Primer Parcial
3/09/2020

Este es un examen individual con una duración de 90 minutos, usted dispone de 30 minutos adicionales para subir las respuestas escaneadas al aula virtual. **Las respuestas deben estar totalmente justificadas**.

1. [**1,2 ptos**] Sea X un conjunto no vacío y $\gamma : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ una función que satisface las siguientes propiedades:

   a) $\gamma(X) = X$

   b) $\gamma(A) \subset A$

   c) $\gamma(\gamma(A)) = \gamma(A)$

   d) $\gamma(A \cap B) = \gamma(A) \cap \gamma(B)$

   Muestre que la colección $\tau = \{A \subset X : \gamma(A) = A\}$ es una topología sobre X. Sugerencia: muestre que γ es una aplicación monótona

2. [**1,2 ptos**] Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$, mostrar que A es abieto si y sólo si para todo subconjunto M de X tal que $M \cap A = \emptyset$ ocurre que $Cl(M) \cap A = \emptyset$

3. Considere $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales junto con la topología complemento numerable $\tau_{CN} = \{U \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} - U \text{ } \textit{es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$

   a) [**0,6 ptos**] Determine (sin demostrar) la clausura, interior y la frontera los conjuntos: $\mathbb{Z}_+$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

   b) [**0,4 ptos**] Muestre que la topología usual sobre $\mathbb{R}$ es más fina que la topología complemento numerable sobre $\mathbb{R}$

   c) [**0,4 ptos**]Considere $A = \mathbb{Z}_+$ muestre que la topología que A hereda como subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ coincide con la topología discreta sobre A

4. [**1,2 ptos**] Demuestre que X es Hausdorff si, y sólo si, la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es un conjunto cerrado en $X \times X$.