Third Midterm

May 19, 2021

Indicaciones generales

1. Fecha de publicación: 19 de mayo de 2021 desde las 10:10.
2. Fecha de entrega: 19 de mayo de 2021 hasta las 11:50.
3. Único medio de entrega: `https://e-aulas.urosario.edu.co`.
4. Formato de entrega: un solo archivo PDF.
   Importante: no use acentos ni deje espacios en los nombres de los archivos que cree.
5. La actividad **debe** realizarse **individualmente**.
6. En `e-aulas` puede acceder a las diapositivas y a la sección correspondiente a este parcial.
7. Celulares y otros dispositivos electrónicos deben estar apagados y ser guardados.
8. El estudiante solo podrá disponer de hojas en blanco como borrador de apuntes (opcional).
9. El estudiante puede tener una hoja manuscrita de resumen (opcional). Esta hoja debe estar marcada con nombre completo.
10. **Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen.**
11. Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
12. `e-aulas` se cerrará a la hora acordada para el final de la evaluación. La solución de la actividad debe ser subida antes de esta hora. El material entregado a través de `e-aulas` será calificado tal como está. Si ningún tipo de material es entregado por este medio, la nota de la evaluación será 0.0.

1. [60 ptos.] For context, in the following, consider the conjugate gradient method. Suppose we know the solution $\mathbf{x}^*$ to the linear system $\mathcal{M}\mathbf{x} = \mathbf{a}$, where $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is an $n\times n$ symmetric and positive definite matrix, and $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ are n-component vectors. Let $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{x}, \mathcal{M}\mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle$ be a cost function that when minimized we obtain the linear system of equations.

   (a) Show that the cost function can be written as

   $$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \mathcal{M}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)\rangle + \text{constant},$$

   where the constant does not depend on $\mathbf{x}$ and hence is not important.

   (b) Show that given the properties of $\mathcal{M}$ the cost function can now be written as

   $$\bar{g}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\right\|_2^2 + \text{constant},$$

   where $\mathbf{y} := \mathcal{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, $\mathbf{y}^* := \mathcal{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^*$, and $\mathcal{L}^{\mathrm{T}}$ is the transpose of an $n \times n$ matrix $\mathcal{L}$.

   (c) Restate Theorem 7.32 from Burden's book in terms of the information given by the cost function $\bar{g}(\mathbf{y})$ by rewriting its hypotheses and main results.

   □

2. [40 ptos.] The Rayleigh-Ritz method approximates the solution $y(x)$ to the linear two-point boundary value problem, defined in Theorem 11.4 from Burden's book, by minimizing the functional

   $$I[u] := \int_0^1 dx\, \left\{p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2 - 2f(x)u(x)\right\}$$

   over the set of constants $c_1, \ldots, c_n$. These values characterize the approximation $\phi(x) = \sum_{j=1}^n c_j\phi_j(x)$ to the solution $y(x) \approx \phi(x)$, where the set of functions $\{\phi_j\}_{j=1}^n$ is linearly independent and satisfy the same boundary conditions as the boundary value problem.

   (a) Show <u>in detail</u> that minimizing $I[\phi]$ with respect to the constants $c_1, \ldots, c_n$ is equivalent to solving a linear system of equations $\mathcal{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$, where $\mathbf{c} = [c_j]$ and the matrix elements $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ are given by

   $$a_{ij} = \int_0^1 dx\, \left[p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\right]$$

   and, similarly, the vector components $\mathbf{b} = [b_j]$ are defined by

   $$b_j = \int_0^1 dx\, f(x)\phi_j(x).$$

   (b) Show <u>in detail</u> that the resulting matrix $\mathcal{A}$ from the minimization of the functional $I[u]$ is symmetric; that is, $\mathcal{A}^{\mathrm{T}} = \mathcal{A}$, where the superscript T stands for the matrix transposition operation. What is the resulting dimension of the matrix?

   □