Veamos que si (x_n) es una sucesión convergente a x y z_n es una sucesión tal que $z_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que converge a $z \neq 0$ entonces

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{z_n} = \frac{x}{z}.$$

Dem: En efecto, sea $\varepsilon > 0$ cualquiera como $z_n \to z$, para $\delta = \frac{|z|}{2} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq n_0$ entonces $|z_n - z| < \delta = \frac{|z|}{2}$

tisma)

$$\big| |z_n| - |z| \big| < |z_n - z| < \frac{|z|}{2}$$

$$\big| |z_n| - |z| \big| < \frac{|z|}{2}$$

$$\big| |z_n| - |z| \big| < |z_n - z| < \frac{|z|}{2}$$

$$-\frac{|z|}{2} < |z_n| - |z| < \frac{|z|}{2}$$

$$|z| - \frac{|z|}{2} < |z_n| \cancel{- |z| + |z|}$$

$$\frac{|z|}{2} < |z_n| \Rightarrow \frac{1}{|z_n|} < \frac{2}{|z|}$$

Nuevamente utilicemos el hecho de que $z_n \to z$ aplicando a $\frac{\varepsilon}{2}|z|^2 > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$ entonces:

$$|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}|z|^2 \quad (**)$$

De esta manera si tomamos $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ tenemos:

Para $n \geq n_2$:

$$\left| \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{z - z_n}{z \cdot z_n} \right| = \frac{1}{|z| \cdot |z_n|} \cdot |z - z_n|$$

$$< \frac{1}{|z|} \cdot \frac{2}{|z|} \cdot |z - z_n| \quad \text{por} (*)$$

$$= \frac{2}{|z|^2} \cdot |z - z_n|$$

$$< \frac{2}{|z|^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} |z|^2 \right) \quad \text{por} (**)$$

$$= \varepsilon$$

de esta manera $\frac{1}{z_n} \to \frac{1}{z}$

Por otro lado

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{z_n} = \lim_{n \to \infty} (x_n) \cdot \left(\frac{1}{z_n} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} (x_n) \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{z_n} \right)$$

$$= x \cdot \frac{1}{z} = \frac{x}{z}$$

Propiedades Adicionales de límites

Teorema Suponga que $(x_n) = x$ es una sucesión que converge a x.

Entonces la sucesión $|x| = (|x_n|)$ converge a $|x|$.

Dem: $\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x|$

$\boxed{\text{Tarea}}$

Teorema: Si (x_n) es una sucesión t.q. $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $x \geq 0$.

Dem: supongamos que $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ Razonando por contradicción, supongamos que $x < 0$.

Como $x_n \to x$, la definición de convergencia aplicada a $\varepsilon = -x$, implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq n_0$

entonces:

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < x_n - x < \varepsilon$$

$$-(-x) < x_n - x < \varepsilon = -x$$

$$x < x_n - x < -x$$

$$x + x < x_n - x + x < -x + x$$

$$2x < x_n < 0$$

Pero $x_n < 0$ es absurdo. Por lo tanto $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0$.

Teorema: Si (x_n) y (y_n) son sucesiones convergentes de números reales, t.q. $x_n \to x$, $y_n \to y$ y $x_n \leq y_n$

entonces: $x \leq y$.

Dem: $z_n = y_n - x_n$

$$\lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = z \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n \geq \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$y \geq x$$

Corolario: Sea (x_n) una sucesión convergente a x donde $a \leq x_n \leq b$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $a \leq x \leq b$

Dem: $z = (z_n)$ donde $z_n = a \; \forall n \in \mathbb{N}$

$y = (y_n)$ donde $y_n = b \; \forall n \in \mathbb{N}$

tenemos que $z_n \leq x_n \leq y_n, \; \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} z_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$a \leq x \leq b$$

Teorema: Supongamos que $x = (x_n)$ y $z = (z_n)$ son sucesiones convergentes de números reales tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde (y_n) es otra sucesión de números reales.

Si $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \omega$.

Dem: Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Como $x_n \to x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. Si $n \geq n_0$ entonces:

$$|x_n - \omega| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < x_n - \omega < \varepsilon \qquad (*)$$

Analogamente como $z_n \to z$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq n_1$ entonces.

$$|z_n - w| < \varepsilon \qquad (**)$$

$$-\varepsilon < z_n - w < \varepsilon$$

Sea $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ Así si $n \geq n_2$ entonces

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

$$-\varepsilon < x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w < \varepsilon$$

Así si $n \geq n_2 \Rightarrow |y_n - w| < \varepsilon$.

Concluyo que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = w$.

Ejemplo: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + 3n - 1}{n^3 + 4n} = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-1}{n^3+4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^3} + \frac{3n}{n^3} - \frac{1}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} + \frac{4n}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{2n^2}{n^3}}^{\to 0} + \cancel{\frac{3n}{n^3}}^{\to 0} - \cancel{\frac{1}{n^3}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\cancel{\frac{4n}{n^3}}}_{0}} = \frac{0}{1} = 0$$

equivale a:

$$\left|\frac{2n^2}{n^3+4n}\right| \leq \frac{2n^2}{n^3} = \frac{2}{n}$$

Ejemplo:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0$$

$$-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0$$

Sucesiones monótonas

Def: $x = (x_n)$ una sucesión. Decimos x es creciente si

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \ldots$$

Decimos que X es decreciente si

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Diremos que X es una sucesión monótona si ella es creciente o decreciente.

Spoiler parcial Punto.

Demuestre que una susesión converge a tal número con la def. de límite (con epsilon)