



## SECOND MIDTERM

April 7, 2021

## Indicaciones generales

- 1. Fecha de publicación: 7 de abril de 2021 desde las 10:10.
- 2. Fecha de entrega: 7 de abril de 2021 hasta las 11:50.
- 3. Único medio de entrega: https://e-aulas.urosario.edu.co.
- 4. Formato de entrega: un solo archivo PDF.

Importante: no use acentos ni deje espacios en los nombres de los archivos que cree.

- 5. La actividad debe realizarse individualmente.
- 6. En e-aulas puede acceder a las diapositivas y a la sección correspondiente a este parcial.
- 7. Celulares y otros dispositivos electrónicos deben estar apagados y ser guardados.
- 8. El estudiante solo podrá disponer de hojas en blanco como borrador de apuntes (opcional).
- 9. El estudiante puede tener una hoja manuscrita de resumen (opcional). Esta hoja debe estar marcada con nombre completo.
- 10. Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen.
- 11. Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- 12. e-aulas se cerrará a la hora acordada para el final de la evaluación. La solución de la actividad debe ser subida antes de esta hora. El material entregado a través de e-aulas será calificado tal como está. Si ningún tipo de material es entregado por este medio, la nota de la evaluación será 0.0.
- 1. [50 ptos.] Consider the initial-value problem

$$y' = f(t, y),$$
  $a \le t \le b,$   $y(a) = \alpha,$ 

and a Taylor method of order two characterized by  $T^{(2)}(t,y)$  and the difference equation

$$w_0 = \alpha,$$
  $w_{j+1} = w_j + h T^{(2)}(t_j, w_j).$ 

Suppose that  $T^{(2)}(t,y)$  is approximated by the following linear combination of calls to f(t,y):

$$T^{(2)}(t,y) \approx a_1 f(t,y) + a_2 f(t+\alpha_2, y+\beta_2),$$

where  $a_1, a_2, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$  must be appropriately chosen.

(a) Derive a family of infinite Runge-Kutta methods of order two, which satisfies the difference equation  $(w_0 = \alpha)$ :

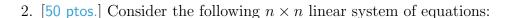
$$w_{j+1} = w_j + h(1 - \delta) f(t_j, w_j) + h\delta f\left(t_j + \frac{h}{2\delta}, w_j + \frac{h}{2\delta} f(t_j, w_j)\right),$$

where  $\delta \in \mathbb{R}$  is related to  $a_2$ .

(b) Show that the local truncation error of this family of methods is  $O(h^2)$  for all  $\delta \in \mathbb{R}$ .

Notice that by setting  $\delta = 1$ ,  $\delta = 1/2$ , and  $\delta = 3/4$  the Midpoint, the Modified Euler, and the Ralston methods are obtained, respectively.





$$E_i: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i,n+1},$$

where  $E_i$  stands for the *i*-th equation in the system and i = 1, ..., n. The **Gauss-Jordan method** is described as follows. Use the *i*-th equation to eliminate  $x_i$  not only from the equations  $E_{i+1}, E_{i+2}, ..., E_n$ , as we have done in the Gauss elimination method, but also from the equations  $E_1, E_2, ..., E_{i-1}$ . In other words, the method reduces a general  $n \times n$  matrix  $A = [a_{ij}]$  to a diagonal form  $A = \text{diag}(a_{11}^{(1)}, ..., a_{nn}^{(n)})$  such that

$$[A,b] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{2,n+1}^{(2)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{bmatrix}$$

is the solution can be obtained by setting  $x_j = a_{i,n+1}^{(j)}/a_{jj}^{(j)}$ , for each  $j = 1, \ldots, n$ . This procedure circumvents the backward substitution in Gauss elimination.

- (a) Construct an algorithm for the Gauss-Jordan procedure patterned after that of Gauss elimination described in Algorithm 6.1.
- (b) Analyze the computational complexity of this new method as a function of the matrix dimension n.

You can consult Algorithm 6.1 (Gaussian Elimination with Backward Substitution) from the lecture slides located in Moodle.