Teorema: [caracterización de intervalos]

Si $S \subseteq \mathbb{R}$ que tiene al menos 2 puntos y tiene la propiedad

$$(x, y \in S \text{ y } x < y) \Rightarrow [x, y] \subseteq S$$

entonces S es un intervalo

Dem: Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ y $|S| \geq 2$.

caso 1) Supongamos que S es acotado es decir S acotado por ambos lados.

Dado que $S \neq \emptyset$ por axioma de completitud:

$$\exists\ a = \inf(S) \ , \ b = \sup(S)$$

¿Cómo me evito todos estos casos?

Note que $S \subseteq [a, b]$ pues $a \leq s \leq b$ $\forall s \in S$.

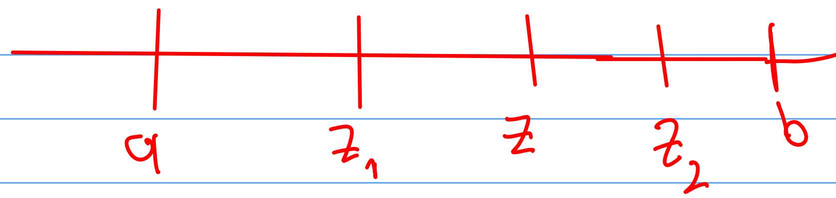
Veamos que $(a,b) \subseteq S$ en efecto

Sea $z \in (a,b) \Rightarrow a < z < b$

Como $a = \inf(S)$ entonces z no es cota inferior de S. así existe $s_1 \in S$ t.q.

$$a \le s_1 < z$$

Además $b = \sup(S)$ entonces z no es cota superior de S, así existe $s_2 \in S$ t.q. $z \le s_2 \le b$.



Por la propiedad $(x, y \in S \text{ y } x < y) \Rightarrow [x,y] \subseteq S$

$z \in [z_1, z_2] \subseteq S$

de este modo $(a,b) \subseteq S$.

$((a,b) \subseteq S \subseteq [a,b])$

Caso 1.1: Si $\inf(S) = a \in S$ y $\sup = b \in S$ entonces $S = [a,b]$

Caso 1.2: Si $\inf(S) = a \in S$ y $\sup(S)$ es $b \in S \Rightarrow [a,b)$

Caso 1.3: Si $\inf(S) = a \notin S$
$\sup(S) = b \in S$ entonces

$$S = (a, b]$$

Caso 1.4: Si $\inf(S) = a \notin S$ y
$\sup(S) = b \notin S$.

$$S = (a, b)$$

Caso 2:

Supongamos que S es acotado superiormente pero no inferiormente.

Como S es acotado superiormente $S \neq \emptyset$, entonces por axioma de completitud

$$\exists\, b = \sup(S).$$

De esta manera $S \subseteq (-\infty, b]$
pues $s \leq b \;\; \forall\, s \in S$.

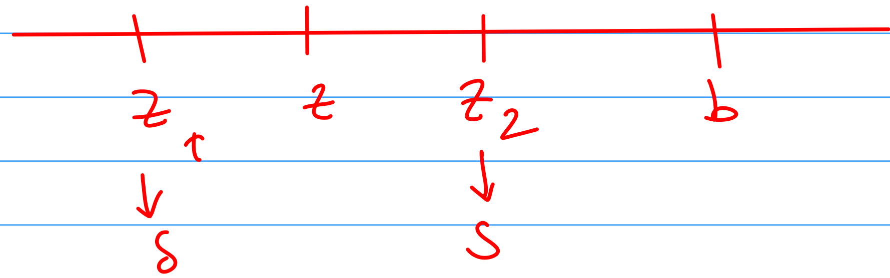
Afirmo que $(-\infty, b) \subseteq S$

En efecto, supongamos $z \in (-\infty, b)$
entonces $z < b$.

Como $b = \sup(S) \Rightarrow z$ no es cota sup. de S, así existe $z_2 \in S$ tal que

$$z < z_2 \leq b$$

Además S no es acotado inferiormente así z no es cota inferior de S, luego existe $z_1 \in S$ tal que $z_1 < z_2$



Por la condición

$(x, y \in S$ y $x < y) \Rightarrow [x, y] \subseteq S$

$z \in [z_1, z_2] \subseteq S$

Por lo tanto $(-\infty, b) \subseteq S$

$(-\infty, b) \subseteq S \subseteq (-\infty, b]$

Caso 2.1 si $\sup(S) \in S \Rightarrow S = (-\infty, b]$

Caso 2.2 Si $\sup(S) \notin S \Rightarrow S = (-\infty, b)$

Caso 3 S es acotado inf. pero no sup.

Tarea

$S_1 = (a, \infty)$ ó $S = [a, \infty)$

Caso 4

Tarea

S no es acotado (ni sup. ni inf)

$$S = (-\infty, \infty)$$

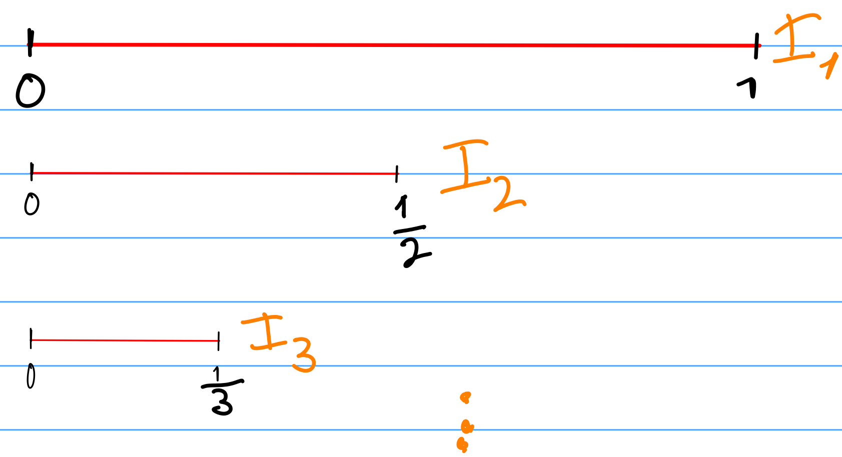
Intervalos encajados (anidados)

Decimos que una colección I_n con $n \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ son encajados si

$$I_k \supseteq I_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3, \dots$$

ej: $I_n = [0, \frac{1}{n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$



Veamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0\}$

Como $0 \in [0, \frac{1}{n}] = I_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

entonces $\{0\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$

Veamos ahora que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subseteq \{0\}$

Sea $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ entonces $x \in [0, \frac{1}{n}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, así $x \geq 0$.

Si ocurriera que $x > 0$ entonces por la prop. arq. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $0 < \frac{1}{n_0} < x$, es decir que $x \notin [0, \frac{1}{n_0}]$ y eso contradice que $x \in [0, \frac{1}{n}]$.

Por lo tanto no ocurre que $x > 0$, luego debe ser $x = 0$.

Por lo tanto $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subseteq \{0\}$

Concluyo la doble contenencia y con ello

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0\}$$

Obs: $I_n = [0, \frac{1}{n})$ son encajados
$I_n \supseteq I_{n+1}$ y $\bigcap [0, \frac{1}{n}) = \{0\}$

¿La intersección de intervalos encajados siempre es $\neq \emptyset$?

→ No!

$I_n = (0, \frac{1}{n})$ con $n \in \mathbb{N}$ entonces

I_n son encajados $I_n \supseteq I_{n+1}$

Pero $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$

Ejercicio Tarea

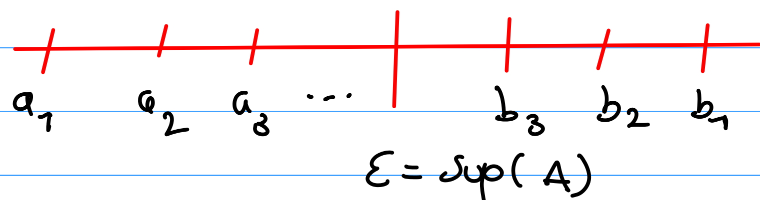
¿Qué condiciones deben tener los intervalos encajados para la intersección $= \emptyset$?

→ ¿Cerrados? → Contra ejemplo $[n, \infty)$

→ ¿Cerrados y acotados? → Sí ✓

Teorema: Si $I_n = [a_n, b_n]$ con $n \in \mathbb{N}$ es una colección de intervalos encajados de $\mathbb{R}$ y acotados, entonces existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon \in I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dem: Sean $I_n = [a_n, b_n]$ con $n \in \mathbb{N}$ una colección de intervalos anidados y acotados de $\mathbb{R}$.



Sea $A = \{ a_i : i \in \mathbb{N} \}$ note que $A \neq \emptyset$ y es acotado superiormente por b_1, y por axioma de completitud existe

$$\varepsilon = \sup(A)$$

① $a_n \leq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

② Afirmo que $\varepsilon \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Veamos que b_n es cota superior de A.

• $k \geq n$ con $k \in \mathbb{N} \Rightarrow I_n \supseteq I_k$

$[a_n, b_n]$ $[a_k, b_k]$

$$a_n \leq a_k \leq b_k \leq b_n \rightsquigarrow a_k \leq b_n$$

• $k < n$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow I_k \supseteq I_n$

$$a_k \leq a_n \leq b_n < b_k$$

Por lo tanto $a_k \leq b_n \; \forall k \in \mathbb{N}$

Así b_n es cota superior de A

Concluyo que $\varepsilon \leq b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore \; \varepsilon \in I_n = [a_n, b_n] \; \forall n \in \mathbb{N}.$