Universidad del Rosario Departamento de Matemáticas

Examen Final Ecuaciones diferenciales

NOMBRE: Isabella Martinez M

Punto	1	2	3	4	Definitiva
Calificación	10	8	10	20	48
Puntaje	10/50	10/50	10/50	20/50	

1. Un modelo de teoría del aprendizaje busca una curva $P(t)$ que representa el desempeño de una persona que aprende en función del tiempo. La derivada dP/dt representa la rapidez a la que mejora el desempeño. Si M es el nivel máximo de desempeño del cual es capaz el alumno tenemos la ecuación dierencial:

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P),$$

con k una constante positiva. Resuenva la ecuación diferencial.¿Cuál es el límite de la solución cuando t tiende a infinito?

2. Resuelva el problema de valor inicial:

$$y'' + 4y = 3\text{sen } 2t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

3. Resolver

$$y'' + 3y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

si

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 10 \\ 0, & t > 10 \end{cases}$$

(a) Haga la gráfica de f y presentela con las funciones escalón u_c.

(b) Resuelva el problema de valor inicial.

(c) Haga la gráfica de la solución y comparela con término a la derecha (forzamiento) $f(t)$ explique cómo se relacionan.

4. Vamos a calcular la solución general de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

Sistema no homogéneo de la forma

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}$$

con

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

(a) Primero, resuelva el sistema homogéneo.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

(b) Calcule la matriz fundamental $\Psi(t)$ y su inversa $\Psi(t)^{-1}$, sabemos que la solución general es

$$\mathbf{x} = \Psi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

(c) Variación de parámetros supone que la solución es:

$$\mathbf{x} = \Psi(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

con $u_1(t),\ u_2(t)$ funciones.
Derivando este vector $\mathbf{x}$ y sabiendo que debe cumplir $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{t})$ muestre que $\mathbf{u}$ debe cumplir

$$\Psi(t)\mathbf{u}' = \mathbf{g}$$

(d) Calcule u integrando

$$\mathbf{u}' = \Psi(t)^{-1}\mathbf{g}$$

y presente la solución general. No olvide las constantes.

$$\mathbf{x} = \Psi(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Recuerde que $\mathbf{g}$ se dió en el primer paso.

L.M.E.N. 25 noviembre, 2019