1. Ejercicios Prácticos

1. Muestre que $Re(iz) = -Im(z)$ para todo número complejo z.

2. Sea k un número entero. Muestre que:

   a) $i^{4k} = 1$ b) $i^{4k+1} = i$ c) $i^{4k+2} = -1$ d) $i^{4k+3} = -i$

3. Encuentre el valor de las siguientes potencias de i

   a) i^7 b) i^{62} c) i^{-202} d) i^{-4321}

4. Encuentre el valor de z que satisface cada una de las siguientes ecuaciones:

   a) $iz = 4 - zi$ b) $\dfrac{z}{1-z} = 1 - 5i$ c) $z^2 + 16 = 0$

5. Encuentre z_1 y z_2 tal que se satisfaga el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1-i)z_1 + 3z_2 = 2 - 3i$$
$$iz_1 + (1+2i)z_2 = 1.$$

6. Encuentre todas las soluciones para $z^4 - 16 = 0$

7. Muestre que los puntos $3+i$, 6, y $4+4i$ son los vértices de un triangulo rectángulo.

8. Sea $z = 3 - 2i$. Grafique los puntos z, $-z$, $\bar{z}$, $-\bar{z}$ en el plano complejo.

9. Muestre de forma analítica y gráfica que $|z-1| = |\bar{z}-1|$

10. Dado el vector z, interprete geométricamente el vector $(cos\theta + i\sin\theta)z$

11. Muestre lo siguiente:

    a) $\arg z_1 z_2 z_3 = \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3$ b) $\arg z_1\bar{z}_2 = \arg z_1 - \arg z_2$

    Nota: arg se define como el angulo que forma el vector que representa al número complejo z con el eje x en el plano complejo

12. Muestre que $|e^{x+iy}| = e^x$ y $\arg e^{x+iy} = y + 2\pi k$, $(k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$

13. Muestre que, para $\theta \in \mathbb{R}$:

    a) $\cos\theta = Re(z) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

    b) $\sin\theta = Im(z) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

    c) $\tan\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}$

    d) $(cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

14. ¿Qué describen las siguientes funciones?:

a) $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

b) $z(t) = 2e^{it} + i$, $0 \leq t \leq 2\pi$

c) $z(t) = 2e^{i2\pi t}$, $0 \leq t \leq 1/2$

d) $z(t) = 3e^{-it} + 2 - i$, $0 \leq t \leq 2\pi$

15. Usando la identidad $r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$, muestre que:

    a) $(\sqrt{3} - i)^7 = -64\sqrt{3} + i64$

    b) $(1 + i)^{95} = 2^{47}(1 - i)$

16. Para cada uno de los siguientes números cálculo sus raíces quintas. Determine y gráfique el polígono que genera, y calcule la longitud de sus aristas. ¿En ambos casos son las aristas iguales?, Justifique la respuesta:

    a) $z_0 = -1$

    b) $z_0 = 1 + i$

17. Encuentre las 4 raíces de $z^4 + 1 = 0$. Use el resultado para deducir la factorización $z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$

18. Resuelva la ecuación $(z + 1)^5 = z^5$:

19. Muestre que la parte real de cualquier solución para $(z + 1)^{100} = (z - 1)^{100}$ debe ser cero.

20. Para los siguientes puntos en el plano complejo determine su proyección estereográfica.

    a) $z = i$

    b) $z = 6 - 8i$

    c) $z = \frac{-3}{10} + \frac{2}{5}i$

21. Muestre que la proyección estereográfica de los puntos z y $\frac{1}{\bar{z}}$ son reflejos una de la otra alrededor del plano ecuatorial de la esfera de Riemann.

22. Muestre que la proyección estereográfica de los puntos z y $-\frac{1}{\bar{z}}$ son diametralmente opuestas en la esfera de Riemann.

23. Describa como sería la proyección estereográfica de los siguientes conjuntos:

    a) $\{z : Re(z) > 0\}$

    b) $\{z : |z| < 1/2\}$

    c) $y = x$

2. Ejercicios Computarizados

1. Escriba un programa computarizado que realice las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números complejos. La entrada del programa deben ser las partes reales e imaginarías de los números, así como la operación que se desea realizar.

2. Escriba un programa de computadora para convertir entre coordenadas rectangulares y polares.

3. Escriba un programa que solucione la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$, con $a \neq 0$. Use como entradas la parte real e imaginaria de los números a, b, c. Entregue el resultado en forma polar.

4. Escriba un programa de computadora que dadas las coordenadas de un número en el plano complejo proporcione sus coordenadas en la esfera de Riemann y viceversa.

3. Ejercicios Teóricos

1. Probar que la resta de números complejos es el inverso de la suma de números complejos, i.e $z_3 = z_2 - z_1$ si y solo si $z_3 + z_1 = z_2$.

2. Probar que la división de complejos es la operación inversa de la multiplicación de complejos, i.e si $z - 2 \neq 0$, entonces $z_3 = z_1/z_2$ si y solo si $z_3 z_2 = z_1$

3. Sea z un número complejo tal qué $Re(z) > 0$, pruebe que $Re(1/z) > 0$.

4. Sea z un número complejo tal qué $Im(z) > 0$, pruebe que $Im(1/z) < 0$.

5. Pruebe que $Re(z) < |z|$ e $Im(z) < |z|$

6. Muestre que el vector z_1 es paralelo al vector z_2 si y solo si $Im(z_1 \bar{z}_2) = 0$.

7. Muestre que el producto punto entre vectores que representan a los números complejos z_1 y z_2 esta dado por: $z_1.z_2 = Re(\bar{z}_1 z_2)$