Second Midterm

April 7, 2021

Indicaciones generales

1. Fecha de publicación: 7 de abril de 2021 desde las 10:10.
2. Fecha de entrega: 7 de abril de 2021 hasta las 11:50.
3. Único medio de entrega: `https://e-aulas.urosario.edu.co`.
4. Formato de entrega: un solo archivo PDF.
   Importante: no use acentos ni deje espacios en los nombres de los archivos que cree.
5. La actividad **debe** realizarse **individualmente**.
6. En `e-aulas` puede acceder a las diapositivas y a la sección correspondiente a este parcial.
7. Celulares y otros dispositivos electrónicos deben estar apagados y ser guardados.
8. El estudiante solo podrá disponer de hojas en blanco como borrador de apuntes (opcional).
9. El estudiante puede tener una hoja manuscrita de resumen (opcional). Esta hoja debe estar marcada con nombre completo.
10. **Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva la anulación del examen.**
11. Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
12. `e-aulas` se cerrará a la hora acordada para el final de la evaluación. La solución de la actividad debe ser subida antes de esta hora. El material entregado a través de `e-aulas` será calificado tal como está. Si ningún tipo de material es entregado por este medio, la nota de la evaluación será 0.0.

1. [50 ptos.] Consider the initial-value problem

$$y' = f(t, y), \qquad a \leqslant t \leqslant b, \qquad y(a) = \alpha,$$

and a Taylor method of order two characterized by $T^{(2)}(t, y)$ and the difference equation

$$w_0 = \alpha, \qquad w_{j+1} = w_j + h\, T^{(2)}(t_j, w_j).$$

Suppose that $T^{(2)}(t, y)$ is approximated by the following linear combination of calls to $f(t, y)$:

$$T^{(2)}(t, y) \approx a_1 f(t, y) + a_2 f(t + \alpha_2, y + \beta_2),$$

where $a_1, a_2, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ must be appropriately chosen.

(a) Derive a family of infinite Runge-Kutta methods of order two, which satisfies the difference equation ($w_0 = \alpha$):

$$w_{j+1} = w_j + h(1 - \delta)\, f(t_j, w_j) + h\delta\, f\left(t_j + \frac{h}{2\delta}, w_j + \frac{h}{2\delta} f(t_j, w_j)\right),$$

where $\delta \in \mathbb{R}$ is related to a_2.

(b) Show that the local truncation error of this family of methods is $O(h^2)$ for all $\delta \in \mathbb{R}$.

Notice that by setting $\delta = 1$, $\delta = 1/2$, and $\delta = 3/4$ the Midpoint, the Modified Euler, and the Ralston methods are obtained, respectively.

2. [50 ptos.] Consider the following $n \times n$ linear system of equations:

$$E_i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i,n+1},$$

where E_i stands for the i-th equation in the system and $i = 1, \ldots, n$. The **Gauss-Jordan method** is described as follows. Use the i-th equation to eliminate x_i not only from the equations $E_{i+1}, E_{i+2}, \ldots, E_n$, as we have done in the Gauss elimination method, but also from the equations $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$. In other words, the method reduces a general $n \times n$ matrix $A = [a_{ij}]$ to a diagonal form $A = \operatorname{diag}(a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(n)})$ such that

$$[A, b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{2,n+1}^{(2)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right]$$

is the solution can be obtained by setting $x_j = a_{i,n+1}^{(j)} / a_{jj}^{(j)}$, for each $j = 1, \ldots, n$. This procedure circumvents the backward substitution in Gauss elimination.

(a) Construct an algorithm for the Gauss-Jordan procedure patterned after that of Gauss elimination described in Algorithm 6.1.

(b) Analyze the computational complexity of this new method as a function of the matrix dimension n.

You can consult Algorithm 6.1 (Gaussian Elimination with Backward Substitution) from the lecture slides located in Moodle.