Valor esperado

1. El equipo de fútbol de Miguel jugará dos partidos esta semana. El equipo tiene probabilidad 0.4 y 0.7 de no perder el primer y segundo partido, respectivamente. En cualquiera de los dos partidos, los eventos "empatar" y "ganar" tienen la misma probabilidad de ocurrir; además, el resultado de cada partido no depende del resultado de otro partido. Ganar un partido otorga a un equipo tres puntos, mientras que empatar otorga un punto y perder no otorga puntos. Determine la función de masa de probabilidad del número de puntos que gana el equipo esta semana.

Sea X la Variable aleatoria *#de puntos que gana el equipo esa semana.*

$$f(x) = \begin{cases} (0.4) \cdot (0.5) \text{ es la probabilidad de ganar y empatar en el partido 1} \\ (0.7) \cdot (0.5) \text{ es la probabilidad de ganar y empatar en el partido 2} \end{cases}$$

---

2. La gran final de un torneo de ajedrez consistirá de 10 partidas entre los finalistas: Diana y David. El primer jugador en ganar una partida gana la final. Si las diez partidas terminan en tablas se considera que los jugadores quedan empatados. Cada partida la gana Diana con probabilidad 0.4, mientras que David tiene una probabilidad de 0.3 de ganar cada partida. En cada partida, Diana y David tienen una probabilidad de quedar en tablas igual a 0.3. Los resultados de cada partida son eventos independientes.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que David gane la final?

Inicialmente creamos una variable aleatoria Z que corresponda al *# de intento en que gana David*, la FMP para Z es:

$$f(k) = \{P(tablas)^{k-1} \cdot P(Gana\ David), k = 1, 2, 3, \ldots, 10$$

Dada la FMP, se puede calcular el valor esperado para Z, que corresponde a la probabilidad de que David gane la final como sigue:

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{10} k \cdot f(k)$$

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que Diana gane la final?

Creamos una variable aleatoria Z que corresponda al *# de intento en que gana Diana*, la FMP para Z es:

$$f(l) = \{P(tablas)^{k-1} \cdot P(Gana\ Diana), k = 1, 2, 3, \ldots, 10$$

$$E(Z) = \sum_{l=1}^{10} l \cdot f(l)$$

c) Determine la función de masa de probabilidad de la duración de la final (en número de partidos).

Sea Y nuestra V.A. que es # *número de partidas jugadas* su correspondiente FMP es:

$$f(j) = \begin{cases} P(tablas)^{k-1} \cdot P(acabarPartida), \; k = 1, 2, 3, \ldots, 9 \\ P(tablas)^{k-1}, \text{ si k} = 10 \end{cases}$$

---

3. Usted es invitado a una fiesta con 500 invitados. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los otros invitados cumpla años el mismo día que usted? Calcule la probabilidad exacta y luego aproximada usando la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria Poisson. (No tenga en cuenta posibles cumpleaños el 29 de febrero)

De los 499 invitados(aparte de mi), existe la posibilidad de que cumplan años el mismo dia que yo, o de que no lo hagan, y en particular si solo una persona cumple años el mismo día que yo, eso implica que los demás no cumplan el mismo día que yo. Nótese que este experimento es uno que tiene variables bernulli, y se trata con probabilidad binomial así:

$$x = \binom{499}{1} \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^1 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{498}$$

Para calcular con Poisson es necesario definir λ como $n \cdot p$

$$x = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^1}{1!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda = np \cdot e^{-n \cdot p}$$

$$= \left(499 \cdot \frac{1}{365}\right) \cdot e^{-\frac{499}{365}}$$

---

4. Dos equipos de baloncesto se enfrentan en la final de un torneo donde el ganador será el que gane más partidos en una serie de n partidos (n impar). El equipo 1 tiene una probabilidad p de ganar cada partido. Asuma que cada partido jugado es independiente a los demás. Encuentre los valores de p en los que $n = 5$ es más favorable que $n = 3$ para que el equipo 1 gane la final.

Observe que en el problema solo hay 2 opciones, que el equipo 1 gane o no gane, este es otro experimento que se modela con probabilidad binomial. Así:

$$p(k) = \binom{n}{k} \cdot (p)^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

sea V nuestra variable aleatoria que indica el numero de partidos que se pueden ganar.

$$V = 1, \ldots, 5$$

$$\sum_{k=2}^{3} \binom{3}{k} \cdot (p)^k \cdot (1-p)^{3-k} \leq \sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k} \cdot (p)^k \cdot (1-p)^{5-k}$$

---

5. Un proveedor de internet utiliza 50 canales para atender una población de 1000 usuarios. En cualquier momento del tiempo se estima que un usuario requiere conectarse (usar un canal) con probabilidad de 0.01. Todos los usuarios acceden algún canal de forma independiente.

   a) Determine la función de masa de probabilidad del número de canales ocupados en un momento del tiempo.

Sea Z una V.A. que indica el numero de personas que pueden necesitar usar un canal:

$$Z = 1, \ldots, 1000$$

Ahora la FMP para Z es:

$$P_z(k) = \binom{1000}{k} (1-0.01)^{n-k} (0.01)^k = \binom{1000}{k} (0.99)^{1000-k} (0.01)^k$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten más canales de los que hay disponibles?

Dado que hay 50 canales el máximo de personas que se pueden conectar a la vez a través de los distintos canales es 50. Ergo:

$$P(exceder\ capacidad) = 1 - \sum_{k=0}^{50} \binom{1000}{k} (0.99)^{1000-k} (0.01)^k \simeq 0$$

---

6. Un amigo le ha prestado un apartamento y le dejó las llaves con un vecino. Sin embargo, el juego consiste de cinco llaves, de las cuales sólo una abre la puerta principal. Determine la función de masa de probabilidad del número de intentos necesarios para abrir la puerta principal suponiendo que:

   a) Todas las llaves son indistinguibles y no tiene como marcar las que ya ha probado.

En esta situación en particular la probabilidad de escoger cualquier llave es la misma, y no disminuye la cantidad de llaves probadas al probar nuevas llaves, siendo así definamos:

$$Z = \#\ \text{de intentos para abrir la puerta} = 1, 2, 3, \ldots$$

$$P_Z(k) = \begin{cases} (1-p)^{k-1} \cdot p = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \text{ si } k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

b) Las llaves tienen colores diferentes que le permiten descartar las llaves que ya ha probado para futuros intentos.

Con esta redefinición de la situación nos queda:

$$Z = \# \text{ de intentos para abrir la puerta} = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$P_Z(k) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{5-k-1}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5-k-1}, \text{ si } k = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

---

7. Una variable aleatoria de Bernoulli X resulta de considerar un experimento aleatorio que tiene dos resultados: éxito o fracaso. El resultado es un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $1-p$. Si el resultado es un éxito la variable aleatoria toma el valor 1, de lo contrario toma el valor 0.

   a) Determine la función de masa de probabilidad de X.

Sea X nuestra variable aleatoria bernoulli:

$$X = \acute{e}xito(1),\ fracaso(0)$$

Así la FMP de X es:

$$P_X(k) = \begin{cases} p, \text{ si k es un éxito} \\ 1-p, \text{ si k es un fracaso} \end{cases}$$

b) Determine el valor esperado $E[X]$.

$$E(X) = (1 \cdot p) + (0 \cdot (1-p)) = p$$

---

8. Una variable aleatoria binomial Y cuenta el número de éxitos en n repeticiones sucesivas de un experimento de Bernoulli (ver numeral anterior), donde la probabilidad de éxito en cada repetición es p. Esto quiere decir que Y se puede expresar como

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \tag{1}$$

donde cada X_i es una variable aleatoria independiente de las demás.

   a) Determine la función de masa de probabilidad de X.

La FMP de X es :

$$P_X(k) = \begin{cases} \text{si } k = 1, \; p \\ \text{si } k = 0, \; 1 - p \end{cases}$$

b) Determine el valor esperado $E[Y]$ utilizando la función de masa de probabilidad de Y.

$$P_Y(k) \left\{ \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \right.$$

$$E[Y] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Note que:

$$k \cdot \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! \cdot (k-1)!} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

Con lo anterior:

$$E[Y] = \sum_{k=0}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= n \cdot p \cdot \cancelto{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}}$$

Finalmente

$$= n \cdot p$$

c) Determine el valor esperado $E[Y]$ utilizando las propiedades del valor esperado y la relación (1).

Dado que Y es lineal y es un función de las variables aleatorias X_i tenga en cuenta que:

$$E[Y] = Y[\; E[X] \;]$$

Así:

$$E[Y] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + (\dots) + E[X_n]$$

$$E[Y] = p + p + p + (\dots) + p$$

$$E[Y] = n \cdot p$$

d) Determine la varianza $V(Y)$ utilizando las propiedades de la varianza y la relación (1).

Dado que Y es lineal observe:

$$V[Y] = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

9. La variable aleatoria de Poisson tiene función de masa de probabilidad

$$\boxed{p_X(k) = \exp^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \dots,}$$

donde $\lambda > 0$ es una constante que caracteriza a la variable.

- Muestre que esta función de masa de probabilidad cumple con las propiedades para este tipo de funciones.

las funciones de masa de probabilidad tienen la característica de que la suma de sus probabilidades es igual a 1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot\left(1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} + \dots\right)$$

$$= e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

- Determine el valor esperado de esta variable aleatoria $E[X]$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\cdot\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k-1}}{k-1!}$$

$$= \lambda\cdot\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^l}{l!} = \lambda$$

- Determine el segundo momento de esta variable aleatoria $E[X^2]$.

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\cdot p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k-1!}$$

sea $l = k - 1$:

$$= \sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{l+1}}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} l\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{l+1}}{l!} + \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{l+1}}{l!}$$

$$= \lambda\cdot\cancelto{E[X]}{\sum_{l=0}^{\infty} l\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!}} + \lambda\cdot\cancelto{1}{\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!}}$$

$$= \lambda\cdot\lambda + \lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

- Determine la varianza de esta variable aleatoria $V(X)$ usando los dos resultados anteriores.

Dado lo $E[X]$ y $E[X^2]$:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda$$