Taller 1
Probabilidad y Estadística

David Alsina, Juan José Caballero, Nicolas Botero

Enero 2021

5. Utilice los axiomas de probabilidad para demostrar que, para dos eventos A y B:

$$P((A \cap \bar{\mathrm{B}}) \cup (\bar{\mathrm{A}} \cap B)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

que es la probabilidad de que exactamente uno de los dos eventos A o B ocurra.

$$\begin{aligned}
P((A \cap \bar{\mathrm{B}}) \cup (\bar{\mathrm{A}} \cap B)) &= P((A \cup \bar{\mathrm{A}}) \cap (\bar{\mathrm{A}} \cup \bar{\mathrm{B}}) \cap (B \cup A) \cap (B \cup \bar{\mathrm{B}})) \\
&= P((\Omega) \cap (\bar{\mathrm{A}} \cup \bar{\mathrm{B}}) \cap (B \cup A) \cap (\Omega)) \\
&= P((A \cap B)^c \cap (A \cup B))
\end{aligned}$$

Ahora observe la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) &(1) \\
P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) &(2)
\end{aligned}$$

Dada la ecuación anterior (2) podríamos calcular esta probabilidad así:

$$\begin{aligned}
P((A \cap B)^c \cap (A \cup B)) &= P((A \cap B)^c) + P(A \cup B) - P((A \cap B)^c \cup (A \cup B)) \\
&= 1 - P(A \cap B) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P((A \cap B)^c \cup (A \cup B)) \\
&= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) + 1 - P((A \cap B)^c \cup (A \cup B)) \\
&= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) + 1 - P(\Omega) \\
&= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) + 1 - 1 \\
&= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

4. Comencemos por modelar la situación: Inicialmente sabemos que se tienen 3 oponentes, sean estos A, B y C, de los cuales B es el más débil.

Ahora nombremos a los eventos A, B, C como la probabilidad de ganar a los oponentes de correspondiente letra

A priori se sabe que estos eventos son independientes entre sí es decir que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Adicionalmente se sabe que $P(B) > P(A)$ y $P(B) > P(C)$ esto dado que B es el más débil. Ahora haciendo un análisis por caso se tiene:

1. Se selecciona jugar contra el más débil como primer oponente, así la probabilidad de ganar G es:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(B) \cdot P(A) + P(A) \cdot P(C) \\ &= P(A)(P(B) + P(C)) \end{aligned}$$

2. Se selecciona jugar contra el más débil como segundo oponente, así la probabilidad de ganar G es:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(A) \cdot P(B) + P(B) \cdot P(C) \\ &= P(B)(P(A) + P(C)) \end{aligned}$$

3. Se selecciona jugar contra el más débil como tercer oponente, así la probabilidad de ganar G es:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(C) \cdot P(A) + P(A) \cdot P(B) \\ &= P(C)(P(A) + P(B)) \end{aligned}$$

(Note como se ha descartado el caso trivial en el que se vencen a todos los oponentes) Adicionalmente basado en que $P(B) > P(A)$ y $P(B) > P(C)$:

Comparando sin perdida de generalidad el primer caso con el segundo se tiene:

$$P(A) \cdot P(B) + P(B) \cdot P(C)\ _{\text{2do caso}} > P(B) \cdot P(A) + P(A) \cdot P(C)\ _{\text{1er caso}}$$
$$P(B) \cdot P(C) > P(A) \cdot P(C)$$

dado lo anterior se concluye que el caso en el que se maximizan las posibilidades de ganar es poniendo al jugador más débil como segundo oponente.