Universidad del Rosario

Álgebra Lineal
2019-1

Isabella Martinez

Cuarto examen parcial
11/05/2019

Indicaciones generales

Este es un examen individual con una duración de 120 minutos. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar guardados en la maleta durante todo el examen. Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen. **Las respuestas deben estar totalmente justificadas.**

1. **(0,4 ptos c/u.)** Indique si las proposiciones dadas a continuación son verdaderas o falsas. Si su respuesta no está justificada o la justificación no es correcta aún cuando haya acertado la veracidad o falsedad de la proposición, la pregunta no será evaluada

a) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Si $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ entonces $\{Te_1, Te_2\}$ también es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. V_____, F X

Considere $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (2x, 2y)$. Note que es una transformación lineal porque es la multiplicación por un escalar. Considere la base ortonormal $B = \{(1,0), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. $T(1,0) = (2,0)$, $T(0,1) = (0,2)$. Sin embargo, $\|(2,0)\| = \sqrt{4} = 2 \neq 1$. Por lo tanto no es una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$. ✓

b) Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una transformación lineal sobreyectiva entonces $\dim N(T) = 5$ V_____, F X

① Teorema: Sea $T: V \to W$ transformación lineal, $\dim V = \dim W = n$. T es inyectiva sii T es sobreyectiva

Note que $\dim \mathbb{R}^5 = \dim \mathbb{R}^5$ y que es finita (su dimensión es 5). Por ende, como T es sobreyectiva se sigue que T es inyectiva, lo que se traduce a que $N(T) = \{0\}$ y por lo tanto, $\dim N(T) = 0$ ✓

* Base de $\mathbb{R}^5$: $\{(1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0), \dots, (0,0,0,0,1)\}$

c) Si T es una transformación lineal inyectiva y $Tx = 0$ entonces $x = 0$ V X, F_____

② Teorema: Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. T es 1-1 si y solo si $N(T) = \{0\}$

Suponga que T es una T.L. inyectiva y que $Tx = 0$. Por definición $N(T) = \{x \in V \mid Tx = 0\}$. Por ende, $x \in N(T)$. Como T es 1-1, entonces $N(T) = \{0\}$. Por lo tanto $x = 0$. ✓

d) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal V y W son dos espacios vectoriales de dimensión finita. Si T es es sobre entonces $\dim V \geq \dim W$ V X, F_____.

③ Teorema: Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, V, W dos espacios vectoriales de dimensión finita. $\dim V = n$, $\dim W = m$. Si $n < m$ entonces T no es sobreyectiva.

Considere la contrarrecíproca: Si $\dim V < \dim W$ entonces T no es sobre.

Note que es el teorema. Por lo tanto, se cumple !!

e) Sea f, g funciones continuas en $[0,1]$, entonces $\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^2 \left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^2$ V______, F_X__

Considere $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Note que son continuas en $[0,1]$.

$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$, $\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 x^2 dx\right)^2 = \left(\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$\left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 x^4 dx\right)^2 = \left(\left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$. Note que $\frac{1}{4} > \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{25}\right)$ dado que $\frac{1}{4} > \frac{1}{225}$

f) Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ no es un isomorfismo entonces $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ no es una isometría V_X__, F______

4 Teorema: Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, V, W espacios vectoriales. Si T es una isometría entonces T es inyectiva

Considere la contrarrecíproca, y suponga que $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría. Por el teorema 4 es inyectivo. Además, $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathbb{R}^2$ y es finita. Como T es 1-1 y por el teorema 1, entonces T es sobre. Por lo tanto T es un isomorfismo.

g) Considere el espacio vectorial $(C[1,e], \mathbb{R}, +, \cdot)$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_1^e f(x)g(x)dx$, entonces $\left\|\frac{1}{x}\right\| = 1$ V______, F_X__

$\left\|\frac{1}{x}\right\|^2 = \left\langle \frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right\rangle = \int_1^e \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^e \frac{1}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^e$

$= -\frac{1}{e} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$

Así, $\left\|\frac{1}{x}\right\| = \sqrt{\frac{e-1}{e}} \neq 1$.

h) $T : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$, definida por $T(A) = AA^T$ es una transformación lineal V______, F_X__

Hoja desarrollo.

2. Considere el espacio vectorial $P_2[1,2]$, con el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_1^2 p(t)q(t)dt$. Considere el subespacio $H = \{q \in P_2 : q''(t) = 0 \ para\ todo\ t \in [1,2]\}$

a) **(0,8 ptos)** Encuentre una base ortonormal para H

b) **(0,5 ptos)**Si $p(t) = t^2 - 1$ calcule $\mathrm{Proy}_H p$

c) **(0,5 ptos)**Exprese el vector p como la suma de un vector en H y un vector en $H^\perp$.

".Si te rindes cuando las cosas se empiezan a poner difíciles, nunca lograras nada que valga la pena"