Parcial 2–Soluciones

13 de abril de 2023

1. (**15 pts**) Sean $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la siguiente topología sobre X :

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, X\}.$$

   a) Halle el interior $IntA$, la clausura $\overline{A}$, y el conjunto A' de puntos límites del conjunto $A = \{1, 4, 5\}$.

   Solución: Tenemos $Int(A) = \{4, 5\}$, $A' = \{3, 5\}$ y $\bar{A} = \{1, 3, 4, 5\}$.

   b) Determine si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio Hausdorff.

   Solución: X no es Hausdorff porque, por ejemplo, cada vecindad de 1 contiene a 2 y por tanto 1 y 2 no se pueden separar por abiertos. Lo mismo sucede con 5 y 4, y con 3 y 2 respectivamente.

2. (**15 pts**) Recuerde que la norma estándar en $\mathbb{R}^2$ se define como

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \text{donde } \vec{x} = (x_1, x_2).$$

   Definamos la métrica m sobre $\mathbb{R}^2$ como

$$m(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| & \text{si } \vec{x} \neq \vec{y} \\ 0 & \text{si } \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

   a) Pruebe que m en efecto satisface los axiomas de métrica.

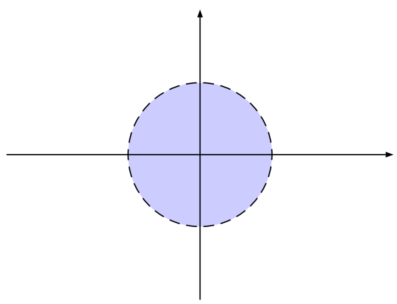
   Solución: Verificaremos las tres propiedades:

   - $m(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ porque $\|\vec{x}\| \geq 0$ y $\|\vec{y}\| \geq 0$ para todos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$. Más aún, si $m(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ y $\vec{x} \neq \vec{y}$ entonces $\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| = 0$, lo cual solo es posible si $\vec{x} = \vec{0} = \vec{y}$, una contradicción. Por tanto, $m(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ si y solo si $\vec{x} = \vec{y}$.
   - $m(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| = \|\vec{y}\| + \|\vec{x}\| = m(\vec{y}, \vec{x})$.
   - $m(\vec{x}, \vec{z}) = \|\vec{x}\| + \|\vec{z}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{z}\| + 2\|\vec{y}\| = m(\vec{x}, \vec{y}) + m(\vec{y}, \vec{z})$.

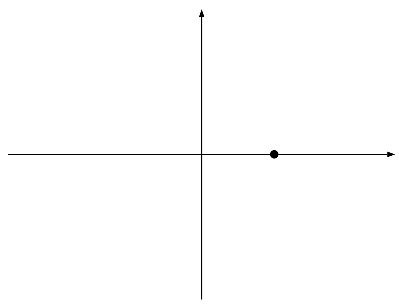
   b) Dibuje en el plano las siguientes bolas abiertas $B_m((0, 0); 1)$, $B_m((1, 0); 1)$ y $B_m((1, 0), 2)$.

Solución: Primero es conveniente describir los elementos de estos conjuntos:

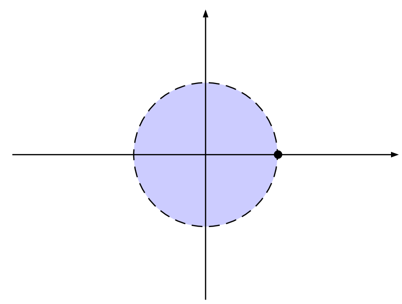
$$\begin{aligned}
B_m((0,0);1) &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \colon m(\vec{x},\vec{0}) < 1\} \\
&= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\vec{x}\| + 0 < 1\} \cup \{\vec{0}\} \\
&= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\vec{x}\| < 1\}; \\
B_m((1,0);1) &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \colon m(\vec{x},(1,0)) < 1\} \\
&= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\vec{x}\| + \|(1,0)\| < 1\} \cup \{(1,0)\} \\
&= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\vec{x}\| < 0\} \cup \{(1,0)\} \\
&= \{(1,0)\}; \\
B_m((1,0);2) &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \colon m(\vec{x},(1,0)) < 2\} \\
&= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\vec{x}\| + \|(1,0)\| < 2\} \cup \{(1,0)\} \\
&= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\vec{x}\| < 1\} \cup \{(1,0)\}.
\end{aligned}$$



$B_m((0,0);1)$



$B_m((1,0);1)$



$B_m((1,0);2)$

3. (**15 pts**) Sea (X,d) un espacio métrico. Pruebe que si $x,y \in X$ son tales que $d(x,y) = \varepsilon > 0$, entonces
$$B_d(x;\varepsilon/2) \cap B_d(y;\varepsilon/2) = \emptyset.$$
Concluya que X es Hausdorff. Use esta conclusión para dar un ejemplo de un espacio topológico no metrizable.

Solución: Si $z \in B_d(x;\varepsilon/2) \cap B_d(y;\varepsilon/2)$ entonces
$$\begin{aligned} d(z,x) &< \varepsilon/2 \\ d(z,y) &< \varepsilon/2. \end{aligned}$$
Por tanto, la desigualdad triangular implica que
$$\varepsilon = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = d(z,x) + d(z,y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$
lo cual es una contradicción. Esto implica que tal z no puede existir, es decir, $B_d(x;\varepsilon/2) \cap B_d(y;\varepsilon/2) = \emptyset$. Note que esto prueba que todo espacio métrico X es Hausdorff ya que para todos $x,y \in X$ con $x \neq y$ tenemos $d(x,y) > 0$ y por tanto existen dos vecindades $B_d(x;\varepsilon/2)$ y $B_d(y;\varepsilon/2)$ que no se intersectan. Así que para dar un ejemplo de un espacio topológico que no es metrizable es suficiente dar un ejemplo de un espacio topológico que no es Hausdorff, como el espacio topológico del primer ejercicio de este parcial.

4. (**10 pts**) Sea (X, d) un espacio métrico y $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Suponga que existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot d(x, y), \quad \text{para todos } x, y \in X.$$

Pruebe que f es continua.

Solución: Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta = \varepsilon / M > 0$. Entonces dados $x, y \in X$ tales que $d(x, y) < \delta$ tenemos

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot d(x, y) < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Por tanto, la función f es continua como función entre espacios métricos.