Taller 2

David Alsina, Juan Luis Ávila , Jairo Gudiño, y Carlos Andres Muñoz

Febrero 2021

1. Conjunto de Mandelbrot y Julia

El conjunto de Julia hace referencia al conjunto de números complejos z tal que al evaluarlos en una función $f_w(z) = g(z) + c$, donde $g(z)$ es una función holomorfa y $c \in \mathbb{C}$, esta converge. En este taller, particularmente creamos conjuntos de Julia a partir de la función $f_w(z) = z^n + c$, en la que $n \in \mathbb{R}^+$.

El conjunto de Mandelbrot es el caso especial en el que n es igual a 2, por lo que se seguirá la notación más general $n > 0$, donde n pertenece a los reales positivos.

Los colores que vemos en las imágenes de fractales dependen de un cálculo muy simple que se deriva de ésta idea: dado un conjunto de puntos que hacen parte de un círculo, para cada uno de ellos se calcula el número de iteraciones que son necesarias hasta obtener un valor mayor a 2 y dependiendo de éste número se asigna un color determinado.

Para recrear un video, se puede ir cambiando el centro de la imagen a partir de la cual se determinan los valores de los números complejos a evaluarse o el radio, cuya disminución hace un zoom de la imagen y recrea un conjunto en movimiento.

2. La implementación

La estructura de código usada para implementar *la animación del conjunto de mandelbrot* fue:

1. ```
   function [color] = checkForMandelbrotSet(z0,
   maxIterations)
   ```

   crear una función (*checkForMandelbrotSet*) que recibe el z_0 y el número máximo de iteraciones (para intentar encontrar si el número z_0 está o no en el conjunto de mandelbrot), dicha función se encarga de aplicar a este complejo la función de mandelbrot, revisando en qué número de iteración z_0 dejaba de hacer parte del conjunto de mandelbrot y asignando a este número de iteración un color, que luego será retornado.

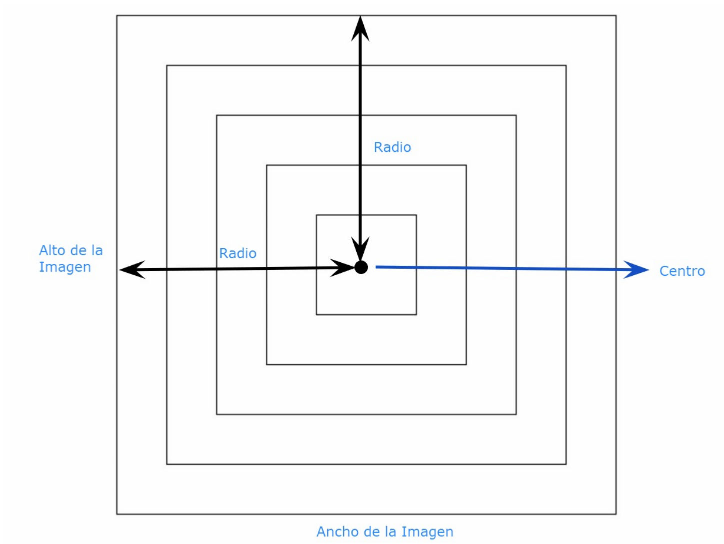
2. ```
   function [complexGrid, xRange, yRange] =
   createComplexGrid(img_widht, img_height, center , radius)
   ```

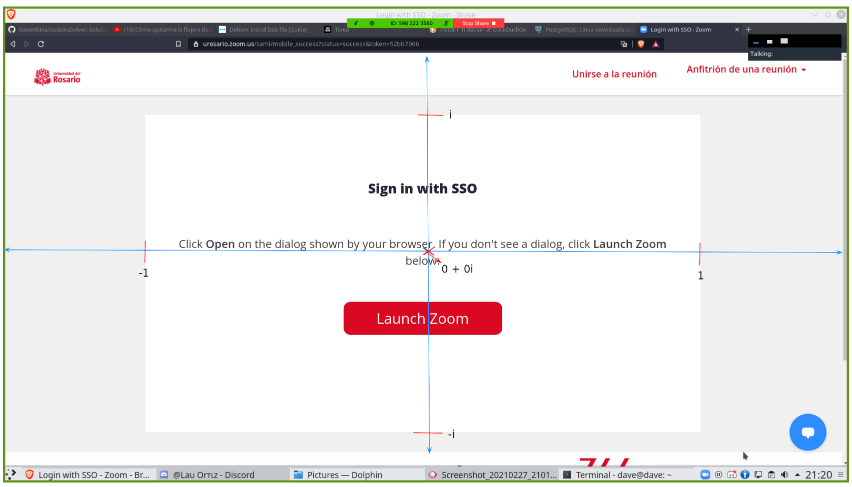
Función que crea una malla de numeros complejos a partir de un punto central en el plano complejo *(centro)*, y un intervalo que viene dado por la variable *radious*, ej: si el centro es centro $= 0 + 0i$ y el radio es 2, la malla sería creada apartir de intervalos $[-2, 2]$, y $[-2i, 2i]$ y podría entenderse como el producto cartesiano entre ambos intervalos. Toda esta operación se hace teniendo en cuenta las dimensiones de la imagen que se desea crear que vienden dadas por los parametros *img_widht e img_height*.

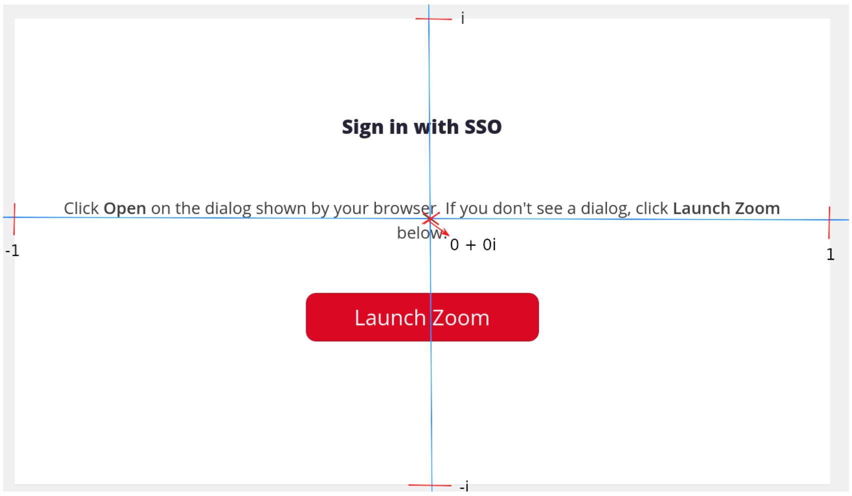
3. **La conjunción de todo en la animación:**

   Usando la función *createComplexGrid* podemos crear la malla de valores necesarios para ser evaluados dentro de la función de *checkForMandelbrotSet*, y una vez se obtienen todos los colores correspondientes a cada una de las casillas de tal malla de valores complejos se puede proceder a construir la gráfica del conjunto, con sus colores.

   Note ahora que si añadimos al anterior paso para crear una única imagen, el crear otra pero con el centro desplazado ej: centro $= 1/4 + 0i$ y mantenemos el radio constante los valores que veremos en la gráfica seran los que parten de los intervalos [-1.75, 2.25] en reales y [-2, 2] en i. Así podemos general el efecto visual de desplazamiento de la imagen, sucede algo parecido si hacemos más pequeño el radio, pero dejamos las dimensiones de la imagen constante, en esta ocasión generamos un zoom sobre la imagen.







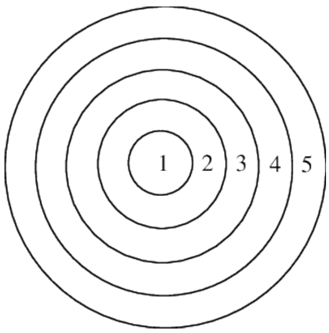
con las screenshots del buscador se intenta ilustrar de mejor manera la idea detrás del código, si numeramos en en una manera absoluta la página, empezando en -2, y acabando en 2 en el eje 'x' y de -2i hasta 2i en el eje 'y', podemos reducir esa caja de radio 2, a una caja de radio 1, y manteniendo las dimensiones de la imagen constantes (alto y ancho) vamos a notar el efecto de zoom, en el caso del ejemplo la imagen se amplió hacia el recuadro blanco con un botón rojo

La estructura e idea detrás de *la animación del conjunto de julia* se vale de varias funciones usadas anteriormente en la animación del conjunto de mandelbrot, usa el mismo principio de crear la malla compleja de números para ser evaluados y ayudar a generar la imagen *(createComplexGrid)*, pero difiere de mandelbrot en que en vez de desplazar el centro de la imagen o hacer zooms, esta animación mueve los parámetros de c (también se podría variar n, pero dado que puede aumentar mucho las computaciones optamos por variar c en la animación).

Recordemos la función escogida del conjunto de julia:

$$f_w(z) = z^n + c \tag{1}$$

Dado que c es un numero complejo arbitrario, hay muchas formas de moverlo, en nuestro caso escogimos inicialmente una aleatoria (generar numeros aleatorios para c), y una ruta de círculos concéntricos, en donde c es una serie de puntos dentro del margen de un círuculo de radio r, al ir aumentando el radio r, vamos generando esa ruta circular concéntrica, es por ello que en la animación se da la impresión de que el conjunto está dando vueltas (en efecto es parámetro c las está dando).



3. La matemática detrás: Condición de Convergencia

Dado que el conjunto de Julia es una generalización del conjunto de Mandelbrot, en la siguiente demostración se partirá de la primera dado que es la fórmula general, siguiendo el link

[1].

Para el caso particular $f_w(z) = z^n + c$, podemos sacar módulo a ambos lados, obteniendo $|f_w(z)| = |z^n + c|$. Dividiendo por $|z|$ a ambos lados, obtenemos

$$\frac{|f_w(z)|}{|z|} = \frac{|z^n + c|}{|z|} \tag{2}$$

Puesto que por definición, $|z^n + c| = |z^n| + |c|$, podemos decir que debido a la desigualdad triangular,

$$|z^n + c| \geq |z^n| + |c| \geq |z^n| - |c| \tag{3}$$

Utilizando estas dos ecuaciones, se deduce que

$$\frac{|f_w(z)|}{|z|} \geq \frac{|z^n| - |c|}{|z|} \tag{4}$$

Que se puede reescribir como

$$\frac{|f_w(z)|}{|z|} \geq |z|^{n-1} - \frac{|c|}{|z|} \tag{5}$$

Al indicar el ratio $\frac{|f_w(z)|}{|z|}$ una explosividad si es mayor a 1, a continuación buscamos condiciones para que ésto suceda. Teniendo en cuenta que: (a) la parte derecha de esta última ecuación es mayor a $(|z|^{n-1} - 1)$ sí y sólo si $|z| \geq |c|$, (b) la expresión $(|z|^{n-1} - 1)$, a su vez, es mayor a 1 sí y sólo si $|z|^{n-1} \geq 2$ por manipulación algebraica y por lo tanto $|z| \geq 2^{\frac{1}{n-1}}$, entonces obtenemos que $\frac{|f_w(z)|}{|z|} \geq 1$ sí y sólo si

$$|z| \geq 2^{\frac{1}{n-1}} \geq |c| \tag{6}$$

Al tenerse una explosividad en la función de Julia siempre que $|z| \geq 2^{\frac{1}{n-1}}$ según esta última ecuación, tenemos por lo tanto definida una condición de divergencia y convergencia de acuerdo con los valores de n y c. Un número complejo c tal que z toma valores explosivos dado un número de iteraciones deja de ser parte del conjunto de Julia.

Links a los videos:
`https://www.youtube.com/watch?v=Lh1hhZwWbIE`
`https://youtu.be/12Yls5A9IYg`

Link al poderoso repositorio:
`https://github.com/DaveAlsina/complexVariable/tree/master/taller2`

[1]http://julia-sets.herokuapp.com/