Teorema toda sucesión tiene una subsucesión monótona.

Dem: Supongamos una sucesión (x_n) de números reales.

Caso 1) Supongamos que (x_n) tiene picos

$$m_1 = \min\{ i \in \mathbb{N} : x_i \text{ es un pico}\}$$

$$m_2 = \min\{ i \in \mathbb{N} : x_i \text{ es un pico } i > m\}$$

$$m_3 = \min\{ i \in \mathbb{N} : x_i \text{ es un pico } i > m_2\}$$

$$\vdots$$

De esta manera tenemos los picos de (x_n) son:

$$x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots$$

Por definición de pico

$$x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq x_{m_3} \ldots$$

Así $x' = (x_{m_i})$ es una subsucesión de (x_n) que es descendiente (monótona).

Caso 2) Supongamos que (x_n) tiene un número finito de picos (posiblemente ninguno).

igual que en el caso 1 puedo suponer que los picos son:

$$x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq x_{m_3} \geq \dots \geq x_{m_r}$$

donde $m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_r$.

Sea $s_1 = m_r + 1$, así x_{s_1} no es un pico. Entonces existe x_{s_2} con $s_1 < s_2$ tal que $x_{s_1} < x_{s_2}$.

Como x_{s_2} no es pico entonces existe x_{s_3} tal que $s_2 < s_3$ y $x_{s_2} < x_{s_3}$

Continuando de esta manera encontramos que

$$x_{s_1} < x_{s_2} < x_{s_3} < \dots < x_{s_n} < \dots$$

donde $s_1 < s_2 < s_3 \dots$

Así $x' = (x_{s_i})$ es una subsucesión de x que es creciente (monótona).

Teorema: [teorema de Bolzano - Weierstrass]

Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Dem: Sea $X = (x_n)$ una sucesión acotada de números reales. Por teorema anterior existe $X' = (x_n)$ subsucesión monótona de $X = (x_n)$.

Como X es acotada X' también es acotada. De esta manera por el teorema de la convergencia monótona, X' converge.

Sucesiones de Cauchy

Mostraremos que hay una equivalencia entre sucesiones de Cauchy y sucesiones convergentes. Este hecho nos ayudará a estudiar la convergencia de sucesiones sin conocer el límite.

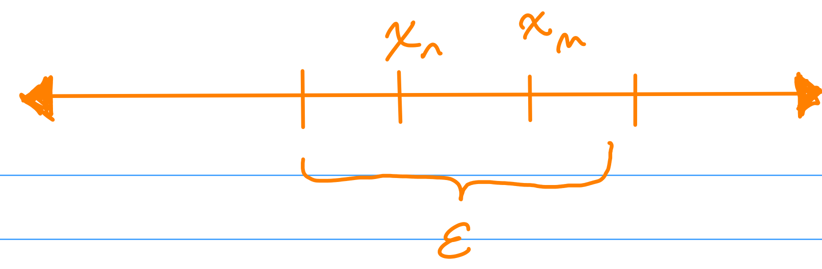
↳ ahora vamos a atacar el problema de saber cosas de la sucesión sin conocer su convergencia.

Def: [Sucesión de Cauchy]

Una sucesión $X = (x_n)$ se denomina de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

Obs:



$m, n \geq n_0$

De manera informal puedo decir que los 2 términos están cerquita tanto que su distancia es menor a ε y yo puedo manipular ese ε.

Vamos a ver que cuando una sucesión converge a x obliga a que los términos también estén cerquita. Por eso que sean de cauchy y convergentes es equivalente.

Ej: Demuestre que la sucesión $\frac{1}{n+3}$ es de cauchy. $\left(\frac{1}{n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$.

la idea

$$\left|x_m - x_n\right| = \left|\frac{1}{m+3} - \frac{1}{n+3}\right| \leq \frac{1}{m+3} + \frac{1}{n+3}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leq \varepsilon$$

Ahora sí lo formal:

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Aplicando la propiedad arquimediana a $\frac{2}{\varepsilon} > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$\frac{2}{3} < m_0$. Así $\frac{2}{\varepsilon} < m_0 < m_0 + 3 = n_0$

De esta manera $\frac{1}{n_0} = \frac{1}{m_0+3} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora bien, si $n, m \geq n_0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \quad y \quad \frac{1}{m+3} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}}$$

$$\left|\frac{1}{n+3} - \frac{1}{m+3}\right| \leq \frac{1}{n+3} + \frac{1}{m+3} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

De esta manera $\left(\frac{1}{n+3}\right)$ es de cauchy ■

Ej: Consideremos la sucesión x_n dada por $x_n = 1 + (-1)^n$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$

$$X = (X_n) = (0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots)$$

Veamos que esta sucesión no es de cauchy.

$\varepsilon_0 = 2$ para este ε_0 tenemos que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n = 2n_0$ y $m = 2n_0+1$ tales que $m, n \geq n_0$ y

$$|X_n - X_m| = |X_{2n_0} - X_{2n_0+1}| = |k - 0| \geq \varepsilon_0$$

Teorema: toda sucesión convergente es de Cauchy.

Dem: Supongamos que (X_n) es una sucesión convergente $X_n \to X$

para $\varepsilon/2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

Si $n \geq n_0$ entonces

$$|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si $m, n \geq n_0$ entonces

$$|X_n - X_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)|$$
$$\leq |x_n - x| + |x_m - x|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Asi (x_n) es de cauchy.

Teorema Toda sucesión de cauchy es acotada.

$$\varepsilon_0 = 1 \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(|X_n - X_m| < 1)$$

$$|X_n| < 1 + |X_{n_0}|$$

n_0

tratar de hacerla