Def Función acotada por vecindades

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función y sea c un punto de acumulación de A. Decimos que f está acotada en una vecindad de c.

Una constante $M>0$ tal que si $x \in A \cap (V_\delta \setminus \{c\})$ entonces $|f(x)| \leq M$.

Teorema: Si $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f: A \to \mathbb{R}$ tiene límite en $c \in \mathbb{R}$, entonces f está acotada en alguna vecindad de c.

Dem: Supongamos c es un punto de acumulación de A. tal que $\lim_{x \to c} f(x) = L$. De esta manera para

$\varepsilon = L$ tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x-c| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < 1$.

Así si $x \in A \cap (V_\delta(c) \setminus \{c\})$ entonces:

$$|f(x)| - |L| \leq \big||f(x)| - |L|\big| \leq |f(x) - L| < 1$$

$$\boxed{|f(x)| < 1 + |L|}$$

Tomemos ahora $M = \max\{f(c), 1 + |L|\}$ esto en el caso de que $c \in A$. Si $c \notin A$ tome $M = 1 + |L|$. De esta manera

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{si } x \in A \cap V_\delta(c)$$

Teorema: [Propiedades de límites]

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f, g : A \to \mathbb{R}$.
Considere c un punto de acumulación de A.
Sea $b \in \mathbb{R}$ entonces:

Tarea para el parcial demostrar estos 4.

a) Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = M$ entonces

$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M, \quad \lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$$

b) Si $h : A \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) \neq 0$ $\forall x \in A$ y si $\lim_{c \to 0} h(x) = H \neq 0$

entonces

$$\lim \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{L}{H}$$

Dem → ejercicio

Ej: ⊙ Ya se mostró $\lim_{x \to c} x = c$ y $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$

$$\lim_{x \to c} L = L$$

a) $$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 1$$

$$= 2^2 + 1 = 5$$

b) $\lim_{x\to 2} (x^2+1)(x-3) = \lim_{x\to 2} (x^2+1) \cdot \lim_{x\to 2} (x-3)$

$$= (5)\left[\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 3\right]$$

$$= 5[2-3] = -5$$

c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{3x-6} = ?$, Note que $\lim_{x\to 2} (3x-6) = 0$

$$\frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)}$$ es cierto para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{3x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{3} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 2} x + \frac{1}{3}\lim_{x\to 2} 2$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Ejercicio: $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, c punto de acumulación de A. entonces:

⊙ Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} h(x) = L$

y

$f(x) \le g(x) \le h(x)$ $\forall x \in A$, entonces:

$$\lim_{x\to c} g(x) = L$$

Ej: Demuestre que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ no existe.

Mostremos que $f(x) = \frac{1}{x}$ no es acotado en ninguna vecindad de 0.

Consideremos $\delta > 0$ cualquiera. $(V_\delta(0))$

quiero mostrar que no existe $M > 0$ tal que si $x \in A \cap V_\delta(0)$ implica que $|f(x)| \leq M$

$$\left(A = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \} \right)$$

Razonando por contradicción supongamos que existe $M \in \mathbb{R}$ con $M > 0$ t.q. si $x \in A \cap V_\delta(0)$, entonces $|f(x)| \leq M$.

Como $M > 0$ entonces por la prop. arq. existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $0 < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{M}$