

## Examen Final

### Indicaciones generales

- Este es un examen individual con una duración de 110 minutos.
- No se permite el uso de libros o apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico.
- Los celulares deben estar apagados y guardados durante todo el examen.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen.

- 0.5 1. [0.7 pt] Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales. Utilice los axiomas de cuerpo y de orden de los números reales para demostrar que:

$$a(b - c) = ab - ac$$

- 0.7 2. [0.8 pt] Para el siguiente conjunto determine: cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq |2x - 6| < 10\}$$

3. Suponga que se toman 2020 números enteros cualesquiera. Demuestre que:

- 2=3 0.7 a. [0.7 pt] De los números seleccionados anteriormente hay por lo menos dos que dan el mismo residuo cuando se dividen entre 2019.

- b. [0.7 pt] Siempre se pueden encontrar dos números de los seleccionados previamente cuya diferencia es divisible por 2019.

- 0.7 4. [0.7 pt] Un curso se calificará con notas: *deficiente*, *insuficiente*, *aceptable*, *bueno*, *sobresaliente* y *excelente*. ¿Cuántos estudiantes debe haber (por lo menos) en el curso para garantizar que al menos 14 de ellos obtengan la misma calificación? Justifique su respuesta.

5. Un conjunto  $A$  se dice numerable si existe una función sobreyectiva  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ .

- 0.7 a. [0.7 pt] Demuestre que el conjunto  $\mathbb{B} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar}\}$  es numerable.

- 0.5 b. [0.7 pt] ¿Es  $\wp(\mathbb{B})$  numerable? Justifique su respuesta.