



ENAMEN FINAL 20 da Naviambra da 2010

Indicaciones generales

- o Este es un examen individual con una duración de 120 minutos: de 13:00 a 15:00 p.m.
- Sólo se permite el uso de calculadoras como medio electrónico. Los celulares deben estar apagados durante todo el examen
- El uso de apuntes, libros u otro recurso "analógico" no está permitido.
- o Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva a la anulación del examen
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- Escoja 4 de los 6 puntos y marque cuales realizó (sólo se corregirán 4).
- 1. (12.5 pts) Teorema del límite central.

Sea $X_1, X_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d con media $\mu = 0$, varianza σ^2 y función generadora de momentos $M_X(s)$. Suponga que $M_X(s)$ es finita en $-d < s < d, d \in \mathbb{R}^+$. Sea

$$Z_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sigma \sqrt{n}}.$$

 \approx) Muestre que la función generadora de momentos de Z_n satisface

$$M_{Z_n}(s) = \left(M_X\left(\frac{s}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$
.

3) Suponga que la función generadora de momentos $M_N(s)$ tiene la expansión de Taylor de segundo orden alrededor de $s_0 = 0$:

$$M_X(s) = a + bs + cs^2 + o(s^2).$$

donde $o(s^2)$ satisface que $\lim_{s\to 0} o(s^2)/s^2 = 0$.

Encuentre a, b y c (en términos de σ^2). Recuerde que la expansión de Taylor de una función f alrededor de x_0 tiene la forma:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

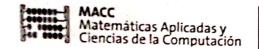
ت) Use los resultados de (a) y (b) para demostrar que la función generadora de momentos $M_{Z_n}(s)$ converge a la función generadora de momentos de la normal estándar, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(s) = e^{s^2/2}.$$

para s en un vecindario de 0.

Pista: Reemplace $M_X(s)$ en (a) por la expresión que halló en (b) y calcule el límite (puede omitir los términos $o(s^2)$).

Página 1 de 2



Probabilidad MACC 2019-2



- \mathfrak{L} (12.5 pts) Se sabe que cada una de las tres personas A, B, C dice la verdad en un determinado momento con probabilidad $\frac{1}{3}$. Supongamos que A hace una declaración y C dice que B dice que A estaba diciendo la verdad. ¿Cuál es el probabilidad de que A realmente estuviera diciendo la verdad?
- 3 (12.5 pts) Una baraja de 52 cartas (bien barajada) se reparte entre 4 jugadores. Encuentre la probabilidad de que cada uno de los jugadores obtenga un as.
- 4. (12.5 pts) Demuestre con un contrajemplo que convergencia en probabilidad no implica convergencia con probabilidad 1.
- 5. (12.5 pts) Sea X una variable aleatoria continua.
 - Encuentre la función de densidad de e^x en términos de la función de densidad de X.
 - b). Encuentre la función de densidad de e^x cuando X es uniforme en [0,1].
- \mathfrak{G} . (12.5 pts) Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta uniforme en el triángulo con vértices en (0,0), (0,1) y (1,0).
 - Encuentre la función de densidad conjunta $f_{X,Y}$.
 - b) Encuentre la función de densidad marginal f_Y .
 - Encuentre la función de densidad condicional de X dado Y.
 - d) Encuentre $\mathbb{E}(X|Y=y)$ y use el teorema de expectación total para hallar $\mathbb{E}(X)$ en términos de $\mathbb{E}(Y)$