Anàlisi espectral mitjançant fft i enfinestrament

Introducció:

Aquesta pràctica té com a objectiu aclarir alguns dels usos més freqüents de la FFT: l'anàlisi espectral amb senyals deterministes

Teoria

Les propietats de la DFT, encara que semblants a les de la Transformada de Fourier continua, tenen notables diferències degut a la duració finita de la primera. Com la DFT és una eina fonamental en el processat digital de senyal hem de comprendre bé les seves propietats.

La DFT es defineix com una operació amb una seqüència de N punts: {x[0],...,x[N-1]}

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \qquad (1)$$

amb k=0,...,N-1 i $W_N = e^{-j2\pi/N}$. L'operació ens retorna un altre vector de N punts en el domini de la freqüència X[k]. Aquests valors es poden interpretar com mostres de la TFSD (Transformada de Fourier de Seqüències Discretes) corresponents a les freqüències $\Omega_k = 2\pi k/N$.

Recordem per un altre banda que la FFT és només un algoritme ràpid per calcular la DFT però el resultat és idèntic. La transformada inversa es:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk} \qquad (2)$$

Observeu que en aquesta expressió estem expressant el senyal d'entrada x[n] com una combinació lineal d'exponencials complexes. Per tant, x[n] també serà un senyal periòdic. Un dels principals problemes de l'ús de la DFT és la seva utilització amb senyals que no són periòdiques ni tan sols de duració finita.

Exercici 1: Anàlisi espectral (asíncron i síncron)

Genera 2048 mostres d'un senyal sinusoidal amb quatre harmònics amb freqüències 18 Hz, 36 Hz, 54 Hz y 72 Hz amb amplituds 1, 0.5, 0.25 i 0.125 i amb fases: $\pi/2$, $\pi/4$, -0.3π i 0.6π respectivament. Afegeix un soroll blanc gaussià amb desviació estàndard 0.1. La freqüència de mostreig es 245 Hz.

Fes un anàlisi espectral amb la fft. Escriu un fitxer *.m que torni el espectre però també l'eix freqüencial. Dibuixa el resultat. Calcula teòricament quina hauria de ser l'alçada dels pics i compara amb el resultat obtingut. Discuteix tenint en compte l'efecte de l'enfinestrament.

Fes el mateix anàlisi però mostrejant amb 288 Hz. Troba el espectre del senyal i compara amb l'anterior. Explica l'origen de les diferències.

Exercici2: Enfinestrament en l'anàlisi espectral

La finestra rectangular inherent de la DFT presenta un espectre amb lòbuls laterals, el primer dels quals està només a -13 dB del lòbul central, mentre que els següents lòbuls tant sols decreixen a 20 dB/dec. La finestra de Hanning, te el primer lòbul lateral a -31 dB i una caiguda de 60 dB/dec. La finestra de Blackmann te una caiguda similar a la Hanning però el primer lòbul lateral està a -57 dB. Com a conseqüència senyals de baixa intensitat en presència de senyals intenses es detecten millor amb finestres Hanning o Blackmann que amb rectangular. D'altra banda, apareix una pèrdua de resolució espectral que està lligada a la amplada del lòbul central.

a) Efecte sobre la resolució espectral:

Sintetitza el senyal de dos tons:

```
n=[0:31];
```

```
x=sin(2*pi*4.5*n/32)+sin(2*pi*6.5*n/32)
```

i multiplica-les por las finestres hanning y blackmann:

```
xh=x.*hanning(32)';
```

```
xb=x.*blackman(32)';
```

Calcula i dibuixa l'espectre en dB en tots els casos. Normalitza la intensitat màxima a 0 dB. Repeteix aquest apartat fent zero-padding fins 512 mostres en la seqüencia original.

b) Efecte sobre el rang dinàmic:

Genera ara 64 punts del següent senyal:

```
x[n]=sin(2*pi*10.1*n/64)+0.001*cos(2*pi*15.2*n/64)+0.001*si
n(2*pi*20.3*n/64)+0.001*cos(2*pi*25.2*n/64)
```

Calcula la magnitud de l'espectre amb les finestres rectangular, hanning i blackmann.

Repeteix aquest apartat fent zero-padding fins 512 mostres i interpreta els resultats.

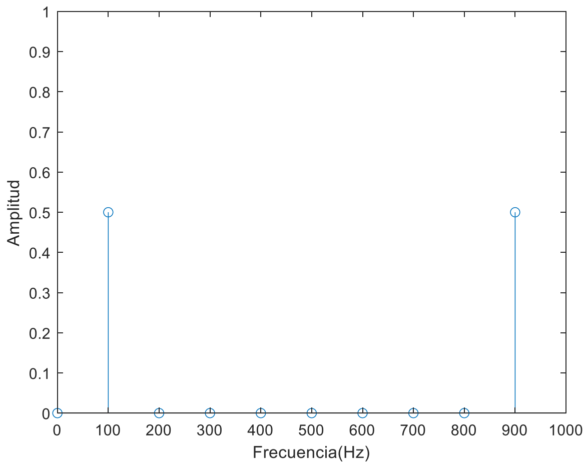
Práctica 10: Cuestionario

1. Generar una figura con la gráfica del módulo de la transformada de Fourier de la señal definida en el ejercicio 1, con la frecuencia de muestreo definida a 245Hz. La gráfica debe tener un eje de frecuencias en Hertzios y eje de amplitud normalizado al número de datos de la señal (2048 muestras).

2. Generar una figura con una gráfica similar a la anterior, con el módulo de la transformada de Fourier de la señal definida en el ejercicio 1, con la frecuencia de muestreo definida a 245Hz, pero usando zero padding hasta 20480 puntos. La gráfica debe tener un eje de frecuencias en Hertzios y eje de amplitud normalizado al número de datos de la señal.

3. Generar una figura con la gráfica del módulo de la transformada de Fourier de la señal definida en el ejercicio 1, con la frecuencia de muestreo definida a 288Hz. La gráfica debe tener un eje de frecuencias en Hertzios y eje de amplitud normalizado al número de datos de la señal (2048 muestras).

4. Para una señal x(n), generada a partir del muestreo de $x(t) = sin(2\pi 100t)$ con una frecuencia de muestreo de f = 1000Hz, ¿Cuál es el eje de muestras n que es capaz de generar la siguiente figura, correspondiente a la fft de la señal x(n)?



5. Genera una figura con las gráficas de los espectros solicitados en el apartado a del ejercicio 2 sin zero-padding
6. Genera una figura con las gráficas de los espectros solicitados en el apartado a del ejercicio 2 con zero-padding hasta 512
7. De las ventanas utilizadas en esta práctica, ¿Qué ventana utilizarías para enfrentarte a un problema de resolución en frecuencia?
8. Genera una figura con las gráficas de los espectros solicitados en el apartado b del ejercicio 2 sin zero-padding
9. Genera una figura con las gráficas de los espectros solicitados en el apartado b del ejercicio 2 con zero-padding hasta 512
10. ¿Qué ventana utilizarías para enfrentarte a un problema de resolución en el rango dinámico?