Tercer parcial

12 de noviembre de 2020

Nombre del estudiante: ____________________ Grupo: ________

Nombre del profesor: ____________________ Calificación: ________

Indicaciones generales

Este es un examen individual con una duración de 2 horas. No se permite el uso de libros, apuntes (excepto las diapositivas del curso), o cualquier medio electrónico (salvo calculadoras). Los celulares deben estar apagados durante todo el examen a menos que use su celular para acceder a Zoom. Las cámaras deben estar encendidas. Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen. Las respuestas deben estar totalmente justificadas. El valor de cada punto es el que se indica al inicio del mismo. Tolerancia cero ante el fraude.

Problema 1: funciones de matrices

(+1.0) Encuentre una matriz A tal que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Problema 2: diagonalización

El siguiente sistema modela la evolución de la temperatura de dos objetos que están en contacto (siguiendo la ley de enfriamiento de Newton):

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t),$$

donde α es un valor real positivo. Aquí, la primera componente del vector $\boldsymbol{x}(t)$ es la temperatura del objeto 1, mientras que la segunda componente es la temperatura del objeto 2.

1. **(+1.0)** Diagonalizar el sistema. Esto es, encontrar la matriz modal y la matriz diagonal asociada.
2. **(+0.5)** Usando el resultado anterior, obtenga la matriz de transición de estados $\Phi(t, \tau)$ del sistema en la base original.
3. **(+0.5)** Grafique (**sin la ayuda de Matlab**) la solución del sistema para $\boldsymbol{x}(0) = (1 \;\; 1)^\top$. (**confíe en su criterio, por más tentación que sienta por comprobar su respuesta usando Matlab, no lo haga**).

4. **(+0.5)** Asuma $\boldsymbol{x}(t_1) = (2 \;\; 0)^\top$, encuentre $\boldsymbol{x}(t_2)$ si $t_2 - t_1 = 1$.

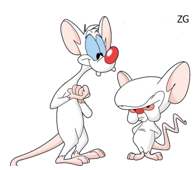
Problema 3: valores y vectores propios de la matriz del sistema

Pinky y Cerebro han construido una máquina que, usando campos eléctricos y magnéticos fuertes, hace que una partícula oscile rápidamente. Esto es útil porque una partícula oscilando rápidamente puede generar grandes cantidades de energía. Cerebro ha modelado el comportamiento de la posición de la partícula usando el siguiente sistema dinámico:

$$
\begin{aligned}
x[k+1] &= -x[k] + y[k] \\
y[k+1] &= y[k] \\
z[k+1] &= z[k],
\end{aligned}
$$

donde $x[k], y[k], z[k]$ son las coordenadas de la partícula en el tiempo k (k está dado en cronones (una unidad de tiempo muy pequeñita)). Cerebro pide a Pinky que ubique la partícula en una posición inicial para que esta oscile (es decir, que entre un instante de tiempo y el siguiente pase de (x, y, z) a $(-x, -y, -z)$), pero Pinky no tiene idea de dónde ubicarla y recurre a su ayuda. Para esto, resuelva los siguientes puntos:

1. **(+0.5)** Encuentre los valores y vectores propios de la matriz del sistema.
2. **(+1.0)** Usando el resultado anterior, encuentre una condición inicial que haga que el sistema oscile.



"If you want me to play only the notes without any specific dynamics, I will never make one mistake."
-Vladimir Horowitz (pianista y compositor)

Éxitos!