Quiz 1

ACT-1002 : Analyse probabiliste des risques actuariels

Automne 2024

Question 1

Combien de mots différents de cinq lettres formés à partir de l'alphabet latin terminent par une voyelle et ont au moins un « b » et au plus un « a », et ce sans aucune considération phonétique ?

(a, e, i, o, u, y) sont des voyelles.

D'abord on trouve le nombre de mots sans « a » dans les 4 premières lettres. Pour ajouter la condition d'avoir au moins un « b », on soustrait les cas sans « b » à tous les cas possibles.

$$6 \cdot (25^4 - 24^4) = 353,094$$

Finalement, on trouve les nombre de mots avec un « a » dans les 4 premières lettres. Pour ajouter la condition d'avoir au moins un « b », on soustrait les cas sans « b » à tous les cas possibles.

$$5 \cdot 4 \cdot (25^3 - 24^3) = 36,020$$

On trouve donc $353,094 + 36,020 = 389,114$ mots possibles.

Question 2

Lors d'une première session d'automne, un étudiant en actuariat **pourrait** prendre **jusqu'à six cours** parmi les suivants :

- ACT-1000
- ACT-1001
- ACT-1002
- ACT-1003
- IFT-1902
- ECN-1000
- ECN-1001
- CTB-1000

Toutefois, il doit prioriser les cours ayant un sigle ACT ou IFT. Ainsi, il ne peut choisir un des trois derniers cours listés que s'il décide d'en suivre six durant la session. En outre, les cours ACT-1002 et ACT-1003 sont concomitants ; ils doivent être suivis en même temps. Combien de combinaisons possibles de cours existe-t-il ?

Définissons C_i comme étant le nombre de combinaisons possible si l'étudiant prend i cours. S'il décide de ne suivre qu'un seul cours, il doit nécessairement en choisir un parmi ACT-1000, ACT-1001 et IFT-1902.

$$C_1 = \binom{3}{1} = 3$$

S'il décide de choisir deux cours, il pourrait prendre les deux cours concomitants ou deux parmi ACT-1000, ACT-1001 et IFT-1902.

$$C_2 = \binom{1}{1} + \binom{3}{2} = 4$$

S'il décide de choisir trois cours, il pourrait prendre les deux cours concomitants et un parmi ACT-1000, ACT-1001 et IFT-1902, ou les trois précédents.

$$C_3 = \binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{3}{1} = 4$$

S'il décide de choisir quatre cours, il doit nécessairement prendre les deux cours concomitants et deux parmi ACT-1000, ACT-1001 et IFT-1902.

$$C_4 = \binom{1}{1}\binom{3}{2} = 3$$

S'il décide de choisir cinq cours, il doit nécessairement prendre l'ensemble des cours à prioriser.

$$C_5 = \binom{1}{1} = 1$$

S'il décide de choisir six cours, il doit nécessairement prendre l'ensemble des cours à prioriser et un parmi ECN-1000, ECN-1001 et CTB-1000.

$$C_6 = \binom{1}{1}\binom{3}{1} = 3$$

Il y a, donc, 18 combinaisons possibles.

Question 3

Soient r et v des constantes telles que $r \in \mathbb{N}^+$ et $v \in (0, 1)$.

Calculer

$$\sum_{k=0}^{r} (k - rv)^2 \binom{r}{k} v^k (1 - v)^{r-k}.$$

On reconnaît que l'expression donnée représente la variance d'une loi Binomiale avec paramètres $n = r$ et $p = v$. La variance d'une telle distribution est donnée par :

$$np(1 - p) = rv(1 - v).$$

Cependant, si l'on ne reconnaît pas immédiatement la loi Binomiale, nous pouvons calculer cette somme explicitement en développant les termes.

Le développement étant amplement documenté sur Internet, la solution s'arrête ici.

Question 4

Combien de solutions entières l'équation suivante admet-elle ?

$$6x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$$

Où

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq -1$$

$$0 \leq x_3 \leq 5$$

$$x_4 \geq 0$$

---

1. **Changement de variable :**
La contrainte $x_2 \geq -1$ est problématique. Nous effectuons donc un changement de variable pour éliminer cette borne négative. Posons :

$$y_2 = x_2 + 1 \quad \text{ce qui implique} \quad y_2 \geq 0.$$

En substituant dans l'équation initiale, on obtient :

$$6x_1 + y_2 + x_3 + x_4 = 17.$$

2. **Décomposition en fonction des valeurs de x_1 :**
On fait varier x_1 de 0 à 2 (puisque $6x_1 \leq 16$ impose que $x_1 \leq 2$). Pour chaque valeur de x_1, nous résolvons l'équation correspondante.

$x_1 = 0$ **:** L'équation devient :

$$y_2 + x_3 + x_4 = 17.$$

Compte tenu de la contrainte $0 \leq x_3 \leq 5$, on soustrait les cas où $x_3 > 5$. Le nombre total de solutions est donc donné par :

$$\binom{17+3-1}{3-1} - \binom{11+3-1}{3-1} = 93.$$

$x_1 = 1$ **:** L'équation devient :

$$y_2 + x_3 + x_4 = 11.$$

Comme précédemment, en soustrayant les cas où $x_3 > 5$, le nombre de solutions est :

$$\binom{11+3-1}{3-1} - \binom{5+3-1}{3-1} = 57.$$

$x_1 = 2$ **:** L'équation devient :

$$y_2 + x_3 + x_4 = 4.$$

Puisque $x_3 \leq 5$, il n'y a aucune contrainte supplémentaire à soustraire ici. Le nombre de solutions est donc simplement :

$$\binom{4+3-1}{3-1} = 21.$$

3. **Résultat final :**
En additionnant les solutions obtenues pour chaque valeur de x_1, nous trouvons le nombre total de solutions :

$$93 + 57 + 21 = 171.$$

Ainsi, l'équation admet **171 solutions entières**.

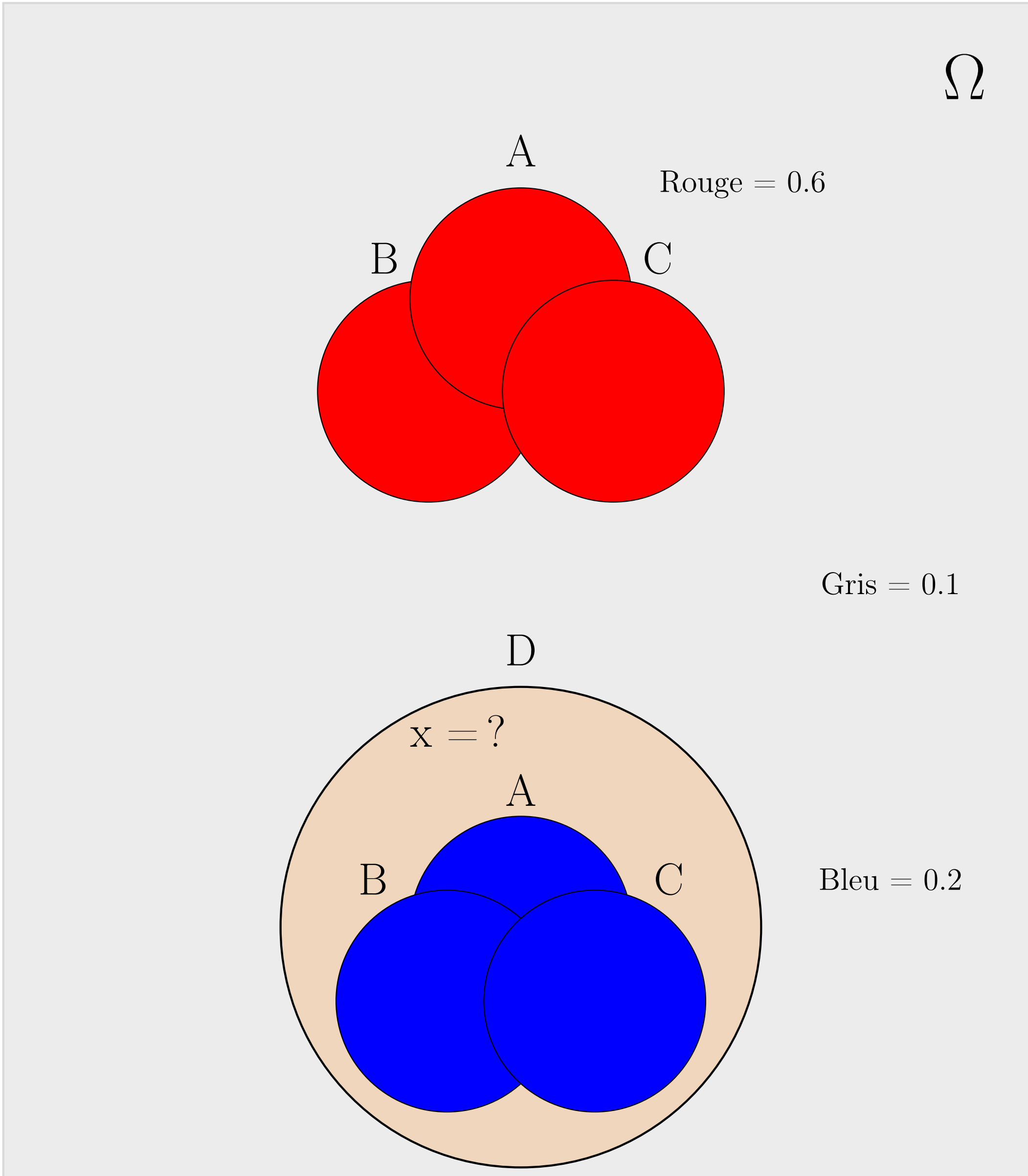
Question 5

Trouver $P(D \cap A^c \cap B^c \cap C^c)$ en sachant les informations suivantes :

- $P(A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c) = 0.1$;
- $P((A \cup B \cup C) \cap D^c) = 0.6$;
- $P((A \cup B \cup C) \cap D) = 0.2$.

On peut sans trop de difficulté résoudre le problème avec un schéma. Le schéma ci-dessous nous permet de nous diriger intuitivement.
Voici le calcul formel :

$$\begin{aligned} P(D \cap A^c \cap B^c \cap C^c) &= 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c) - P((A \cup B \cup C) \cap D^c) - P((A \cup B \cup C) \cap D) \\ &= 1 - 0.1 - 0.6 - 0.2 \\ &= 0.1 \end{aligned}$$


Ω
A
Rouge = 0.6
B
C
Gris = 0.1
D
x = ?
A
B
C
Bleu = 0.2

Question 6

Voici quelques informations concernant la culture conspirationniste d'un groupe d'individus :

- 40% ont l'absolue certitude que le gouvernement américain cache des extra-terrestres dans la Zone 51 ;
- 35% croient qu'une race de lézards intelligents contrôle l'ordre mondial ;
- 20% adhèrent à la croyance qu'Elvis n'est pas mort ;
- Il y a deux fois moins de personnes qui partagent et les croyances du faux décès d'Elvis et la conviction de la suprématie reptilienne que de personnes qui adhèrent et à la théorie d'une mise en scène de la mort d'Elvis et aux idées hollywoodiennes concernant la Zone 51 ;
- Il y a deux fois plus de personnes qui croient et en l'existence de l'hommelézard et aux dissections de bons hommes verts par des fonctionnaires américains dans une base militaire secrète que de personnes qui adhèrent et à la croyance qu'Elvis a simulé sa mort et aux idées conspirationnistes concernant la Zone 51 ;
- 5% croient en la véracité des trois théories complotistes ;
- 10% jugent que la théorie reptilienne est la seule qui tienne la route.

Sachant qu'un membre dudit groupe est convaincu qu'Elvis est bien décédé et juge au moins une autre conspirations ridicule, quelle est la probabilité qu'il adhère tout de même à une des théories ?

Note : le fichier R permet de changer les chiffres de la question !

Pour résoudre le problème on décide de faire un dessin (voir plus bas) pour avoir une meilleure idée du travail à faire !

On définit aussi les événements suivants :

Q : La personne croit qu'Elvis n'est pas mort.

R : La personne croit que les réptiliens contrôlent l'ordre mondial.

Z : La personne croit qu'il y a des extra-terrestres dans la Zone 51.

Dans le problème on nous donne les informations suivantes :

$$P(QR) = \frac{P(QZ)}{2}$$

et

$$P(RZ) = 2P(QZ).$$

En posant $P(QZ) = x$ on peut créer une équation et résoudre pour x. À cette étape il est fortement suggéré de jeter un coup d'oeuil au schéma. L'équation à résoudre est :

$$P(R) = P(R \cap Q^c \cap Z^c) + P(R \cap Q^c \cap Z) + P(R \cap Q \cap Z^c) + P(R \cap Q \cap Z)$$

En terme de x on trouve :

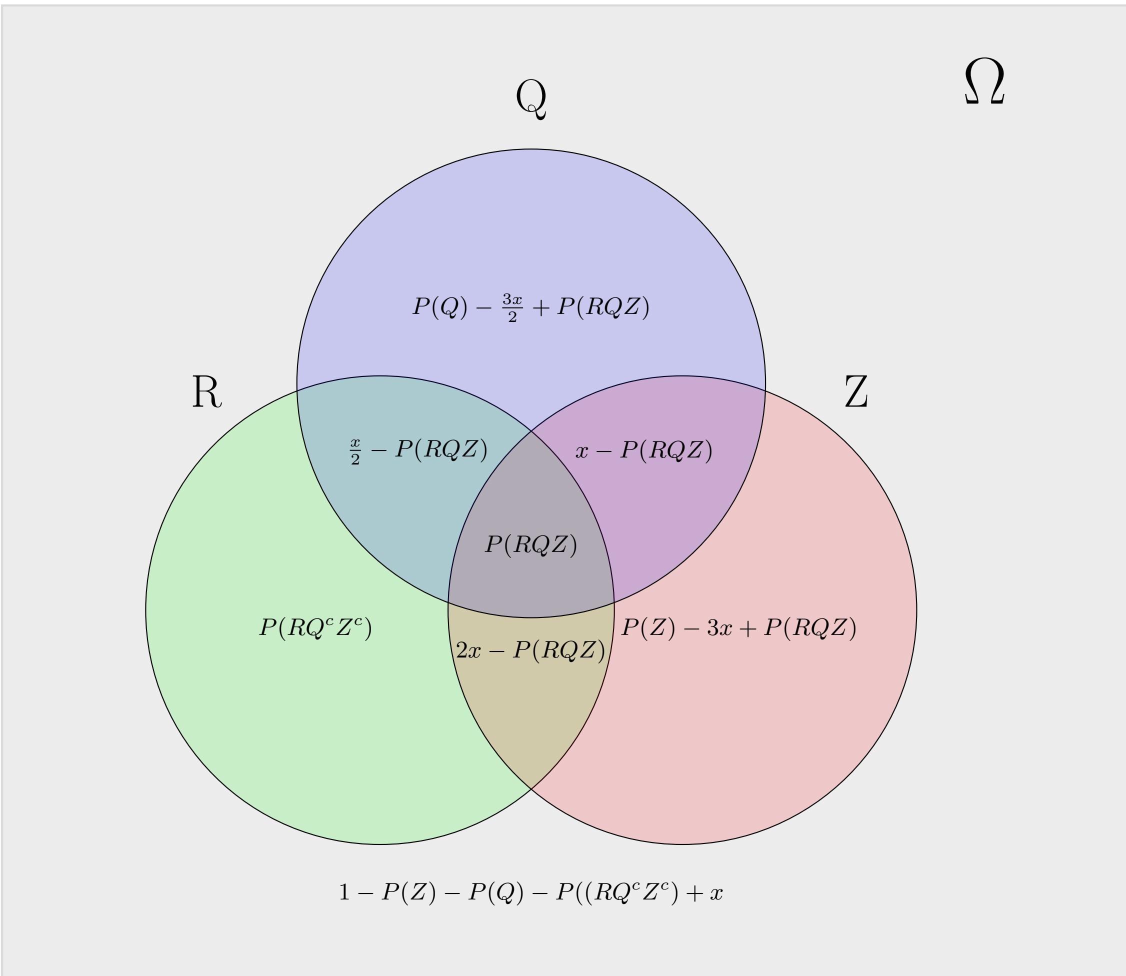
$$P(R) = P(RQ^cZ^c) + P(RQZ) + (\frac{x}{2} - P(RQZ)) + (2x - P(RQZ))$$

Bref,

$$x = \frac{2(P(R) + P(RQZ) - P(RQ^cZ^c))}{5}.$$

De là on peut facilement calculer le reste des probabilités (compléter le schéma) et facilement trouver que la probabilité cherchée est :

$$\frac{P(Q^c \cap R^c \cap Z) + P(Z^c \cap R \cap Q^c)}{P(Q^c \cap (R \cap Z)^c)} \approx 0.311475.$$



Question 7

Un enfant participe à un concours d'épellation composé de deux étapes de qualification et d'une finale. Il juge que la probabilité qu'il passe la première phase de qualification est de 0,50. S'il parvient à la seconde phase de qualification, il croit que la probabilité qu'il se rende en finale est de 0,40. Cependant, une fois en finale, il estime que ses chances de l'emporter ne sont que de 0,05. Sachant qu'il n'a pas été victorieux, quelle est la probabilité qu'il se soit qualifié pour la finale ?

Un arbre de probabilité peut grandement simplifier le problème, mais voici une démarche plus formelle :

E : Il passe la première phase de qualification.

F : Il se qualifie pour la finale.

G : Il gagne la compétition.

$$P(F \mid G^c) = \frac{P(G^c \mid F) \cdot P(F)}{P(G^c)}$$

$$= \frac{P(G^c \mid F) \cdot P(F)}{P(G^c \mid F) \cdot P(F) + P(G^c \mid F^c) \cdot P(F^c)}$$

$$= \frac{[1 - P(G \mid F)] \cdot P(F)}{[1 - P(G \mid F)] \cdot P(F) + P(G^c \mid F^c) \cdot [1 - P(F)]}$$

$$\text{Où} \quad P(F) = P(F \mid E) \cdot P(E) + P(F \mid E^c) \cdot P(E^c)$$

$$= \frac{[1 - P(G \mid F)] \cdot P(F \mid E) \cdot P(E)}{[1 - P(G \mid F)] \cdot P(F \mid E) \cdot P(E) + P(G^c \mid F^c) \cdot [1 - P(F \mid E) \cdot P(E)]}$$

$$= \frac{[1 - 0.05] \cdot 0.40 \cdot 0.50}{[1 - 0.05] \cdot 0.40 \cdot 0.50 + 1 \cdot [1 - 0.40 \cdot 0.50]}$$

$$\approx 0.1919$$

Question 8

Une expérience aléatoire consiste à effectuer trois expériences (A, B, C) dans cet ordre.

Pour l'expérience A, on tire au sort une bille dans un sac contenant 1 bille rouge et 2 billes vertes. On note $A = R$ si la bille est rouge, et $A = V$ si elle est verte.

Pour l'expérience B, on tire encore une bille dans un sac contenant des billes rouges et vertes, mais les billes contenues dans ce sac dépendent du résultat de A. Si $A = R$, alors le sac B contient 15 billes rouges et 1 bille verte. Si $A = V$, alors le sac B contient 3 billes rouges et 5 billes vertes.

Pour l'expérience C, si $B = R$, alors le sac C contient 12 billes rouges et 1 bille verte. Si $B = V$, alors le sac C contient 2 billes rouges et 5 billes vertes.

Trouver :

$$P(A = R \mid C = V) + P(C = V \mid A = R) + P(C = R \mid B = R)$$

Il est tout à fait possible de trouver les probabilités avec la formules de Bayes et quelques manipulations, mais dans ce cas-ci il peut être plus intuitif de construire un arbre de possibilités. Avec cette arbre on peut facilement trouver les probabilités recherchées.

$$\begin{aligned}
P(A = R \mid C = V) &= \frac{P(A = R, C = V)}{P(C = V)} \\
&= \frac{P(A = R, B = R, C = V) + P(A = R, B = V, C = V)}{\sum_{j \in (R,V)} \sum_{k \in (R,V)} P(A = j, B = k, C = V)} \\
&= \frac{\frac{5}{208} + \frac{5}{336}}{\frac{5}{208} + \frac{5}{336} + \frac{1}{52} + \frac{25}{84}} \\
&= \approx 0.1093951
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(C = V \mid A = R) &= P(B = R, C = V \mid A = R) + P(B = V, C = V \mid A = R) \\
&= P(C = V \mid B = R)P(B = R \mid A = R) + P(C = V \mid B = V)P(B = V \mid A = R) \\
&= (\frac{1}{13})(\frac{15}{16}) + (\frac{5}{7})(\frac{1}{16}) = \frac{85}{728} \approx 0.1167582
\end{aligned}$$

$$P(C = R \mid B = R) = \frac{12}{13} \approx 0.9230769$$

Finalement :

$$P(A = R \mid C = V) + P(C = V \mid A = R) + P(C = R \mid B = R) \approx 1.1492$$

Arbre de Probabilités