Universidad del Rosario

Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación – MACC

Taller 2. ***Análisis Numérico y Computación Científica***

1. Diferenciación numérica:
   a. Haciendo uso de las fórmulas de tres y cinco puntos, encuentre el valor de la derivada de:
      i. $y = \tan\frac{x}{3}$ en $x = 3$ con $h = 0.1$
      ii. $y = e^x + x$ en $x = 2$ con $h = 0.2$
   b. Calcular la primera derivada de $y = \cos x$ en $x = \pi/4$. Para ello emplee la extrapolación de Richardson con un paso $h_1 = \frac{\pi}{3}$ y $h_2 = \frac{\pi}{6}$. Realice los cálculos haciendo uso de la fórmula de tres puntos de punto medio.
   c. La distribución normal se define como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

   Determine los puntos de inflexión de esta función.

2. Integración numérica:
   a. Evalúe la siguiente integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (6 + 3\cos x)dx$$

      i. En forma analítica.
      ii. Con una sola aplicación de la regla del trapecio.
      iii. Con aplicación múltiple de la regla del trapecio (n=2 y n=4).
      iv. Con una sola aplicación de la regla de Simpson 1/3.
      v. Con aplicación múltiple de la regla de Simpson 1/3 (n=4).
      vi. Con una sola aplicación de la regla de Simpson 3/8.
      vii. Con aplicación múltiple de la regla de Simpson 3/8 (n=6).
      viii. Encontrar el error relativo porcentual para cada caso.

   b. La cantidad de masa (mg) transportada por un tubo durante un período de tiempo que va de $t_1(min)$ (tiempo inicial) a $t_2(min)$ (tiempo final), se calcula con:

$$M = \int_{t_1}^{t_2} Q(t)c(t)dt$$

Donde $Q(t)\left(\frac{m^3}{\min}\right)$ es la tasa de flujo y $c(t)\left(\frac{mg}{m^3}\right)$ es la concentración. La tasa de flujo y la concentración se encuentran definidas como se muestran a continuación:

$$Q(t) = 9 + 5\cos^2(0.4)t$$
$$c(t) = 5e^{-0.5t} + 2e^{0.15t}$$

Determine la masa transportada entre un tiempo inicial de 2 minutos y un tiempo final de 8 minutos, con integración de Romberg para una tolerancia de 0.1%.

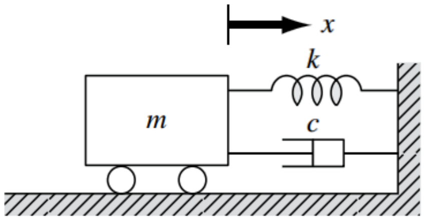
c. Empleando la ecuación de caída libre de un paracaidista, definida como:

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\left(\frac{c}{m}\right)t}\right)$$

Donde $v(t)$ es la velocidad $\left(\frac{m}{s}\right)$, t es el tiempo (s), g es la gravedad $\left(\frac{9.81m}{s^2}\right)$, m es la masa (kg), y c es el coeficiente de arrastre lineal $\left(\frac{kg}{s}\right)$. Use la integración de Romberg para la calcular la distancia que a la que viaja un paracaidista de $80Kg$, durante los primeros 8 segundos, teniendo en cuenta un coeficiente de arrastre de $10Kg/s$. Calcule la respuesta con un error relativo de 1%.

3. Problemas de valores iniciales:
   a. La siguiente ecuación describe el flujo de agua en un tanque cilíndrico vertical cuando se abre una válvula en la base para drenarlo:
   $$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$
   k es una constante que depende de la forma del agujero y del área de la sección transversal del tanque y del agujero de drenaje. La profundidad del agua y se mide en metros y el tiempo t en minutos. Asumiendo un $k = 0.06$, calcule el tiempo que se requiere para vaciar el tanque si el nivel del fluido se encuentra inicialmente en 3m. Resuelva con el método de RK4 usando un paso de 0.25 minutos.
   b. Encuentre la solución del siguiente problema de valor inicial teniendo en cuenta que $0 \leq x \leq 1$, $h = 0.05$ y $y(0) = 1$. Grafique todos los resultados en una misma figura.
   $$\frac{dy}{dx} = (1 + 4x)\sqrt{y}$$
      i. Analíticamente.
      ii. Método de Euler.
      iii. Método de Punto Medio.
      iv. Método de Euler Modificado.
      v. Método de Runge-Kutta de cuarto orden.

c. El movimiento de un sistema de masa resorte como el mostrado en la figura, se encuentra definido por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Donde x corresponde al desplazamiento desde la posición de equilibrio en metros, t es el tiempo en segundos, m es la masa en kilogramos, k es la constante del resorte en N/m y c es el coeficiente de amortiguamiento en $N \cdot m/s$. Resuelva la ecuación asumiendo que $m = 20\ kg$, $k = 20\ N/m$, $x(0) = 1$, la velocidad inicial es cero,el intervalo de tiempo es $0 \leq t \leq 15$ y la constante de amortiguamiento tomará los valores de $5, 40$ y 200 para que el sistema se comporte de forma subamortiguada, amortiguada críticamente y sobreamortiguada, respectivamente. Grafique el x vs. t para los tres casos.

d. Una población puede simularse mediante el siguiente modelo logístico:

$$\frac{dp}{dt} = k\left(1 - \frac{p}{* p_{máx}}\right)p$$

donde p es la población en millones de personas, k es la tasa de crecimiento en condiciones ilimitadas $(0.026/año)$ y $p_{máx}$ es la capacidad de carga (12000 millones de personas). Simule la población mundial entre 1950 y 2000 usando como condiciones iniciales:

t	1950	1960	1970	1980	1990	2000
p	2555	3040	3708	4454	5276	6079

i. Por el método de Euler.
ii. Por el método de RK4.
iii. Por algún método de interpolación.
iv. Grafique las tres aproximaciones en una misma figura y discuta su resultado.

e. Emplee el método de Runge – Kutta Fehlberg para dar solución a las siguientes ecuaciones:

i. $y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$ con $0 \leq x \leq 2$, $h = 0.2$, $y(0) = 2$ y $\varepsilon = 10^{-5}$
ii. $y' = 10e^{-\frac{(x-2)^2}{2(0.075)^2}} + 0.6y$ con $0 \leq x \leq 4$, $h = 0.25$, $y(0) = 0.5$ y $\varepsilon = 10^{-5}$