Taller 1
Probabilidad y Estadística

David Alsina, Juan José Caballero, Nicolas Botero

Enero 2021

5. Utilice los axiomas de probabilidad para demostrar que, para dos eventos A y B:

$$P((A \cap \bar{\mathrm{B}}) \cup (\bar{\mathrm{A}} \cap B)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

que es la probabilidad de que exactamente uno de los dos eventos A o B ocurra.

$$\begin{aligned} P((A \cap \bar{\mathrm{B}}) \cup (\bar{\mathrm{A}} \cap B)) &= P((A \cup \bar{\mathrm{A}}) \cap (\bar{\mathrm{A}} \cup \bar{\mathrm{B}}) \cap (B \cup A) \cap (B \cup \bar{\mathrm{B}})) \\ &= P((\Omega) \cap (\bar{\mathrm{A}} \cup \bar{\mathrm{B}}) \cap (B \cup A) \cap (\Omega)) \\ &= P((A \cap B)^c \cap (A \cup B)) \end{aligned}$$

Ahora observe la siguiente ecuación:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1}$$
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \tag{2}$$

Dada la ecuación anterior (2) podríamos calcular esta probabilidad así:

$$\begin{aligned} P((A \cap B)^c \cap (A \cup B)) &= P((A \cap B)^c) + P(A \cup B) - P((A \cap B)^c \cup (A \cup B)) \\ &= 1 - P(A \cap B) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P((A \cap B)^c \cup (A \cup B)) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) + 1 - P((A \cap B)^c \cup (A \cup B)) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) + 1 - P(\Omega) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) + 1 - 1 \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \ \blacksquare \end{aligned}$$

4. Comencemos por mirar todos los casos de este problema:

Caso 1: El más fácil va de primero. En este caso la única opción viable para poder ganar la final sería ganarle al segundo.

Caso 2: El más fácil va de tercero. En este caso la única opción viable para poder ganar la final es ganándole al segundo.

Caso 3: El más fácil de segundo. Este es el caso más viable ya que tiene 2 opciones para ganar la final que sería ganarle al primero o ganarle al tercero. En este caso la unión de estás 2 probabilidades es mayor a la de cada una por singular.

Entonces por esto último, la forma más viable de ganar la final es dejar al más fácil de segundo.