Universidad del Rosario Departamento de Matemáticas

# Tarea 5 por ciento del tercer examnen parcial

1. Considere

$$a^{-2}u_{tt} + \gamma^2 u = u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

con las condiciones de frontera

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0. \quad t > 0$$

y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0.$$

*a*) Muestre que la solución se puede escribir como

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \gamma^2}at\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Con

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{L}$$

*b*) Mediante identidades trigonométricas escriba la solución de la forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\operatorname{sen} \frac{n\pi(x + a_n t)}{L} + \operatorname{sen} \frac{n\pi(x - a_n t)}{L}\right]$$

Calcule $a_n$ la velocidad de la onda.

*c*) Observ qu $a_n$, hallada en el item anerior, depende de $n$. Esto quiere decir que diferentes ondas se propagan a diferente velocidad lo que ocaciona una distorsi[on de la onda original. Halle la condición para que $a_n$ sea independiene de $n$

2. Ahora sea

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & , \quad 4 \le x \le 5 \\ 6 - x & , \quad 5 < x \le 6 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

*a*) Determine los coeficientes $c_n$, de la solución del problema anterior con esta función inicial. Haga la gráfica de

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

para $L = 10$, con $N$ suficientemente grande para que sea una buena aproximación. Con ese N resuelva los siguiente items.

*b*) Para $\gamma = 0$ haga una animación en el tiempo.

*c*) Para $\gamma = 1/8$ haga una animación en el tiempo.

*d*) Para $\gamma = 1/4$ haga una animación en el tiempo.

Entrega de la tarea 20/11/2020. Presentación del trabajo el viernes 20 a la hora de clase.
**En la presentación les puedo pedir cambiar las condiciones iniciales Octubre 13/2020 Entrega viernes 4 de septiembre de 2020 en la página del curso antes de la medianoche. L.M.E.N**