... Series Continuación

Ej: Serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$, $x_n \geq 0$

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

- $n_k = 2^k - 1$

$\rightarrow n_1 = 2^1 - 1 = 1$

$\rightarrow n_2 = 2^2 - 1 = 3$

$\vdots$

$n_k = 2^k - 1$

$S_{n_1} = S_1 = \frac{1}{1^2}$

$S_{n_2} = S_3 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$

$\leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}$

$\vdots$

$S_{n_k} \leq \underbrace{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}}$

Son las sumas parciales de la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Así $S_k = \underset{\text{es acotado}}{|S_k|} \leq \frac{1}{2^0} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}$

Esta serie geométrica converge pues $r = 1/2$, $|r| < 1$.

Ej Serie $p \to \sum^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p>1$. es convergente.

$n_k = 2^{k-1}$

$$S_{n_k} = \frac{1}{(2^{p-1})^0} + \frac{1}{(2^{p-1})^1} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \frac{1}{(2^{p-1})^3} + \dots + \frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}}$$

Que pasa con la serie p, $\sum_{n=1}^{1} \frac{1}{n^p}$ $0<p\leq 1$.
Será divergente.

$$0<p\leq 1 \Rightarrow n^p \leq n \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armónica) diverge a ∞.
las sumas parciales no son acotadas.

Ej: Serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

es convergente.

Consideremos $S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{n}$

Tomemos las subsucesiones (S_{2k}) y (S_{2k+1}).

$$S_{2k} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)^{>0} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^{>0} + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)^{>0}$$

Sucesión Creciente (S_{2k}).

$$S_{2k+1} = \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$>0 \quad >0 \quad >0$

(S_{2k+1}) Sucesión decreciente.

$$0 \leq S_{2k} + \frac{1}{2^{k+1}} = S_{2k+1} \leq 1$$

De esta manera las sucesiones (S_{2k}) y (S_{2k+1}) son acotadas.

(S_{2k}) Acotada monotona $\Rightarrow (S_{2k})$ convergente.

(S_{2k+1}) Acotada monotona $\Rightarrow (S_{2k+1})$ convergente.

Existe

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \left(\lim_{n\to\infty} S_{2n}\right) + 0 = \left(\lim_{n\to\infty} S_{2n}\right) + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \lim \left(S_{2n+1}\right)$$