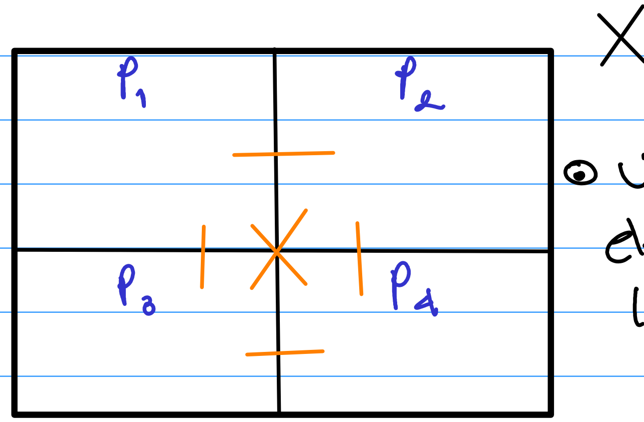
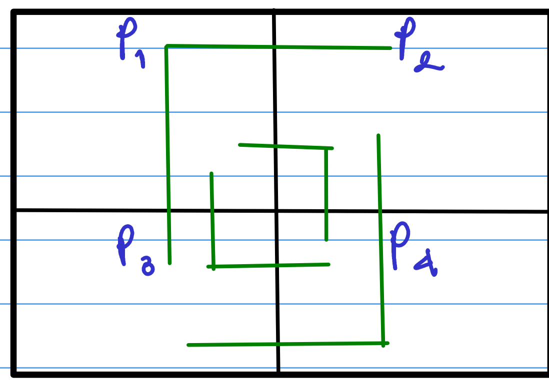
1. (15 pts) Una partición de un conjunto X es una colección de subconjuntos disjuntos (dos a dos) cuya unión es X. En particular, cada partición de X es una sub-base para una topología sobre X. Pruebe que si $\mathcal{S}$ es una partición de X que contiene exactamente 4 subconjuntos, entonces la topología generada por $\mathcal{S}$ tiene exactamente 12 abiertos.



- Uniones de 2 elementos de la partición.



- Uniones de 3 elementos de la partición.

$S = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, como S es subbase podemos ver lo que genera S a partir de uniones arbitrarias, note que al ser particiones no habrán intersecciones entre las partes.

- Probamos las uniones de tamaño 2 de elementos de S:

1. $\{P_1, P_2\}$ 2. $\{P_3, P_4\}$ 3. $\{P_1, P_3\}$

4. $\{P_2, P_4\}$ 5. $\{P_1, P_4\}$ 6. $\{P_3, P_2\}$

⦿ uniones de tamaño 3:

7. $\{P_1, P_2, P_3\}$ 8. $\{P_1, P_3, P_4\}$ 9. $\{P_1, P_2, P_4\}$ 10. $\{P_2, P_4, P_3\}$

⦿ 11. $\{P_1\}$ 12. $\{P_2\}$ 13. $\{P_3\}$ 14. $\{P_4\}$

15. $\emptyset$ 16. X

→ Note que entonces hay 16 abiertos.

2. (15 pts) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Pruebe que si $\{x_0\} \in \mathcal{T}$ para algún $x_0 \in X$, entonces $\{x_0\} \in \mathcal{B}$ para cada base $\mathcal{B}$ que genera la topología $\mathcal{T}$.

Si $\{x_0\} \in \mathcal{T}$ para algún $x_0 \in X$, supongamos que $\{x_0\} \notin \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ genera la topología $\mathcal{T}$ como la colección de uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$ (lema 13.1), pero note que dado $\{x_0\} \notin \mathcal{B}$, es imposible que $\{x_0\} \in \mathcal{T}$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$. Luego $\{x_0\} \in \mathcal{B}$.

3. (20 pts) Denote por $\mathcal{T}_{orden}$ la topología del orden en $\mathbb{Z}$ con respecto al orden usual. Pruebe que $\mathcal{T}_{orden}$ es la topología discreta. **Ayuda:** Es suficiente probar que los subsconjuntos $\{n\}$ son abiertos en la topología del orden. ¿Por qué?

Empecemos por señalar que la base para una topología de orden es el conjunto de intervalos de la forma (a, b) para $a, b \in \mathbb{Z}$.

Note que como $a, b \in \mathbb{Z}$ podemos definirlos de la siguiente manera:

$a = v - 1$, $b = v + 1$ para cualquier $v \in \mathbb{Z}$.
esto es: $(v-1, v+1) = \{v\}$

Ahora como hemos probado, $\{v\} \in \beta$. $\forall v \in \mathbb{Z}$.
Aplicando el lema 13.1, vea que es claro
que la topología generada a partir de β
haciendo una coleción de uniones arbitrarias
de elementos de la base va a ser la
topología discreta. (esto por que a partir de
los elementos de la forma $\{v\}$, $v \in \mathbb{Z}$ y
uniones arbitrarias puedo generarlo todo).