Temas: Conjuntos, modelos probabilísticos, axiomas de probabilidad, probabilidad condicional, probabilidad total.

1. En una clase el 60 % de los estudiantes son genios, al 70 % le gusta el chocolate, y el 40 % cae en las dos categorías. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar no sea genio ni le guste el chocolate?

2. Un dado de seis caras está cargado para que la probabilidad de que caiga en un número par sea dos veces la probabilidad de que caiga en un número impar. Construya un modelo de probabilidad para un lanzamiento de este dado y calcule la probabilidad de que el resultado sea menor que 4.

3. Una moneda se lanza repetidamente hasta que sale cara. Determine el espacio muestral de este experimento.

4. Usted entra a un torneo de ajedrez en el que debe jugar contra 3 oponentes. Aunque los oponentes están fijos, usted puede escoger el orden en que los enfrenta. De experiencias anteriores, usted sabe cuál es la probabilidad de derrotar a cada uno de los oponentes. Usted gana el torneo si logra derrotar a dos oponentes de forma consecutiva. Si usted quiere maximizar la probabilidad de ganar el torneo, muestre que la estrategia óptima es jugar contra el oponente más débil en el segundo partido, y que el orden en que juegue contra los otros dos no importa.

5. Utilice los axiomas de probabilidad para demostrar que, para dos eventos A y B,

$$P((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B),$$

que es la probabilidad de que exactamente uno de los eventos A o B ocurra.

6. Se lanzan dos dados justos de seis caras. Asuma que cada uno de los 36 posibles resultados es igualmente probable.

   a) Determine la probabilidad de que salga un doble (1 y 1, 2 y 2, etc).

   b) Dado que el resultado es menor o igual a 4, determine la probabilidad condicional de que haya salido un doble.

   c) Determine la probabilidad de que al menos uno de los dados sea un 6.

   d) Dado que los dos dados caen en números diferentes, determine la probabilidad de que al menos uno de los dados haya caído en 6.

7. Se tienen 3 monedas, una con dos caras, una con dos sellos, y una con una cara y un sello. Se selecciona una moneda al azar y el resultado es cara. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro lado de la moneda sea sello?

8. Un vuelo programado tiene probabilidades iguales a 0.93 y 0.90 de salir a tiempo y de llegar a tiempo, respectivamente. Además se sabe que la probabilidad de salir y llegar a tiempo es de 0.85.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a tiempo dado que salió a tiempo?

b) Si el vuelo llegó a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido a tiempo?

9. Pepa tiene que presentar los exámenes de cálculo y álgebra el mismo día. La probabilidad de pasar el examen de cálculo es 3/4, la de pasar el de álgebra es 1/2 y la de pasar ambos es 1/4.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que pase al menos uno de los exámenes?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que pase exactamente un examen?

   c) Si aprueba solo un examen, ¿cuál es la probabilidad de que sea el de álgebra?

10. Se tiene un grupo de personas conformado por 40 hombres y 60 mujeres. El grupo presenta un examen y obtienen los siguientes resultados

Resultado	H	M	
Aprob (A)	24	36	60
Reprob (R)	16	24	40
	40	60	

Se selecciona una persona al azar

- Si selecciona un hombre, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado?
- Si selecciona alguien que aprobó, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

11. Se tienen dos eventos $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$, $P(A \cap B) = 0{,}1$. Determine

- $P(A|B)$
- $P(B|A)$
- $P(A|A \cap B)$
- $P(A|A \cup B)$
- $P(A \cap B|A \cup B)$

12. Sean A y B eventos. Muestre que $P(A \cap B|B) = P(A|B)$, suponiendo que $P(B) > 0$.

13. Se tienen k cajas, cada una con m bolas blancas y n negras. Se selecciona al azar una bola de la primera caja y se transfiere a la segunda caja. Luego se selecciona al azar una bola de la segunda caja y se transfiere a la tercera. Se repite el ejercicio hasta que al final se selecciona una bola al azar de la k-ésima caja. Muestre que la probabilidad de que la última bola sea blanca es la misma de que la primera sea blanca, i.e., $m/(m+n)$.

14. Dos jugadores se turnan para seleccionar una bola de una caja que inicialmente contiene m bolas rojas y n azules. El primer jugador en extraer una bola roja gana. Determine una fórmula recursiva (sobre n) que permita calcular la probabilidad de que el jugador que empieza gane.

Pista: Calcule primero P_0 (probabilidad de que el primer jugador gane cuando no hay bolas azules), luego P_1, P_2, etc., usando el teorema de probabilidad total sobre los eventos: (1) seleccionar una bola roja en el primer intento y (2) seleccionar una bola azul en el primer intento. Recuerde que la probabilidad de que el primer jugador gane es uno menos la probabilidad de que el segundo gane.