

Primer Parcial Variable Compleja (20%)

Profesor: Alexander caicedo

August 31, 2020

- En este parcial se evalúa el procedimiento, así que para cada ejercicio **muestre el procedimiento de forma ordenada**.
- El parcial es con libro abierto, así que se espera que cualquier detalle, por obvio que parezca, sea mencionado si se requiere para la solución de un problema.
- Recuerde que el examen es individual, cualquier intento de copia será tratado según el proceso indicado por la universidad.
- El parcial debe ser enviado a mi e-mail: alexander.caicedo@urosario.edu.co, dentro de los 15 minutos después de terminadas las dos horas del parcial, es decir a más tardar a las 9:15 a.m. hora Colombiana. Se pueden enviar fotos o archivos escaneados, pero que sean entendibles. Los parciales que se reciban después de esta hora tendrán penalización.

1. (10 puntos) Lleve a la forma $a + bi$ el número complejo $z = \frac{(8 + 2i) - (1 - i)}{(2 + i)^2}$.
2. (10 puntos) Sea k un número entero. Muestre que:
(a) $i^{4k} = 1$ (b) $i^{4k+1} = i$ (c) $i^{4k+2} = -1$ (d) $i^{4k+3} = -i$.
3. (10 puntos) Muestre que el punto $(z_1 + z_2)/2$ es el punto medio del segmento de recta que une z_1 y z_2 , con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
4. (10 puntos) Muestre que los puntos $3 + i$, 6 , y $4 + 4i$ son los vertices de un triangulo rectangulo.
5. (10 puntos) Describa el conjunto de puntos z en el plano complejo que satisfacen la ecuación $|z| = \operatorname{Re}(z) + 2$.
6. (10 puntos) Pruebe que si $|z| = \operatorname{Re}(z)$ entonces z es un número real positivo.
7. (10 puntos) Encuentre $\left| \frac{(\pi + i)^{100}}{(\pi - i)^{100}} \right|$.
8. (5 puntos) Dado el vector z , interprete de forma geométrica el vector $(\cos \phi + i \sin \phi)z$.
9. (5 puntos) Muestre que $e^z = e^{z+2\pi i}$ para todo z . (Es decir que la exponencial compleja es periódica con periodo $2\pi i$).

10. (10 puntos) Muestre que las n raíces de $z_0^{1/n}$ son los vertices de un polígono regular de n lados, inscrito en el círculo de radio $\sqrt[n]{|z_0|}$ centrado en el origen.
11. (5 puntos) Describa como es la proyección sobre la esfera de Riemann del anillo $\{z : 1 < |z| < 2\}$.
12. (5 puntos) Para la función exponencial compleja $f(z) = e^z$ describa la imagen de la línea vertical $\operatorname{Re}(z) = 1$.

Mucha suerte!!!