• Se Supone que Vimos

$$\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle \cong \mathbb{C}$$

• Hemos visto que A/I es campo sii I es maximal.

Prop Sea A un PID. Sea $a \neq 0$ en A, luego $\langle a\rangle$ es maximal sii a es irreducible.

Dem V_1: En un dominio de integridad

$$\langle a\rangle \subseteq \langle b\rangle \iff b \mid a$$

y $\langle a\rangle = \langle b\rangle \iff a$ y b asociados

En particular, $\langle a\rangle = A$ sii a es unidad.

Sea $\langle a\rangle \subseteq \langle b\rangle \subseteq A$, $\langle a\rangle$ es maximal sii:

- $\langle b\rangle = \langle a\rangle \iff a$ y b son asociados
- $\langle b\rangle = A \iff$ es unidad.

Dem VR : Sea las $\mathbb{C}\ I \subset A$

siendo A PID $\exists b \in A$ t.q.

$I = \langle b \rangle$.

Ahora $\langle a \rangle$ es maximal si

① $I = \langle a \rangle$

② $I = A$

en el primer caso $I = \langle b \rangle = \langle a \rangle$ equivalente que b y a sean asociadas

en ② $\langle b \rangle = A = \langle 1 \rangle$ y b es unidad.

¿Cuando $p(x)$ es irreducible? polinomio

Si tiene grado 1

$p(x) \in \mathbb{C}[x]$ tenemos Teorema fundamental del algebra:

Un polinomio no cte en $\mathbb{C}[x]$ tiene una raíz compleja.

Si $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, $c \in \mathbb{F}$ campo

$$p(c) = 0 \iff x - c \mid p(x)$$

$$\iff p(x) = (x-c)\, q(x)$$

Por división euclídea

$$p(x) = (x-c)\,q(x) + r(x)$$

Con $r(x) = 0$ ó $\deg(R(x)) < \deg(x-c) = 1$

es decir $r(x) = r \in \mathbb{F}$.

luego

$$p(c) = (c-c)\,q(c) + r$$
$$= r.$$

$$p(c) = 0 \iff r = 0.$$
$$\iff x-c \mid p(x)$$

Consecuencias:

① $p(x) \in \mathbb{C}[x]$

$$p(x) = c\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

$$n = \deg(p), \quad \alpha_i, c \in \mathbb{C}.$$

② $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ a lo sumo tiene $n = \deg(p)$ raíces.

② es falso si $p(x) \in A[x]$

$(x^2-1) \in \mathbb{Z}_8[x]$ tiene 4 raíces:

$$\pm 1, \pm 3.$$

rage quit.