# Taller 1 topo

1. Sea $X = \{1,2,3,4,5\}$. Considere la topología sobre $X$ dada por

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, X\}.$$

b) Halle el interior int$A$, la clausura $\overline{A}$, y el conjunto $A'$ de puntos límites para los siguientes conjuntos:

- * $A = \{1,3,4,5\}$

- $\text{Int}(A) = \{3\} \cup \{3,4\} \cup \{3,5\} \cup \{3,4,5\}$
  $= \{3,4,5\}$

- $A'$, $\overline{A - \{x\}} = X$, con $2 \in X$, $A' = \{2\}$

- $\text{Clausura}(A) = A \cup A' = \{1,2,3,4,5\}$

---

2. Sobre $\mathbb{R}$ definamos la colección

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-n,n) : n \in \mathbb{Z}\}$$

c) Halle el interior int$A$, la clausura $\overline{A}$, y el conjunto $A'$ de puntos límites para los siguientes conjuntos:

- * $A = (1,4]$

- $\text{Int}(A) = \emptyset$
- $A' = \{1\}$
- $\overline{A} = [1,4]$

---

3. Considere $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana. Halle el interior int$A$, la clausura $\overline{A}$, y el conjunto $A'$ de puntos límites para los siguientes conjuntos:

- * $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

- $\text{int}(A) = \emptyset$
- $A' = \{-1, 1\}$
- $\overline{A} = A \cup A' = \left\{(-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1} : n \in \mathbb{Z}^+\right\} \cup \{-1,1\}$

**4.** * Sean $A$, $B$, y $A_\alpha$ subconjuntos del espacio $X$. Pruebe lo siguiente:

a) Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

c) $\bigcup \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup A_\alpha}$, dé un ejemplo donde no se cumpla la igualdad.

a) Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

$$A \cup A' \subseteq B \cup B'$$

Como $A \subseteq B$ la demostración consiste realmente en decir:

$$A' \subseteq B \cup B'$$

Sea $x \in A'$, sabemos que cualquier vecindad $U_x$ contiene a por lo menos un elemento de $A$, llamémoslo $a \in A$. Como $A \subseteq B$, $a \in B$ luego $U_x$ contiene al menos un elemento de de $b$. Como $x$ era arbitrario entonces $A' \subset B'$ luego

$$A' \subseteq B \cup B'.$$

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$(A \cup B) \cup (A \cup B)' = (A \cup A') \cup (B \cup B')$$

$$\cancel{(A \cup B)} \cup (A \cup B)' = \cancel{(A \cup B)} \cup (A' \cup B')$$

$$(A \cup B)' = (A' \cup B')$$

el problema se puede reducir a lo escrito arriba

($\subseteq$) Sea $x \in (A \cup B)'$ entonces una vecindad $U_x$ intersecta con $(A \cup B)'$, eso quiere decir que $U_x \cap A \neq \emptyset$ o $U_x \cap B \neq \emptyset$ luego $(A \cup B)' \subseteq (A' \cup B')$

($\supseteq$) Sea $x \in (A' \cup B')$, note que $U_x \cap A \neq \emptyset$ ó $U_x \cap B \neq \emptyset$ o ambos; luego

$$U_x \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

así que $x$ es punto límite de $(A \cup B)'$.

c) $\bigcup \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup A_\alpha}$

ejemplo donde no se cumple la igualdad:

Para

---

10. Pruebe las siguientes afirmaciones:

c) * Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio Hausdorff y $Y \subset X$ entonces $Y$ con la topología del subespacio $\mathcal{T}_Y$ es una topología Hausdorff.

dado que $(X, \tau)$ es un espacio de hausdorff, podemos tomar $y_1 \neq y_2$ con $y_1, y_2 \in Y$, como $y_1, y_2 \in X$ podemos hacer 2 vecindades disjuntas $U_{y_1}$, $U_{y_2}$.

Si buscamos el correspondiente abierto en la topología del subespacio tenemos:

$$U'_{y_1} = U_{y_1} \cap Y \quad \Big| \quad U'_{y_2} = U_{y_2} \cap Y$$

Si probamos:

$$\begin{aligned} U'_{y_1} \cap U'_{y_2} &= (U_{y_1} \cap Y) \cap (U_{y_2} \cap Y) \\ &= (U_{y_1} \cap U_{y_2}) \cap Y \\ &= \varnothing \cap Y \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

luego 2 abiertos arbitrarios de Y pueden separarse.

12. * Sea $X = \mathbb{R} \cup \{P\}$ donde $P \notin \mathbb{R}$. En $X$ podemos definir la topología $\mathcal{T}_{oo}$ generada por los conjuntos:

- Los intervalos $(a,b) \subset \mathbb{R}$ con $a < b$;
- Las vecindades de $P$ obtenidas como una vecindad de 0, quitando 0 y agregando $P$, es decir, conjuntos de la forma

$$((a,b) - \{0\}) \cup \{P\}, \quad \text{con} \quad a < 0, \; b > 0.$$

a) Pruebe que si $I \subset X$ es cualquier intervalo que contiene a 0 entonces $P \in \overline{I}$. Similarmente, si $V \subset X$ es cualquier vecindad de $P$ entonces $0 \in \overline{V}$.

b) Pruebe que si $A \subseteq X$ es un subconjunto con $0 \in A'$ entonces $P \in A'$.

c) Pruebe que la sucesión $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ como subconjunto de $X$ converge a 0 y a $P$. Es decir, sucesiones en $X$ pueden tener más de un límite.

a.1) si $I \subset X$ es cualquier intervalo que contiene a $0$ entonces esta generado por bases de la forma $(a,b) \subset \mathbb{R}$.
Para poder decir que $P \in \overline{I}$ es necesario decir que $P \in I'$.

Si consideramos una vecindad de $P$, $U_p$ note que para cualquier vecindad por la definición de la base habrá una intersección. Es decir:

$I$ es un intervalo de la forma $(a,b)$, puedo generar $U_p$ con base a un intervalo de la forma de $I$, así:
$\{(a,b) - \{0\}\} \cup \{P\}$, luego es claro que $U_p \cap I \neq \emptyset$.
osea que $P \in I'$.

b) Pruebe que si $A \subseteq X$ es un subconjunto con $0 \in A'$ entonces $P \in A'$.

Si $A \subseteq X$ con $0 \in A'$ hay 2 casos:

- ($0 \in A$:)

$A$ es de la forma $(a,b)$: en cuyo caso es claro por el ejercicio anterior que $P \in A'$.

- ($0 \notin A$:)

$A$ es de la forma $\{(a,b) - \{0\}\} \cup \{P\}$, y cualquier vecindario de $P$

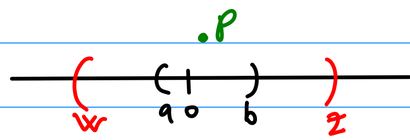
tendrá una intersección distinta de vacío :

esto ocurre por la forma en la que se definen los intervalos que conforman la base, siempre habrá una intersección por que $a<0$ y $b>0$ en la definición del intervalo, esto es claro si vemos las distintas formas :

Sea $U_p$ de la forma:

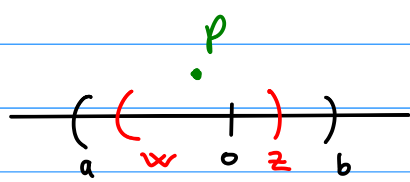
- $\{(w,z)-\{0\}\}\cup\{P\}$, $w<a$, $z>b$ . Es decir $(a,b)\subset(w,z)$

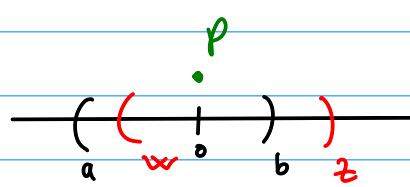
  entonces $(\{(w,z)-\{0\}\}\cup\{P\})\cap A\neq\emptyset$ y contiene más elementos que $U$.




- $\{(w,z)-\{0\}\}\cup\{P\}$, $w>a$, $z<b$ . Es decir $(w,z)\subset(a,b)$

  entonces $(\{(w,z)-\{0\}\}\cup\{P\})\cap A\neq\emptyset$ y contiene más elementos que $U$.




- 


  es decir tiene una intersección pero no se contienen completamente

En todo caso cualquier vecindario de $P$ tiene intersección con $A$ luego $P\in A'$.

c) pruebe que la sucesión $\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$ como subconjunto de $X$ converge a $0$ y a $P$.

Sabemos que si creamos una vecindad arbitraria alrededor de cero capturaremos infinitos puntos de $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ luego la sucesión converge a cero.

Para probar que converge a $P$, podemos pensar en una vecindad arbitraria de $P$,

9.2) Si $V \subset X$ es cualquier vecindad de $P$, entonces $0 \in \overline{V}$.

Como cualquier vecindad de $P$ es de la forma

$$U = \{ (a,b) - \{0\} \} \cup \{P\}$$

Pero note que es claro que cualquier vecindad de cero, $U_0 = (-\varepsilon, \varepsilon)$, se intersecta con $U$, luego cero es un punto límite

---

**18.** * Pruebe que si $f\colon X \to Y$ es continua y $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión que converge a $x \in X$, entonces la sucesión $\{f(x_n)\} \subset Y$ converge a $f(x)$.

Dado $x_n \to x$, considere un vecindario de $f(x)$, digamos $U_{f(x)}$, entonces $f^{-1}(U_{f(x)})$ es un vecindario de $x$.

luego existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(U_{f(x)})$ para $n \geq N$. de esta manera $f(x_n) \in V$ para $n \geq N$.

---

**21.** * Un espacio topológico $X$ es **conexo** si es imposible escribir $X$ como la unión de dos abiertos no vacíos y disjuntos. Es decir, si $X = U \cup V$ con $U, V$ abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$ entonces $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$. Pruebe que conexidad es una propiedad topológica.

Considere la imagen de $X$, es decir $Y$:

$$Y = f(X)$$
$$= f(U \cup V), \text{ como } U = \emptyset \text{ sin perdida de generalidad}$$
$$= f(V)$$
$$= f(V) \cup \emptyset$$
$$= f(V) \cup f(U), \text{ porque } f(U) = \emptyset$$

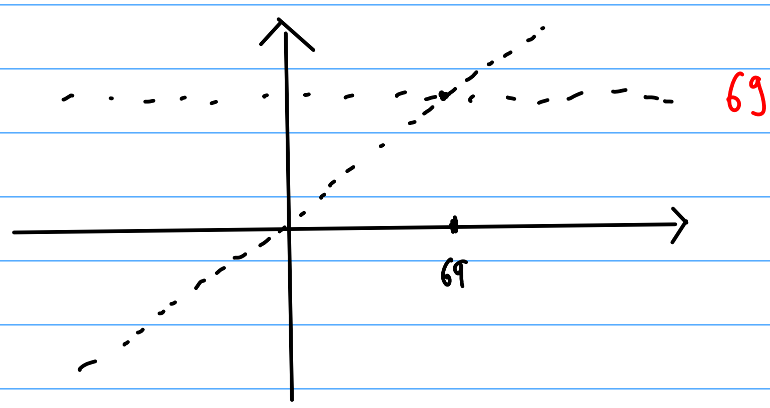
Luego $Y$ es $f(V) \cup f(U)$ con $f(U) = \emptyset$ o $f(V) = \emptyset$.

---

**25.** * Dé un ejemplo de una función que es continua solo en un punto (justifique su respuesta).

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 69 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

debido a que siempre puedo encontrar un irracional entre 2 racionales, y un racional entre 2 irracionales la función va a tener un patrón errático y el único punto donde va a ser continua será $x = 69$



**11.** * Pruebe que $X$ es Hausdorff si y solo si

$$\Delta = \{(x,x) \in X \times X\}$$

es cerrado en la topología producto de $X \times X$.

($\Rightarrow$) Considere un $(x,y) \in X \times X$, $(x,y) \notin \Delta$, es decir $x \neq y$. así existe $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Vea entonces que $U_x \times U_y$ es un elemento de la base de $X \times X$, si se toma cualquier $(w,z) \in U_x \times U_y$ como $U_x \cap U_y = \emptyset$ entonces $w \neq z$.

es decir que $(U_x \times U_y) \cap \Delta = \emptyset$. Luego $(x,y)$ con $(x,y) \notin \Delta$ no pertenece a $\Delta'$.

entonces $\Delta$ debe tener todos los puntos de acumulación lo que lo vuelve cerrado.

($\Leftarrow$) Si $\Delta$ es cerrado en $X \times X$, considere $x \neq y$. $(x,y) \notin \Delta$. $(x,y)$ no es punto límite por razones similares a las de ($\Leftarrow$).

Como $\Delta$ es cerrado y tiene todos sus puntos límite dentro, un vecindario $U_{(x,y)}$ no intersecta a $\Delta$

$$U_{(x,y)} \cap \Delta = \emptyset$$

$U_{(x,y)}$ se puede ver como $Z \times W$, donde $Z$ y $W$ son abiertos de $X$ con $x \in Z$ y $y \in W$.

Note que $Z$ y $W$ deben ser disjuntos de lo contrario habría un $(J,J) \in Z \times W$, pero $Z \times W \cap \Delta = \emptyset$. luego $X$ es de hausdorff.