Teorema: Si A y B son conj. infinitos numerables entonces $A \times B$ es infinito numerable.

Dem: Supongamos que A y B son infinitos numerables entonces existen biyecciones $\varphi_1 : \mathbb{N} \to A$ y

$\varphi_2 : \mathbb{N} \to B$.

Por otro lado sabemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es infinito numerable luego existe

$$\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ biyectiva}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{N} &\to A \times B \\ n &\mapsto \Big(\varphi_1(\pi_1(\psi(n))), \\ &\qquad \varphi_2(\pi_2(\psi(n)))\Big) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (k,l) &\mapsto \pi(k,l) = k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (k,l) &\mapsto \pi_2(k,l) = l. \end{aligned}$$

θ es una función biyectiva (Tarea)

Por tanto $A \times B$ es infinito numerable

Obs: Por inducción se puede mostrar que producto finito de conjuntos infinitos numerables es infinito numerable.

Def: [Conjunto Numerable]

Un conjunto numerable es un conjunto finito o infinito numerable.

Teorema: Un conjunto numerable es un conjunto finito o infinito numerable.

a) A es numerable

b) Existe $\varphi : A \to \mathbb{N}$ inyectiva.

c) Existe $\varphi : \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva.

Teorema: un subconjunto de un conjunto numerable es numerable.

Dem: Sea X un conjunto numerable y consideremos $Y \subseteq X$ entonces por teorema anterior existe $\varphi : X \to \mathbb{N}$ una función inyectiva.

Así $\varphi|_Y : Y \to \mathbb{N}$

$y \mapsto \varphi|_Y(y) = \varphi(y)$

es una función inyectiva. Por tanto Y es un conjunto numerable.

Teorema: $\mathbb{Q}$ conjunto de los números racionales es numerable (infinito numerable).

Dem: Sabemos que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ es un conjunto infinito numerable, pues $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^+$ son conjuntos infinitos numerables.

De esta manera existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ biyectiva.

Consideremos
$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+ &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (a,b) &\longrightarrow \frac{a}{b} \end{aligned}$$

función sobreyectiva

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ n &\longrightarrow \lambda(n) = \Theta(\pi_1 \circ \varphi(n), \pi_2 \circ \varphi(n)) \\ & = \Theta(\varphi(n)) \end{aligned}$$

λ es sobreyectiva, pues es compuesta de funciones sobreyectivas. Por teorema anterior $\mathbb{Q}$ es numerable.

Obs: $\mathbb{Q}$ es infinito numerable por que $\mathbb{Q}$ es numerable e infinito ($\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$).

Teorema: Unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

Dem: Supongamos $A = \{A_1, A_2, \dots, \dots\}$ familia de conjuntos numerables, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, existe

$$\varphi_k : \mathbb{N} \longrightarrow A_k$$

Sobreyectiva. Consideremos

$$\theta : \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

$$(n,m) \longrightarrow \theta(n)$$

Veamos que θ es sobreyectiva.

Sea $z \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $z \in A_k$. Como $\varphi_k : \mathbb{N} \longrightarrow A_k$ es sobreyectiva existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_k(l) = z$, es decir

existe $(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que

$$\theta(k, l) = \varphi_k(l) = z$$

Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, entonces existe $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobreyectiva

Por tanto $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ es numerable.

Teorema: $\mathbb{R}$ no es un conjunto numerable.

Dem: Supongamos razonando por contradicción que

$$\mathbb{R} = \{ a_1, a_2, a_3, \dots \}$$

$$a_1 = a_1^{(1)}, a_1^{(2)} a_1^{(3)} a_1^{(4)} \dots$$

$$a_2 = a_2^{(1)}, a_2^{(2)} a_2^{(3)} a_2^{(4)} \dots$$

$$\vdots$$

$$a_i = a_i^{(1)}, a_i^{(2)} a_i^{(3)} a_i^{(4)} \dots$$

tomemos $b = b_1, b_2 b_3 b_4 \dots$ donde

$$b_i = \begin{cases} 0 & a_i^{(i)} \neq 0 \\ 1 & a_i^{(i)} = 0 \end{cases}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Así $b \in \mathbb{R}$ y $a_i \neq b$. Absurdo.