Por: David Alsina

1. [**3 pt**] Demuestre **utilizando la definición de convergencia para sucesiones:**

   *a*) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0.$

   **Sug:** Argumente de forma coherente que $\frac{n^2}{n!} \leq \frac{1}{n-3}$, para $n \geq 4$ en $\mathbb{Z}^+$.

   *b*) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+5} = \frac{1}{2}$

a) $\left|\frac{n^2}{n!} - 0\right| = \frac{n^2}{n!}$

muestre que $\frac{n^2}{n!} \leq \frac{1}{n-3}$ para $n \geq 4$ en $\mathbb{Z}^+$

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{n-1!} \leq \frac{1}{n-3}$$

$$n(n-3) \leq n-1!$$

$$n\cancel{(n-3)} \leq (n-1)\cdot(n-2)\cdot\cancel{(n-3)}\cdots(1)$$

$$n \leq (n-1)(n-2) < (n-1)(n-2)(n-3)\dots(1)$$

muestre que $n \leq (n-1)(n-2)$, para $n \geq 4$

P. base) $4 \leq (3)(2)$

$4 \leq 6$

P. inductivo) $K \leq (K-1)(K-2)$

$K \leq K^2 - 3K + 2$

P. K+1) $K+1 \leq K(K-1) = K^2 - K$

$$k+1 \leq k^2 - k$$
$$2k+1 \leq k^2$$

P.B.) $$2(4)+1 \leq (4)^2$$
$$9 \leq 16$$

H.I.) $$2m+1 \leq m^2$$

m+1) $$2m+1+2 \leq m^2+2 < (m+1)^2$$
$$2m+3 \leq m^2+2 < (m+1)^2$$
$$2(m+1)+1 \leq m^2+2 < m^2+2m+1$$

$$\cancel{m^2}+2 < \cancel{m^2}+2m+1$$
$$2 < 2m+1 \quad , \quad m \geq 4$$

entonces tenemos que $\frac{n^2}{n!} < \frac{1}{n-3}$.

Por prop. arquimediana Considere un $\varepsilon > 0$ y para este un $m_0 = n_\alpha - 3$ tal que:

$$0 < \frac{1}{m_0} < \varepsilon \quad , \quad 0 < \frac{1}{n_\alpha - 3} < \varepsilon$$

Conectando con lo anterior decimos que:

$$\frac{n^2}{n!} < \frac{1}{n-\varepsilon} < \varepsilon \quad \text{para } n \geq n_\alpha - 3$$

luego $\frac{n^2}{n!} \longrightarrow 0$ ■

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+5} = \frac{1}{2}$

Sea $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_0$ t.q :

$$0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

$$0 < \frac{3}{n_0} < 3\varepsilon \qquad (1)$$

Vea que $\frac{3}{n} > \frac{3}{4n+10}$, esto porque

$$0 < n < 4n < 4n+10$$

$$\frac{3}{n} > \frac{3}{4n} > \frac{3}{4n+10} > 0 \qquad (2)$$

Así retomando la arg. (1) $\exists\, n_0$ t.q. para $n \geq n_0$

$$\left| \frac{n+1}{2n+5} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{\cancel{2n}+2 \cancel{-2n} - 5}{4n+10} \right|$$

$$= \left| \frac{-3}{4n+10} \right| = \frac{3}{4n+10} < \frac{3}{n} < \frac{3}{n_0} < 3\varepsilon$$

luego $\frac{3}{4n+10} < 3\varepsilon$, $3\varepsilon > 0$

es decir $\frac{n+1}{2n+5} \longrightarrow \frac{1}{2}$.

2. **[1 pt]** Sea $X = (x_n)$ una sucesión de números reales convergente a $x$. Demuestre que si existe $M \geq 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $|x| \leq M$.

$$|x_n| \leq M$$

$$-M \leq x_n \leq M$$

$$\lim_{n\to\infty} -M \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} M$$

$$-M \leq x \leq M$$

$$|x| \leq M$$

■

3. **[1 pt]** Demuestre **utilizando directamente de la definición de sucesión de Cauchy**, que si $X = (x_n)$ es una sucesión de Cauchy y $c \neq 0$, entonces $(cx_n)$ es una sucesión de Cauchy.

para todo $\varepsilon > 0$, existe un natural $H(\varepsilon)$ tal que para todo $n, m \geq H(\varepsilon)$, los términos $x_n, x_m$ satisfacen

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

Digamos $c \neq 0$ :

$$|c|\,|x_n - x_m| = |c(x_n - x_m)| < \varepsilon$$

■