1. Sea X una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0,1]$. Sea $Y = g(X)$ otra variable aleatoria definida en función de X, donde g es

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1/3, \\ 2, & x > 1/3. \end{cases}$$

   a) Determine la función de masa de probabilidad de Y y utilícela para determinar el valor esperado de Y.

La FMP de *Y* = *g(x)* es:

$$Y_{g(x)}(x) = \begin{cases} c_1 \text{ si } x = 1 \\ c_2 \text{ si } x = 2 \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que X es uniforme en $[0,1]$ la probabilidad de obtener cualquier x es 1, y tendiendo en cuenta los intervalos en los que se define $Y_{g(x)}(X)$:

$$Y_{g(x)}(x) = \begin{cases} 1/3 \text{ si } x = 1 \\ 2/3 \text{ si } x = 2 \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

$$E[Y] = 1 \cdot \cancelto{\frac{1}{3}}{Y_{g(x)}(1)} + 2 \cdot \cancelto{\frac{2}{3}}{Y_{g(x)}(1)} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

   b) Determine el valor esperado de Y usando la regla del valor esperado directamente.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_x(x)$$

$$= \int_0^{1/3} \cancelto{1}{g(x)} \cdot \cancelto{1}{f_x(x)} + \int_{1/3}^{1} \cancelto{2}{g(x)} \cdot \cancelto{1}{f_x(x)} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

---

2. Una variable aleatoria X sigue una distribución de exponencial con parámetro $\lambda > 0$ si su función de densidad es igual a

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

   Determine el valor esperado y la varianza de X.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x} = \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} &= \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{\infty} u \cdot e^{u} du \\
&= \frac{1}{\lambda}\left[u \cdot e^{u}\Big|_{0}^{\infty} + \cancelto{0}{\frac{-1}{\lambda}\int_{0}^{\infty} e^{u}\, du} \right] \\
&= \frac{1}{\lambda}\left[\cancelto{0}{u \cdot e^{u}\Big|_{0}^{\infty}} + \cancelto{1}{-\lambda\frac{-1}{\lambda}} \cdot \cancelto{1}{\int_{0}^{\infty} e^{w} dw} \right] \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

---

3. Una variable aleatoria X sigue una distribución de Laplace con parámetro $\lambda > 0$ si su función de densidad es igual a

$$f_X(s) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |s|}$$

   a) Demuestre que f_X es una función de densidad válida.

   b) Determine el valor esperado y la varianza de X.

---

4. Al llegar a la caja de la cafetería usted se puede encontrar con ninguna o con una persona al frente suyo con la misma probabilidad. El tiempo que toma procesar a una persona es una variable aleatoria exponencial con parámetro λ. Determine la función acumulada de probabilidad de su tiempo de espera.

---

5. En un juego de dardos el objetivo es un círculo de radio r. Usted siempre da en el objetivo pero sus lanzamientos caen en cualquier punto del círculo con la misma probabilidad. Sea X la distancia del dardo al centro del objetivo.

   a) Determine la función acumulada de probabilidad de X.

Con base al anterior resultado

$$X = \sqrt{x^2 + y^2} \mid (x, y) \in x^2 + y^2 = r$$

$$
\begin{aligned}
F_X = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{r} r \cdot dr d\theta = \int_{0}^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_{0}^{r} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \cancelto{2\pi}{\theta\Big|_{0}^{2\pi}} \\
&= r^2 \pi
\end{aligned}
$$

   b) Determine la función de densidad de X.

$$\frac{d(F_X)}{dr} = f_X = 2\pi r$$

c) Determine la media y varianza de X.