Primer Parcial

21 de febrero de 2020

Indicaciones generales

- Este es un examen **individual** con una duración de **110 minutos: de 7:05 a 8:55.**
- No se permite el uso de libros o apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar apagados durante todo el examen.
- Puede tener una hoja manuscrita de resumen.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen.
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- En todas las respuestas deje indicadas todas las cantidades que se refieran a cuantiles de distribuciones conocidas. Use símbolos estándar, por ejemplo z_α, $t_{\alpha/2,n-1}$, etc.

1. [30 ptos.]

   Para estudiar la consolidación de la memoria durante el aprendizaje, un psicólogo planea suministrar un medicamento psicotrópico a unos ratones de laboratorio, antes o después de unos ensayos de aprendizaje en laberintos. El científico primero estudia un grupo de control, sin aplicarles el medicamento, de 41 ratones, midiendo para cada ratón el número total de errores de aprendizaje en el laberinto (giros equivocados) antes de que el ratón alcance el criterio de una carrera sin errores por el laberinto. Los resultados en número de errores de aprendizaje son $\bar{y} = 13.2$ con $s^2 = 5.19$.

   a) [10 ptos.] Determine el intervalo de confianza del 95 % para la media de la población de número de errores de aprendizaje.
   b) [10 ptos.] Si se asume que la población del número de errores de aprendizaje está normalmente distribuida, calcule el intervalo de confianza del 95 % *exacto.*
   c) [10 ptos.] Asumiendo la población del número de errores de aprendizaje está normalmente distribuida, determine el intervalo de confianza del 95 % para la desviación estándar de la población.

2. [30 ptos.] Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \theta(1-x)^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

   donde $\theta > 0$.

   a) [10 ptos.] Muestre que $\bar{X}$ es un estimador insesgado para $(1+\theta)^{-1}$.
   b) [10 ptos.] Determine el MSE del estimador definido en *(a)*.
   c) [10 ptos.] ¿Es el anterior estimador consistente?

3. [40 ptos.] La OMS desea realizar un estudio para determinar la temperatura promedio facial, registrada mediante una cámara infrarroja, que presentan las personas que han contraido el coronavirus COVID-19. Si se desea que la probabilidad de que la temperatura promedio facial de una muestra esté dentro de 1 grado Celsius de la temperatura promedio facial real, sea de 0.98, calcule el tamaño n de la muestra requerida bajo las siguientes situaciones:

   a) [10 ptos.] Suponga que no se conoce cuál es la distribución de las temperaturas faciales, pero se conoce su varianza $\sigma^2 = 25$.
   b) [15 ptos.] Suponga que la distribución de las temperaturas faciales es normal con $\sigma^2 = 25$.
   c) [15 ptos.] Suponga que la distribución de las temperaturas faciales es normal, pero no se conoce su varianza. Sin embargo, se estima que la varianza de la muestra es $s^2 = 25$. *Para este punto, explique el procedimiento a realizar, pero no lo resuelva numéricamente.*