Taller 1 topo

1. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Considere la topología sobre X dada por

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, X\}.$$

b) Halle el interior $\text{int}A$, la clausura $\overline{A}$, y el conjunto A' de puntos límites para los siguientes conjuntos:

- * $A = \{1, 3, 4, 5\}$

- $\text{Int}(A) = \{3\} \cup \{3,4\} \cup \{3,5\} \cup \{3,4,5\}$
  $= \{3,4,5\}$

- A', $\overline{A - \{x\}} = X$, con $2 \in X$, $A' = \{2\}$

- $\text{Clausura}(A) = A \cup A' = \{1,2,3,4,5\}$

---

2. Sobre $\mathbb{R}$ definamos la colección

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{Z}\}$$

c) Halle el interior $\text{int}A$, la clausura $\overline{A}$, y el conjunto A' de puntos límites para los siguientes conjuntos:

- * $A = (1, 4]$

- $\text{Int}(A) = \emptyset$
- $A' = \{1\}$
- $\overline{A} = [1, 4]$

---

3. Considere $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana. Halle el interior $\text{int}A$, la clausura $\overline{A}$, y el conjunto A' de puntos límites para los siguientes conjuntos:

- * $A = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

- $\text{int}(A) = \emptyset$
- $A' = \{-1, 1\}$
- $\overline{A} = A \cup A' = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cup \{-1, 1\}$

4. * Sean A, B, y A_α subconjuntos del espacio X. Pruebe lo siguiente:

a) Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

c) $\bigcup \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup A_\alpha}$, dé un ejemplo donde no se cumpla la igualdad.

a) Si $A \subseteq B$ entonces $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

$$A \cup A' \subseteq B \cup B'$$

Como $A \subseteq B$ la demostración consiste realmente en decir:

$$A' \subseteq B \cup B'$$

Sea $x \in A'$, sabemos que cualquier vecindad U_x contiene a por lo menos un elemento de A, llamémoslo $a \in A$. Como $A \subseteq B$, $a \in B$ luego U_x contiene al menos un elemento de de B. Como x era arbitrario entonces $A' \subset B'$ luego

$$A' \subseteq B \cup B'.$$

b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$(A \cup B) \cup (A \cup B)' = (A \cup A') \cup (B \cup B')$$

$$\cancel{(A \cup B)} \cup (A \cup B)' = \cancel{(A \cup B)} \cup (A' \cup B')$$

$$(A \cup B)' = (A' \cup B')$$

el problema se puede reducir a lo escrito arriba

($\subseteq$) Sea $x \in (A \cup B)'$ entonces una vecindad U_x intersecta con $(A \cup B)'$, eso quiere decir que $U_x \cap A \neq \emptyset$ o $U_x \cap B \neq \emptyset$ luego $(A \cup B)' \subseteq (A' \cup B')$

($\supseteq$) Sea $x \in (A' \cup B')$, note que $U_x \cap A \neq \emptyset$ ó $U_x \cap B \neq \emptyset$ o ambos; luego

$$U_x \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

así que x es punto límite de $(A \cup B)'$.

c) $\bigcup \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup A_\alpha}$

10. Pruebe las siguientes afirmaciones:

c) * Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio Hausdorff y $Y \subset X$ entonces Y con la topología del subespacio $\mathcal{T}_Y$ es una topología Hausdorff.

dado que (X, τ) es un espacio de hausdorff, podemos tomar $y_1 \neq y_2$ con $y_1, y_2 \in Y$, como $y_1, y_2 \in X$ podemos hacer 2 vecindades disjuntas U_{y_1}, U_{y_2}.

Si buscamos el correspondiente abierto en la topología del subespacio tenemos:

$$U'_{y_1} = U_{y_1} \cap Y \quad \Big| \quad U'_{y_2} = U_{y_2} \cap Y$$

Si probamos:

$$\begin{aligned} U'_{y_1} \cap U'_{y_2} &= (U_{y_1} \cap Y) \cap (U_{y_2} \cap Y) \\ &= (U_{y_1} \cap U_{y_2}) \cap Y \\ &= \emptyset \cap Y \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

luego 2 abiertos arbitrarios de Y pueden separarse.

11. * Pruebe que X es Hausdorff si y solo si

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$$

es cerrado en la topología producto de $X \times X$.

12. * Sea $X = \mathbb{R} \cup \{P\}$ donde $P \notin \mathbb{R}$. En X podemos definir la topología $\mathcal{T}_{oo}$ generada por los conjuntos:

- Los intervalos $(a, b) \subset \mathbb{R}$ con $a < b$;
- Las vecindades de P obtenidas como una vecindad de 0, quitando 0 y agregando P, es decir, conjuntos de la forma

$$((a, b) - \{0\}) \cup \{P\}, \quad \text{con} \quad a < 0, \ b > 0.$$

a) Pruebe que si $I \subset X$ es cualquier intervalo que contiene a 0 entonces $P \in \overline{I}$. Similarmente, si $V \subset X$ es cualquier vecindad de P entonces $0 \in \overline{V}$.

b) Pruebe que si $A \subseteq X$ es un subconjunto con $0 \in A'$ entonces $P \in A'$.

c) Pruebe que la sucesión $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ como subconjunto de X converge a 0 y a P. Es decir, sucesiones en X pueden tener más de un límite.

a) Si $I \subset X$ es cualquier intervalo que contiene a 0 entonces esta generado por bases de la forma $(a,b) \subset \mathbb{R}$.
Para poder decir que $P \in \overline{I}$ es necesario decir que $P \in I'$.

Si consideramos una vecindad de P, U_p note que para cualquier vecindad por la definición de la base habrá una intersección. Es decir:

I es un intervalo de la forma (a,b), puedo generar U_p con base a un intervalo de la forma de I, así:
$\{(a,b) - \{0\}\} \cup \{P\}$, luego es claro que $U_p \cap I \neq \emptyset$.
osea que $P \in I'$.

b) Pruebe que si $A \subseteq X$ es un subconjunto con $0 \in A'$ entonces $P \in A'$.

Si $A \subseteq X$ con $0 \in A'$ hay 2 casos:

- $(0 \in A:)$

A es de la forma (a,b): en cuyo caso es claro por el ejercicio anterior que $P \in A'$.

- $(0 \notin A:)$

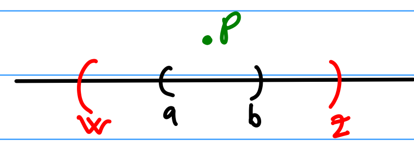
A es de la forma $\{(a,b) - \{0\}\} \cup \{P\}$, y cualquier vecindario de P

tendrá una intersección distinta de vacío :

Sea U_p de la forma:

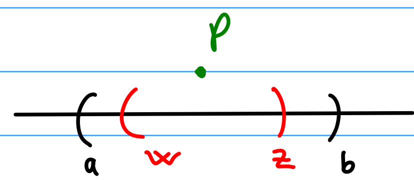
- $\{(w,z)-\{0\}\}\cup\{p\}$, $w<a$, $z>b$. Es decir $(a,b)\subset(w,z)$

  entonces $(\{(w,z)-\{0\}\}\cup\{p\})\cap U_p\neq\emptyset$ y contiene más elementos que U.



- $\{(w,z)-\{0\}\}\cup\{p\}$, $w>a$, $z<b$. Es decir $(w,z)\subset(a,b)$

  entonces $(\{(w,z)-\{0\}\}\cup\{p\})\cap U_p\neq\emptyset$ y contiene más elementos que U.



-