

Taller 3 de Topología

1. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dada la colección

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, X\}.$$

- a) Verifique que \mathcal{T} es una topología sobre X .
- b) Halle la colección \mathcal{C} de todos los conjuntos cerrados sobre el espacio (X, \mathcal{T}) .
- c) Halle el interior $\text{Int}A$, la clausura \bar{A} , y el derivado A' para los siguientes conjuntos:
- $A = \{1, 2, 4\}$
 - $A = \{1, 3, 4, 5\}$
 - $A = \{3, 4, 5\}$
 - $A = \{3, 5\}$

2. Sobre \mathbb{R} definamos la colección

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{Z}\}$$

- a) Muestre que \mathcal{T} es una topología sobre \mathbb{R} .
- b) Describa la colección \mathcal{C} de los cerrados en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
- c) Halle el interior $\text{Int}A$, la clausura \bar{A} , y el derivado A' para los siguientes conjuntos:
- $A = (-3, 5)$
 - $A = (1, 4]$
 - $A = (-\infty, 8)$

3. Sea \mathbb{R} con la topología usual. Halle el interior $\text{Int}A$, la clausura \bar{A} , y el derivado A' para los siguientes conjuntos:

- $A = (-3, 5] \cup (6, \infty)$
- $A = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$
- $A = (0, 8) \cup (8, 3]$

4. Sean A , B , y A_α subconjuntos del espacio X . Pruebe lo siguiente:

- a) Si $A \subset B$ entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$.
- b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
- c) $\bigcup \bar{A}_\alpha \subset \overline{\bigcup A_\alpha}$, dé un ejemplo donde no se cumpla la igualdad.

5. Sean A , B , y A_α subconjuntos del espacio X . Determine si las siguientes igualdades se cumplen; si alguna igualdad es falsa, determine si alguna de las contenencias \subset o \supset se cumple

a) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

- b) $\bigcap \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcap A_\alpha}$.
- c) $\overline{A - B} = \overline{A} - \overline{B}$

6. Sea X un espacio topológico. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) X es T_1 : Para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen entornos U de x y V de y tales que $x \notin V$ y $y \notin U$.
- b) Para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado.

7. Determine cuáles de los siguientes espacios son de Hausdorff y cuáles son T_1 . En cada caso justifique su respuesta.

- a) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ con $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.
- b) \mathbb{Z} con $\mathcal{T}_{cc} = \{U \subset \mathbb{Z} : \mathbb{Z} - U \text{ es contable}\}$.

8. Sea $(\mathbb{R}^2, \mathbb{T}_<)$ con $<$ el orden del diccionario. Diga si las siguientes sucesiones convergen o no. Justifique la respuesta.

- a) $\{(1 - 1/n) \times 1 : n \in \mathbb{Z}^+\}$
- b) $\{0 \times (1/n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$

9. Pruebe las siguientes afirmaciones:

- a) Si X es un conjunto totalmente ordenado, entonces $(X, \mathcal{T}_<)$ es un espacio Hausdorff.
- b) Si (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{H}) son espacios Hausdorff entonces $X \times Y$ con la topología producto es una topología Hausdorff.
- c) Si (X, \mathcal{T}) es un espacio Hausdorff y $Y \subset X$ entonces Y con la topología del subespacio \mathcal{T}_Y es una topología Hausdorff.

10. Pruebe que X es Hausdorff si y solo si

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$$

es cerrado en la topología producto de $X \times X$.

11. Sean $X_1 = (X, \mathcal{T}_1)$ y $X_2 = (X, \mathcal{T}_2)$. Sea $id : X_1 \rightarrow X_2$ la función identidad.

- a) Pruebe que id es continua, si y solo si, $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.
- b) Pruebe que id es un homeomorfismo, si y solo si, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$

12. Sean (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{H}) . Pruebe que las siguientes funciones son continuas:

- a) $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ con $\pi_1(x \times y) = x$.
- b) $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ con $\pi_2(x \times y) = y$.
- c) Dado un $y_0 \in Y$ fijo, $f_{y_0} : X \rightarrow X \times Y$ con $f_{y_0}(x) = x \times y_0$.
- d) Dado un $x_0 \in X$ fijo, $g_{x_0} : Y \rightarrow X \times Y$ con $g_{x_0}(y) = x_0 \times y$.

13. Pruebe que cada una de las siguientes parejas de conjuntos son homeomorfas como subespacios de \mathbb{R} con la topología usual.
- a) $[a, \infty)$ y $[b, \infty)$.
 - b) $[a, \infty)$ y $(-\infty, b]$.
 - c) $[0, 1)$ y $[a, b)$.
 - d) $[0, 1)$ y $[a, \infty)$.
14. Pruebe que los conjuntos $(0, 1)$ y $[0, 1)$ no son homeomorfos.
15. Sean (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{H}) espacios y $f : X \rightarrow Y$ una función. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- a) f es continua.
 - b) Si $A \subset X$ entonces $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.