Examen Final

29 de Noviembre de 2019

Indicaciones generales

- Este es un examen **individual** con una duración de **120 minutos: de 13:00 a 15:00 p.m.**.
- Sólo se permite el uso de calculadoras como medio electrónico. Los celulares deben estar apagados durante todo el examen.
- El uso de apuntes, libros u otro recurso "analógico" no está permitido.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva a la anulación del examen.
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- **Escoja 4 de los 6 puntos y marque cuales realizó (sólo se corregirán 4).**

1. (12.5 pts) Teorema del límite central.

Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d con media $\mu = 0$, varianza σ^2 y función generadora de momentos $M_X(s)$. Suponga que $M_X(s)$ es finita en $-d < s < d$, $d \in \mathbb{R}^+$. Sea

$$Z_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}.$$

a) Muestre que la función generadora de momentos de Z_n satisface

$$M_{Z_n}(s) = \left(M_X\left(\frac{s}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

b) Suponga que la función generadora de momentos $M_X(s)$ tiene la expansión de Taylor de segundo orden alrededor de $s_0 = 0$:

$$M_X(s) = a + bs + cs^2 + o(s^2),$$

donde $o(s^2)$ satisface que $\lim_{s\to 0} o(s^2)/s^2 = 0$.

Encuentre a, b y c (en términos de σ^2). Recuerde que la expansión de Taylor de una función f alrededor de x_0 tiene la forma:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

c) Use los resultados de (a) y (b) para demostrar que la función generadora de momentos $M_{Z_n}(s)$ converge a la función generadora de momentos de la normal estándar, i.e:

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(s) = e^{s^2/2}.$$

para s en un vecindario de 0.

Pista: Reemplace $M_X(s)$ en (a) por la expresión que halló en (b) y calcule el límite (puede omitir los términos $o(s^2)$).

2. (12.5 pts) Se sabe que cada una de las tres personas A, B, C dice la verdad en un determinado momento con probabilidad $\frac{1}{3}$. Supongamos que A hace una declaración y C dice que B dice que A estaba diciendo la verdad. ¿Cuál es el probabilidad de que A realmente estuviera diciendo la verdad?

3. (12.5 pts) Una baraja de 52 cartas (bien barajada) se reparte entre 4 jugadores. Encuentre la probabilidad de que cada uno de los jugadores obtenga un as.

4. (12.5 pts) Demuestre con un contrajemplo que convergencia en probabilidad no implica convergencia con probabilidad 1.

5. (12.5 pts) Sea X una variable aleatoria continua.

   a) Encuentre la función de densidad de e^x en términos de la función de densidad de X.

   b) Encuentre la función de densidad de e^x cuando X es uniforme en $[0, 1]$.

6. (12.5 pts) Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta uniforme en el triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

   a) Encuentre la función de densidad conjunta $f_{X,Y}$.

   b) Encuentre la función de densidad marginal f_Y.

   c) Encuentre la función de densidad condicional de X dado Y.

   d) Encuentre $\mathbb{E}(X|Y = y)$ y use el teorema de expectación total para hallar $\mathbb{E}(X)$ en términos de $\mathbb{E}(Y)$