Taller 1

David Alsina, Jairo Gudiño, Juan Ávila

Enero 2021

1. Muestre que $Re(iz) = Im(z)$ para todo número complejo z.
2. Sea k un número entero. Muestre que:
   a) $i^{4k} = (i^4)^k = (1)^k = 1$
   b) $i^{4k+1} = (i^4)^k \cdot i^1 = (1)^k \cdot i^1 = i$
3. Encuentre el valor de las siguientes potencias de i.
4.
5. Encuentre $z_1 y z_2$ tal que se satisfaga el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1-i)z_1 + 3z_2 = 2 - 3i \tag{1}$$

$$z_2 = \frac{2 - 3i - (1-i)z_1}{3}$$

$$iz_1 + (1+2i)z_2 = 1 \tag{2}$$

$$z_1 = \frac{1 - (1+2i)z_2}{i} = -i + (1+2i)z_2$$

Ahora evaluando z_1 en z_2:

$$
\begin{aligned}
z_2 &= \frac{2}{3} - i - \left[\frac{(1-i)\cdot(-i+(1+2i)z_2 i)}{3}\right] \\
&= \frac{2}{3} - i - \left[\frac{-i + z_2 i - 2z_2 - 1 + z_2 + 2iz_2}{3}\right] \\
&= \frac{2}{3} - i - \left[\frac{-i + 3iz_2 - z_2 - 1}{3}\right] = 1 - \frac{2}{3}i - iz_2 + \frac{z_2}{3}
\end{aligned}
$$

$$z_2\left(\frac{2}{3}+i\right) = 1 - \frac{2}{3}i$$

$$z_2 = \frac{1-\frac{2}{3}i}{\frac{2}{3}+i} = -i$$

Finalmente evaluando el valor de z_2 en z_1:

$$(1-i)z_1 + \cancel{3(-i)} = 2 - \cancel{3i}$$

$$z_1 = \frac{2}{1-i} = 1+i$$

6. Encuentre todas las soluciones para $z^4 - 16 = 0$

   (i) Soluciones de forma algebraica

$$
\begin{aligned}
z^4 &= 16 \\
z^{4/4} &= 16^{1/4}
\end{aligned}
$$

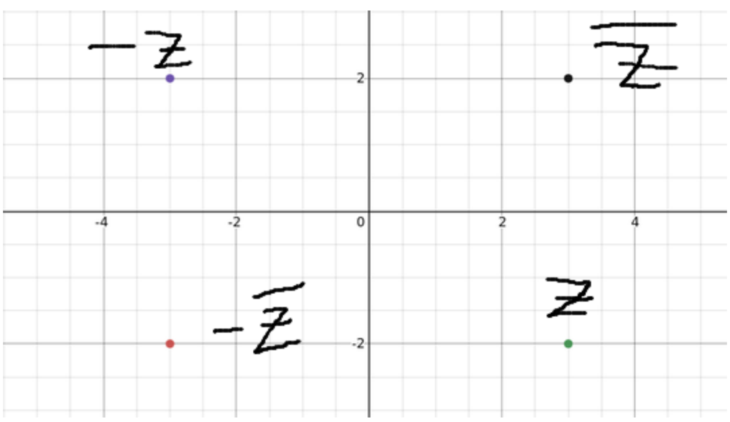
   En consecuencia, $z = 2$ y $z = -2$

   (ii) Soluciones de forma polar

   Como $z^4 = r^4 cis(4\theta) = 16cis(4\theta) = 16cis(0) = 16$, al ser representarse geométricamente z^4 como un vector con ángulo 0, por definición también tiene un ángulo igual a 2π, de manera que $4\theta = 2\pi$ y por lo tanto $\theta = \pi/2$, de manera que $z = 2cis(\theta) = 2cis(\pi/2) = 2i$. Siguiendo esta misma idea, z^4 también tiene un ángulo igual a 4π, de manera que $4\theta = 4\pi$ y por lo tanto $\theta = \pi$, y en consecuencia, $z = 2cis(\theta) = 2cis(\pi) = -2i$. En consecuencia, $z = 2i$ y $z = -2i$.

7.

8. Sea $z = 3 - 2i$. Grafique los puntos z, -z, z̄, -z̄ en el plano complejo. La gráfica de z, -z, z̄, -z̄ es:



Note como multiplicar por -1 produce una rotación de 180°, mientras que el complemento produce una reflexión sobre la recta real.

9.

10.

11. Muestre lo siguiente: $arg(z_1z_2z_3) = arg(z_1) + arg(z_2) + arg(z_3)$

$$\begin{aligned} arg(z_1z_2z_3) = arg((z_1z_2)z_3) &= arg(r_1r_2 \cdot cis(\theta_1 + \theta_2)z_3) \\ &= arg(r_1r_2 \cdot cis(\theta_1 + \theta_2) \cdot r_3 \cdot cis(\theta_3)) \\ &= arg(r_1r_2r_3 \cdot cis(\theta_1 + \theta_2) \cdot cis(\theta_3)) \\ &= arg(r_1r_2r_3 \cdot cis(\theta_4)cis(\theta_3)); \quad \text{donde } \theta_1 + \theta_2 = \theta_4 \end{aligned}$$

siguiendo un argumento análogo al visto para $arg(z_1z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$ se tiene:

$$\begin{aligned} &= arg(r_1r_2r_3cis(\theta_4 + \theta_3)) \\ &= arg(r_1r_2r_3cis(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) \\ &= arg(r_5 \cdot cis(\theta_5)) \text{ donde } \ r_5 = r_1r_2r_3 \ \text{ y } \theta_5 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\ &= \theta_5 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{aligned}$$

Muestre lo siguiente: $arg(z_1\bar{z}_2) = arg(z_1) - arg(z_2)$

Dado que $\bar{z}_2$ hace referencia geométricamente a un vector que es reflejo de z_2 en el eje X, entonces su ángulo se puede calcular como $2\pi - \theta_2$, por lo que

$$\begin{aligned} z_1\bar{z}_2 = |z_1||\bar{z}_2|cis(\theta_1 + 2\pi - \theta_2) &= |z_1||z_2| \left[cos(\theta_1 + 2\pi) + isin(\theta_1 + 2\pi)\right] \left[cos(-\theta_2) + isin(-\theta_2)\right] \\ &= |z_1||z_2| \left[cos(\theta_1) + isin(\theta_1)\right] \left[cos(-\theta_2) + isin(-\theta_2)\right] \\ &= |z_1||\bar{z}_2|cis(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$arg(z_1\bar{z}_2) = \theta_1 - \theta_2$$

12. Para cada uno de los siguientes números calcule sus raıces quintas. Determine y grafique el polígono que genera, y calcule la longitud de sus aristas. ¿En ambos casos son las aristas iguales? Justifique la respuesta:

   a) $z_0 = -1$

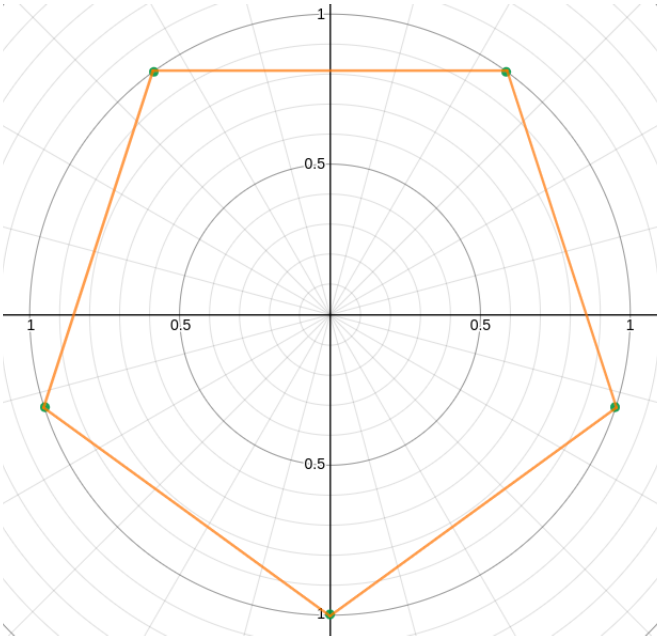
   Podemos representar en z_0 como $e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Luego, calculamos sus raíces de la siguiente manera:

$$-1^{\frac{1}{5}} = 1^{\frac{1}{5}} e^{\frac{i\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)}{5}}, \quad \text{siendo} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

   Sus cinco raíces serían:

- $e^{\frac{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{5}} = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$
- $e^{\frac{i\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi\right)}{5}} = \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{10}\right)$
- $e^{\frac{i\left(\frac{3\pi}{2}+4\pi\right)}{5}} = \cos\left(\frac{11\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{2}\right)$
- $e^{\frac{i\left(\frac{3\pi}{2}+6\pi\right)}{5}} = \cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{2}\right)$
- $e^{\frac{i\left(\frac{3\pi}{2}+8\pi\right)}{5}} = \cos\left(\frac{19\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{10}\right)$

Gráfica



b) $z_0 = 1 + i$

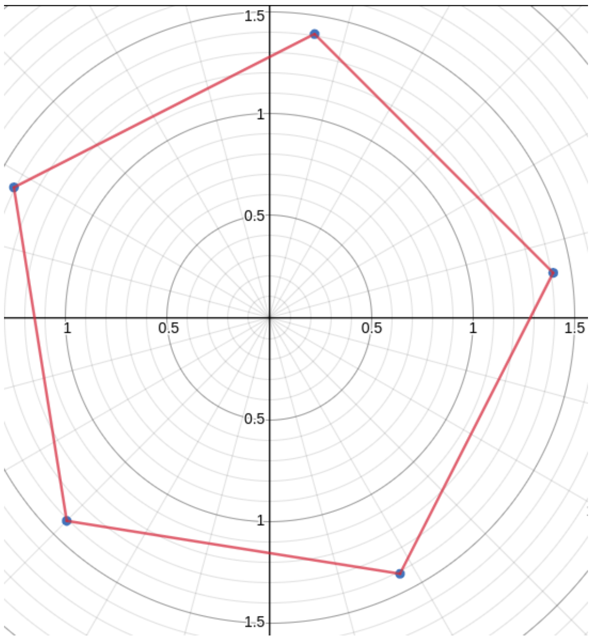
Representado z_0 de otra manera, tenemos que $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}$. Así pues, sus raíces quintas viened dadas por:

$$(1+i)^{\frac{1}{5}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{1}{4}\pi+2\pi k\right)\frac{1}{5}}, \quad \text{siendo} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

De este modo, sus raíces serían:

- $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{1}{4}\pi\right)\frac{1}{5}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{1}{20}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{20}\pi\right)\right)$
- $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{1}{4}\pi+2\pi\right)\frac{1}{5}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{9}{20}\pi\right) + i\sin\left(\frac{9}{20}\pi\right)\right)$
- $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{1}{4}\pi+4\pi\right)\frac{1}{5}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{17}{20}\pi\right) + i\sin\left(\frac{17}{20}\pi\right)\right)$
- $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{1}{4}\pi+8\pi\right)\frac{1}{5}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right)$
- $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{1}{4}\pi+2\pi\right)\frac{1}{5}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{33}{20}\pi\right) + i\sin\left(\frac{33}{20}\pi\right)\right)$

Gráfica



Conclusión aristas

Las aristas de los polígonos miden en cada uno de ellos igual. Podemos verlo de dos maneras: la primera es que todas las raíces son un número complejo con la el mismo módulo, también podemos apreciar en la gráfica que los puntos forman un polígono regular circunscrito en una circunferencia cuyo radio es el módulo del número complejo al cual se le saca la raíz.