Segundo Parcial

4 de abril de 2019

Indicaciones generales

- Este es un examen **individual** con una duración de **110 minutos: de 14:05 a 15:55**.
- No se permite el uso de libros o apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar apagados durante todo el examen.
- Puede tener una hoja manuscrita de resumen y la impresión de la hoja de resumen de distribuciones disponible en `e-aulas`.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen.
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- Si requiere cuantiles de la distribución normal, use los siguiente valores:

α	0.1	0.05	0.025	0.01
z_α	1.28	1.65	1.96	2.33

- Si requiere otros cuantiles déjelos indicados. Use símbolos estándar, por ejemplo z_α.

1. [40 ptos.] La función de densidad de una variable aleatoria de Rayleigh X se define como

$$f_X(x;\sigma) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2}\exp\{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

La distribución del tiempo de vida de una persona después de pensionarse se ha estimado que sigue una distribución Rayleigh(σ) pero se desconoce el valor de σ. Se ha tomado una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de tamaño n.

   a) [20 ptos.] Determine un estimador para σ^2 usando el método de máxima verosimilitud.

   b) [20 ptos.] ¿Es el estadístico $U = \sum_{i=1}^n X_i^2$ suficiente para σ^2.

2. [20 ptos.] Un sistema de almacenamiento consiste de k discos. Cada disco falla con probabilidad p. Sea X el número de discos fallidos después de un año de operación. Se ha modelado X como una variable aleatoria Binomial(k, p). Aunque k es conocido, p no lo es. Para estimar p se ha usado el método de momentos para definir el estimador

$$\hat{p} = \frac{1}{k}\bar{X}$$

   a) [10 ptos.] ¿Es $\hat{p}$ un estimador insesgado de p?

   b) [10 ptos.] ¿Es $\hat{p}$ un estimador consistente?

3. [10 ptos.] La varianza de una variable aleatoria Weibull con parámetro σ es igual a

$$\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2.$$

Usando este resultado y el método de momentos proponga un estimador para σ^2.

4. [30 ptos.] Para ingresar a un equipo de competencia, a un corredor le piden correr 49 veces un circuito de 5 kilómetros. Se le acepta en el equipo si su tiempo promedio es inferior a 22 minutos con un 95 % de confianza. El corredor realizó las 49 repeticiones y se observó un tiempo medio de 21 minutos con una desviación estándar de 7 minutos.

   a) [15 ptos.] Realice una prueba de hipótesis para determinar si el corredor es admitido en el equipo o no. Defina claramente sus hipótesis nula y alternativa, su estadístico de prueba y la región de rechazo. Concluya usando el contexto del problema.

   b) [15 ptos.] Si al corredor realmente le toma 20 minutos correr los 5k, ¿cuál es la probabilidad de que sea erróneamente rechazado del equipo?