Soluciones Parcial 1

23 de febrero de 2023

Indicaciones generales

- Este es un examen **individual** con una duración de **90 minutos**.
- La calificación máxima de este examen es de 50 puntos.
- No se permite el uso de calculadoras u otros dispositivos electrónicos. Los celulares deben estar apagados durante todo el examen.
- Se permite el uso de una hoja de ayuda individual, escrita a mano, con dimensiones máximas de 14×21cm (media hoja tamaño carta). Pueden usarse ambos lados de la hoja.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva a la anulación del examen.
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- ¡Éxitos y ánimo!

1. (**15 pts**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $S_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$.

   a) Muestre que la colección $\mathcal{B} = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base para una topología sobre $\mathbb{N}$.

   Solución: Primero, note que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n \in S_n$ y por tanto $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ (de hecho, $\mathbb{N} = S_1$). Por otro lado, si $m \leq k$ entonces $S_m \cap S_k = S_k$, lo que demuestra que $\mathcal{B}$ satisface los axiomas de base para una topología.

   b) ¿Es $\mathcal{B}$ una topología?

   Solución: Note que $\mathcal{B}$ no es una topología ya que $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Sin embargo, cabe observar que si $A \subseteq \mathbb{N}$ y $a_0 \in A$ es el primer elemento de A, entonces

$$\bigcup_{n\in A} S_n = S_{a_0},$$

   y por tanto $\mathcal{T} = \mathcal{B} \cup \{\emptyset\}$ es una topología (ya que el argumento anterior junto con parte (a) garantiza que la colección $\mathcal{T}$ es cerrada bajo intersecciones finitas y uniones arbitrarias, además de contener $\emptyset$ y $\mathbb{N} = S_1$). En efecto, $\mathcal{T}$ es la topología generada por $\mathcal{B}$.

   c) Sea $\mathcal{T}_f = \{U \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} - U \text{ es finito}\}$ la topología del complemento finito sobre $\mathbb{N}$. Muestre que la topología $\mathcal{T}_f$ es estrictamente más fina que la topología $\mathcal{T}$ generada por $\mathcal{B}$.

   Solución: Note que $\mathbb{N} - S_n = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ es finito y por tanto $S_n \in \mathcal{T}_f$. Como $\mathcal{T}_f$ contiene a la base $\mathcal{B}$, entonces contiene a la topología generada por $\mathcal{B}$. Por otro lado, ya que la topología generada por $\mathcal{B}$ es $\mathcal{T}$, entonces los complementos de los abiertos en $\mathcal{T}$ son $\emptyset$ o de la forma $\{1, 2, \ldots, k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, el conjunto $\mathbb{N} - \{1, 3\} \in \mathcal{T}_f$ no es un elemento de $\mathcal{T}$, lo que muestra que $\mathcal{T}_f$ es estrictamente más fina que $\mathcal{T}$.

2. (**15 pts**) Considere el conjunto $A = [1,2] \times [0,\infty)$ y denote sus elementos por $x \times y$. Recuerde que el orden del diccionario en A se define de la siguiente manera:

$$x_1 \times y_1 < x_2 \times y_2 \iff (x_1 < x_2) \text{ o } (x_1 = x_2 \text{ y } \ y_1 < y_2).$$

a) Describa una base para la topología del orden $\mathcal{T}_<$ sobre A.

Solución: Ya que 1×0 es el elemento mínimo de A y al mismo tiempo A no tiene elemento máximo, entonces una base para la topología del orden en A esta formada por la colección de intervalos (en el orden del diccionario) de la forma:

$$(a \times b, c \times d),$$
$$[1 \times 0, c \times d).$$

b) Sea $Y = [1,2] \times \{0\} \subset A$. Describa una base para la topología de subespacio $(\mathcal{T}_<)_Y$.

Solución: Recordemos que si $\mathcal{B}$ es una base para una topología $\mathcal{T}$ sobre X y $Y \subseteq X$, entonces una base para la topología de subespacio en Y esta dada por

$$\mathcal{B}_Y = \{Y \cap B \colon B \in \mathcal{B}\}.$$

Por tanto, una base para la topología de $Y = [1,2] \times \{0\}$, como subespacio de A, está dada por la colección de subconjuntos de la forma:

$$Y \cap (a \times b, c \times d),$$
$$Y \cap [1 \times 0, c \times d).$$

Ahora, si queremos entender en más detalle la forma de estos subconjuntos, note que

$$\begin{aligned} Y \cap (a \times b, c \times d) &= \{\alpha \times 0 \in Y \colon a \times b < \alpha \times 0 \ \text{ y } \ \alpha \times 0 < c \times d\} \\ &= \{\alpha \times 0 \in Y \colon (a < \alpha) \ \text{ y } \ (\alpha < c \ \text{ o } \ \alpha = c \ \text{ cuando } \ d > 0)\}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$Y \cap (a \times b, c \times d) = \begin{cases} (a,c) \times \{0\} & \text{si } d = 0 \\ (a,c] \times \{0\} & \text{si } d > 0. \end{cases}$$

Similarmente,

$$Y \cap [1 \times 0, c \times d) = \begin{cases} [1,c) \times \{0\} & \text{si } d = 0 \\ [1,c] \times \{0\} & \text{si } d > 0. \end{cases}$$

3. (**15 pts**) Sobre $A = \{a,\ b,\ c\}$ definimos las colecciones

$$\mathcal{S}_1 = \{\{a, b\}, \{b, c\}\} \ \text{ y } \ \mathcal{S}_2 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$$

a) Muestre que $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son subbases para algunas topologías sobre A.

Solución: Solo es necesario observar que $\bigcup \mathcal{S}_1 = A$ y $\bigcup \mathcal{S}_2 = A$, que es precisamente la definición de subbase.

b) Halle las topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ sobre A generadas por $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, respectivamente.

Solución: Recuerde que la base generada por una subbase es el conjunto de todas las posibles intersecciones finitas de elementos de la subbase. Y que la topología generada por una base consiste de todas las posibles uniones de elementos de la base. Con esto en mente, obtenemos:

- La base $\mathcal{B}_1$ generada por la subbase $\mathcal{S}_1$ es

$$\mathcal{B}_1 = \{\{a, b\},\ \{b, c\},\ \{b\}\}.$$

- La topología $\mathcal{T}_1$ generada por la base $\mathcal{B}_1$ es

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset,\ A,\ \{a, b\},\ \{b, c\},\ \{b\}\}.$$

- La base $\mathcal{B}_2$ generada por la subbase $\mathcal{S}_2$ es

$$\mathcal{B}_2 = \{\{a, b\},\ \{c\},\ \emptyset\}.$$

- La topología $\mathcal{T}_2$ generada por la base $\mathcal{B}_2$ es

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset,\ A,\ \{a, b\},\ \{c\}\}.$$

c) Halle una base para la topología producto sobre $A_1 \times A_2$ donde A_1 es el espacio topológico $(A, \mathcal{T}_1)$ y A_2 es el espacio topológico $(A, \mathcal{T}_2)$.

Solución: Aunque hay varias bases para la topología producto, quizas la mas económica es

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{A_1 \times A_2} &= \{B \times C \colon B \in \mathcal{B}_1,\ C \in \mathcal{B}_2\}\\ &= \{\emptyset, \{a, b\} \times \{c\},\ \{b, c\} \times \{c\},\ \{b\} \times \{c\},\ \{a, b\} \times \{a, b\},\ \{b, c\} \times \{a, b\},\ \{b\} \times \{a, b\}\}\end{aligned}$$

4. (**10 pts**) Un espacio topológico X se dice **irreducible** si no se puede expresar en la forma $X = A \cup B$ con $A \neq X$, $B \neq X$, ambos cerrados y no vacíos.

   a) Muestre que si X es infinito entonces X con la topología del complemento finito es un espacio topológico irreducible.

   Solución: Note que los cerrados (diferentes de X) en la topología $\mathcal{T}_f$ del complemento finito son precisamente los subconjuntos finitos de X. Por tanto, si X no fuese irreducible, podriamos escribir

   $$X = A \cup B$$

   con A y B cerrados no vacíos con $A \neq X$ y $B \neq X$. Es decir, X sería la unión de dos subconjuntos finitos de X, lo cual es imposible si X es infinito.

   b) De un ejemplo de un conjunto X que junto a la topología del complemento contable **NO** es irreducible.

   Solución: Similarmente al punto anterior, los cerrados (diferentes de X) en la topología del complemento contable son precisamente los subconjuntos contables de X. Entonces, siguiendo la misma línea de razonamiento usada en la parte (a), un espacio topológico que no es irreducible en la topología del complemento contable debería poderse escribir como una unión de dos subconjuntos contables y no vacíos. Esto es fácil de conseguir, por ejemplo, cosidere en $\mathbb{N}$ los subconjuntos

   $$A = \{n \in \mathbb{N} \colon\ n \text{ es par}\},\ B = \{n \in \mathbb{N} \colon\ n \text{ es impar}\}.$$

   Claramente, $A, B \neq \mathbb{N}$, son cerrados en la topología del complemento contable porque son subconjuntos contables de $\mathbb{N}$, y además son no vacíos. Adicionalmente,

   $$\mathbb{N} = A \cup B$$

   lo que muestra que $\mathbb{N}$, con la topología del complemento contable, no es irreducible.