Temas: Variables Aleatorias Discretas, Funciones de Variables Aleatorias, Media, Varianza

1. El equipo de fútbol de Miguel jugará dos partidos esta semana. El equipo tiene probabilidad 0.4 y 0.7 de no perder el primer y segundo partido, respectivamente. En cualquiera de los dos partidos, los eventos "empatar" y "ganar" tienen la misma probabilidad de ocurrir; además, el resultado de cada partido no depende del resultado de otro partido. Ganar un partido otorga a un equipo tres puntos, mientras que empatar otorga un punto y perder no otorga puntos. Determine la función de masa de probabilidad del número de puntos que gana el equipo esta semana.

2. La gran final de un torneo de ajedrez consistirá de 10 partidas entre los finalistas: Diana y David. El primer jugador en ganar una partida gana la final. Si las diez partidas terminan en tablas se considera que los jugadores quedan empatados. Cada partida la gana Diana con probabilidad 0.4, mientras que David tiene una probabilidad de 0.3 de ganar cada partida. En cada partida, Diana y David tienen una probabilidad de quedar en tablas igual a 0.3. Los resultados de cada partida son eventos independientes.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que David gane la final?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que Diana gane la final?
    c) Determine la función de masa de probabilidad de la duración de la final (en número de partidos).

3. Usted es invitado a una fiesta con 500 invitados. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los otros invitados cumpla años el mismo día que usted? Calcule la probabilidad exacta y luego aproximada usando la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria Poisson. (No tenga en cuenta posibles cumpleaños el 29 de febrero)

4. Dos equipos de baloncesto se enfrentan en la final de un torneo donde el ganador será el que gane más partidos en una serie de n partidos (n impar). El equipo 1 tiene una probabilidad p de ganar cada partido. Asuma que cada partido jugado es independiente a los demás. Encuentre los valores de p en los que $n = 5$ es más favorable que $n = 3$ para que el equipo 1 gane la final.

5. Un proveedor de internet utiliza 50 canales para atender una población de 1000 usuarios. En cualquier momento del tiempo se estima que un usuario requiere conectarse (usar un canal) con probabilidad de 0.01. Todos los usuarios acceden algún canal de forma independiente.

    a) Determine la función de masa de probabilidad del número de canales ocupados en un momento del tiempo.
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten más canales de los que hay disponibles?

6. Un amigo le ha prestado un apartamento y le dejó las llaves con un vecino. Sin embargo, el juego consiste de cinco llaves, de las cuales sólo una abre la puerta principal. Determine la función de masa de probabilidad del número de intentos necesarios para abrir la puerta principal suponiendo que:

    a) Todas las llaves son indistinguibles y no tiene como marcar las que ya ha probado.

    b) Las llaves tienen colores diferentes que le permiten descartar las llaves que ya ha probado para futuros intentos.

7. Una variable aleatoria de Bernoulli X resulta de considerar un experimento aleatorio que tiene dos resultados: éxito o fracaso. El resultado es un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $1-p$. Si el resultado es un éxito la variable aleatoria toma el valor 1, de lo contrario toma el valor 0.

    a) Determine la función de masa de probabilidad de X.

    b) Determine el valor esperado $E[X]$.

    c) Determine el segundo momento $E[X^2]$ y el tercer momento $E[X^3]$.

    d) Determine la varianza $V(X)$.

8. Una variable aleatoria binomial Y cuenta el número de éxitos en n repeticiones sucesivas de un experimento de Bernoulli (ver numeral anterior), donde la probabilidad de éxito en cada repetición es p. Esto quiere decir que Y se puede expresar como

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \tag{1}$$

    donde cada X_i es una variable aleatoria independiente de las demás.

    a) Determine la función de masa de probabilidad de X.

    b) Determine el valor esperado $E[Y]$ utilizando la función de masa de probabilidad de Y.

    c) Determine el valor esperado $E[Y]$ utilizando las propiedades del valor esperado y la relación (1).

    d) Determine la varianza $V(Y)$ utilizando las propiedades de la varianza y la relación (1).

9. La variable aleatoria de Poisson tiene función de masa de probabilidad

$$p_X(k) = \exp^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

    donde $\lambda > 0$ es una constante que caracteriza a la variable.

    - Muestre que esta función de masa de probabilidad cumple con las propiedades para este tipo de funciones.
    - Determine el valor esperado de esta variable aleatoria $E[X]$.

- Determine el segundo momento de esta variable aleatoria $E[X^2]$.
- Determine la varianza de esta variable aleatoria $V(X)$ usando los dos resultados anteriores.