Taller 3 de Topología

1. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dada la colección

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, \{3\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, X\}.$$

   a) Verifique que $\mathcal{T}$ es una topología sobre X.

   b) Halle la colección $\mathcal{C}$ de todos los conjuntos cerrados sobre el espacio $(X, \mathcal{T})$.

   c) Halle el interior $IntA$, la clausura $\overline{A}$, y el derivado A' para los siguientes conjuntos:

      - $A = \{1, 2, 4\}$
      - $A = \{1, 3, 4, 5\}$
      - $A = \{3, 4, 5\}$
      - $A = \{3, 5\}$

2. Sobre $\mathbb{R}$ definamos la colección

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{Z}\}$$

   a) Muestre que $\mathcal{T}$ es una topología sobre $\mathbb{R}$.

   b) Describa la colección $\mathcal{C}$ de los cerrados en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

   c) Halle el interior $IntA$, la clausura $\overline{A}$, y el derivado A' para los siguientes conjuntos:

      - $A = (-3, 5)$
      - $A = (1, 4]$
      - $A = (-\infty, 8)$

3. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. Halle el interior $IntA$, la clausura $\overline{A}$, y el derivado A' para los siguientes conjuntos:

   - $A = (-3, 5] \cup (6, \infty)$
   - $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$
   - $A = (0, 8) \cup (8, 3]$

4. Sean A, B, y A_α subconjuntos del espacio X. Pruebe lo siguiente:

   a) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

   b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   c) $\bigcup \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup A_\alpha}$, dé un ejemplo donde no se cumpla la igualdad.

5. Sean A, B, y A_α subconjuntos del espacio X. Determine si las siguientes igualdades se cumplen; si alguna igualdad es falsa, determine si alguna de las contenencias $\subset$ o $\supset$ se cumple

   a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) $\bigcap \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcap A_\alpha}$.

c) $\overline{A - B} = \overline{A} - \overline{B}$

6. Sea X un espacio topológico. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) X es T_1 : Para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen entornos U de x y V de y tales que $x \notin V$ y $y \notin U$.

   b) Para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado.

7. Determine cuáles de los siguientes espacios son de Hausdorff y cuáles son T_1. En cada caso justifigue su respuesta.

   a) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ con $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

   b) $\mathbb{Z}$ con $\mathcal{T}_{cc} = \{U \subset \mathbb{Z} : \mathbb{Z} - U \text{ es contable}\}$.

8. Sea $(\mathbb{R}^2, \mathbb{T}_<)$ con $<$ el orden del diccionario. Diga si las siguientes sucesiones convergen o no. Justifique la respuesta.

   a) $\{(1 - 1/n) \times 1 : n \in \mathbb{Z}^+\}$

   b) $\{0 \times (1/n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$

9. Pruebe las siguientes afirmaciones:

   a) Si X es un conjunto totalmente ordenado, entonces $(X, \mathcal{T}_<)$ es un espacio Hausdorff.

   b) Si $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{H})$ son espacios Hausdorff entonces $X \times Y$ con la topología producto es una topología Hausdorff.

   c) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio Hausdorff y $Y \subset X$ entonces Y con la topología del subespacio $\mathcal{T}_Y$ es una topología Hausdorff.

10. Pruebe que X es Hausdorff si y solo si

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$$

   es cerrado en la topología producto de $X \times X$.

11. Sean $X_1 = (X, \mathcal{T}_1)$ y $X_2 = (X, \mathcal{T}_2)$. Sea $id : X_1 \to X_2$ la función identidad.

   a) Pruebe que id es continua, si y solo si, $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

   b) Pruebe que id es un homeomorfismo, si y solo si, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$

12. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{H})$. Pruebe que las siguientes funciones son continuas:

   a) $\pi_1 : X \times Y \to X$ con $\pi_1(x \times y) = x$.

   b) $\pi_2 : X \times Y \to X$ con $\pi_2(x \times y) = y$.

   c) Dado un $y_0 \in Y$ fijo, $f_{y_0} : X \to X \times Y$ con $f_{y_0}(x) = x \times y_0$.

   d) Dado un $x_0 \in X$ fijo, $g_{x_0} : X \to X \times Y$ con $g_{x_0}(x) = x_0 \times y$.

13. Pruebe que cada una de las siguientes parejas de conjuntos son homeomorfas como subespacios de $\mathbb{R}$ con la topología usual.

    a) $[a, \infty)$ y $[b, \infty)$.
    b) $[a, \infty)$ y $(-\infty, b]$.
    c) $[0, 1)$ y $[a, b)$.
    d) $[0, 1)$ y $[a, \infty)$.

14. Pruebe que los conjuntos $(0, 1)$ y $[0, 1)$ no son homeomorfos.

15. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{H})$ espacios y $f : X \to Y$ una función. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) f es continua.
    b) Si $A \subset X$ entonces $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.