

Segundo Parcial Variable Compleja (20%)

Profesor: Alexander caicedo

October 21, 2020

- En este parcial se evalúa el procedimiento, así que para cada ejercicio **muestre el procedimiento de forma ordenada**.
- El parcial es con libro abierto, así que se espera que cualquier detalle, por obvio que parezca, sea mencionado si se requiere para la solución de un problema.
- Recuerde que el examen es individual, cualquier intento de copia será tratado según el proceso indicado por la universidad.
- El parcial debe ser enviado a mi e-mail: alexander.caicedo@urosario.edu.co, dentro de los 15 minutos después de terminadas las dos horas del parcial, es decir a más tardar a las 9:15 a.m. hora Colombiana. Se pueden enviar fotos o archivos escaneados, pero que sean entendibles. Los parciales que se reciban después de esta hora tendrán penalización.

1. (20 puntos) Para la función $g(z) = 3x^2 + 2x - 3y^2 - 1 + i(6xy + 2y)$:
 - (a) (10 puntos) Indique en que región del plano complejo es diferenciable y justifique su respuesta.
 - (b) (5 puntos) ¿Es la función analítica? Justifique su respuesta
 - (c) (5 puntos) ¿Se puede expresar solo en términos de z , con $z = x + iy$? En caso de que no se pueda justifique su respuesta, en caso de que si se pueda coloquela en términos solamente de la variable z .
2. (10 puntos) Calcule $\int_{\Gamma} \operatorname{Re}(z)dz$ a lo largo del segmento de recta dirigido que va desde $z = 0$ a $z = 1 + 2i$.
3. (10 puntos) ¿Cuál de los siguientes dominios es simplemente conexo? Justifique su respuesta:
 - (a) (5 puntos) El anillo $1 < |z| < 2$.
 - (b) (5 puntos) El interior de la elipse $4x^2 + y^2 = 1$.
4. (10 puntos) Explique porqué una cota superior para la magnitud de una integral de contorno, $\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right|$, esta dada por $Ml(\gamma)$, donde γ es el contorno, $l(\gamma)$ es la longitud del contorno, y M es una cota superior para la magnitud de la función $f(z)$ en el contorno.

5. (10 puntos) De al menos una razón por la cual la integral de contorno, sobre un contorno cerrado, de una función analítica dentro y sobre el contorno es igual a cero, i.e. $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$.
6. (15 puntos) Encuentre el valor de la integral de contorno $\int_C \frac{e^{-z}}{(z+1)^2} dz$, donde $C : |z| = 2$ recorrido una vez en sentido positivo.
7. (10 puntos) La formula integral general de Cauchy nos indica que:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} dz = \frac{2\pi i}{(m-1)!} f^{(m-1)}(z_0).$$

¿Qué condiciones debe satisfacer $f(z)$, el contorno C y z_0 para que la igualdad sea cierta?

8. (15 puntos) Explique porqué una función analítica en un dominio acotado y continua dentro y sobre el contorno del dominio tiene su valor de magnitud máximo en el borde del contorno.

Mucha suerte!!!