Taller 2 de Topología

1. La **topología euclidiana** (o topología estándar) sobre $\mathbb{R}$ se define como

$$\mathcal{T}_E := \{U \subseteq \mathbb{R} \colon \text{para cada } x \in U \text{ existe } \epsilon > 0 \text{ tal que } (x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq U\}.$$

   a) Pruebe que $\mathcal{T}_E$ es una topología sobre $\mathbb{R}$.

   b) Pruebe que el intervalo (a, b) para $a, b \in \mathbb{R}$ es un abierto en $\mathcal{T}_E$.

2. Sobre $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ definimos la colección $\mathcal{S} = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e\}\}$

   a) Muestre que $\mathcal{S}$ es una subbase para una topología sobre A.

   b) Halle la topología $\mathcal{T}$ sobre A generada por $\mathcal{S}$.

   c) Halle la colección $\mathcal{C}$ de los cerrados en $(A, \mathcal{T})$.

   d) Para el subconjunto $Y = \{a,\ c,\ e\}$ de A, halle la topología del subespacio $\mathcal{T}_Y$.

3. Sobre $\mathbb{R}$ definamos la colección

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{Z}\}$$

   a) Muestre que $\mathcal{T}$ es una topología sobre $\mathbb{R}$.

   b) Describa la colección $\mathcal{C}$ de los cerrados en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

   c) Halle la topología de subespacio $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$.

   d) Para los espacios topologicos $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ y $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$ describa una base para la topología sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

4. Por cada $x \in R$ definimos los conjuntos

$$B_x = \{x \times y : y \in \mathbb{R}\} = \{x\} \times \mathbb{R}$$

   a) Muestre que $\mathcal{B} = \{B_x : x \in \mathbb{R}$ es una base para una topología en $\mathbb{R}^2$.

   b) Describa la topología $\mathcal{T}$ generada por $\mathcal{B}$.

   c) Describa la colección $\mathcal{C}$ de los cerrados en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

5. La **topología de Zariski** en $\mathbb{R}^n$ es la topología generada por la base

$$\mathcal{B}_Z = \{X_f \colon f \text{ es un polinomio en } n \text{ variables}\}, \quad \text{donde} \quad X_f = \{a \in \mathbb{R}^n \colon f(a) \neq 0\}.$$

   a) Probar que la topología de Zariski en $\mathbb{R}$ coincide con la topología del complemento finito.

   b) Pruebe que la topología de Zariski en $\mathbb{R}^2$ no es el producto de la topología de Zariski en $\mathbb{R}$ con si misma.

6. Si $Y \subset X$ es un subconjunto cerrado de X y A es un subconjunto cerrado de Y en la topología de subespacio de Y, entonces A es cerrado en X.

7. Denote por $\mathbb{R}_f$ el conjunto de los números reales con la topología del complemento finito y $\mathbb{R}_u$ el conjunto de los números reales con la topología usal. Describa una base para la topología producto en $\mathbb{R}_f \times \mathbb{R}_u$.

8. Pruebe que la topología de $\mathbb{Z}$ como subespacio de $\mathbb{R}$, con la topología del complemento finito, es la topología del complemento finito.

9. Sea X un espacio topológico cuya topología es la discreta. Describa todos los subconjuntos de X cuya topología de subespacio es la topología trivial.

10. Un espacio topológico X se dice **irreducible** si no se puede expresar en la forma $X = A \cup B$ con $A \neq X$, $B \neq X$, ambos cerrados y no vacíos. Muestre que si X es infinito entonces X con la topología del complemento finito es un espacio topológico irreducible. Muestre que hay espacios topológicos **reducibles** (es decir, que no son irreducibles) con la topología del complemento contable.

11. Muestre que si X es un espacio topológico irreducible, entonces cada subconjunto abierto de X es irreducible con la topología de subespacio.

12. Muestre que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$. **Ayuda:** $(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$.