Parcial #1

Estudiante: Laura Sofia Rincón Sierra **Nota:**

Indicaciones generales

- Este es un examen individual con una duración de 120 minutos.
- No se permite el uso de cualquier medio electrónico.
- Los celulares deben estar apagados y guardados durante todo el examen.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen.

1. [1 pt] Sea A un anillo conmutativo con identidad. Demuestre que A es un campo si y solo si cualquier homomorfismo no nulo de anillos $\varphi: A \to B$, con $B \neq \{0\}$, es inyectivo.

2. [1.5 pts] Sea $S = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z},\ b \text{ es par}\}$.

   a) Demuestre que S es un subanillo de $\mathbb{Z}[i]$ o justifique lo contrario.

   b) Demuestre que S es un ideal de $\mathbb{Z}[i]$ o justifique lo contrario.

3. [1.5 pts] Sea A un anillo conmutativo con identidad. Un elemento $a \in A$ es *nilpotente* si existe un $n \geqslant 0$ tal que $a^n = 0$.

   a) Demuestre que si a y b son nilpotentes entonces también $a - b$ lo es.

   b) Demuestre que $N = \{a \in A : a \text{ es nilpotente}\}$. es un ideal

   Sugerencia: Recuerde que $(\underset{x+y}{a+b})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

4. [1 pt] Sea A un anillo e I un ideal de A. Sea $M_2(A)$ el anillo de las matrices 2×2 a coeficientes en A. Asuma que $M_2(I)$, el conjunto de las matrices 2×2 a coeficientes en I sea un ideal de $M_2(A)$. Demuestre que $M_2(A)/M_2(I) \cong M_2(A/I)$.

1. [1.5 pts] Demuestre que la aplicación $F: \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ definida por $x \mapsto x^p$ (donde p es primo) es un isomorfismo de anillos. La aplicación F es conocida con el nombre de *isomorfismo de Frobenius*.

   Sugerencia: recuerde que $(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p-k}$.

2. [1 pt] Sean I y J dos ideales de un anillo A. Muestre con un contraejemplo que $I \cup J$ no es un ideal y demuestre que $I + J = \{a + b : a \in I, n \in J\}$ es un ideal de A.

3. Para un anillo A no conmutativo se define su centro como

$$Z(A) = \{x \in A : ax = xa \text{ para todo } a \in A\}$$

   a) [0.5 pt] Demuestre que $Z(A)$ es subanillo de A.

   b) [1 pt] Demuestre que si $\phi : A \to B$ es un homomorfismo sobreyectivo, entonces $\phi(Z(A)) \subseteq Z(B)$.

4. [1 pt] Sea M un subanillo de A e I un ideal de A. Asuma que $M + I$ es un anillo de A y que $M \cap I$ es ideal de M. Demuestre que $M/(M \cap I) \simeq (M + I)/I$.