Segundo examen parcial

Instrucciones: Esta es una evaluación que debe ser realizada en grupos de dos (2). Debe subir las respuestas en un archivo pdf en el aula virtual en la actividad destinada para tal fin. Justifique todos los pasos. Identifique el entregable con los nombres de los integrantes.

1. [**1,25 ptos**] Sean X un espacio topológico, $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Demuestre que el conjunto $\{x \in X : f(x) > g(x)\}$ es abierto en X.

2. [**1,25 ptos**] Se dice que un espacio topológico Z satisface la condición AC si para todo par de puntos $x, y \in Z$, $x \neq y$, existe una función continua $g : [0,1] \to Z$ tal que $g(0) = x$ y $g(1) = y$.

   Muestre que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo y Y satisface la propiedad AC entonces X satisface la propiedad AC

3. [**1,25 ptos**] Sea (X, d) un espacio métrico. Considere la métrica sobre X definida por

$$d_0(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

   Muestre que toda bola abierta en (X, d) es una bola abierta en (X, d_0)

4. [**1,25 ptos**] Sean (X, d), (Y, ρ) espacios métricos, $f : X \to Y$ una función sobreyectiva que satisface la siguiente condición:

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$$

   Muestre que $f : (X, \tau_d) \to (Y, \tau_\rho)$ es un homeomorfismo