MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Álgebra Lineal
2019-1

Universidad del Rosario

Segundo Parcial

26 de marzo 2019

Isabella Martínez Martínez.

Indicaciones generales

- Este es un examen **individual** con una duración de **120 minutos: de 3:00 a 5:00 p.m.**
- No se permite el uso de libros o apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar apagados durante todo el examen y guardados en la maleta
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen.
- **Las respuestas deben estar totalmente justificadas.**

0,5 ~~1.~~ **(0,5 ptos.)** Sea A una matriz cuadrada invertible tal que $A = A^{-1}$ y $\det(A) < 0$. Determine el valor de $\det(A)$

0,5 ~~2.~~ **(0,5 ptos.)** Sea A una matriz cuadrada de orden n, con n impar, y suponga que A es antisimétrica, demuestre que A es no invertible

1 ~~3.~~ **(1 pto.)** ¿Para que valores de α la matriz $A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$ no tiene inversa?

1 ~~4.~~ **(1 pto.)** Exprese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica

5. **(0,5 ptos c/u.)** Indique si las proposiciones dadas a continuación son verdaderas o falsas. Si su respuesta no está justificada o la justificación no es correcta aún cuando haya acertado la veracidad o falsedad de la proposición, la pregunta no será evaluada

0,5 a) Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n entonces $det(A+B) = det(A) + det(B)$.

V_____, F__X__ Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$det(A) = (0) - (4) = -4$ $\quad det(B) = 1$ $\quad det(A+B) = (3) - (4) = -1$

Observe que $-1 \neq -4 + 1 \Rightarrow -1 \neq -3$ ✓

b) Sea A una matriz cuadrada, si A es invertible entonces A^{-1} es invertible.

0,5 V__X__, F_____ Supongamos que A es invertible. Luego existe A^{-1}, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = I_n$

De manera análoga $\boxed{\text{para } A^{-1} \text{ considere a } (A^{-1})^{-1}}$, es decir, $A^{-1} \cdot A = I_n$ & $A \cdot A^{-1} = I_n$ (Es mi hipótesis de hech

Esto es lo que quiere mostrar

Por lo tanto A^{-1} es invertible y su inverso es A ✓

0,5 c) Toda matriz cuadrada se puede escribir como producto de matrices elementales.

V_____, F__X__ Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

Note que una matriz es invertible si y solo si se puede expresar como producto de matrices elementales. A no es invertible porque $det(A) = 0$. Luego no es equivalente por filas a la matriz identidad y en consecuencia no la puedo expresar como product de matrices elementales.

$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{3}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to -6F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ → No es una matriz elemental.

0,5 d) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$ entonces $det(A) = 1$.

V_____, F__X__ Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Observe que $A^2 = A$ porque $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sin embargo, $det(A) = 0$, no 1.

"Sabe que escribo lentamente. Esto se debe sobre todo a que no quedo satisfecho hasta que no consigo decir todo cuanto me sea posible en unas pocas palabras, y escribir de modo conciso lleva mucho más tiempo que hacerlo en extensión" Carl Friedrich Gauss: matemático, astrónomo y físico (1777-1855)