Tercer Parcial

16 de noviembre de 2022

Indicaciones generales

- Este es un examen **individual** con una duración de **60 minutos: de 9:00 a 10:00 a.m.**.
- Sólo se permite el uso de calculadoras como medio electrónico. Los celulares deben estar apagados durante todo el examen.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva a la anulación del examen.
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- ¡Suerte y ánimo!

1. (15 pts) Suponga que las densidades conjuntas de $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_p)'$ de dos poblaciones π_1 y π_2 son normales multivariadas con parámetros μ_1 y Σ y μ_2 y Σ respectivamente

   Muestre que:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_1})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_1}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_2})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_2}) \\ = (\boldsymbol{\mu_1}-\boldsymbol{\mu_2})'\Sigma^{-1}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu_1}-\boldsymbol{\mu_2})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu_1}+\boldsymbol{\mu_2}) \end{aligned}$$

2. (8 pts) Suponga que $p \leq q$. Sean $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ vectores aleatorios de tamaños 2 y 2 respectivamente, con $Cov(X^{(1)}) = \Sigma_{11}$, $Cov(X^{(2)}) = \Sigma_{22}$, $Cov(X^{(1)}, X^{(2)}) = \Sigma_{12}$. Además:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 100 & 3 & 0 & 0.95 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 100 \end{pmatrix}$$

   tiene rango completo.

   Suponga que el primer valor propio (el mayor) de la matriz $\Sigma_{11}^{-1/2}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1/2}$ es igual a λ_1.

   a) ¿Cuánto es la correlación más alta que tienen los dos grupos?
   b) ¿Cuánto valdría la segunda componente del vector a? ¿y la primera del vector b?
   c) ¿Qué variables explican la correlación existente entre los dos grupos?

3. (2 pts) ¿Qué suposiciones se deben verificar antes de utilizar discrimintante lineal de Fischer?