1. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dada la colección

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, \{3\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, X\}.$$

a) Verifique que $\mathcal{T}$ es una topología sobre X.

b) Halle la colección $\mathcal{C}$ de todos los conjuntos cerrados sobre el espacio $(X, \mathcal{T})$.

c) Halle el interior $IntA$, la clausura $\overline{A}$, y el derivado A' para los siguientes conjuntos:

- $A = \{1, 2, 4\}$
- $A = \{1, 3, 4, 5\}$
- $A = \{3, 4, 5\}$
- $A = \{3, 5\}$

a) Para verificar que τ es una topología sobre X:

- Vea que $\varnothing, X \in \tau$
-

$\{3\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3\} \in \tau$

$\{3\} \cup \{3,4\} = \{3,4\} \in \tau$

$\{3\} \cup \{3,5\} = \{3,5\} \in \tau$

$\{3\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\} \in \tau$

$\{3\} \cup \{3,4,5\} = \{3,4,5\} \in \tau$

$\{3\} \cup \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \tau$

en fin es una topología ...

b) halle la colección C de todos los conjuntos cerrados sobre (X, τ)

$$C = \{\varnothing, X, \{1,2,4,5\}, \{3,4,5\}, \{1,2,5\}, \{1,2,4\}, \{4,5\}, \{1,2\}, \{5\}, \{4\}\}$$

c) Halle Int(A), la clausura $\bar{A}$ y el derivado A' para:

- $A = \{1, 2, 4\}$

int(A)

Union of all opensets contained in A.

$int(A) = \{1,2\}$

$\bar{A}$

$\bar{A} = A \cup A'$
$= \{1, 2, 4\}$

A'

$x \in A'$ sii $x \in \overline{A - \{x\}}$

- $A - \{1\} = \{2,4\}$
  $1 \in \overline{\{2,4\}}$
- $A - \{2\} = \{1,4\}$
  $2 \in \overline{\{1,4\}}$
- $A - \{4\} = \{1,2\}$
  $4 \notin = \overline{\{1,2\}}$

$A' = \{1, 2\}$

- $A = \{1, 3, 4, 5\}$

Int(A)

$int(A) = \{3,4\} \cup \{3\}$
$\cup \{3,4,5\}$

$= \{3,4,5\}$

$\bar{A}$

$\bar{A} = A \cup \emptyset$
$= A$

A'

- $A - \{1\} = \{3, 4, 5\}$
  $1 \notin \overline{\{3,4,5\}}$
- $A - \{3\} = \{1,4,5\}$
  $3 \notin \overline{\{1,4,5\}}$
- $A - \{4\} = \{1, 3, 5\}$
  $4 \notin \overline{\{1,3,5\}}$
- $A - \{5\} = \{1, 3, 4\}$
  $5 \notin \overline{\{1,3,4\}}$

2. Sobre $\mathbb{R}$ definamos la colección

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{Z}\}$$

a) Muestre que $\mathcal{T}$ es una topología sobre $\mathbb{R}$.

b) Describa la colección $\mathcal{C}$ de los cerrados en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

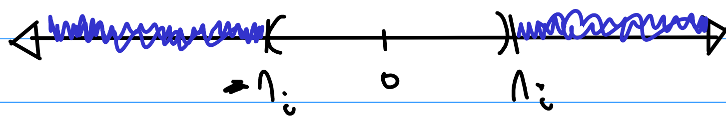
c) Halle el interior $IntA$, la clausura $\overline{A}$, y el derivado A' para los siguientes conjuntos:

- $A = (-3, 5)$
- $A = (1, 4]$
- $A = (-\infty, 8)$

a) Muestre que τ es una topología sobre $\mathbb{R}$.

- Por def. $\emptyset, \mathbb{R} \in \tau$
- $\bigcup_i (-r_i, r_i) = (-\max(\{r_i\}_i), \max(\{r_i\}_i)) \in \tau$.
- $\bigcap_{i \in B \subset \mathbb{N}} (-r_i, r_i) = (-\min(\{r_i\}_{i\in B}), \min(\{r_i\}_{i\in B})) \in \tau$.

b) Describa la colección $\mathcal{C}$ de cerrados en $(\mathbb{R}, \tau)$



$\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

c) $Int(A)$, clausura $\bar{A}$ y puntos límite para:

- $A = (-3, 5)$

Int(A)	$\bar{A}$	A'
$int(A) = (-3, 3)$	$\bar{A} = A \cup A' = [-3, 5]$	$A' = \{-3, 5\}$

- $A = (1, 4]$

Int(A)	$\bar{A}$	A'
$Int(A) = \emptyset$	$\bar{A} = A \cup A' = [1, 4]$	$A' = \{1, 4\}$

$A = (-\infty, 8)$

$Int(A)$	$\overline{A}$	A'
$Int(A) = (-\infty, 8)$	$\overline{A} = A \cup A'$ $= (-\infty, 8]$	$A' = \{8\}$

3. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. Halle el interior $IntA$, la clausura $\overline{A}$, y el derivado A' para los siguientes conjuntos:

- $A = (-3, 5] \cup (6, \infty)$
- $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$
- $A = (0, 8) \cup (8, 3]$

⋮

⋮

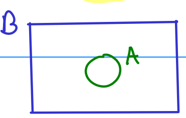
4. Sean A, B, y A_α subconjuntos del espacio X. Pruebe lo siguiente:

   a) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

   b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   c) $\bigcup \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup A_\alpha}$, dé un ejemplo donde no se cumpla la igualdad.

4.a)



partimos de $A \subset B$ consideramos $\overline{A} = A \cup A'$ y $\overline{B} = B \cup B'$, queremos llegar a que $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Supongamos que $\overline{A} \not\subset \overline{B}$, que es $A \cup A' \not\subset B \cup B'$ note que es obligatorio que $A \subset B \cup B'$ por def. de A.

luego tendrá que ser que $A' \not\subset B \cup B'$, note que para un $x \in A'$, cualquier vecindario U_x tiene $U_x \cap A \neq \emptyset$ y adicionalmente $U_x \cap B \neq \emptyset$

Porque $A \subset B$; luego $x \in B'$, como x es arbitrario $A' \subset B'$, lo que contradice que $A' \not\subset B \cup B'$ (=><=).

Contradicción que surge de asumir que $\bar{A} \subset \bar{B}$.
luego si $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$.

(4.b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

observe que:

- $\overline{A \cup B} = (A \cup B) \cup (A \cup B)'$
- $\bar{A} \cup \bar{B} = (A \cup A') \cup (B \cup B')$
  $= (A \cup B) \cup (A' \cup B')$

luego decir que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ es lo mismo que decir que:

$$(A \cup B)' = (A' \cup B')$$

($\subset$) Sea $x \in (A \cup B)'$ vea que todo vecindario U_x es t.q. $U_x \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Note que hay 2 casos:

$$U_x \cap A \neq \emptyset \quad \text{o} \quad U_x \cap B \neq \emptyset, \quad \text{o ambos}$$

es decir $x \in A'$ y/o $x \in B'$, que es $x \in (A' \cup B')$.

($\supset$) Sea $x \in (A' \cup B')$ note sin pérdida de generalidad que para todo vecindario U_x hay que $U_x \cap A \neq \emptyset$, también es trivial que:

$$U_x \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

luego $x \in (A' \cup B')$ también es $x \in (A \cup B)'$ ∎

4.c $\bigcup \overline{A}_\alpha \subset \overline{\bigcup A_\alpha}$