon \in S$ t.q. $u - \varepsilon < S_\varepsilon$.

Tarea: haga lo mismo para el ínfimo, y también el ($\Leftarrow$) de la $\mathcal{D}_m$.

obs: [Notación]

Sup (A) $\longrightarrow$ Supremo de A.

Inf (A) $\rightarrow$ Infimo de A en $\mathbb{R}$.

Mínimo $\rightarrow$ ínfimo que pertenece al conjunto.

Max $\rightarrow$ Supremo que pertenece al conjunto.

Axioma de completitud de $\mathbb{R}$?

Nota: Cualquier conjunto con cota sup. va a tener supremo

$\downarrow$

same with inf. (Puede meter el por menos el conj. y usar el supremo)

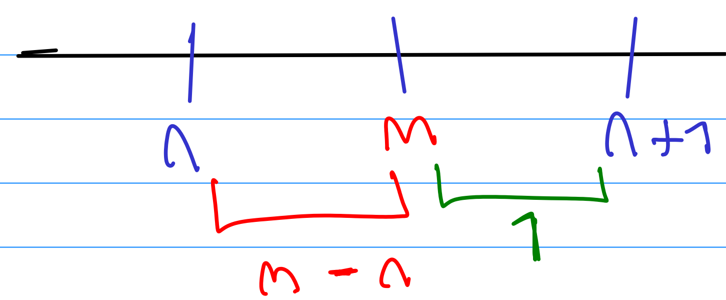
Principio del Buen orden

Obs:

- $1 = \min(\mathbb{Z}^+) = \min(\mathbb{N})$
- Dado $n \in \mathbb{Z}$, no existe $m \in \mathbb{Z}$ t.q.: $n < m < n+1$

Razonando por contradicción

Supongamos que existe $m \in \mathbb{Z}$ t.q. $n < m < n+1$



Así $0 < m-n < 1$ dado $m-n \in \mathbb{Z}^+$

Pero esto es absurdo pues $1 = \min(\mathbb{Z}^+)$

Teorema: [Principio de la buena ordenación]

Sea $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ t.q. $A \neq \emptyset$ entonces A tiene un elemento mínimo.

Dem:

Supongamos $A \subseteq \mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{R}$ t.q. $A \neq \emptyset$

Note que $1 \in \mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{R}$ satisface que $1 \leq x, \forall x \in A$. Así 1 es cota inferior de A en $\mathbb{R}$. Por el Axioma de completitud de $\mathbb{R}$ existe

$$m_0 = \text{Inf}(A), \ m_0 \in \mathbb{R}.$$

De esta manera $m_0 + 1$ no es ínfimo de A. Así existe $u \in A$ tal que

$$m_0 \leq u < m_0 + 1$$

(Quiero llegar a que m_0 es min).

1. Sabemos $m_0 \leq u$

Supongamos $m_0 < u$

1.1 Supongamos que para todo $x \in A$

$m_0 < u \leq x$, Así u sería una cota inferior mayor que el ínfimo $(\Rightarrow \Leftarrow)$

(1.2) Así como 1.1 es falso por que existe $a_0 \in A$ t.q.

$$\underbrace{n_0 \le \underbrace{a < u}_{a-u} < n_0+1}_{1}$$

$$0 < u-a < 1 \quad , \quad u-a \in \mathbb{Z}^+$$

$(\Rightarrow\Leftarrow)$

Por lo que $n_0 \not< u$, $n_0 = u$

Aplicaciones del Axioma de Completitud

(1) $\sup(S+a) = a + \sup(S)$

$$S+a = \{x+a : x \in S\}$$

<u>Dem</u>: $u = \sup(S)$, entonces $x \le u$ para todo $x \in S$:

$$x + a \le u + a \quad \text{para todo } x \in S.$$

entonces $u+a$ es una cota sup. de $S+a$, veamos que $u+a$ es la es la cota más pequeña

Supongamos que $V \in \mathbb{R}$, cota superior de $S+a$.

$$x + a \leq V \quad \text{para todo } x \in S$$
$$x \leq V - a \quad \forall\, x \in S$$

Así $V-a$ es cota superior de S, como $u = \sup(S) \Rightarrow V - a \geq u$

$$V \geq u + a$$
$$\Rightarrow \sup(S+a) = u+a$$

Importante quedarse con Axioma de completitud y el de buen orden