

Cuarto Parcial
24/05/2021

1. Este es un examen individual con una duración de 90 minutos.
2. Adicionalmente tendrá 10 minutos para tomar fotos del examen y subir sus respuestas en formato .pdf al aula virtual.
3. No se permite el uso de libros, apuntes ni está permitido consultar en internet. Puede usar sus apuntes, **NO ESTÁ PERMITIDO CONSULTARSE ENTRE USTEDES NI CON NADIE MÁS**
4. Las respuestas deben estar totalmente justificadas
5. Las cámaras deben estar encendidas durante todo el examen
6. Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen.

-
1. **[1,3 ptos]** Demuestre que para cada $x > 0$ se cumple que

$$1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \leq \sqrt[3]{1+x} \leq 1 + \frac{1}{3}x.$$

2. Considere la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$$

con $x \in \mathbb{R}$.

- a) **[0,5 ptos]** Halle el límite puntual f de esta sucesión.
- b) **[0,5 ptos]** Establezca si esta sucesión converge uniformemente en \mathbb{R} a f .
- c) **[0,5 ptos]** Determine si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = f'(0).$$

3. **[1,2 ptos]** Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

$$f(s+t) = f(s)f(t)$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $t = 0$, muestre que f es diferenciable en cada $t \in \mathbb{R}$ y que

$$f'(t) = f'(0) f(t).$$

4. **[1,00 pto]** Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) tal que $f(a) = f(b) = 0$. Mostrar que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \lambda f(c).$$