Parcial 2

17 de abril de 2020

Indicaciones generales

- Este es un examen **individual** con una duración de **110 minutos: de 13:05 a 14:55**.
- No se permite la comunicación con otros alumnos.
- No se permite el uso de calculadoras o cualquier medio electrónico. Se permiten utilizar el libro y los apuntes.
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- Enviar fotos de las soluciones directamente al profesor a través de correo o por el chat de Teams **inmediatamente** al finalizar el examen.
- Subir el archivo con las soluciones escaneadas o las fotos por e-aulas. Las fotos o archivos deben ser legibles (no fotos borrosas).
- Tienen tiempo hasta las **15.10** para subir archivos en e-aulas.
- Se calificarán las fotos (u otros archivos) subidas a e-aulas. Si el archivo no se puede leer no será calificado.

Ejercicio 1 [1 punto]
Recuerde la demostración de Euclides de la existencia de infinitos primos: si $p_1, \ldots, p_k$ fueron todos los primos, habría que cualquier factor primo p de $n = p_1 \ldots p_k + 1$ sería diferente de los p_i. Adapte esa demostración para mostrar que, dado cualquier campo F, existen infinitos polinomios mónicos[1] irreducibles en $F[x]$.

Ejercicio 2 [1 punto]
Sea p un número natural primo. Sea $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ un polinomio irreducible de grado n. Hemos visto que el campo $\mathbb{F}[x]/(f(x))$ tiene p^n elementos. Construya un campo con 16 elementos.
[*Cuidado: un polinomio de grado* 4 *puede no tener raíces y ser reducible como producto de dos polinomios de grado* 2*:* $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 2)(x^2 + 1)$ *es reducible en los reales, pero no tiene ceros reales.*]

Ejercicio 3 [1 punto]
Sea $(G, \cdot)$ un grupo (en notación multiplicativa). Definimos el *grupo opuesto* G^o en la siguiente manera. Como conjuntos $G^o = G$. La operación es al revés: $a \circ b = ba$, para a y $b \in G$. Demuestre que G^o es un grupo.

Ejercicio 4 [1 punto]
Sea G un grupo tal que todos los elementos de G que no sean la identidad tengan orden 2. Demuestre que G es abeliano.

Ejercicio 5 [1 punto] Sean G y G' dos grupos, y sea $\varphi\colon G \to G'$ un homomorfísmo sobreyectivo de grupos. Demuestre que

1. Si G es abeliano, también lo es G'.

2. Si G es cíclico, también lo es G';

[1] Un polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ se dice *mónico* si $a_n = 1$.