Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Números Reais (Em construção)

1.1 Considerações iniciais

Neste Capítulo estudaremos, de modo bastante breve, o conjunto dos números reais. Nosso objetivo é discutir seus subconjuntos (números naturais, inteiros, racionais e irracionais), suas propriedades elementares (axiomas de álgebra e axiomas de ordem), algumas regras de operação (operações com frações, fatoração, lei do cancelamento, regras dos sinais, etc.), conceitos recorrentemente necessários no estudo da Matemática e do Cálculo (módulo, desigualdades, etc.) e também alertar os leitores em relação à erros comuns (divisão por zero, extração de raízes, etc).

Antes de prosseguirmos em nossa discussão, recordemos alguns conceitos essenciais. É fundamental que o leitor tenha em mente a distinção entre **número** e **algarismo**. Atualmente a Matemática utiliza quase que exclusivamente o sistema arábico de numeração[1], composto de dez algarismos, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, com os quais formamos todos os números, assim como todas as palavras existentes na lingua portuguesa são formadas apenas pelas 26 letras de nosso alfabeto.

As quatro operações elementares da Matemática, adição, subtração, multiplicação e divisão, utilizam a seguinte terminologia:

- **adição**: os operandos são denominados parcelas e o resultado soma:

$$\overbrace{a+b}^{\text{parcelas}} = \overbrace{c}^{\text{soma}}$$

- **multiplicação**: os operandos são denominados fatores e o resultado produto; a multiplicação pode ser indicada por um $\cdot$ ($a \cdot b$); por um $\times$ ($a \times b$); ou, desde que pelo menos um dos fatores seja literal, por justaposição (ab):

$$\overbrace{a \cdot b}^{\text{fatores}} = \overbrace{c}^{\text{produto}} \qquad \overbrace{a \times b}^{\text{fatores}} = \overbrace{c}^{\text{produto}} \qquad \overbrace{ab}^{\text{fatores}} = \overbrace{c}^{\text{produto}}$$

- **subtração**: os operandos são denominados minuendo e subtraendo[2], o resultado é

[1] O leitor se recordará de outros sistemas de numeração, como o sistema romano, o sistema inca, etc.

[2] Também é usual nos referirmos aos operendos da subtração como parcelas

denominado diferença:

$$\overbrace{a}^{\text{minuendo}} - \overbrace{b}^{\text{subtraendo}} = \overbrace{c}^{\text{diferença}} \qquad \text{ou} \qquad \overbrace{a-b}^{\text{parcelas}} = \overbrace{c}^{\text{diferença}}$$

- **divisão**: os operandos são denominados dividendo e divisor, o resultado é denominado quociente. Pode ainda haver um resto, caso a divisão não seja exata. A divisão pode ser indicada por $\div$ ($a \div b$), por / (a/b):

1.2 Conjuntos numéricos

Números naturais e números inteiros

O conjunto dos números naturais, representado pelo símbolo $\mathbb{N}$, é dado explicitamente por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Em algumas situações torna-se necessário excluir o zero desse conjunto. Tal exclusão é indicada através da notação $\mathbb{N}^*$, isto é,

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

O conjunto dos números inteiros, representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$, é dado explicitamente por

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Indicamos a seguir as notações de alguns subconjuntos úteis de $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{lr}
\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\} & \text{conjunto dos números inteiros não nulos} \\
\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} & \text{conjunto dos números inteiros não negativos} \\
\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}^* & \text{conjunto dos números inteiros positivos} \\
\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\} & \text{conjunto dos números inteiros não positivos} \\
\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -3, -2, -1\} & \text{conjunto dos números inteiros não negativos}
\end{array}$$

Indicamos que um número n é natural através da notação $n \in \mathbb{N}$ (lê-se: n pertence a $\mathbb{N}$). De modo análogo, a notação $n \in \mathbb{Z}$ nos indica que n é um número inteiro.

Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são infinitos. Além disso, $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, uma vez que todo número natural também é um número inteiro[3]. Indicamos esse fato por uma das notações equivalentes: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (lê-se: $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$) ou $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$ (lê-se: $\mathbb{Z}$ contém $\mathbb{N}$), ou ainda utilizando um diagrama de Venn, Figura 1.1.

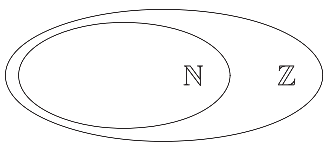


Figura 1.1: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

[3]A recíproca não é verdadeira: nem todo inteiro é natural.

Dados $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, p um inteiro qualquer e q um inteiro qualquer não nulo, dizemos que q é divisor de p, ou, de modo equivalente, que p é divisível por q, se a divisão de p por q é exata, isto é, se o resto da divisão é nulo.

Dentre os números naturais, merecem destaque os números **primos**[4]: um número natural $n > 1$ é dito primo se é divisível apenas por 1 e por si próprio. Alguns números primos são: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 \ldots$

O **Teorema da Unicidade da Fatoração**[5], um dos mais importantes teoremas da Teoria dos Números, afirma que todo número natural maior que 1 ou é primo ou pode ser fatorado de forma única, a menos da ordem dos fatores, como um produto finito de fatores primos. O exemplo a seguir ilustra como determinar a forma fatorada de um número natural.

Exemplo 1.1 *Escreva o número* 2100 *na forma fatorada.*

- *Dividimos sucessivamente pelo menor divisor primo até obtermos resto* 1.

$$\begin{array}{rl}
2100 \div 2 = 1050 & \quad 2 \text{ é o menor divisor primo de } 2100 \\
1050 \div 2 = 525 & \quad 2 \text{ é o menor divisor primo de } 1050 \\
525 \div 3 = 175 & \quad 3 \text{ é o menor divisor primo de } 525 \\
175 \div 5 = 35 & \quad 5 \text{ é o menor divisor primo de } 175 \\
35 \div 5 = 7 & \quad 5 \text{ é o menor divisor primo de } 35 \\
7 \div 7 = 1 & \quad 7 \text{ é o menor divisor primo de } 7
\end{array}$$

Tal divisão sucessiva torna-se mais cômoda com a seguinte forma esquematica[6]*:*

$$\begin{array}{ccccccc}
2100 & 1050 & 525 & 175 & 35 & 7 & 1 \\
\hline
2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 7 &
\end{array}$$

- *A forma fatorada é o produto de todos os divisores primos, tomados em qualquer ordem. Assim:*

$$2100 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Ressaltamos que, como a forma fatorada é única, a menos da ordem dos fatores, qualquer forma fatorada de 2100 necessariamente apresentará dois fatores 2, um único fator 3, dois fatores 5 e um único fator 7. Além disso não apresentará quaisquer outros fatores primos senão 2, 3, 5 e 7.

Obviamente a fatoração também se aplica aos inteiros negativos menores que um. Por exemplo:

$$-2100 = (-1) \cdot 2100 = -1 \cdot 2100 = -1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7\,,$$

ou, simplesmente,

$$-2100 = -\,2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7.$$

[4]Outros números naturais interessantes são discutidos na Seção 1.3.

[5]Fatorar: transformar em um produto (de fatores).

[6]Utilizamos aqui a forma esquematica horizontal por economia de espaço. Em cálculos manuais geralmente empregamos uma forma esquematica vertical de divisões sucessivas.

Um número inteiro é dito par se é divisível por 2. Observe que todo número inteiro da forma $2n$, $n \in \mathbb{Z}$, é par. Rigorosamente, dizemos que $a \in \mathbb{Z}$ é par se e somente se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2n$.

Analogamente, um número inteiro é dito ímpar se não é divisível por 2. Observe que todo número inteiro da forma $2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, é ímpar. Assim, dizemos que $b \in \mathbb{Z}$ é ímpar se e somente se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $b = 2n + 1$.

Números racionais

Um número é dito racional se pode ser escrito como uma razão (fração) de inteiros, isto é, um número q é dito racional se existem $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ tais que:

$$q = \frac{a}{b} \quad , \quad b \neq 0.$$

Em uma razão a/b o número a é chamado de numerador e o número b de denominador[7]. Enfatizamos que o denominador nunca pode ser nulo, uma vez que não existe divisão por zero[8].

Dizemos que um número racional $q = a/b$, $b \neq 0$, está escrito na forma irredutível quando a e b não possuem fatores comuns. A forma irredutível é obtida fatorando-se o numerador e o denominador e então cancelando-se os fatores comuns.

Exemplo 1.2 *Escreva* $42/60$ *na forma irredutível.*

$$\frac{42}{60} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 5} = \frac{7}{10}$$

O conjunto dos números racionais é representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$. Como todo número inteiro pode ser escrito como uma razão de inteiros[9], isto é, na forma racional, o conjunto $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$. A Figura 1.2 ilustra esse fato.

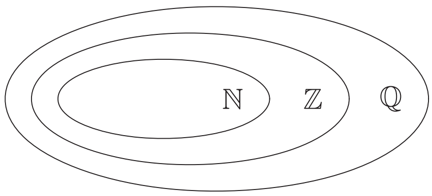


Figura 1.2: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Resumimos a seguir as regras para a multiplicação, divisão, adição e subtração de números racionais (escritos na forma de razão).

[7] Segundo recomendação da AMS - American Mathematical Society, no corpo do texto as razões devem ser preferencialmente escritas na forma a/b. Quando destacadas do corpo do texto as razões devem ser preferencialmente indicadas na forma

$$\frac{a}{b}.$$

[8] A não existência da divisão por zero ficará rigorosamente estabelecida adiante, quando discutirmos o conceito de inverso de um número.

[9] Por exemplo: $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \ldots$.

- Multiplicação: multiplicam-se os respectivos numeradores e denominadores. Por exemplo:
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

- Divisão: multiplica-se o numerador pelo inverso do denominador. Por exemplo:
$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

- Adição e subtração: somente podemos somar ou subtrair parcelas de mesmo denominador. Caso as parcelas não possuam o mesmo denominador, antes de efetuar a adição ou a subtração, devemos reduzi-las ao mesmo denominador utilizando o mínimo múltiplo comum dos denominadores. Eis alguns exemplos:
$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{b} &= \frac{a+c}{b} && \text{parcelas com o mesmo denominador}\\
\frac{a}{b} - \frac{c}{b} &= \frac{a-c}{b} && \text{parcelas com o mesmo denominador}\\
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} &= \frac{ad+bc}{bd} && \text{parcelas com denominadores diferentes}\\
\frac{a}{b^2d} - \frac{c}{bd^3} = \frac{ad^2}{b^2d^3} - \frac{bc}{b^2d^3} &= \frac{ad^2-bc}{b^2d^3} && \text{parcelas com denominadores diferentes}
\end{aligned}$$

Finalizamos nossa discusão sobre os números racionais com duas importantes observações:

(1) Todo número decimal com expansão decimal finita é racional. Observe os exemplos:

(a) $0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ (b) $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ (c) $0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$

(2) Um número decimal, com expansão decimal infinita, que apresenta um algarismo ou uma seqüência de algarismos que se repete indefinidamente é chamado de **dízima periódica**. O algarismo ou a seqüência de algarismos que se repete é chamado de **período** da dízima. As dízimas são ditas **simples**, quando apenas o período ocorre na parte decimal, ou **compostas**, quando na parte decimal ocorre um algarismo ou uma seqüência de algarismos (anti-período) antes da parte periódica.

Exemplo 1.3 *Exemplos de dízimas períodicas.*

(a) $0,333\ldots = 0,\overline{3}$ *é uma dízima períodica simples de período* 3.

(b) $1,333\ldots = 1,\overline{3}$ *é uma dízima períodica simples de período* 3.

(c) $0,181818\ldots = 0,\overline{18}$ *é uma dízima períodica simples de período* 18.

(d) $0,4131313\ldots = 0,4\overline{13}$ *é uma dízima períodica composta de período* 13 *e anti-período* 4.

(e) $4,27313131\ldots = 4,27\overline{31}$ *é uma dízima períodica composta de período* 31 *e anti-período* 27.

Toda dízima periódica simples pode ser escrita na forma racional do seguinte modo: no numerador colocamos o período da dízima e no denominador colocamos um algarismo 9 para cada algarismo do período[10], isto é,

$$0,aaa\ldots = \frac{a}{9} \quad ; \quad 0,ababab\ldots = \frac{ab}{99} \quad ; \quad 0,abcabcabc\ldots = \frac{abc}{999} \quad ; \quad \text{etc.}$$

Concluímos assim que, todo número decimal com expansão decimal infinita e periódica, isto é, toda dízima periódica, simples ou composta, é um número racional. Observe os exemplos:

(a) $0,333\ldots = 0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(b) $0,181818\ldots = 0,\overline{18} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$

(c) $0,3222\ldots = 0,3\overline{2} = 0,3 + 0,0\overline{2} = 0,3 + \frac{1}{10}\cdot 0,\overline{2} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{3}{10} + \frac{2}{90} = \frac{29}{90}$

1.3 Números interessantes

Além dos números primos, o conjunto dos números naturais apresenta diversos outros subconjuntos com propriedades peculiares e interessantes. Vejamos alguns.

Os **números quadrados**: 1, 4, 9, 16, 25, etc., conforme sugerido pela Figura 1.3, podem ser obtidos pela adição dos números naturais ímpares sucessivos. Podemos ainda induzir que:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n-1) = n^2\,,$$

isto é, a soma dos n primeiros números naturais ímpares vale n^2.

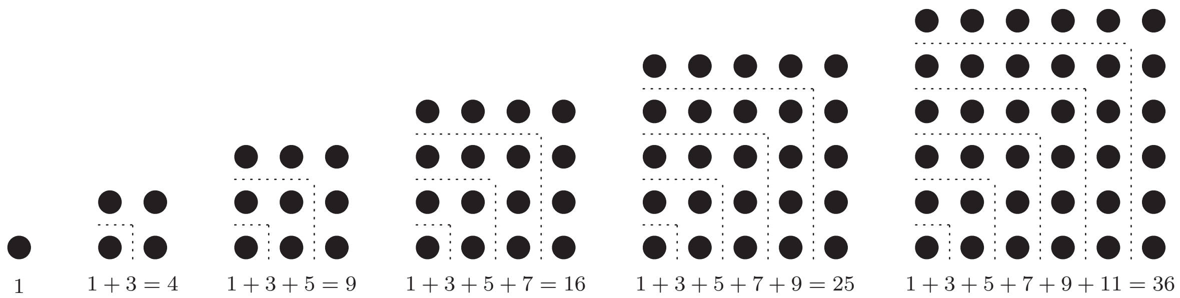


Figura 1.3: Números quadrados

Os **números oblongos**: 2, 6, 12, 20, 30, etc., são aqueles obtidos pela adição dos números naturais pares sucessivos, Figura 1.4.

[10]Aos os leitores interessados, que tenham conhecimento de limites, é apresentada uma prova dessa afirmação na Seção 1.4.

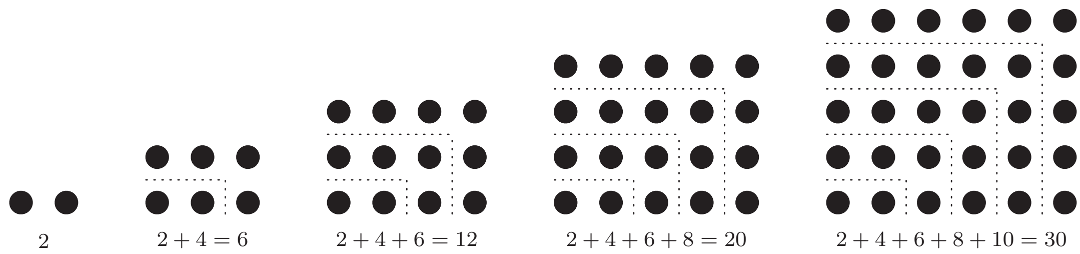


Figura 1.4: Números oblongos

Pela disposição retangular dos números oblongos mostrada na Figura 1.4, podemos induzir que:

$$2+4+6+8+\ldots+2n = n(n+1)\,,$$

isto é, a soma dos n primeiros números naturais pares vale $n(n+1)$. Dividindo-se a equação anterior por 2, obtemos a importante fórmula da soma dos n primeiros números naturais:

$$1+2+3+4+\ldots+n = \frac{1}{2}\,n(n+1)\,.$$

Há também os **números perfeitos**: um número natural n é dito perfeito se é igual à soma de seus divisores naturais diferentes de si próprio. Por exemplo[11]:

$6 = 1+2+3$	1, 2 e 3 são os divisores naturais de 6 menores que 6
$28 = 1+2+4+7+14$	1, 2, 4, 7 e 14 são os divisores naturais de 28 menores que 28

1.4 (Opcional) Dízimas periódicas

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que toda dízima periódica simples é um número racional. Mais especificamente, provaremos a veracidade da igualdade

$$0,aaaa\ldots = \frac{a}{9}\,. \tag{1.1}$$

Iniciamos relembrando que uma progressão geométrica finita, com n termos, é uma seqüência de números da forma

$$\alpha\,,\ \alpha\,r\,,\ \alpha\,r^2\,,\ \alpha\,r^3\,,\ \ldots\,,\ \alpha\,r^{n-2}\,,\ \alpha\,r^{n-1}\,. \tag{1.2a}$$

O número α é denominado **primeiro termo** e o número r **razão** da progressão geométrica. Observe que cada termo da progressão é o termo antecessor multiplicado pela razão r, ou de modo equivalente, que a razão de cada termo pelo seu antecessor é a razão r. Para evitarmos

[11] Para a escola pitagórica *"... todas as coisas são números. Assim, para compreendermos o mundo que nos cerca, precisamos descobrir o número que existe nas coisas. Uma vez descoberta a estrutura numérica, controlaremos o mundo"* ([?] p. 27). Porém, além desse caráter interpretativo e explicativo da natureza, os pitagóricos também atribuiam aos números significados místicos. Por exemplo, o número 1 é o gerador de todos os números (a unidade onipotente); 2 é a diversidade, primeiro número feminino (os números pares eram considerados femininos); 3 é o primeiro número masculino (os números ímpares, exceto o 1, eram considerados masculinos), resultante da união (soma) da unidade onipotente com a diversidade. Assim, 6 era considerado perfeito, uma vez que resulta da soma de seus divisores próprios, isto é, da união da unidade onipotente, com a diversidade e com o primeiro masculino ([?] p. 675).

seqüências estacionárias (termos repetidos), é usual impormos as restrições $\alpha \neq 0$, $r \neq 0$ e $r \neq 1$ para as progressões geométricas.

Denotemos por S_n a soma dos termos dessa progressão geométrica, isto é:

$$S_n = \alpha \,+\, \alpha\, r \,+\, \alpha\, r^2 \,+\, \alpha\, r^3 \,+\, \ldots \,+\, \alpha\, r^{n-2} \,+\, \alpha\, r^{n-1}\,. \tag{1.2b}$$

Multiplicando a soma S_n por r obtemos:

$$rS_n = \alpha\, r \,+\, \alpha\, r^2 \,+\, \alpha\, r^3 \,+\, \alpha\, r^4 \,+\, \ldots \,+\, \alpha\, r^{n-1} \,+\, \alpha\, r^n\,. \tag{1.2c}$$

Subtraindo (1.2c) de (1.2b) membro a membro, e observando que todas as parcelas dos membros direitos se cancelam, exceto α e $\alpha\, r^n$, obtemos:

$$S_n - rS_n = \alpha - \alpha\, r^n \quad \therefore \quad S_n\,(1-r) = \alpha\,(1-r^n)\,,$$

e assim a soma S_n dos n termos da progressão geométrica finita (1.2a) é dada por:

$$S_n = \alpha\,\frac{1-r^n}{1-r} \quad , \quad r \neq 1\,. \tag{1.2d}$$

Suponhamos agora uma progressão geométrica infinita

$$\alpha\,,\ \alpha\, r\,,\ \alpha\, r^2\,,\ \alpha\, r^3\,,\ \ldots \tag{1.3a}$$

e denotemos por S a soma de seus termos, isto é:

$$S = \alpha \,+\, \alpha\, r \,+\, \alpha\, r^2 \,+\, \alpha\, r^3 \,+\, \ldots \tag{1.3b}$$

O próximo passo é o ponto crucial do raciocínio: como a progressão infinita dada em (1.3a) é construída a partir da progressão finita dada em (1.2a) tomando-se $n \to \infty$, a soma S dada em (1.3b) é obtida a partir da soma S_n dada em (1.2d) tomando-se $n \to \infty$, isto é:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \alpha\,\frac{1-r^n}{1-r}\,. \tag{1.3c}$$

No limite (1.3c), restringindo-se a razão r ao intervalo $-1 < r < 1$, como $n \to \infty$, a potência r^n se anula[12]. Assim, obtemos:

$$S = \frac{\alpha}{1-r}\,. \tag{1.3d}$$

Podemos agora mostrar a veracidade da equação (1.1). Inicialmente observamos que:

$$\begin{aligned} 0,aaaa\ldots &= 0,a + 0,0a + 0,00a + 0,000a + \ldots \\ &= \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \frac{a}{1.000} + \frac{a}{10.000} + \ldots \\ &= \frac{a}{10} + \frac{a}{10}\cdot\frac{1}{10} + \frac{a}{10}\cdot\frac{1}{100} + \frac{a}{10}\cdot\frac{1}{1.000} + \ldots \\ &= \frac{a}{10} + \frac{a}{10}\cdot\frac{1}{10} + \frac{a}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{a}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \ldots \end{aligned} \tag{1.4}$$

[12]Em outras palavras, quando um número r, restrito ao intervalo $-1 < r < 1$, é elevado a um expoente infinitamente grande, a potência resultante é um número infinitamente próximo de zero, isto é, quando o expoente tende ao infinito, a potência tende a zero.

A equação (1.4) nos mostra que o número $0,aaaa\ldots$ é dado pela soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, da forma (1.3b), cujo primeiro termo é $a/10$ e cuja razão é $1/10$ (positiva e < 1). Utilizando a equação (1.3d) podemos então escrever:

$$0,aaaa\ldots = \frac{\frac{a}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{a}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{a}{10}\cdot\frac{10}{9} = \frac{a}{9}\,.$$

Utilizando um raciocínio semelhante, o leitor pode mostrar que:

$$0,ababab\ldots = \frac{ab}{99} \quad ; \quad 0,abcabcabc\ldots = \frac{abc}{999} \quad ; \quad \text{etc.}$$

Além disso, as dízimas periódicas compostas também são números racionais. A demonstração fica a cargo do leitor nos Problemas 1.27 e 1.28 .

1.5 Problemas Propostos

1.1 *Decida se o número dado é primo. Caso não seja, reescreva-o na forma fatorada.*

(a) 11 *(d)* 51 *(g)* 17 *(j)* 244

(b) 60 *(e)* 62 *(h)* 46 *(k)* 243

(c) 29 *(f)* 144 *(i)* 108 *(l)* 1024

1.2 *Reescreva as razões na forma irredutível.*

(a) $\frac{45}{50}$ *(c)* $\frac{105}{75}$ *(e)* $\frac{30x^2}{35xy}$ *(g)* $\frac{-2xy}{-8x^2}$

(b) $\frac{70}{28}$ *(d)* $\frac{1250}{75}$ *(f)* $\frac{14xy}{6x}$ *(h)* $\frac{6x^2y}{-9xy^2}$

1.3 *Avalie as expressões e escreva o resultado na forma irredutível.*

(a) $\frac{3}{5}+\frac{7}{40}$

(b) $\frac{13}{12}+\frac{7}{30}-\frac{3}{40}$

(c) $\frac{\frac{3}{5}}{2}+\frac{7}{8}+\frac{1}{\frac{4}{3}}$

(d) $\frac{7}{18}\div\frac{5}{14}+\frac{2}{7}\cdot\frac{35}{9}$

(e) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}$

(f) $\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}$

(g) $\frac{\frac{8}{5}+\frac{2}{3}}{2+\frac{3}{7}}$

(h) $\frac{2-\frac{3}{4}}{3+\frac{1}{8}}$

(i) $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}$

(j) $\frac{7}{6x}+\frac{3}{4x^2}$

(k) $\frac{3y}{10x^2}-\frac{1}{6x}$

(l) $x-\frac{1}{x}$

(m) $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-\frac{z}{x}$

(n) $\frac{x}{p^2}+\frac{y}{pq}$

(o) $\frac{7x-\frac{2x}{3}}{15y-\frac{y}{3}}$

(p) $\frac{\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x}}{\frac{1}{4y}-\frac{1}{5y}}$

(q) $\frac{\frac{2a}{3b}\cdot\frac{4b}{5}+a}{2b+\frac{b}{15}}$

1.4 *Reescreva cada número a seguir como uma razão irredutível.*

(a) $0,1$

(b) $0,45$

(c) $0,455$

(d) $0,1155$

(e) $0,666\ldots = 0,\overline{6}$

(f) $0,151515\ldots = 0,\overline{15}$

(g) $0,2444\ldots = 0,2\overline{4}$

(h) $0,54333\ldots = 0,54\overline{3}$

(i) $0,2515151\ldots = 0,2\overline{51}$

(j) $0,54313131\ldots = 0,54\overline{31}$

1.5 *Reescreva cada expressão usando uma forma equivalente.*

(a) $\frac{a+b}{c}$ *(c)* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ *(e)* $a\,\frac{b}{c}$ *(g)* $\frac{ab}{c}$

(b) $\frac{a}{a+b}$ *(d)* $\frac{a/b}{c/d}$ *(f)* $\frac{a}{b/c}$ *(h)* $\frac{1}{a/b}$

1.6 *Complete as sentenças.*

(a) *O número $1/b$ existe se e somente se* .

(b) *Um número é dito* , *se pode ser escrito na forma a/b, $b \neq 0$, onde a e b são inteiros.*

(c) *Se um número real não pode ser escrito na forma a/b, $b \neq 0$, onde a e b são inteiros, dizemos que este número é* .

(d) *Se a representação decimal de um número é periódica ou possui uma quantidade finita de casas decimais, dizemos que o número é* .

(e) *Se a representação decimal de um número possui uma quantidade infinita e não periódica de casas decimais, dizemos que o número é* .

(f) *Os números* *são números racionais ou irracionais.*

(g) *A soma de dois números racionais é um número* .

(h) *O número $\sqrt{x}$ é real somente se* .

(i) *O número $\sqrt{-x}$ é real somente se* .

(j) *O número $1/\sqrt{x}$ existe e é real somente se* .

1.7 *Reescreva cada expressão usando uma forma equivalente.*

(a) $2x + 5x$ *(c)* $3x - 7x$ *(e)* $5(2x - y)$ *(g)* $-(x + 2y)$

(b) $8x - 3x$ *(d)* $3x - \frac{x}{3}$ *(f)* $-2(x - 3y)$ *(h)* $-3(2x + y)$

1.8 *Simplifique as expressões.*

(a) $-(-x-3)$

(b) $-x(-y-6)$

(c) $2(x-y)+4x$

(d) $3(y-2x)-2(2x-2y)$

(e) $4(8z-2t)-3(-t-4z)$

(f) $-x(-y)(2-3z)$

(g) $-2(-3x)(-2y+1)-(-y)(4-5x)$

(h) $x[3(x-2)-2x+1]$

(i) $4x(x+y)-x^2$

(j) $4[x(2-5x)-2(1-2x)]$

(k) $\frac{1}{x}\,(x+2xy)$

(l) $\frac{1}{-2x}\,(3x-1)$

(m) $-\frac{1}{xy}(2x-3y)$

1.9 *Represente na reta real cada subconjunto dos números reais.*

(a) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 5\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -3 < x < 9\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leq 6\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x \leq 4\}$

1.10 *Escreva cada subconjunto dos númèros reais utilizando a notação de desigualdades.*

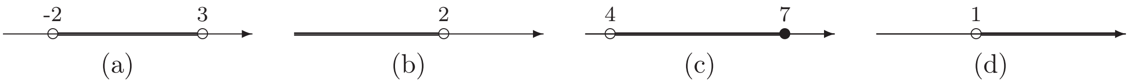


Figura 1.5: Subintervalos reais

1.11 *Dados os conjuntos A e B, determine e represente sobre o eixo real $A \cup B$ e $A \cap B$.*

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leq 6\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x < 3\}$

(b) $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 0 < x \leq 6\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, -2 \leq x < 3\}$

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 5\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x < 7\}$

(d) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 \leq x < 3\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 4 \leq x \leq 9\}$

(e) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 3\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 4\}$

(f) $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x < 5\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, -5 \leq x < 7\}$

1.12 *Resolva a desigualdade e ilustre o conjunto solução sobre o eixo real.*

(a) $2x+1 < 5x-8$

(b) $0 \leq 1-x \leq 1$

(c) $4x < 2x+1 \leq 3x+2$

(d) $(x-1)(x-2) > 0$

(e) $x^2+x+1 > 0$

(f) $x^3-x^2 \leq 0$

(g) $\frac{1}{x} < 4$

(h) $2x-3 < x+4 < 3x-2$

(i) $x^2 < 2x + 8$

(j) $x^2 - 4 \geq 0$

(k) $(x+1)(x-2)(x+3) \geq 0$

(l) $1 < \frac{1}{x} \leq 3$

(m) $x^3 + 3x < 4x^2$

1.13 *Resolva as equações modulares.*

(a) $|2x| = 3$

(b) $|x+3| = |3x+1|$

(c) $|\frac{2x-1}{x+1}| = 3$

(d) $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$

1.14 *Resolva as desigualdades modulares.*

(a) $|x-4| < 1$

(b) $|x+5| \geq 2$

(c) $1 \leq |x| \leq 4$

(d) $0 < |x-5| < 2$

(e) $|x^2 - x - 4| \geq 2$

(f) $|x^2 - 3x - 4| \leq 6$

(g) $|x| \geq x^2$

(h) $|x+3| \geq |x-1|$

(i) $x\,|x| \geq 4x$

1.15 *Sejam* x *e* y *números reais positivos tais que* $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y - 3 = 0$*, determine* $x + y$*.*

1.6 Problemas Suplementares

1.16 *A relação entre as escalas de temperatura Celsius e Fahrenheit é dada por*

$$C = \frac{5}{9}\,(F - 32),$$

em que C *é a temperatura em graus Celsius e* F *é a temperatura em graus Fahrenheit. Qual o intervalo sobre a escala Celsius corresponde ao intervalo* $50 \leq F \leq 95$*?*

1.17 *À medida que sobe, o ar seco se expande, e ao fazer isso se resfria a uma taxa de cerca de* $1^o\,C$ *para cada* $100\,m$ *de subida, até cerca de* $12\,Km$*.*

(a) Se a temperatura do solo for de $20^o\,C$*, escreva uma fórmula para a temperatura* T *do avião, em* $^o\,C$*, a uma altura* h*, em* m*.*

(b) Que variação de temperatura você pode esperar se um avião decola e atinge a altitude máxima de $5\,km$*?*

1.18 *Se uma bola for atirada para cima do topo de um edifício com* $128\,ft$ *de altura com velocidade inicial de* $15\,ft/s$*, então sua altura* h *acima do solo* t *segundos mais tarde é dada por (por quê?)*

$$h(t) = 128 + 15t - 16t^2.$$

Durante que intervalo de tempo a bola estará no mínimo a $32\,ft$ *acima do solo?*

1.19 *Sejam* a *e* b *dois números reais tais que* $0 < a < b < 1$*. O que podemos afirmar sobre:*

(a) a soma $a + b$?

(b) a diferença $b - a$?

(c) o produto ab?

(d) o quociente $\frac{b}{a}$?

1.20 *Resolva a equação*[13].

(a) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = x - 1$ *(b)* $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = x - 1$ *(c)* $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$

1.21 *Determine as soluções reais da equação* $|5x - 6| = x^2$.

1.22 *Determine as soluções reais da equação* $||x^2 - 2| - 4| = 2$.

1.23 *Para quais valores de* x *a igualdade* $-|-x| = -(-x)$ *é verdadeira?*

1.24 *Resolva a desigualdade* $x\,|x| > x$.

1.25 *Durante um certo ano, uma empresa teve seu lucro diário* L, *em R\$, dado pela função*

$$L(x) = 50\big(|x - 100| + |x - 200|\big),$$

em que $x = 1, 2, 3, \ldots, 365$ *corresponde a cada dia do ano. Determine em quais dias do ano o lucro foi de R\$* $10.000,00$[14].

1.26 *Em determinado mês, verificou-se que o número* n *de pessoas que compravam no supermercado Superbarato era dado por*

$$n(x) = 20\,|x - 25| + 300\,,$$

em que $x = 1, 2, 3, \ldots 30$ *representa cada dia do mês.*

(a) Em quais dias do mês 400 *pessoas compraram produtos no supermercado Superbarato?*

(b) Em qual dia do mês foi registrado o menor número de visitas ao supermercado? Qual foi esse número?

(c) Em que dias do mês mais de 350 *pessoas efetuaram compras no supermercado?*

1.27 *Mostre que:*

(a) $0, a\,b\,b\,b\,\ldots = 0, a\,\overline{b} = \frac{9\,a + b}{90}$

(b) $0, a\,b\,c\,b\,c\,b\,c\,\ldots = 0, a\,\overline{b\,c} = \frac{99\,a + b\,c}{990}$

(c) $0, a\,b\,c\,c\,c\,\ldots = 0, a\,b\,\overline{c} = \frac{9\,a\,b + c}{900}$

(d) $0, a\,b\,c\,d\,c\,d\,c\,d\,\ldots = 0, a\,b\,\overline{c\,d} = \frac{99\,a\,b + c\,d}{9900}$

1.28 *Observando os resultados do* Problema 1.27, *enuncie uma regra geral para escrever qualquer dízima periódica, simples ou composta, na forma racional.*

1.7 Respostas dos Problemas

- Problema 1.1

[13] Sugestão: antes de resolver a equação, determine sua condição de existência.
[14] Sugestão: analise os três casos $x < 100$, $100 \leq x < 200$ e $x \geq 200$.

(a) primo
(b) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$
(c) primo
(d) $3 \cdot 17$
(e) $2 \cdot 31$
(f) $2^4 \cdot 3^2$
(g) primo
(h) $2 \cdot 23$
(i) $2^2 \cdot 3^3$
(j) $2^2 \cdot 61$
(k) 3^5
(l) 2^{10}

- Problema 1.2

(a) $\frac{9}{10}$
(b) $\frac{5}{2}$
(c) $\frac{7}{5}$
(d) $\frac{50}{3}$
(e) $\frac{6x}{7y}$
(f) $\frac{7y}{3}$
(g) $\frac{y}{4x}$
(h) $-\frac{2x}{3y}$

- Problema 1.3

(a) $\frac{31}{40}$
(b) $\frac{149}{120}$
(c) $\frac{77}{40}$
(d) $\frac{11}{5}$
(e) $\frac{50}{3}$
(f) $\frac{40}{7}$
(g) $\frac{14}{15}$
(h) $\frac{2}{5}$
(i) $\frac{5}{6x}$
(j) $\frac{14x+9}{12x^2}$
(k) $\frac{9y-5x}{30x^2}$
(l) $\frac{x^2-1}{x}$
(m) $\frac{x^2z+xy^2-yz^2}{xyz}$
(n) $\frac{qx+py}{p^2q}$
(o) $\frac{19x}{44y}$
(p) $\frac{10y}{3x}$
(q) $\frac{23a}{31b}$

- Problema 1.4

(a) $\frac{1}{10}$
(b) $\frac{9}{20}$
(c) $\frac{91}{200}$
(d) $\frac{231}{200}$
(e) $\frac{2}{3}$
(f) $\frac{5}{33}$
(g) $\frac{11}{45}$
(h) $\frac{163}{300}$
(i) $\frac{83}{330}$
(j) $\frac{5377}{9900}$

- Problema 1.5

(a) $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$
(b) $\frac{a}{a+b}$
(c) $\frac{ac}{bd}$
(d) $\frac{ad}{bc}$
(e) $\frac{ab}{c}$
(f) $\frac{ac}{b}$
(g) $a\,\frac{b}{c}$
(h) $\frac{b}{a}$

- Problema 1.6

(a) $b \neq 0$
(b) racional
(c) irracional
(d) racional
(e) irracional
(f) reais
(g) racional
(h) $x \geq 0$
(i) $x \leq 0$
(j) $x > 0$

- Problema 1.7

(a) $7x$
(b) $5x$
(c) $-4x$
(d) $\frac{8x}{3}$
(e) $10x - 5y$
(f) $-2x + 6y$
(g) $-x - 2y$
(h) $-6x - 3y$

- Problema 1.8

(a) $x + 3$
(b) $xy + 6x$
(c) $6x - 2y$
(d) $7y - 10x$
(e) $44z - 5t$
(f) $2xy - 3xyz$
(g) $6x + 4y - 17xy$
(h) $x^2 - 5x$
(i) $3x^2 + 4xy$
(j) $24x - 20x^2 - 8$
(k) $1 + 2y$
(l) $\frac{1}{2x} - \frac{3}{2}$
(m) $\frac{3}{x} - \frac{2}{y}$

- Problema 1.9

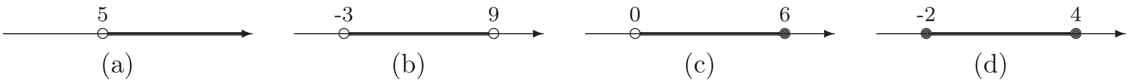


Figura 1.6: Respostas do Problema 1.9

- Problema 1.10

(a) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 < x < 3\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 2\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 4 < x < 7\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 1\}$

- Problema 1.11

(a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x \leq 6\}$, $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 3\}$

(b) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$

(c) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 7\}$, $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x < 5\}$

(d) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 \leq x < 3 \text{ ou } 4 \leq x \leq 9\}$, $A \cap B = \emptyset$

(e) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 3 \text{ ou } x > 4\}$, $A \cap B = \emptyset$

(f) $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x < 7\}$, $A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- Problema 1.12

(a) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 3\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x < \frac{1}{2}\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R}\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 1\}$

(g) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0 \text{ ou } x > \frac{1}{4}\}$

(h) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 3 < x < 7\}$

(i) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 < x < 4\}$

(j) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$

(k) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -3 \leq x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2\}$

(l) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{1}{3} \leq x < 1\}$

(m) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0 \text{ ou } 1 < x < 3\}$

- Problema 1.13

(a) $= \pm\frac{3}{2}$

(b) $x = \pm 1$

(c) $x = -2$ ou $x = 0$

(d) $x = -6$, $x = \pm 1$ ou $x = 4$

- Problema 1.14

(a) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 3 < x < 5\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -7 \text{ ou } x \geq -3\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -4 \leq x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 4\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 3 < x < 7\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -2 \text{ ou } -1 \leq x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 5\}$

(g) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$

(h) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq -1\}$

(i) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -4 \leq x \leq 0$ ou $x \geq 4\}$

- Problema 1.16 $10 \leq C \leq 35$
- Problema 1.17

(a) $T = 20 + \frac{h}{100}\ , \quad 0 \leq h \leq 1200$

(b) $70^o\, C$

- Problema 1.18 $\approx\ 2,96$
- Problema 1.19

(a) $0 < a + b < 2$

(b) $a < b - a < b$

(c) $0 < ab < a$

(d) $\frac{b}{a} > 1$

- Problema 1.20

(a) $x = 1$

(b) $\nexists$

(c) $x \in \mathbb{R}$

- Problema 1.21 $x = -6$, $x = 1$, $x = 2$ ou $x = 3$
- Problema 1.22 $x = 0$, $x = \pm\, 2$ ou $x = \pm\, 2\sqrt{2}$
- Problema 1.23 $x \leq 0$
- Problema 1.24 $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 < x < 0$ ou $x > 1\}$
- Problema 1.25 $x = 50$ e $x = 250$
- Problema 1.26

(a) $x = 20$ ou $x = 30$

(b) $x = 25$

(c) do primeiro ao 22^o dia

- Problema 1.28

$$\frac{(\text{um algarismo 9 para cada algarismo do período}) \cdot (\text{anti-período}) + \text{período}}{(\text{um algarismo 9 para cada algarismo do período}) \cdot 10^{\text{número de algarismos do anti-período}}}$$

Capítulo 2

Funções

O conceito de função, apesar de bastante simples, é de fundamental importância para a Matemática e em particular para o Cálculo. Iniciamos com a abordagem abstrata: uma função é um subconjunto especial do produto cartesiano entre dois conjuntos. Em seguida ilustramos diversos exemplos de como as funções ocorrem naturalmente em nosso dia a dia.

2.1 Produto cartesiano, relações e funções

Definição 1 (Produto cartesiano) *Dados os conjuntos A e B, o produto cartesiano de A por B, denotado $A \times B$ (lê-se: A cartesiano B), é o conjunto formado por* ***todos os pares ordenados*** (a, b)*, em que $a \in A$ e $b \in B$, isto é:*

$$A \times B = \big\{(a, b) | \forall\, a \in A, \forall\, b \in B\big\}$$

Na definição 1 observamos que o produto cartesiano do conjunto A pelo conjunto B é um novo conjunto, cujos elementos (pares ordenados) são obtidos relacionando cada elemento de A a todos os elementos de B, conforme ilustrado no exemplo a seguir:

Exemplo 2.1 *Dados os conjuntos $A = \big\{3, 5, 9\big\}$ e $B = \big\{1, 2, 3, 4\big\}$, temos:*

$$\begin{aligned} A \times B &= \big\{(3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (9,1); (9,2); (9,3); (9,4)\big\} \\ B \times A &= \big\{(1,3); (1,5); (1,9); (2,3); (2,5); (2,9); (3,3); (3,5); (3,9); (4,3); (4,5); (4,9)\big\} \\ A \times A = A^2 &= \big\{(3,3); (3,5); (3,9); (5,3); (5,5); (5,9); (9,3); (9,5); (9,9)\big\} \end{aligned}$$

Se A possui m elementos, e B possui n elementos, então $A \times B$ possui mn elementos, e o mesmo ocorre para $B \times A$. Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$. Além disso, o produto cartesiano se estende para qualquer número finito de conjuntos, isto é, dados $A_1, A_2, \ldots, A_n$, então:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,|\,\forall\, a_1 \in A_1, \forall\, a_2 \in A_2, \ldots, \forall\, a_n \in A_n\big\}.$$

Definição 2 (Relação) *Dados os conjuntos A e B, uma relação R de A em B, denotada $R : A \to B$ (lê-se: R de A em B), é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$*

Exemplo 2.2 *Dados os conjuntos* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{3, 5, 9, 11\}$*, a relação* $R : A \to B$*, tal que*

$$R = \{(a, b) \mid b = 3a\},$$

é dada explicitamente pelos pares ordenados $R = \{(1, 3); (3, 9)\}$*. Uma outra maneira de se representar uma relação é através do diagrama de Venn (Figura 2.1).*

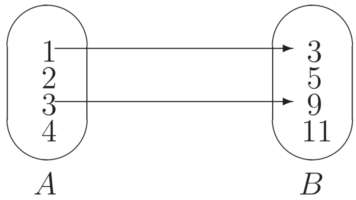


Figura 2.1: Representação de uma relação por diagrama de Venn.

Domínio e Imagem de uma Relação

O domínio de uma relação R, denotado $D(R)$, é o conjunto formado pelos primeiros elementos de cada par ordenado da relação. No Exemplo 2.2 o domínio é o conjunto $D(R) = \{1, 3\}$.

A imagem de uma relação R, denotada $I(R)$, é o conjunto formado pelos segundos elementos de cada par ordenado da relação. No Exemplo 2.2 a imagem é o conjunto $D(R) = \{3, 9\}$.

Definição 3 (Função) *Dados os conjuntos* A *e* B*, uma função* f *de* A *em* B*, denotada* $f : A \to B$ *(lê-se:* f *de* A *em* B*), é qualquer relação que associa a* ***todo*** *elemento de* A *um* ***único*** *elemento de* B*.*

Domínio, Contra-Domínio e Imagem de uma função

Em uma função $f : A \to B$ o domínio é o conjunto A e o contra-domínio é o conjunto B. A imagem de f é o subconjunto de B cujos elementos estão associados a algum elemento do domínio. Genericamente denotamos os pares ordenados de f por (x, y), onde $x \in A$ e $y \in B$, e escrevemos $y = f(x)$ (lê-se y é igual a f de x). Dizemos que y é a imagem de x sob a função f. Dizemos também que x é a variável independente e que y é a variável dependente. O Exemplo 2.3 ilustra tais conceitos.

Exemplo 2.3 *Dados os conjuntos* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{4, 5, 6, 7\}$*, a relação mostrada na Figura 2.2 define uma função* $f : A \to B$*.*

Nesta função temos:

- *domínio:* $D(f) = \{1, 2, 3, 4\}$*;*
- *contra-domínio:* $CD(f) = \{4, 5, 6, 7\}$*;*
- *imagem:* $I(f) = \{4, 5, 7\}$*;*

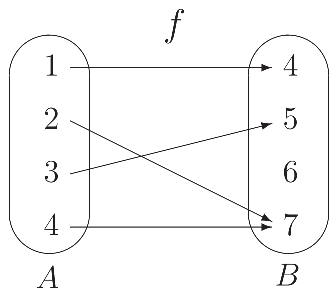


Figura 2.2: Representação de uma função por diagrama de Venn.

- $f(1) = 4$ *(lê-se* f *de* 1 *é igual a* 4*), ou seja,* 4 *é a imagem de* 1*;*
- $f(2) = 7$*,* $f(3) = 5$ *e* $f(4) = 7$*.*

2.2 Funções e suas representações

2.3 Problemas Propostos

2.1 *Dados os conjuntos* $A = \{3, 5, 7\}$ *e* $B = \{3, 9, 15, 35\}$*, determine:*

(a) $A \times B$ *(b)* $B \times A$ *(c)* $A^2 = A \times A$ *(d)* $B^2 = B \times B$

2.2 *Dados os conjuntos* $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3\}$

(a) determine a relação $R_1 = \{(a, b) \in A \times B | b = a^2 - 1\}$*;*

(b) determine a relação $R_2 = \{(a, b) \in A^2 | b = a^2\}$*;*

(c) determine a relação $R_3 = \{(a, b) \in B \times A | b = a^2\}$*;*

(d) determine o domínio e a imagem de cada relação.

2.3 *Dados os conjuntos* $A = \{3, 5, 7\}$ *e* $B = \{3, 9, 15, 35\}$

(a) determine a relação $R : A \to B$*, tal que* $R = \{(a, b) | a$ *é divisor de* $b\}$*;*

(b) determine o domínio e a imagem de R*.*

2.4 *Dados os conjuntos* $A = \{1, 2, 7, 10\}$ *e* $B = \{2, 5, 33, 50, 101\}$

(a) determine a relação $R_1 : A \to B$*, tal que* $R_1 = \{(a, b) | a$ *e* b *são primos*$\}$*;*

(b) determine a relação $R_2 : A \to B$*, tal que* $R_2 = \{(a, b) | b = a^2 + 1\}$*;*

(c) A relação R_1 *é uma função? Explique. Caso seja determine sua imagem.*

(d) A relação R_2 *é uma função? Explique. Caso seja determine sua imagem.*

2.5 *Dados os conjuntos* $A = \{3, 8, 15, 24\}$ *e* $B = \{2, 3, 4, 5\}$

(a) *determine a relação* $R_1 : A \to B$*, tal que* $R_1 = \{(a, b) | b = \sqrt{a + 1}\}$*;*

(b) *determine a relação* $R_2 : B \to A$*, tal que* $R_2 = \{(b, a) | a = b - 1\}$*;*

(c) *A relação* R_1 *é uma função? Explique. Caso seja determine sua imagem.*

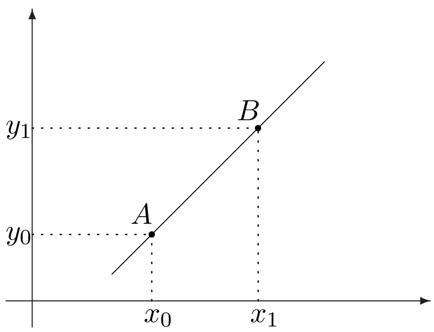
(d) *A relação* R_2 *é uma função? Explique. Caso seja determine sua imagem.*

Capítulo 3

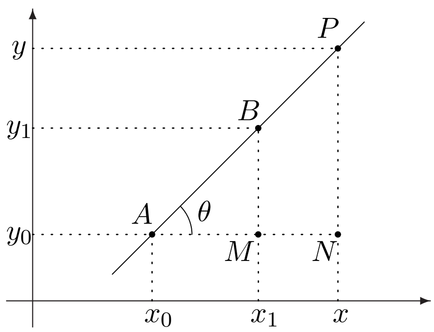
Estudo da reta

3.1 Equação de reta

Intuitivamente é fácil perceber que dois pontos distintos definem uma única reta. Na geometria analítica podemos determinar a equação de uma reta que passa por dois pontos distintos do plano cartesiano. Consideremos a reta definida pelos pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ da Figura 3.1(a). Um ponto qualquer $P(x, y)$ também estará sobre esta reta desde que A, B e P sejam colineares, conforme ilustrado na Figura 3.1(b).



(a) Reta pelos pontos A e B



(b) Reta pelos pontos A, B e P

Figura 3.1: Definindo a equação de uma reta

Tal condição de alinhamento é satisfeita se os triângulos ABM e APN forem semelhantes; neste caso podemos escrever

$$\frac{\overline{PN}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} \quad \therefore \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \tag{3.1}$$

Simplificamos a equação (3.1) notando que a razão

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

é constante, uma vez que (x_0, y_0) e (x_1, y_1) são as cordenadas de dois pontos conhecidos da reta, assim x_0, y_0, x_1 e y_1 são números conhecidos. Por outro lado a razão $\frac{y-y_0}{x-x_0}$

não é constante, uma vez que x e y são as coordenadas de um ponto qualquer do plano cartesiano, logo x e y são valores incógnitos. Tal constante é chamada de **coeficiente angular** da reta e doravante vamos denotá-la pela letra a. É útil observar que o coeficiente angular de uma reta pode ser prontamente encontrado dividindo-se a variação Δy das ordenadas dos pontos pela variação Δx de suas abscissas; assim

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}. \tag{3.2}$$

Substituindo o valor do coeficiente angular dado em (3.2) na equação (3.1) obtemos

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a \tag{3.3}$$

ou, mais apropriadamente,

$$y - y_0 = a(x - x_0) \tag{3.4}$$

chamada **equação da reta na forma ponto-coeficiente angular**. Isolando y nesta equação obtemos

$$y = ax - ax_0 + y_0,$$

onde notamos que $-ax_0 + y_0$ é uma constante, denominada **coeficiente linear** da reta e a qual denotaremos pela letra b. Podemos então reescrever a equação (3.4) como

$$y = ax + b \tag{3.5}$$

chamada **equação da reta na forma reduzida**.

Exemplo 3.1 Determine a equação da reta pelos pontos $(1, 3)$ e $(2, 5)$, mostrada na Figura 3.2.

- *Inicialmente calculamos seu coeficiente angular:* $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-3}{2-1} = \frac{3-5}{1-2} = 2$.
- *A seguir, usando o ponto* $(1, 3)$*, obtemos a equação na forma ponto-coeficiente:* $y - 3 = 2(x - 1)$.
- *Finalmente isolamos a variável* y *para obter sua forma reduzida:* $y = 2x + 1$. *Salientamos que esta reta tem coeficiente angular* $a = 2$ *e coeficiente linear* $b = 1$.

No Exemplo 3.1 poderíamos obter a equação da reta usando o ponto $(2, 5)$, ao invés do ponto $(1, 3)$. Neste caso a equação da reta na forma ponto-coeficiente seria

$$y - 5 = 2(x - 2),$$

e a forma reduzida

$$y = 2x + 1.$$

Observamos que a equação da reta na forma ponto-coeficiente não é única: mudando-se o ponto usado muda-se a equação; por outro lado a forma reduzida é única, independente de qual ponto é usado para escrever sua equação.

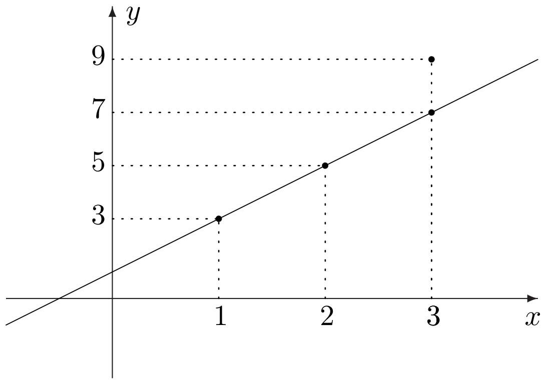


Figura 3.2: Reta pelos pontos $(1,3)$ e $(2,5)$.

3.1.1 O que queremos dizer com equação de uma reta?

Dizer que $y = 2x + 1$ é a equação de uma dada reta significa que *todo ponto da reta é dado por um par ordenado que satisfaz sua equação; reciprocamente, todo par ordenado que satisfaz sua equação é um ponto da reta.*

Exemplo 3.2 Considerando a reta $y = 2x+1$ e a Figura 3.2 do Exemplo 3.1, concluímos que

- *o ponto* $(3,7)$ *pertence a esta reta, pois suas coordenadas verificam a equação* $y = 2x + 1$*;*
- *o ponto* $(3,9)$ *não pertence a esta reta, pois suas coordenadas não verificam a equação* $y = 2x + 1$*.*

3.1.2 O coeficiente angular e o coeficiente linear

Para entendermos os significados geométricos dos coeficientes angular e linear vamos observar a Figura 3.3, que ilustra novamente a reta pelos pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$.

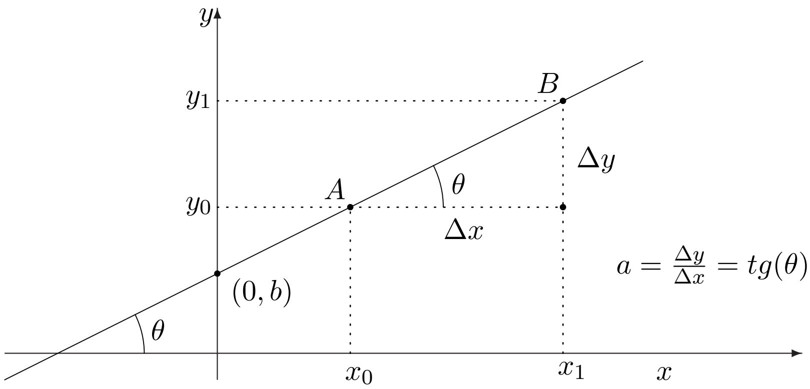


Figura 3.3: Coeficiente angular e coeficiente linear de uma reta

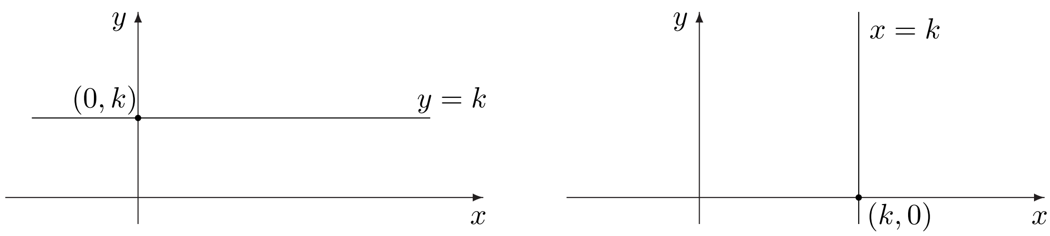
O ângulo θ que a reta forma com o eixo das abscissas no sentido positivo denomina-se **inclinação** da reta; o leitor que tem conhecimentos de trigonometria pode observar que o coeficiente angular da reta é o valor da tangente desta inclinação.

Para entendermos o significado do coeficiente linear fazemos $x = 0$ na equação (3.5) e obtemos $y = b$; isto significa que a reta passa pelo ponto $(0, b)$. Assim o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo-y.

3.2 Retas horizontais e retas verticais

Se uma reta for horizontal - Figura 3.4(a) - então sua inclinação é nula; conseqüentemente seu coeficiente angular é zero, pois $tg(0) = 0$. Neste caso a equação (3.5) se reduz a $y = b$. Genericamente falando, toda equação da forma $y =$ constante é equação de uma reta horizontal.

Se uma reta for vertical - Figura 3.4(b) - então sua inclinação é de 90^o; conseqüentemente seu coeficiente angular não existe, pois $tg(90) \nexists$. Neste caso sua equação é da forma $x =$ constante.



(a) Reta horizontal $a = 0$ (b) Reta vertical $a \nexists$

Figura 3.4: Reta horizontal e reta vertical

3.3 Equação geral da reta

Toda equação da forma

$$Ax + By + C = 0 \tag{3.6}$$

onde A, B e C são constantes reais e A e B não são simultaneamente nulas, representa um reta. Para verificar esta afirmação consideramos as seguintes possibilidades:

- se $B \neq 0$, então podemos isolar y na equação (3.6), obtendo

  $$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

  que é uma equação da forma (3.5); logo a equação de uma reta. Neste caso, se $A = 0$, a equação anterior se reduz a

  $$y = -\frac{C}{B},$$

  que é a equação de uma reta horizontal.

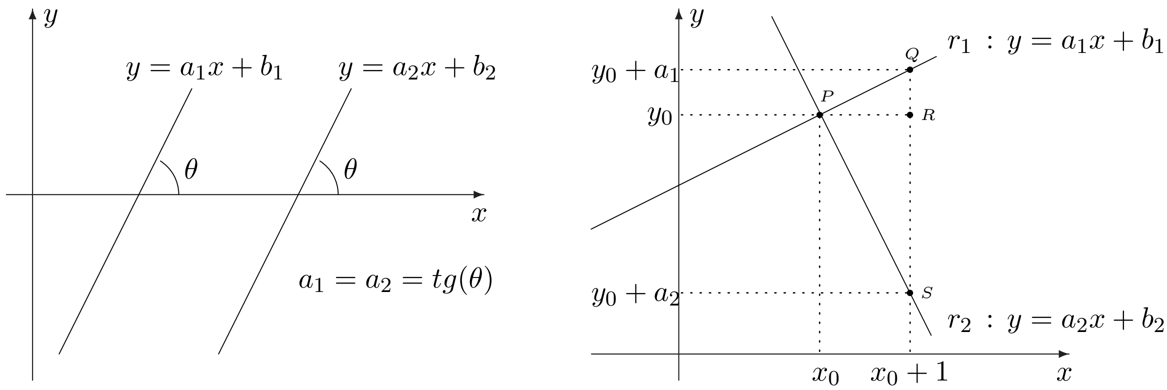
- se $B = 0$, então podemos isolar x na equação (3.6), obtendo

$$x = -\frac{C}{A},$$

que é a equação de uma reta vertical.

3.4 Retas paralelas e retas perpendiculares

A condição de paralelismo entre duas retas é facilmente estabelecida: duas retas paralelas formam o mesmo ângulo com o eixo das abscissas, logo seus coeficientes angulares são iguais - Figura 3.5(a).



(a) Retas paralelas (b) Retas perpendiculares

Figura 3.5: Paralelismo e perpendicularismo de retas

A condição de perpendicularismo é um pouco mais sutil. Para estabelecê-la vamos recorrer à Figura 3.5(b), que nos mostra as retas perpendiculares

$$r_1 \,:\, y = a_1x + b_1 \quad \text{e} \quad r_2 \,:\, y = a_2x + b_2$$

concorrentes no ponto $P(x_0, y_0)$. Como P pertence a ambas as retas, suas coordenadas satisfazem tanto a equação de r_1 como a de r_2, isto é

$$y_0 = a_1x_0 + b_1 \quad \text{e} \quad y_0 = a_2x_0 + b_2.$$

Na reta r_1, um incremento de uma unidade na abscissa resulta

$$a_1(x_0 + 1) + b_1 = a_1x_0 + a_1 + b_1 = a_1x_0 + b_1 + a_1 = y_0 + a_1;$$

isto é, a ordenada é incrementada de a_1 unidades. Logo o segmento $\overline{RQ}$ da Figura 3.5(b) mede a_1 unidades. De modo análogo, na reta r_2, um incremento de uma unidade na abscissa resulta

$$a_2(x_0 + 1) + b_2 = a_2x_0 + a_2 + b_2 = a_2x_0 + b_2 + a_2 = y_0 + a_2;$$

isto é, a ordenada é decrementada de a_2 unidades[1]. Logo o segmento $\overline{SR}$ da Figura 3.5(b) mede $-a_2$ unidades. Finalmente, observando que os triângulos PRQ e PRS são semelhantes (ângulo-ângulo-ângulo), podemos escrever

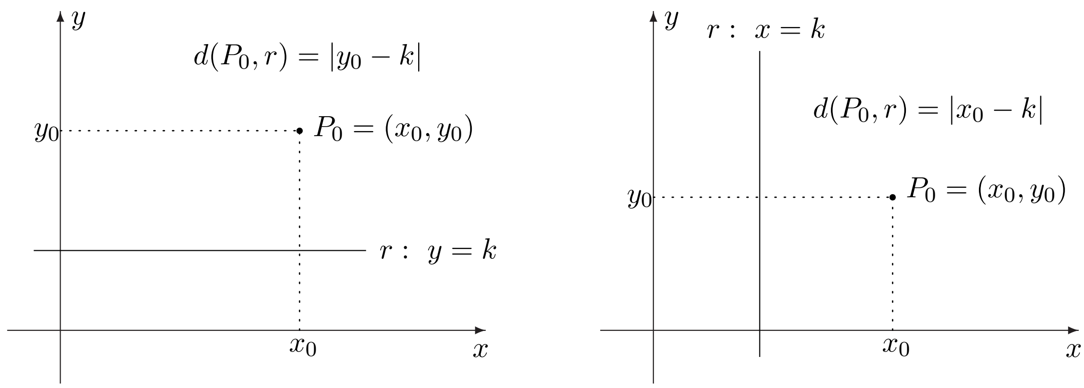
$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{RP}}{\overline{SR}} \quad \therefore \quad \frac{a_1}{1} = \frac{1}{-a_2} \quad \therefore \quad a_1\, a_2 = -1$$

que é a condição de perpendicularismo entre duas retas. Assim, duas retas são perpendiculares quando o produto de seus coeficientes angulares vale -1.

3.5 Distância de um ponto a uma reta

Em muitos problemas tratados pela Geometria Analítica surge a necessidade de determinarmos a distância de um ponto a uma reta. Vamos considerar duas possibilidades:

(i) a reta é paralela a um dos eixos coordenados: se a reta é horizontal a distância é simplesmente o valor absoluto de uma diferença de ordenadas, se a reta é vertical a distância é simplesmente o valor absoluto de uma diferença de abscissas, conforme ilustrado nas Figuras 3.6(a) e 3.6(b) respectivamente.



(a) Distância ponto a reta horizontal

(b) Distância ponto a reta vertical

Figura 3.6: Distância de um ponto a uma reta paralela a um eixo

(ii) se a reta não é paralela a nenhum dos eixos coordenados, a construção da Figura 3.7 nos permite determinar a distância do ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $y = ax + b$.

A distância procurada é a medida do segmento $\overline{PQ}$, denotada por D. Observando que os triângulos APQ e ABC são semelhantes podemos escrever

$$\frac{D}{1} = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|y_0 - ax_0 - b|}{\sqrt{1 + a^2}}. \tag{3.7}$$

Considerando a equação geral desta reta, $Ax + By + C = 0$, isolando y obtemos

$$y = -\frac{A}{B}\,x - \frac{C}{B}$$

[1]Decrementada por que o valor numérico de a_2 é negativo.

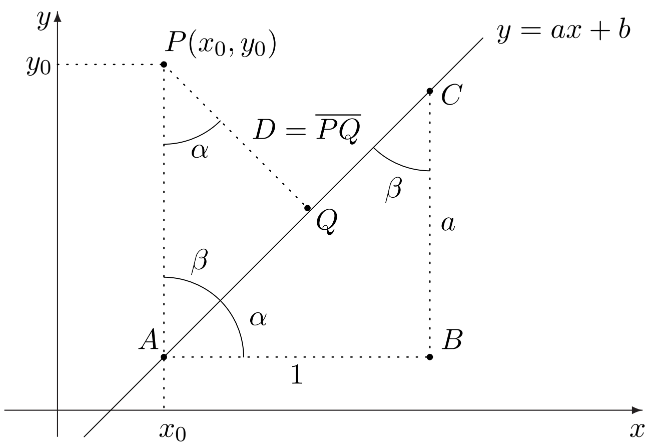


Figura 3.7: Distância de um ponto a uma reta qualquer

e comparando com a forma reduzinda $y = ax + b$ temos

$$a = -\frac{A}{B} \quad \text{e} \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Substituindo estes valores na equação (3.7) obtemos

$$D = \frac{\left|y_0 + \frac{A}{B}x_0 + \frac{C}{B}\right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{A}{B}\right)^2}} = \frac{\left|\frac{By_0 + Ax_0 + C}{B}\right|}{\sqrt{\frac{B^2 + A^2}{B^2}}} = \frac{\frac{1}{|B|}\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\frac{1}{|B|}\sqrt{A^2 + B^2}}$$

e finalmente

$$D = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{3.8}$$

Exemplo 3.3 *Determine a distância do ponto $P(1, 5)$ à reta $y = -3x + 11$.*

Basta observar que $(x_0, y_0) = (1, 5)$ e que a equação geral da reta é $3x + y - 11 = 0$, logo $A = 3$, $B = 1$ e $C = -11$. A substituição na equação (3.8) resulta

$$D = \frac{\left|3 \times 1 + 1 \times 5 - 11\right|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

3.6 Funções lineares

Funções lineares (ou funções polinomiais do 1º grau) são funções[2] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$y = f(x) = ax + b; \tag{3.9}$$

[2]Lembre-se que o símbolo $\mathbb{R}$ denota o conjunto de todos os números reais. Assim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indica que a função f tem como domínio (o $\mathbb{R}$ antes da flecha) e contra-domínio (o $\mathbb{R}$ depois da flecha) todos os números reais.

onde a e b são constantes reais. Comparando as equações (3.5) e (3.9) concluímos imediatamente que o gráfico de uma função linear é uma reta no plano cartesiano. A raiz[3] é dada por $x = -b/a$.

3.6.1 Modelos lineares

A despeito de sua simplicidade, várias situações importantes são modeladas por funções lineares. Por modelo linear queremos dizer que existem duas quantidades que se relacionam algebricamente através de uma equação (ou função) linear. Os próximos exemplos ilustram alguns modelos lineares.

Exemplo 3.4 (A pressão em um ponto submerso) Determine a relação entre a pressão p (medida em atm) e a profundidade h (medida em m) em um ponto submerso na água do mar, considerando que a pressão aumenta linearmente com a profundidade e que este aumento é de 1 atm a cada 10 m de descida.

- *Inicialmente observamos que quando $h = 0$ m (na superfície) a pressão é $p = 1$ atm; assim nossa reta passa pelo ponto $(h, p) = (0, 1)$. Quando $h = 10$ m de profundidade a pressão aumenta para $p = 2$ atm; assim nossa reta também passa pelo ponto $(h, p) = (10, 2)$.*

- *De posse de dois pontos da reta determinamos seu coeficiente angular*

$$a = \frac{\Delta p}{\Delta h} = \frac{2-1}{10-0} = \frac{1}{10}.$$

- *Finalmente, usando o ponto $(h, p) = (0, 1)$, obtemos a equação da reta*

$$p - 1 = \frac{1}{10}(h - 0) \qquad \therefore \qquad p = \frac{1}{10}h + 1;$$

  que é o modelo linear que relaciona a pressão p e a pronfundidade h da situação descrita.

Exemplo 3.5 (Escalas de temperaturas) Em muitos países, incluindo o Brasil, a temperatura é medida na escala Celsius. Nos países que adotam o arcaico sistema inglês de medidas, como Inglaterra e Estados Unidos, a temperatura é medida na escala Farenheit. A escala Celsius adota as seguintes convenções: a água congela a $0\,^oC$ e ferve a $100\,^oC$. A escala Farenheit adota as seguintes convenções: a água congela a $32\,F$ e ferve a $212\,F$. Determine uma equação de conversão Celsius-Farenheit, sabendo que trata-se de um modelo linear.

- *Denotando por c a temperatura em Celsius e por f a temperatura em Farenheit observamos que a reta procurada passa pelos pontos $(c_1, f_1) = (0, 32)$ (congelamento da água) e $(c_2, f_2) = (100, 212)$ (ebulição da água).*

[3]As raízes, ou zeros, de uma função são todos os valores do domínio que anulam sua imagem, ou seja, são todos os elementos do domínio que possuem imagem zero. Determinamos as raízes de uma função f resolvendo a equação $f(x) = 0$.

- *De posse de dois pontos da reta determinamos seu coeficiente angular*

$$a = \frac{\Delta f}{\Delta c} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}.$$

- *Finalmente, usando o ponto* $(c_1, f_1) = (0, 32)$*, obtemos a equação da reta*

$$f - 32 = \frac{9}{5}(c - 0) \qquad \therefore \qquad f = \frac{9}{5}c + 32;$$

que é o modelo linear que relaciona a temperatura Farenheit f *e a temperatura Celsius* c*.*

3.7 Problemas Propostos

3.1 *Marque cada par de pontos no plano cartesiano; trace a reta que passa por eles e determine a equação reduzida desta reta.*

(a) $(5,0)$ *e* $(1,4)$

(b) $(-3,0)$ *e* $(1,4)$

(c) $(-2,3)$ *e* $(1,9)$

(d) $(-1,1)$ *e* $(1,5)$

(e) $(-2,-4)$ *e* $(-1,1)$

(f) $(2,-4)$ *e* $(-1,5)$

(g) $(-2,4)$ *e* $(1,-5)$

(h) $(2,4)$ *e* $(1,-5)$

(i) $(-2,4)$ *e* $(-1,-5)$

(j) $(-2,-4)$ *e* $(-1,-5)$

(k) $(0,3)$ *e* $(4,3)$

(l) $(1,1)$ *e* $(3,1)$

(m) $(1,1)$ *e* $(1,4)$

(n) $(3,-2)$ *e* $(3,5)$

Analisando os resultados obtidos o que você pode inferir sobre a posição da reta quando seu coeficiente angular é positivo? e quando é negativo? e quando é nulo? e quando não existe?

3.2 *Esboce o gráfico e determine a equação da reta que satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) inclinação de 45^o *e passa pelo ponto* $P(2,4)$*;*

(b) inclinação de 60^o *e passa pelo ponto* $P(2,4)$*;*

(c) inclinação de 135^o *e passa pelo ponto* $A(3,5)$*;*

(d) inclinação de 45^o *e passa pelo ponto médio dos pontos* $(3,-5)$ *e* $(1,-1)$*;*

(e) paralela à reta $y = 3x - 4$ *e passa pelo ponto* $P(1,2)$*;*

(f) perpendicular à reta $y = 3x - 4$ *e passa pelo ponto* $P(1,2)$*;*

3.3 *Determine se os três pontos dados são colineares (resolva este problema de dois modos: usando o coeficiente angular e a fórmula da distância).*

(a) $(1,-4)$; $(-2,-13)$ *e* $(5,8)$;

(b) $(1,-7)$; $(4,2)$ *e* $(2,1)$;

(c) $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$; $(\frac{1}{4},-\frac{13}{8})$ *e* $(-\frac{1}{2},-2)$;

3.4 *Determine se os três pontos dados formam um triângulo retângulo (resolva este problema de dois modos: usando o coeficiente angular e o Teorema de Pitágoras).*

(a) $(1,-3)$; $(2,7)$ *e* $(-2,5)$;

(b) $(1,2)$; $(0,1)$ *e* $(-1,2)$;

(c) $(0,0)$; $(3,6)$ *e* $(-4,2)$;

3.5 *Esboce cada par de retas no plano cartesiano e determine o ponto de interseção.*

(a) $y = x - 2$ *e* $y = -2x + 4$;

(b) $y = 2x - 7$ *e* $y = -2x + 1$;

(c) $y = 3x - 1$ *e* $y = -5x + 2$;

(d) $y = 2x - 5$ *e* $y = 2x + 5$;

3.6 *Determine o(s) valor(es) de* k *para que a reta* $(k+4)x + (9-k^2)y + (k-6)^2 = 0$

(a) *seja paralela ao eixo-*x;

(b) *seja paralela ao eixo-*y;

(c) *passe pela origem.*

3.7 *O conjunto de todos os pontos eqüidistantes de dois pontos* A *e* B *dados é chamado reta mediatriz do segmento* $\overline{AB}$. *Esboce e determine a equação reduzida da mediatriz do segmento* $\overline{AB}$ *de dois modos:*

(i) *igualando a distância do ponto* $P(x,y)$ *a* A *e* B *e simplificando a equação obtida;*

(ii) *usando o ponto médio do segmento* $\overline{AB}$ *e um coeficiente angular adequado.*

(a) $A(-1,-3)$ *e* $B(5,-1)$

(b) $A(2,4)$ *e* $B(-6,-2)$

(c) $A(-3,-2)$ *e* $B(-3,5)$

(d) $A(3,-2)$ *e* $B(3,7)$

3.8 *Determine a distância do ponto* P_0 *à reta* r *nos casos:*

(a) $P_0(2,5)$ *e* $r:\ y = 1$

(b) $P_0(-3,4)$ *e* $r:\ x + 2 = 0$

(c) $P_0(1,-3)$ *e* $r:\ 4x - y2 + 2 = 0$

(d) $P_0(-3,5)$ *e* $r:\ y = 5x - 3$

3.9 *Mostre que a distância da origem* $(0,0)$ *à reta* $Ax + By + C = 0$ *vale*

$$D = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3.10 *Mostre que a distância entre as retas paralelas* $Ax+By+C_1 = 0$ *e* $Ax+By+C_2 = 0$ *vale*

$$D = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3.11 *Determine a distância entre as retas* r *e* s

(a) $\begin{cases} r: & 2x+3y=15 \\ s: & 2x+3y-10=0 \end{cases}$ *(c)* $\begin{cases} r: & x+y-1=0 \\ s: & 3x+3y-7=0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} r: & 3x-y+7=0 \\ s: & -3x+y+7=0 \end{cases}$ *(d)* $\begin{cases} r: & y=5x-7 \\ s: & y=5x+3 \end{cases}$

3.12 *Determine a equação da reta paralela à reta* $3x+4y+15=0$ *e que dista da mesma* 3 *unidades.*

3.13 *Determine a equação da reta equidistante de* $3x+y-10=0$ *e* $3x+y-4=0$.

3.14 *Dada a função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *tal que* $y=f(x)=2x-10$,

(a) determine as coordenadas do ponto onde seu gráfico corta o eixo-x;

(b) determine as coordenadas do ponto onde seu gráfico corta o eixo-y;

(c) utilize as informações obtidas para esboçar seu gráfico.

3.15 *Voltando ao Exemplo 3.4*

(a) qual a unidade do coeficiente angular da reta obtida? qual é o seu significado?

(b) qual a unidade do coeficiente linear da reta obtida? qual é o seu significado?

3.16 *Voltando ao Exemplo 3.5*

(a) qual o significado do coeficiente angular da reta obtida?

(b) qual o significado do coeficiente linear da reta obtida?

3.17 *Dada a função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *tal que* $f(x)=3x-4$, *determine as constantes* a *e* b *sabendo-se que* $f(a)=2b$ *e* $f(b)=9a-28$.

3.18 *Uma função linear é tal que* $f(3)=2$ *e* $f(4)=2f(2)$. *Determine* f.

3.19 *Uma função linear é tal que* $f(0)=1+f(1)$ *e* $f(-1)=2-f(0)$. *Determine* $f(3)$.

3.20 *Um avião parte de um ponto* P *no instante* $t=0$ *e viaja para o oeste a uma velocidade constante de* $450\,Km/h$.

(a) Escreva uma expressão para a distância d *(em* Km*) percorrida pelo avião em função do tempo* t *(em horas).*

(b) Trace o gráfico $d\times t$.

(c) qual o significado do coeficiente angular da reta obtida?

3.21 *A equação da reta na forma* (3.3) *tem a vantagem da conexão direta com o raciocínio geométrico utilizado para obtê-la, ilustrado na Figura 3.1(b). Porém, rigorosamente falando, a equação de uma reta não pode ser deixada nesta forma. Por quê?*

Capítulo 4

Funções quadráticas

4.1 Funções Quadráticas

Funções quadráticas (ou funções polinomiais do 2^o grau) são funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Sua representação no plano cartesiano é uma parábola. As duas raízes são dadas pela Fórmula de Báskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}; \tag{4.1}$$

onde o discriminante (ou delta) é dado por $\Delta = b^2 - 4ac$. Temos que:

- se $\Delta > 0$: duas raízes reais distintas;
- se $\Delta = 0$: duas raízes reais iguais (raiz dupla);
- se $\Delta < 0$: duas raízes complexas[1]

Para o traçado do gráfico de funções quadráticas é útil lembrar que as coordenadas do vértice da parábola são dadas por

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right). \tag{4.2}$$

Forma fatorada de uma função quadrática

Se os números r_1 e r_2 são as raízes de uma função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ então podemos reescrevê-la na forma fatorada

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2).$$

Exemplo 4.1 *Dada a função* $y = -4x^2 + 2x + 6$ *temos*

- *raízes:* $\Delta = 2^2 - 4(-4)6 = 100;$ *logo* $x = \frac{-2 \pm 10}{-8}$ *donde* $x = -1$ *e* $x = \frac{3}{2}$;
- *vértice:* $\left(\frac{-2}{-8}, \frac{-100}{-16}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{25}{4}\right)$;
- *forma fatorada:* $f(x) = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + 1\right)$.

[1] Neste caso as raízes são conjugadas, pois estamos tratando de funções quadráticas de coeficientes reais.

4.2 Problemas Propostos

4.1 *Dadas as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tais que* $f(x) = x+1$ *e* $g(x) = x^2-5x+6$,

(a) *determine as raízes de* f;

(b) *determine as raízes de* g *e reescreva-a na forma fatorada;*

(c) *resolva a equação* $\frac{g(2)-f(x)}{g(1)f(2)} = \frac{g(4)}{f(-2)}$

(d) *resolva a equação* $\frac{g(x)-f(x)}{g(0)f(0)} = \frac{g(-2)}{f(1)}$

4.2 *Dada a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que* $y = f(x) = x^2 - 10x + 9$,

(a) *determine as coordenadas do ponto onde seu gráfico corta o eixo-x;*

(b) *determine as coordenadas do ponto onde seu gráfico corta o eixo-y;*

(c) *determine as coordenadas do vértice da parábola;*

(d) *utilize as informações obtidas para esboçar seu gráfico.*

4.3 *Dada a função quadrática* $f(x) = 4x^2 - 11x - 3$ *determine o valor de* k *sabendo-se que* $f(k) = f(k+1)$.

4.4 *Sabe-se que a função quadrática* $y = 3x^2 + bx + c$ *tem como raízes os números* -2 *e* 6. *Determine as coordenadas do vértice de seu gráfico e esboce-o.*

4.5 *Sabe-se que a função quadrática* $y = x^2+bx+c$ *tem como raízes os números complexos* $2 \pm i$. *Determine as coordenadas do vértice de seu gráfico e esboce-o.*

4.6 (UFPI) *Uma fábrica produz* $p(t) = t^2 - 2t$ *pares de sapatos* t *horas após o início de suas atividades diárias. Se a fábrica começa a funcionar as* $8:00$ *horas, quantos pares de sapatos serão produzidos entre* $10:00$ *e* $11:00$.

4.7 (UFGO) *Se* $f(x) = x - 3$, *determine os valores de* x *que satisfazem a equação* $f(x^2) = f(x)$.

4.8 (UFAL-AL) *São dadas as funções* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f(x) = x^2 - 2x - 3$ *e* $g(x) = \frac{3}{2}x + m$. *Se* $f(0) + g(0) = -5$, *determine o valor da expressão* $f(m) - 2g(m)$.

4.9 (PUC-SP) *Qual é a função quadrática cuja única raiz é* -3 *e cujo gráfico passa pelo ponto* $(-2, 5)$*?*

4.10 *De uma função quadrática sabe-se que uma das raízes é* 3 *e que as coordenadas do vértice de seu gráfico são* $(-1, -16)$. *Determine a outra raiz e esboce seu gráfico.*

4.11 *De uma função quadrática sabe-se que* $f(m+3) = 2m^2 - 2m + 1$.

(a) Determine $f(1)$ e $f(-2)$; *(b) Determine $f(x)$.*

4.12 (Cesgranrio-RJ) *Para quais valores de b a parábola $y = x^2 + bx$ tem um único ponto em comum com a reta $y = x - 1$?*

4.3 Problemas Teóricos

4.1 *Prove 4.1. (Sugestão: a partir da equação $ax^2 + bx + c = 0$ complete os quadrados no membro esquerdo. Como surge o $\pm$ na fórmula de Báskara?)*

4.2 *Prove 4.2. (Sugestão: a partir da equação $y = ax^2 + bx + c$ complete os quadrados no membro direito e reescreva-a na forma padrão da equação de uma parábola $(y - k) = 4p(x - h)^2$, onde (h, k) são as coordenadas do vértice)*

4.4 Respostas dos Problemas Propostos - Capítulo 4

- 4.1 (página 33)
  - (a) $x = 2$ e $x = 3$
  - (b) $x = -1$
  - (c) $x = 11$
  - (d) $x = -5$ ou $x = 11$
- 4.2 (página 33)
  - (a) $(1, 0)$ e $(9, 0)$;
  - (b) $(0, 9)$;
  - (c) $(5, -16)$
- 4.3 (página 33) $k = \frac{7}{8}$.
- 4.4 (página 33) $(2, -48)$.
- 4.5 (página 33) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.
- 4.6 (página 33) $p(3) - p(2) = 7$ pares de sapatos.
- 4.7 (página 33) $x = 0$ ou $x = 1$.
- 4.8 (página 33) 15.
- 4.9 (página 33) $f(x) = 5(x + 3)^2$.
- 4.10 (página 33) $x = -5$.
- 4.11 (página 33)
  - (a) $f(1) = 13$ e $f(-2) = 61$;
  - (b) $f(x) = 2x^2 - 14x + 25$.
- 4.12 (página 34) $b = -1$ ou $b = 3$.

Capítulo 5

Estudo do Sinal de uma Função

5.1 Introdução

Neste Capítulo discutimos o problema do estudo do sinal de uma função, assunto muitas vezes tratado de forma rápida e superficial nos ensinos básico e médio. Daremos aqui uma maior cobertura a este tópico uma vez que se trata de um pré-requisito fundamental para se aprender o Cálculo Diferencial e Integral. Também introduzimos dois novos tipos de funções: as funções racionais e as funções algébricas.

5.2 Estudo do sinal de uma função

Estudar o sinal de uma função consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa e os intervalos nos quais a função tem imagem positiva.

5.2.1 Estudo do sinal de funções polinomiais

Como toda função polinomial tem como domínio todo o conjunto $\mathbb{R}$ e é sempre contínua[1], suas imagens só podem mudar de sinal em suas raízes reais.

Estudo do sinal de funções lineares

Neste caso o estudo de sinal é bastante simples, pois a função apresenta uma única raiz (obviamente real) e portanto muda de sinal uma única vez.

Exemplo 5.1 *A única raiz da função polinomial $y = 2x - 6$ é $x = 3$. Assim (Figura 5.1)*

- *a função é positiva em $\{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$ (isto significa que qualquer valor de x maior que 3 resulta em uma imagem positiva);*
- *a função é negativa em $\{x \in \mathbb{R} | x < 3\}$ (isto significa que qualquer valor de x menor que 3 resulta em uma imagem negativa).*

[1]Uma discussão detalhada de *continuidade* depende do conhecimento da teoria de *limites* (Veja Seção 2.5 e Apêndices B.2 e B.3 de George F. Simmons, Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1, McGraw-Hill, São Paulo, 1987. Grosseiramente falando, uma função é contínua quando seu gráfico não apresenta falhas ou saltos.

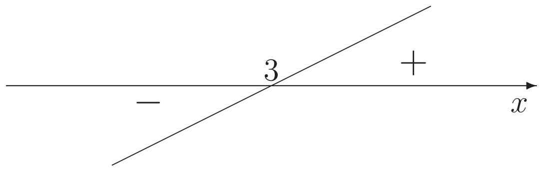


Figura 5.1: Estudo de sinal da função $y = 2x - 6$

Estudo do sinal de uma função quadrática

Inicialmente determinamos as raízes reais (se existirem) do polinômio quadrático. A seguir podemos estudar o sinal utilizando o gráfico da função ou o quadro de sinais (com a função na forma fatorada). O Exemplo a seguir ilustra tais possibilidades.

Exemplo 5.2 *As raízes da função polinomial $y = x^2 - 3x - 4$ são $x = -1$ e $x = 4$.*

(i) Forma gráfica: como o coeficiente do termo quadrático é positivo, o gráfico da função é uma parábola com concavidade voltada para cima (Figura 5.2).

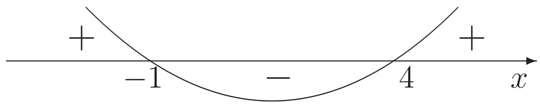


Figura 5.2: Estudo de sinal da função $y = x^2 - 3x - 4$

(ii) Quadro de sinais: escrevemos a função na forma fatorada

$$y = (x+1)(x-4)$$

e analisamos os sinais dos fatores nos subintervalos formados pelas raízes de cada fator (Figura 5.3).

		-1		4	
$x+1$	$-$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$+$
y	$+$		$-$		$+$

Figura 5.3: Estudo de sinal da função $y = x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$

Temos:

- *a função é positiva em* $\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \;\; ou \;\; x > 4\}$;
- *a função é negativa em* $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 4\}$.

Estudo do sinal de uma função polinomial qualquer

Neste caso devemos ser capazes de determinar as raízes do polinômio (não se frustre: para polinômios de grau maior que 2 isto nem sempre é fácil). Se pudermos determinar as raízes reais da função, podemos reescrevê-la na forma fatorada e então estudarmos seu sinal com o auxílio do quadro de sinais.

Exemplo 5.3 *As raízes da função polinomial $y = x^3 - x^2 - 6x$ são $x = -2$, $x = 0$ e $x = 3$ (verifique); logo sua forma fatorada é*

$$y = x(x + 2)(x - 3).$$

Analisamos então os sinais dos fatores nos subintervalos formados pelas raízes de cada fator (Figura 5.4).

		-2		0		3	
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$+$
y	$-$		$+$		$-$		$+$

Figura 5.4: Estudo de sinal da função $y = x^3 - x^2 - 6x$

Temos:

- *a função é negativa em* $\{x \in \mathbb{R} | x < -2$ *ou* $0 < x < 3\}$;
- *a função é positiva em* $\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 0$ *ou* $x > 3\}$.

5.3 Funções Racionais

Funções racionais são dadas por razões de polinômios, ou seja, são funções da forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios quaisquer. Evidentemente, **como não existe divisão por zero**, o domínio de uma função racional são todos os números reais para os quais $Q(x) \neq 0$. As raízes de uma função racional são as próprias raízes de P (caso não anulem Q).

Exemplo 5.4 *Dada a função $y = \frac{x-3}{x-1}$, temos:*

- *domínio: $x - 1 \neq 0$, assim $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$;*
- *raiz: $x - 3 = 0$, assim a função possui uma única raiz $x = 3$;*
- *estudo de sinal: utilizamos o quadro de sinais e analisamos os sinais dos fatores nos subintervalos formados pelas raízes de cada fator (Figura 5.5):*

  Temos:

		1		3	
$x-1$	$-$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$+$
y	$+$		$-$		$+$

Figura 5.5: Estudo de sinal da função $y = \frac{x-3}{x-1}$

– *a função é positiva em* $\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \quad ou \quad x > 3\}$;

– *a função é negativa em* $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 3\}$.

Exemplo 5.5 *Dada a função* $y = \frac{x-3}{x^2-9}$, *temos:*

- *domínio:* $x^2 - 9 \neq 0$, *assim* $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 3\}$;
- *raiz:* $x - 3 = 0$ *e neste caso* $x = 3$ *seria a provável raiz. Como* 3 *não está no domínio, esta função não possui raiz*[2]
- *estudo de sinal: como* $x = 3$ *é raiz do numerador e do denominador o fator linear* $x - 3$ *poderá ser cancelado*

$$y = \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3}, \quad x \neq 3.$$

Temos:

– *a função é positiva em* $\{x \in \mathbb{R} | x > -3\}$;

– *a função é negativa em* $\{x \in \mathbb{R} | x < -3\}$.

Uma função racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se diz **própria** se o grau do polinômio P é menor que o grau do polinômio Q; caso contrário a função racional se diz **imprópria**. Em particular, toda função racional imprópria pode ser reescrita na forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}; \tag{5.1}$$

onde o polinômio q é o quociente e o polinômio r é o resto da divisão de P por Q.

Exemplo 5.6 *Na divisão do polinômio* $x^3 - 3x^2$ *por* $x - 1$ *o quociente é* $x^2 - 2x - 2$ *e o resto é* -2. *Assim a função racional* $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{x-1}$ *pode ser reescrita como*

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x-1} = x^2 - 2x - 2 + \frac{-2}{x-1}.$$

[2]Cuidado: conforme podemos observar neste Exemplo a primeira providência quando analisamos uma função é determinar seu domínio. Se você começasse tentando encontrar as raízes poderia cometer um (grave) erro.

5.4 Funções Algébricas

Funções algébricas são aquelas obtidas por qualquer manipulação algébrica de polinômios. Muitas vezes tais funções envolvem a extração de raízes e/ou divisões de polinômios. No caso de funções algébricas determinamos o seu domínio observando dois fatos:

(i) ***não existe divisão por zero***;

(ii) ***não existe raiz par de número negativo***.

Exemplo 5.7 *Determine o domínio e as raízes da função* $f(x) = \sqrt{21 - 18x - 3x^2}$.

Solução: uma vez que só podemos extrair a raiz quadrada de números não negativos, devemos ter

$$21 - 18x - 3x^2 \geq 0.$$

A Figura 5.6 ilustra graficamente a solução desta inequação. Observamos então que o domínio da função é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | -7 \leq x \leq < 1\}$. *As raízes são* $x = -7$ *e* $x = 1$, *uma vez que* $f(-7) = f(1) = \sqrt{0} = 0$.

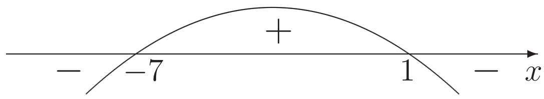


Figura 5.6: Determinando o domínio da função $f(x) = \sqrt{21 - 18x - 3x^2}$

5.5 Problemas Propostos

5.1 *Determine as raízes e estude o sinal da função* $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

5.2 *Determine as raízes e estude o sinal da função* $f(x) = -x^2 + 4x$.

5.3 *Determine as raízes e estude o sinal da função* $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

5.4 *Determine as raízes e estude o sinal da função* $f(x) = -x^2 + 4x - 13$.

5.5 *Determine as raízes e estude o sinal da função* $f(x) = x^3 - 6x^2 - 27x + 140$, *sabendo-se que uma de suas raízes é* 7.

5.6 *Determine as raízes e estude o sinal da função* $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

5.7 *Dada a função*$f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x-2}$

(a) determine seu domínio;

(b) determine suas raízes (se existirem);

(c) faça o estudo de seu sinal.

5.8 *Classifique as funções racionais como própria ou imprópria. Para as impróprias, reescreva-a na forma* (5.1)*.*

(a) $\frac{x+1}{x^2+x-7}$

(b) $\frac{x^4-3x+1}{x^2-x}$

(c) $\frac{x^3+5x^2+2x+7}{x^3+x}$

(d) $\frac{x^3+8}{x^4+2x^2+4}$

(e) $\frac{x^6+5x^5+11x^4+7x^3+x^2-1}{x^2-1}$

5.9 *Faça o estudo de sinal das funções do Problema 5.8*

5.10 *Dada a função* $f(x) = \frac{\sqrt{x^3+x^2-2x}}{x-1}$*, determine*

(a) *seu domínio;*

(b) *suas raízes (se existirem);*

(c) *seu estudo de sinal.*

5.11 *Dada a função* $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$*, determine*

(a) *seu domínio;*

(b) *suas raízes (se existirem);*

(c) *seu estudo de sinal.*

5.12 *Dada a função* $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x-6}{x^2-x-6}}$*, determine*

(a) *seu domínio;*

(b) *suas raízes (se existirem);*

(c) *seu estudo de sinal.*

5.13 *Determine as constantes* A *e* B *que sastifazem a igualdade*

$$\frac{7x+14}{x^2+x-12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4}$$

5.14 *Determine as constantes* A*,* B *e* C *que sastifazem a igualdade*

$$\frac{19}{x^3+x^2-14x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4x-2}$$

5.6 Problemas Teóricos

5.1 *O estudo de sinal de uma função quadrática pode ser imediatamente determinado a partir do valor de seu discriminante e do sinal do coeficiente do termo quadrático. Faça um quadro resumo ilustrando as seis possibilidades de estudo de sinal para tais funções.*

5.2 *Podemos afirmar que* $\frac{x^2+2x-3}{x-1} = x+3$*? Explique.*

5.7 Respostas dos Problemas Propostos - Capítulo 5

- 5.1 (página 39)
  - raízes: $x = -1$ e $x = 6$;
  - estudo de sinal
    * a função é positiva em $\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ ou } x > 6\}$;
    * a função é negativa em $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 6\}$.
- 5.2 (página 39)
  - raízes: $x = 0$ e $x = 4$;
  - estudo de sinal
    * a função é positiva em $\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 4\}$;
    * a função é negativa em $\{x \in \mathbb{R} | x < 0 \text{ ou } x > 4\}$.
- 5.3 (página 39)
  - raízes: $x = 2$ (dupla);
  - estudo de sinal
    * a função é positiva em $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$;
    * a função nunca é negativa.
- 5.4 (página 39)
  - raízes: não existe raiz real (as raízes são $x = 2 \pm 3i$);
  - estudo de sinal: a função nunca é negativa $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- 5.5 (página 39)
  - raízes: $x = -5$, $x = 4$ e $x = 7$;
  - estudo de sinal
    * a função é positiva em $\{x \in \mathbb{R} | -5 < x < 4 \text{ ou } x > 7\}$;
    * a função é negativa em $\{x \in \mathbb{R} | x < -5 \text{ ou } 4 < x < 7\}$.
- 5.6 (página 39)
  - raízes: $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ e $x = 3$;
  - estudo de sinal
    * a função é positiva em $\{x \in \mathbb{R} | x < -3 \text{ ou } -2 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$;
    * a função é negativa em $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x < -2 \text{ ou } 2 < x < 3\}$.
- 5.7 (página 39)
  (a) domínio: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$;
  (b) raízes: $x = -1$ e $x = 4$;
  (c) estudo de sinal.
    - a função é positiva em $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 2 \text{ ou } x > 4\}$;
    - a função é negativa em $\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$.
- 5.8 (página 40)
  (a) própria
  (b) imprópria $\frac{x^4-3x+1}{x^2-x} = x^2 + x + 1 + \frac{-2x+1}{x^2-x}$
  (c) imprópria $\frac{x^3+5x^2+2x+7}{x^3+x} = 1 + \frac{5x^2+x+7}{x^3+x}$
  (d) própria
  (e) imprópria $\frac{x^6+5x^5+11x^4+7x^3+x^2-1}{x^2-1} = x^4+5x^3+12x^2+12x+13+\frac{12x+12}{x^2-1}$
- 5.10 (página 40)
  (a) domínio: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$;
  (b) raíz: $x = -2$ e $x = 0$.
- 5.11 (página 40)
  (a) domínio: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -3 \text{ ou } x > 5\}$;
  (b) raíz: $x = -3$.
- 5.12 (página 40)
  (a) domínio: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -3 \text{ ou } -2 < x \leq 2 \text{ ou } x > 3\}$;
  (b) raíz: $x = -3$ e $x = 2$.
- 5.13 (página 40) $A = 5$ e $B = 2$
- 5.14 (página 40) $A = 1$, $B = -1$ e $C = -7$

Capítulo 6

Funções Polinomiais

6.1 Definição

Uma função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função da forma

$$y = f(x) = a_n x^n + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0;$$

onde:

- n é o grau do polinômio;
- $a_n, \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$, chamados coeficientes do polinômio, são constantes ($a_n \neq 0$);
- x é a variável independente. O domínio de toda função polinomial é $\mathbb{R}$;
- $y = f(x)$ é a variável dependente.

Exemplo 6.1 *$y = 4x^3 - 2x^2 + 1$ é um polinômio de grau 3; seus coeficientes são 4, -2, 0 e 1.*

6.2 Resultados Importantes

Identidade de Polinômios

Dois polinômios são ditos idênticos se os coeficientes das parcelas de mesma potência são iguais.

Exemplo 6.2 *Determine os valores de m, n e p para que os polinômios*

$$P(x) = (m+n)x^2 + 3nx - 4 \quad e \quad Q(x) = 2mx^2 - 6x + 4p$$

sejam idênticos.

Solução: comparando-se as parcelas de mesma potência temos o sistema

$$\begin{cases} m + n &= 2m \\ 3n &= -6 \\ 4p &= -4 \end{cases}$$

cuja solução é $m = -2$, $n = -2$ e $p = -1$ (verifique!).

Polinômio Identicamente Nulo

O polinômio identicamente nulo é aquele no qual todos os coeficientes são nulos, ou seja,

$$y = f(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Qual o grau de um polinômio identicamente nulo? o que você quiser (sinistro não?).

Teorema do Resto

A divisão do polinômio P pelo fator linear $(x - r)$ é igual a $P(r)$.

Exemplo 6.3 *Determine o valor de m de modo que a divisão do polinômio $f(x) = (m - 4)x^3 - mx^2 - 3$ por $g(x) = x - 2$ dê resto 5.*

Solução: pelo Teorema do Resto devemos ter $f(2) = 5$; logo

$$\begin{aligned} f(2) = 8(m-4) - 4m - 3 &= 5 \\ 4m &= 40 \\ m &= 10. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Resto observamos que se r é uma raiz de um polinômio P, isto é, se $P(r) = 0$, então P é divisível por $(x - r)$ (este resultado é conhecido como Teorema de D'Alembert). Generalizando este resultado, se P é divisível pelos fatores lineares $(x-r_1)$, $(x - r_2)$,..., $(x - r_n)$, então P também é divisível pelo produto

$$(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n);$$

onde os números $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são todos raízes de P.

Teorema Fundamental da Álgebra - TFA

Todo polinômio de grau n possui n raízes. No TFA devemos considerar:

- a existência de raízes complexas;
- a existência de raízes múltiplas (repetidas).

Forma Fatorada de um Polinômio

A importância do TFA é que ele garante que todo polinômio $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, de grau n, pode ser escrito na forma fatorada

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)$$

onde os números $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são suas raízes (mais uma vez: podem existir raízes complexas e/ou múltiplas). Evidentemente que para escrevermos um polinômio na forma fatorada devemos inicialmente determinar suas raízes; para polinômios de grau maior que 2 isto nem sempre é uma tarefa simples[1].

[1] Visite o site www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html pra uma discussão sobre a determinação exata das raízes de polinômios cúbicos (Método de Tartaglia) e quárticos (Método de Ferrari) por métodos algébricos (métodos que envolvem apenas adição, subtração multiplicação, divisão e raízes de expressões nos coeficientes do polinômio).

Exemplo 6.4 *As raízes do polinômio* $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ *são* $x = 0$, $x = 1$ *e* $x = 2$ *(verifique). Logo sua forma fatorada é*

$$P(x) = (x - 0)(x - 1)(x - 2) = x(x - 1)(x - 2).$$

Exemplo 6.5 *As raízes do polinômio* $P(x) = x^4 + 3x^3 - 25x^2 - 39x + 180$ *são* $x = -5$, $x = -4$, $x = 3$ *e* $x = 3$ *(verifique). Logo sua forma fatorada é (observe que 3 é uma raiz dupla)*

$$P(x) = (x + 5)(x + 4)(x - 3)(x - 3) = (x + 5)(x + 4)(x - 3)^2.$$

6.3 Problemas Propostos

6.1 *Determine todos os valores de* k *para que o polinômio*

$$P(x) = (k^2 - k - 6)x^3 - (k - 3)x^2 + kx - 2$$

(a) seja de grau 1; *(b) seja de grau 2.*

6.2 (Mack-SP) *Para quais valores de* m *o polinômio* $P(x) = (m-4)x^3 + (m^2-16)x^2 + (m + 4)x + 4$ *é de grau 2?*

6.3 *Dados* $A(x) = x^2 + 3x + 1$, $B(x) = -2x^2 + x - 1$ *e* $C(x) = x^3 - x + 1$, *determine:*

(a) $P(x) = (2A + B)^2 - 4C$; *(b)* $Q(x) = (B - A)^2 - 2(B + C)$.

6.4 (FGV-SP) *Sabe-se que em um polinômio* P *do* 3^o *grau o coeficiente de* x^3 *é 1, duas de suas raízes são 1 e 2 e que* $P(3) = 30$. *Determine* $P(-1)$.

6.5 (Fuvest-SP) *Sabe-se que um polinômio* $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *tem as seguintes propriedades:* $P(1) = 0$ *e* $P(-x) + P(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Determine* $P(2)$.

6.6 *Determine as constantes* A, B *e* C *na identidade*

$$A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)) = 1.$$

6.7 *Determine as constantes* α, β, γ *e* δ *para que os polinômios* $P(x) = \alpha(x + \gamma)^3 + \beta(x + \delta)$ *e* $Q(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$ *sejam idênticos.*

6.8 (PUC-SP) *Determine as constantes* m, n *e* p *para que os polinômios* $P(x) = (m + n + p)x^4 - (p + 1)x^3 + mx^2 + (n - p)x + n$ *e* $Q(x) = 2mx^3 + (2p + 7)x^2 + 5mx + 2m$ *sejam idênticos.*

6.9 *Determine* m *e* n *para que o polinômio* $f(x) = x^3 + 12x^2 + mx + n$ *seja um cubo perfeito*[2].

6.10 *Determine o quociente* Q *e o resto* R *da divisão do polinômio* $f(x) = x^3 - 7x^2 - x + 8$ *pelo polinômio* $g(x) = x^2 - 4$.

[2] Isto é, para que f seja da forma $f(x) = (ax + b)^3$

6.11 *Em uma divisão de polinômios, o divisor é* $Q(x) = x^3 - x^2 + 3$, *o quociente é* $q(x) = x + 2$ *e o resto é* $R(x) = x^2 - 9$. *Determine o dividendo.*

6.12 *Em uma divisão de polinômios, o dividendo é* $P(x) = x^4 - 2x^2 + x - 7$, *o quociente é* $q(x) = x^2 + x - 1$ *e o resto é* $R(x) = -7$. *Determine o divisor.*

6.13 *Determine as constantes* α *e* β *para que o polinômio* $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x$ *seja divisível pelo polinômio* $Q(x) = x^2 + 1$.

6.14 *Determine o valor de* m *para que o polinômio* $P(x) = (m^2 - 1)x^2 + 2mx - 1$ *seja divisível pelo polinômio* $Q(x) = 2x - 1$.

6.15 (ITA-SP) *Um polinômio* P *divido por* $x - 1$ *dá resto* 3. *O quociente desta divisão é então dividido por* $x - 2$, *obtendo-se resto* 2. *Determine o resto da divisão de* P *por* $(x - 1)(x - 2)$.

6.16 *Sabe-se que o polinômio* $P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ *é divisível pelo fator linear* $x + 2$. *Determine todas as raízes de* P *e reescreva-o na forma fatorada.*

6.17 *Dado a função polinomial* $P(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ *determine suas raízes e reescreva-a na forma fatorada.*

6.18 *Sabendo-se que* 2 *é uma raiz dupla da função polinomial* $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x$, *determine suas outras* 3 *raízes e reescreva-a na forma fatorada.*

6.19 (ESAN-SP) *Seja* $P(x) = Q(x) + x^2 + x + 1$. *Sabendo-se que* 2 *é raiz de* P *e* 1 *é raiz de* Q *determine* $P(1) - Q(2)$.

6.20 (UFMG) *Os polinômios* $P(x) = px^2 + q(x) - 4$ *e* $Q(x) = x^2 + px + q$ *são tais que* $P(x + 1) = Q(2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Determine* p *e* q.

6.21 (UFES) *Seja* f *é um polinômio tal que a soma de seus coeficientes é zero. Determine f(1).*

6.22 (ITA-SP) *Sejam* a, b *e* c *números reais que nesta ordem formam uma progressão aritmética de soma* 12. *Sabendo-se que os restos das divisões de* $P(x) = x^{10} + 8x^8 + ax^5 + bx^3 + cx$ *por* $x - 2$ *e* $x + 2$ *são iguais, determine a razão da progessão aritmética.*

6.4 Problemas Teóricos

6.1 *Para todo* $n \in \mathbb{N}^*$ *a expressão* $(x+4)^n + (x+3)^{2n} - 1$ *define formalmente um polinômio em* x. *Mostre que qualquer polinômio assim obtido é divisível pelo produto* $(x + 3)(x + 4)$.

6.5 Respostas dos Problemas Propostos - Capítulo 6

- 6.1 (página 44)
  (a) $k = 3$;
  (b) $k = -2$.
- 6.2 (página 44) para nenhum m.
- 6.3 (página 44)
  (a) $P(x) = -4x^3 + 49x^2 + 18x - 3$;
  (b) $Q(x) = 9x^4 + 10x^3 + 20x^2 + 8x + 4$.
- 6.4 (página 44) $P(-1) = 66$.
- 6.5 (página 44) $P(2) = 6$.
- 6.6 (página 44) $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$.
- 6.7 (página 44) $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = \delta = 2$.
- 6.8 (página 44) $m = 1$, $n = 2$ e $p = -3$.
- 6.9 (página 44) $m = 48$ e $n = 64$.
- 6.10 (página 44) $Q(x) = x - 7$ e $R(x) = 3x - 20$.
- 6.11 (página 45) $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 3$
- 6.12 (página 45) $Q(x) = x^2 - x$.
- 6.13 (página 45) $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.
- 6.14 (página 45) $m = -5$ ou $m = 1$
- 6.15 (página 45) $2x + 1$
- 6.16 (página 45) $x = -3$, $x = -2$, $x = 3$; $P(x) = (x+3)(x+2)(x-3)$.
- 6.17 (página 45) $x = \pm 3$ e $x = \pm i$; $P(x) = (x+3)(x-3)(x+i)(x-i)$.
- 6.18 (página 45) $x = 0$ (raiz simples), $x = -1$ (raiz dupla); $P(x) = x(x+1)^2(x-2)^2$.
- 6.19 (página 45) $P(1) - Q(2) = 10$
- 6.20 (página 45) $p = 4$ e $q = 0$.
- 6.21 (página 45) $f(1) = 0$.
- 6.22 (página 45) $\frac{28}{5}$

Capítulo 7

Exponenciais

7.1 Propriedades das potências

Dados $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, denota-se por b^n o produto de b por si mesmo n vezes, isto é:

$$b^n = b \cdot b \cdot b \cdots b \text{ } (n \text{ fatores}). \tag{7.1}$$

Em (7.1) a constante b é denominada base da potência e n seu expoente. Como conseqüências imediatas de (7.1) temos as seguintes propriedades para as potências $(m, n \in \mathbb{N})$:

(i) $b^m b^n = b^{m+n}$

(ii) $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$

(iii) $(b^m)^n = b^{mn}$

(iv) $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

(v) $b^0 = 1$, se $b \neq 0$

(vi) $0^n = 0$, se $n \neq 0$

(vii) $0^0 \quad \nexists$

Além disto, definimos expoentes racionais (fracionários) como

$$b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m},$$

onde fica subententido que m/n é uma fração irredutível e que a raiz n-ésima de b^m exista. A validade de (7.1) quando n é um número irracional é bem mais difícil de se estabelecer. Por exemplo, qual o significado de $3^{\sqrt{2}}$? Apesar desse incoveniente, admitiremos, sem provas, que tanto (7.1) como as propriedades listadas continuam válidas para expoentes reais quaisquer.

Para a desigualdade $b^x > b^y$ observamos que:

(i) se $b > 1$ então $x > y$;

(ii) se $0 < b < 1$ então $x < y$.

7.2 Notação Científica

Na notação científica, qualquer número racional pode ser escrito como o produto de um número x, $1 \leq x < 10$, multiplicado por uma potência de 10 adequada. Por exemplo:

- $0,02 = 2 \cdot 10^{-2}$
- $5.300 = 5,3 \cdot 10^{3}$
- $10.000 = 1 \cdot 10^{4}$
- $0,00083 = 8,3 \cdot 10^{-4}$

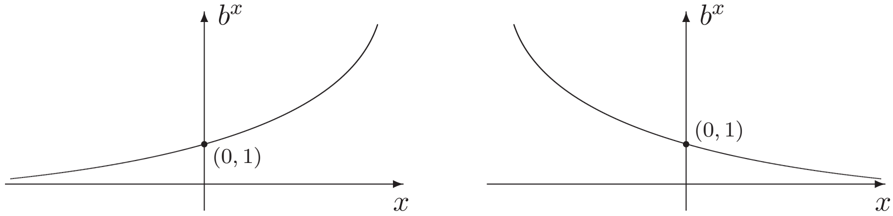
7.3 Funções Exponenciais

Uma função exponencial é uma função da forma

$$f(x) = A \cdot b^{kx} \ , \tag{7.2}$$

em que A e k são constantes reais quaisquer e a base b é qualquer real positivo diferente de 1 ($b \in \mathbb{R}_*^+$ e $b \neq 1$). O leitor deve ficar atento para distinguir função potência, da forma x^a (a variável está na base), de função exponencial, da forma b^x (a variável está no expoente).

Em (7.2), quando $A > 0$ e $k > 0$, se $b > 1$ então a função exponencial é crescente - Figura 7.1(a); se $0 < b < 1$ a função exponencial é decrescente - Figura 7.1(b).



(a) Base $b > 1$ (b) Base $0 < b < 1$

Figura 7.1: Gráficos das funções exponenciais

Juros compostos

Se uma quantia de capital C é capitalizada periodicamente a uma taxa de juros j, pode-se mostrar[1] que o montante de capital M após t períodos é dado pela função exponencial

$$M(t) = C\left(1 + \frac{j}{100}\right)^t . \tag{7.3}$$

7.4 Problemas Propostos

7.1 *Escreva a expressão*

$$\sqrt{\frac{x}{\sqrt[3]{x^4}} \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt{x^7}}}$$

na forma de expoente fracionário.

7.2 *Sabendo-se que* $A = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$ *e* $B = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$, *determine* $A^2 + B^2$.

[1]Veja o Problema 7.14.

7.3 *Determine o valor da expressão* $2x^0 + x^{\frac{1}{3}} + 24x^{-\frac{1}{2}}$ *para* $x = 64$.

7.4 *Simplifique a expressão*

$$\frac{2^{n+4} + 2^{n+2} + 2^{n-1}}{2^{n-2} + 2^{n-1}}.$$

7.5 *Resolva as equações exponenciais*

(a) $3^{x^2+1} = 243$;

(b) $27^x = \sqrt{3}$;

(c) $(0.5)^{x^2+x-12} = 1$;

(d) $8^{x-2} = 8\sqrt{2}$;

(e) $2^x 3^x = 216$;

(f) $4^{x+2} + 4^{x-1} - 4^{x+1} + 4^x = 212$;

(g) $16^x 4^{x+3} - 8^{x+2} = 0$;

(h) $2^{8x} - 4 \cdot 2^{4x} - 32 = 0$;

7.6 *[ITA-SP] Resolva a equação* $4^{x^2} - 5 \cdot 2^{x^2} + 4 = 0$.

7.7 *Resolva as inequações exponenciais*

(a) $2^{x+2} + 2^{x-1} > 3^{x-1} + 3^x$;

(b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{x-1}{x-2}} \geq 8^{\frac{x-1}{x}}$;

(c) $2^x - 3 > -2^{2-1}$;

7.8 *Para cada produto indicado, escreva os fatores em notação científica, determine o valor do produto e expresse-o em notação científica*

(a) $0,00002 \cdot 12300$

(b) $102400 \cdot 0,0005$

(c) $0,00025 \cdot 1200000 \cdot 1300$

(d) $0,004 \cdot 0,000001 \cdot 240000$

7.9 *Em uma colônia de bactérias, o número* N *de indivíduos em função do tempo* t *(em dias) é dado pela função exponencial* $N(t) = M2^{kt}$, *onde* M *e* k *são constantes.*

(a) Determine M *e* k *sabendo-se que a população inicial (no tempo* $t = 0$*) é de* 100 *bactérias e que esta população se quadruplicou após um dia.*

(b) Determine o número de bactérias presentes na colônia após dois dias.

(c) Determine o número de bactérias presentes na colônia após cinco dias.

(d) Esboce o gráfico $N \times t$ *no intervalo* $0 \leq t \leq 5$.

7.10 *[Unicamp-SP] Suponha que o número* P *de indivíduos de uma dada população em função do tempo* t, *em anos, seja dado pela função exponencial* $P(t) = P_o \cdot 2^{-bt}$, *em que* P_o *e* b *são constantes.*

(a) Determine P_o *e* b *sabendo-se que a população inicial (no tempo* $t = 0$*) é de* 1024 *indivíduos e que se reduziu à metade após* 10 *anos.*

(b) Qual o tempo mínimo para que a população se reduza à 25% *da população inicial?*

(c) *Qual o tempo mínimo para que a população se reduza à* $12,5\%$ *da população inicial?*

(d) *Esboce o gráfico* $P \times t$ *no intervalo* $0 \leq t \leq 40$.

7.11 *Em uma cultura de bactérias, estima-se que após t dias a população P seja dada por*

$$P(t) = A \cdot \left(1 + 2^{\frac{t}{4}}\right) \ ,$$

em que A é uma constante positiva. Sabendo-se que a população inicial da cultura é de 20.000 *indivíduos, determine em quantos dias a população de bactérias atingirá 90.000 habitantes.*

7.12 *Na ausência de predadores, restrições de espaço e restrições de alimentos, as populações de topos os tipos de seres vivos, de bactérias a mamíferos de grande porte, tendem a crescer exponencialmente. Como exemplo, considere uma população de microorganismos, inicialmente com* 1.000 *indivíduos, e que triplica a cada* 20 *minutos.*

(a) *Qual o tamanho desta população após* 1 *hora? e após* 2 *horas?*

(b) *Determine uma função que determine o tamanho da população de microorganismos após t horas.*

7.13 *Se um raio de luz de intensidade k, em* lux/m^2, *é projetado verticalmente para baixo na água, então a intensidade luminosa I a uma profundidade de h metros é dada por*

$$I(h) = k3^{\alpha t} \ [=] \ lux/m^2,$$

onde k e α *são constantes.*

(a) *Determine k e* α *sabendo-se que a intensidade luminosa é de* 12 lux/m^2 *na superfície e de* 4 lux/m^2 *a um metro de profundidade;*

(b) *determine a intensidade luminosa a 3 metros de profundidade.*

7.5 Problemas Suplementares

7.14 *Suponha que uma quantia de capital C é capitalizada periodicamente a uma taxa de juros j. Use indução matemática para mostrar que o montante de capital M após n períodos é dado pela função exponencial*

$$M(n) = C\left(1 + \frac{j}{100}\right)^n .$$

7.6 Respostas dos Problemas Propostos - Capítulo 7

- 7.1 (página 48) $x^{-15/46}$
- 7.2 (página 48) $\frac{3^{2x}+3^{-2x}}{2}$
- 7.4 (página 49) 82/3
- 7.5 (página 49)

(a) $x = \pm 2$

(b) $x = 5/3$

(c) $x = -4$ ou $x = 3$

(d) $x = 19/6$

(e) $x = 3$

(f) $x = 2$

(g) $x = 0$

(h) $x = 3/4$

- 7.7 (página 49)

(a) $x < 3$

(b) $0 < x \leq 1$ ou $12/7 \leq x2$

(c) $x > 0$

- 7.9 (página 49)

(a) $M = 100$ e $k = 2$

(b) $N(5) = 102.400$

- Problema 7.13 (página 50)

(a) $K = 12$ e $\alpha = -1$

(b) $I(3) = 12/27$

Capítulo 8

Logaritmos

8.1 Definição de logaritmo

Definimos aqui o logaritmo como o inverso da exponencial, no seguinte sentido:

$$\log_b(a) = c \iff b^c = a \tag{8.1}$$

Em (8.1) utilizamos a seguinte nomenclatura

- b é a base do logaritmo;
- a é o logaritmando;
- c é o logaritmo.

Condição de existência de $\log_b(a)$

Como na exponencial $b^x = a$ a base satisfaz a condição $b > 0$ e $b \neq 1$, temos que $a > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Assim, para $\log_b(a)$ também devemos ter:

- $b > 0$ e $b \neq 1$;
- $a > 0$, isto é, **só existe logaritmo de números positivos**.

Conseqüências da definição

Como conseqüências da definição (8.1), dados $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$, $b \neq 1$ e $n \in \mathbb{R}$, temos os seguintes resultados imediatos:

(i) $\log_b(1) = 0$, pois $b^0 = 1$;

(ii) $\log_b(b) = 1$, pois $b^1 = b$;

(iii) $\log_b(b^n) = n$, pois $b^n = b^n$;

(iv) $\log_b(a) = \log_b(c) \Rightarrow \ a = c$

(v) se $b > 1$, $\log_b(a) > \log_b(c) \Rightarrow \ a > c$

(vi) se $0 < b < 1$, $\log_b(a) > \log_b(c) \Rightarrow \ a < c$

Propriedades dos logaritmos

Também como conseqüência da definição (8.1), dados $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$, $b \neq 1$ e $n \in \mathbb{R}$, temos as seguintes propriedades para os logaritmos:

(i) o logaritmo do produto é a soma dos logaritmos:

$$\log_b(ac) = \log_b(a) + \log_b(c); \tag{8.2a}$$

(ii) o logaritmo do quociente é a diferença dos logaritmos:

$$\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b(a) - \log_b(c); \tag{8.2b}$$

(iii) o logaritmo da potência é o expoente vezes o logaritmo:

$$\log_b(a^n) = n \log_b(a); \tag{8.2c}$$

(iv) exponencial do logaritmo de mesma base:

$$a^{\log_a(b)} = b; \tag{8.2d}$$

(v) Mudança de base, em que $B \in \mathbb{R}_*^+$ e $B \neq 1$:

$$\log_b(a) = \frac{\log_B(a)}{\log_B(b)} \tag{8.2e}$$

Provamos aqui a propriedade (8.2a) e deixamos as provas das demais para o leitor[1]. Sejam

$$\log_b(ac) = x \quad \therefore \quad b^x = ac; \tag{8.3a}$$
$$\log_b(a) = y \quad \therefore \quad b^y = a; \tag{8.3b}$$
$$\log_b(c) = z \quad \therefore \quad a^z = c. \tag{8.3c}$$

Substituindo (8.3b) e (8.3c) em (8.3a) temos

$$a^x = bc = a^y a^z = a^{y+z} \quad \therefore \quad x = y + z \quad \therefore \quad \log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c).$$

Bases importantes

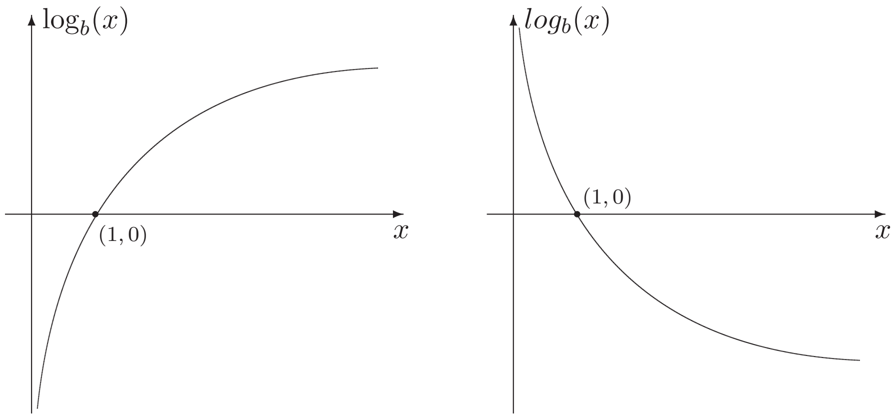
- Logaritmo comum: é o logaritmo de base 10, isto é, $\log_{10}(a)$. Para o logaritmo comum geralmente omitimos o valor da base, isto é, $\log_{10}(a) = \log(a)$.
- Logaritmo natural (ou neperiano): é o logaritmo de base e, isto é, $\log_e(a)$. O logaritmo natural geralmente é denotado por ln, isto é, $\log_e(a) = \ln(a)$.
- Outro logaritmo importante é o logaritmo de base 2, isto é, $\log_2(a)$.

[1] Veja Problema 8.20

Historicamente os logaritmos mais utilizados eram o comum e o natural. Com o advento dos computadores digitais o sistema de numeração binária tornou-se amplamente utilizado, e por conseqüência, também o logaritmo de base 2.

Evidentemente, conhecendo-se os valores dos logaritmos em uma base, podemos determiná-los em qualquer outra base através da equação (8.2e). Se o leitor possuir uma calculadora científica poderá verificar que ela calcula logaritmos apenas em algumas bases; geralmente apenas nas 3 aqui citadas.

8.2 A função logarítmica



(a) Base $b > 1$ (b) Base $0 < b < 1$

Figura 8.1: Gráficos das funções logarítmicas

Dado $b \in \mathbb{R}_*^+$ e $b \neq 1$ definimos a função logarítmica $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = f(x) = \log_b(x)$. Se $a > 1$ então a função logarítmica é crescente, Figura 8.1(a). Se $0 < b < 1$ então a função logarítmica é decrescente, Figura 8.1(b).

É importante ressaltar que, como só existe logaritmo de número positivo, para determinarmos o domínio de uma função logarítmica devemos obrigar o logaritmando ser positivo.

Exemplo 8.1 *Para a função logarítmica* $f(x) = \log(4 - x^2)$ *devemos ter* $4 - x^2 > 0 \therefore -2 < x < 2$. *Assim o domínio é* $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 < x < 2\right\}$.

8.3 Problemas Propostos

8.1 *Calcule os logaritmos*

(a) $\log_2(32)$

(b) $\log_5(625)$

(c) $\log_9(243)$

(d) $\log_5(0,0016)$

(e) $\log_{10}(0,00001)$

(f) $\log_{1/3}(81)$

(g) $\log_{\sqrt{8}}(0.125)$

(h) $\log_{2\sqrt{2}}(256)$

(i) $\log_{2/\sqrt{3}}(9/16)$

8.2 *As igualdades a seguir são verdadeiras? Sob quais condições?*

(a) $\log\left(\frac{ab}{c^2}\right) = \frac{\log(a)+\log(b)}{2\cdot\log(c)}$

(b) $\log(a) = -\log\left(\frac{1}{a}\right)$

8.3 *A igualdade* $\log_q(p) = \frac{1}{\log_p(q)}$ *é verdadeira? Sob quais condiquais condições?*

8.4 *Avalie as expressões.*

(a) $\log_5(1) + 4^{\log_4(5)} + \log_3(\log_5(125))$

(b) $49^{\log_7(2)} - 25^{\log_5(3)}$

8.5 *Sabendo-se que* $\log(a) = 2$, $\log(b) = 3$ *e* $\log(c) = -6$, *calcule*

(a) $\log(ab)$

(b) $\log(abc)$

(c) $\log\left(\frac{ab}{c}\right)$

(d) $\log\left(\frac{a^3\sqrt{c}}{b^2}\right)$

(e) $\log\left(\frac{\sqrt[5]{ab}}{\sqrt{c}}\right)$

(f) $\log\left(\frac{\sqrt{a^2b^2}}{c^3}\right)$

8.6 *Sabendo-se que* $\log_2(3) = a$, *calcule (em função de a)*

(a) $\log_6(9)$

(b) $\log_{36}(64)$

8.7 *Sabendo-se que* $\log_a(x) = 2$, $\log_b(x) = 3$ *e* $\log_c(x) = 5$, *calcule*

(a) $\log_{ab}(x)$

(b) $\log_{abc}(x)$

(c) $\log_{\frac{ab}{c}}(x)$

8.8 *[UEPB] Sabendo-se que* $\log(x) = 8$, *determine o valor da expressão*

$$\log\sqrt{\frac{x^3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}}}$$

8.9 *[UFCE] Se* $\log_7(875) = a$, *determine* $\log_{25}245$.

8.10 *Resolva as equações logarítmicas*

(a) $\log_5(x^2+3) = \log_5(x+3)$

(b) $\log_2(14-5x) = 2$

(c) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3x-1) = -2$

(d) $[\log_8(x)]^2 - 3[\log_8(x)] + 2 = 0$

(e) $\log(3x^2+7) - \log(3x-2) = 1$

(f) $\log(x+1) + 2 = \log(4x^2-500)$

8.11 *Em um triângulo retângulo, sejam* A *a medida da hipotenusa e* B *e* C *as medidas dos catetos, tais que* $A \pm C \neq 1$ *e* $B \neq 1$. *Mostre que*

$$2\cdot\log_{A+C}(B)\cdot\log_{A-C}(B) = \log_{A+C}(B) + \log_{A-C}(B).$$

8.12 *Resolva as inequações logarítmicas* *(a)* $[\log(x)]^2 - \log(x) > 0$

(b) $\log(x^2 - 2x - 7) < 0$

(c) $2[\log(x)]^2 - \log(x) > 6$

(d) $\log_2\left[\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 2x + 1)\right] < 0$

8.13 *Determine o domínio e esboce o gráfico das funções dadas.*

(a) $f(x) = \log(x - 1)$

(b) $f(x) = \log(x^2 - 1)$

(c) $f(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)$

(d) $\log(\log(x))$

8.14 *Após o consumo de uma dose substancial de cerveja, a concentração C de álcool no sangue de uma mulher atinge $0,3$ mg/mm^3. Ao parar de beber, a concentração diminui com o tempo, e é dada pela função*

$$C(t) = 0,3 \cdot (0,5)^t \ ,$$

em que t é o tempo, em horas, após o instante em que a mulher parou de beber. Se a concentração máxima admitida na localidade é de $0,0375$ mg/mm^3, quanto tempo esta mulher deverá esperar para dirigir?

8.15 *Uma aplicação financeira é capitalizada a uma taxa de 50% a.a., isto é, 50% ao ano. Para um depósito inicial de R\$ 1.000,00, determine o tempo mínimo para que o montante da aplicação atinja R\$ 10.000,00.*
Dados: $log(2) = 0,30$ e $log(3) = 0,48$.

8.16 *A intensidade M de um terremoto medido na escala Richter é um número que varia de $M = 0$ (nenhum tremor) até $M = 8,9$ (maior terremoto conhecido). O valor de M é dado pela fórmula empírica*

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

onde E é a energia liberada no terremoto (em KWh - kilowatt-hora) e E_0 é uma constante que vale 7×10^{-3} KWh.

(a) Qual a energia liberada em um terremoto de grandeza $M = 6$?

(b) Uma cidade de cerca de 300.000 habitantes consome cerca de 3.5×10^6 KWh de energia elétrica por dia. Se a energia de um terremoto pudesse ser convertida em energia elétrica, quantos dias de fornecimento de energia para esta cidade obteríamos com a energia liberada em um terremoto de grandeza $M = 8$?

8.17 *O pH de uma solução salina é definido pela fórmula*

$$pH = -\log[H^+]$$

onde $[H^+]$ *é a concentração, em mols por litro, do íon Hidrogênio.*

(a) *Qual o pH da água pura, sabendo-se que sua concentração de* $[H^+]$ *vale* $1,00 \times 10^{-7}$*?*

(b) *Uma solução é dita ácida se sua concentração de* $[H^+]$ *é maior que a da água, e dita básica (ou alcalina) se sua concentração de* $[H^+]$ *é menor que a da água. Quais os valores de pH caracterizam as soluções ácidas? Quais os valores de pH caracterizam as soluções básicas?*

8.18 *[Vunesp-SP] O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às* $22:00$*. Às* $22:30$ *o médico da polícia chegou e imediatamente mediu a temperatura do cadáver, que era de* $32,5^oC$*. Uma hora mais tarde mediu a temperatura outra vez e encontrou* $31,5^oC$*. A temperatura do ambiente foi mantida constante a* $16,5^oC$*. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja de* $36,5^oC$ *e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do cadáver seja dada por*

$$D(t) = D_o \cdot 2^{-2\alpha t} \ ,$$

em que t é o tempo em horas, D_o *é a diferença da temperatura do cadáver com a do ambiente no instante* $t = 0$*,* $D(t)$ *é a diferença da temperatura do cadáver com a do ambiente em um instante t qualquer e* α *uma constante positiva. Determine o horário do assassinato.*

8.19 *No estudo da acústica é usual denotarmos por* I *a intensidade sonora (medida em watts por metro quadrado,* w/m^2 *) de uma fonte de som. Outra grandeza importante em acústica é a altura L do som, medida em decibéis, e dada por*

$$L = 10 \cdot log\Big(\frac{I}{I_o}\Big) \ ,$$

em que I *é a intensidade do som para a qual desejamos determinar a altura e a constante* $I_o = 10^{-12}\ w/m^2$ *é o valor mínimo de intensidade sonora para que o som seja perceptível pelo sistema auditivo humano (valor médio, obtido para uma freqüência de* 100 *hertz).*

(a) *Sabe-se que para o sistema auditivo humano a intensidade sonora máxima suportável (limiar de dor) é de* $100\ w/m^2$*. Determine a altura máxima audível pelo sistema auditivo humano.*

(b) *Qual a intensidade sonora, em uma agitada sala de aula, na qual a altura do som é de* 90 *decibéis.*

8.4 Problemas Suplmentares

8.20 *Use a definição* (8.1) *para provar as propriedades* (8.2b), (8.2c), (8.2d) *e* (8.2e).

8.21 *Se* $\log_b(x + \sqrt{x^2-1}) = a$*, mostre que* $x = \frac{1}{2}(b^a + b^{-a})$.

8.22 *Mostre que* $\log_b(x + \sqrt{x^2-1}) = -\log_b(x - \sqrt{x^2-1})$.

8.5 Respostas dos Problemas Propostos - Capítulo 8

- Problema 8.1 (página 54)

  (a) 5
  (b) 4
  (c) 5/2
  (d) -4
  (e) -5)
  (f) -4
  (g) -1)
  (h) 16/3
  (i) -4

- Problema 8.4 (página 55)

  (a) 6
  (b) -5

- Problema 8.5 (página 55)

  (a) 5
  (b) -1
  (c) 11
  (d) -3
  (e) 4
  (f) 23

- Problema 8.6 (página 55)

  (a) $\frac{2a}{1+a}$
  (b) $\frac{3}{1+a}$

- Problema 8.7 (página 55)

  (a) 6/5
  (b) 30/31
  (c) 30/19

- Problema 8.10 (página 55)

  (a) $x = 0$ e $x = 1$
  (b) $x = 2$
  (c) $x = -5$ e $x = 2$
  (d) $x = 8$ e $x = 64$
  (e) $x = 1$ e $x = 9$
  (f) $x = -5$ e $x = 30$

- Problema 8.12 (página 55)

  (a) $\left\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 10\right\}$
  (b) $\left\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \frac{1}{10\sqrt{10}} \quad \text{ou} \quad x > 100\right\}$
  (c) $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x \neq 1\right\}$

- Problema 8.16 (página 56)

  (a) 7×10^6 KWh
  (b) 2000 dias! (aproximadamente 5 anos e 6 meses)

- Problema 8.17 (página 57)

  (a) 7
  (b) ácidas: $0 < pH < 7$; básicas: $7 < pH < 14$

Capítulo 9

Trigonometria

9.1 Conceitos preliminares

O número π e o comprimento de uma circunferência

Dada uma circunferência de raio r, diâmetro $d = 2r$, o número π é definido como a razão do comprimento C da circunferência pelo seu diâmetro d, isto é,

$$\pi = \frac{C}{d} \quad \text{ou} \quad \pi = \frac{C}{2r}. \tag{9.1}$$

Pela definição do número π na equação (9.1) observamos que o comprimento da circunferência é dado por[1]

$$C = \pi\, d \quad \text{ou} \quad C = 2\,\pi\, r \tag{9.2}$$

Ângulos e suas medidas

Duas semi retas (dois segmentos de retas) com origem comum formam um ângulo plano. Neste texto designaremos os ângulos por letras gregas minúsculas. A Figura 9.1(a) mostra um ângulo α, onde os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são chamados lados do ângulo e o ponto A é o seu vértice. Duas retas (ou duas semi retas ou dois segmentos de retas) que se interceptam formam 4 ângulos planos - Figura 9.1(b). Neste caso é útil lembrar que os ângulos opostos pelo vértice têm mesma medida.

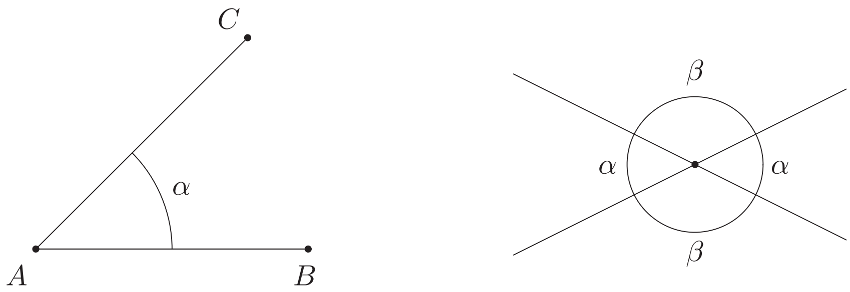
Existem 3 unidades para a medida de ângulos.

- Grado: 1 grado é um ângulo correspondente a $\frac{1}{400}$ de uma volta completa da circunferência. Conseqüentemente, a volta completa na circunferência compreende um ângulo de 400 grados - Figura 9.2(a).

- Grau: 1 grau, denotado 1^o, é um ângulo correspondente a $\frac{1}{360}$ de uma volta completa da circunferência. Conseqüentemente, a volta completa na circunferência compreende um ângulo de 360^o - Figura 9.2(b).

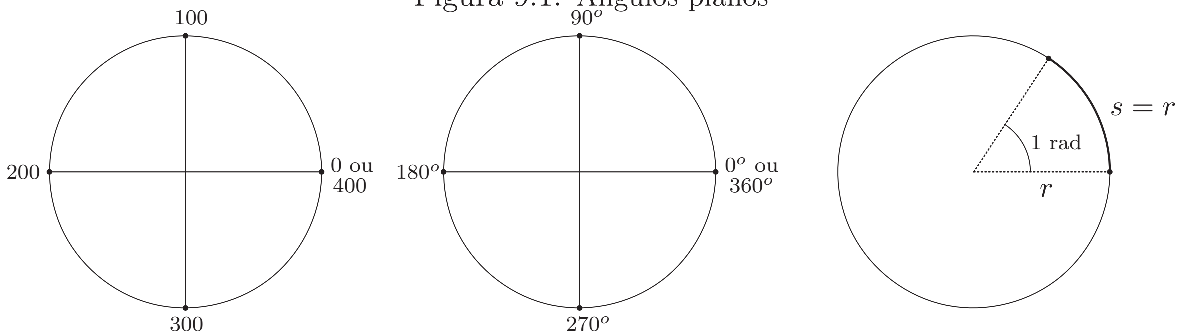
- Radiano: 1 radiano, denotado 1 rad, é um ângulo correspondente a um arco de mesmo comprimento do raio da circunferência - Figura 9.2(c).

[1] É útil observar que a equação (9.2) não é passível de demonstração; trata-se simplesmente de uma maneira de reescrever a definição do número π.



(a) Ângulo plano (b) 4 ângulos planos

Figura 9.1: Ângulos planos



(a) A definição de grado (b) A definição de grau (c) A definição de radiano

Figura 9.2: Medidas de ângulo

O comprimentro de um arco

Em uma circunferência de raio r a definição de radiano implica que um ângulo de 1 radiano compreende um arco de comprimento r. Logo um ângulo de θ radianos compreende um arco de comprimento s - Figura 9.3(a). O valor s é dado por

$$\frac{1 \text{ rad}}{r} = \frac{\theta \text{ rad}}{s} \quad \therefore \quad s = r\,\theta$$

Conversão grau-radiano

De modo análogo, um arco de comprimento r compreende um ângulo de 1 radiano. A circunferência completa, um arco de comprimento $2\,\pi\,r$, compreende um ângulo θ dado por

$$\frac{r}{1 \text{ rad}} = \frac{2\,\pi\,r}{\theta \text{ rad}} \quad \therefore \quad \theta = 2\,\pi \text{ rad}$$

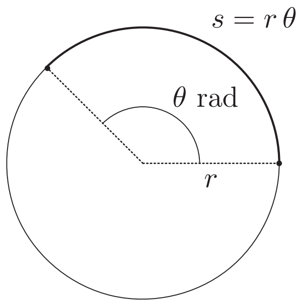
Em outras palavras, volta completa na circunferência corresponde a um ângulo de medida $2\,\pi$ radianos - Figura 9.3(b).

Assim, dado um ângulo θ radianos, sua medida x em graus é dada por

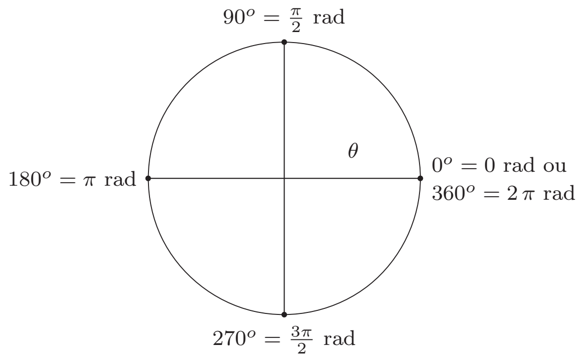
$$\frac{\pi \text{ rad}}{180^o} = \frac{\theta \text{ rad}}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{180}{\pi}\,\theta$$

Exemplo 9.1 *Determine a medida do ângulo $\frac{3}{4}\pi$ rad em graus.*

$$\frac{\pi\ rad}{180^o} = \frac{\frac{3}{4}\pi\ rad}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{180}{\pi}\,\frac{3}{4}\pi = 135^o$$



(a) Comprimento de arco



(b) Conversão grau-radiano

Figura 9.3: Comprimento de arco e a conversão grau-radiano

Exemplo 9.2 *Determine a medida do ângulo* 155^o *em radianos.*

$$\frac{\pi\ rad}{180^o} = \frac{x\ rad}{155^o} \quad \therefore \quad x = \frac{155}{180}\pi = \frac{31}{35}\pi\ rad$$

Classificação de triângulos

Triângulo é um polígono com 3 ângulos internos, logo 3 lados. Podemos classificá-los de duas maneiras:

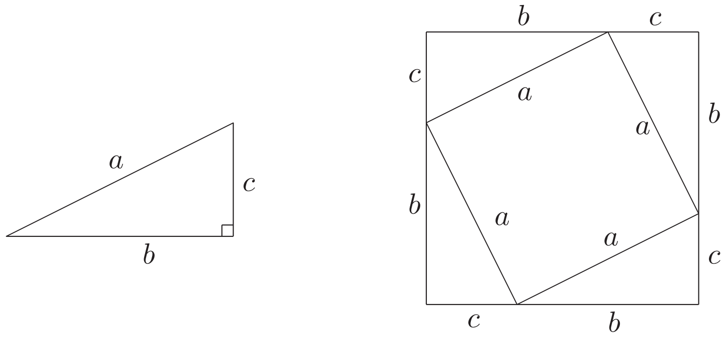
- quanto aos tamanhos dos lados:
  - equilátero - 3 lados de mesmo comprimento,
  - isósceles - 2 lados de mesmo comprimento,
  - escaleno - 3 lados de comprimentos diferentes;
- quanto às medidas dos ângulos:
  - acutângulo - 3 ângulos agudos (menores que 90^o graus),
  - retângulo - 1 ângulo reto (90^o graus),
  - obtusângulo - 1 ângulo obtuso (maior que 90^o graus).

9.2 Triângulo retângulo

9.2.1 Teorema de Pitágoras

Em um triângulo retângulo, Figura 9.4(a), os lados que formam o ângulo reto são denominados catetos e o lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa. Os comprimentos da hipotenusa e dos catetos estão relacionados pelo Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{9.3}$$



(a) Triângulo retângulo. (b) Teorema de Pitágoras.

Figura 9.4: Triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras.

Uma prova bastante simples do Teorema de Pitágoras pode ser obtida através da Figura 9.4(b): a área do quadrado externo é igual à soma da área do quadrado interno mais a área dos 4 triângulos retângulos, isto é:

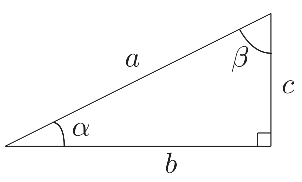
$$a^2 + 4\frac{bc}{2} = (b+c)^2 \therefore a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2 \therefore a^2 = b^2 + c^2.$$

9.2.2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Para cada ângulo agudo de um triângulo retângulo define-se 6 razões trigonométricas (conhecidas como seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante) da seguinte maneira

- seno $= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$
- cosseno $= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$
- tangente $= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$
- cotangente $= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$
- secante $= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$
- cossecante $= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$

A Figura 9.5 ilustra as 6 razões trigonométricas para os ângulos α e β de um triângulo retângulo.



seno:	$sen(\alpha) = \frac{c}{a}$	$sen(\beta) = \frac{b}{a}$
cosseno:	$cos(\alpha) = \frac{b}{a}$	$cos(\beta) = \frac{c}{a}$
tangente:	$tg(\alpha) = \frac{c}{b}$	$tg(\beta) = \frac{b}{c}$
cotangente:	$ctg(\alpha) = \frac{b}{c}$	$ctg(\beta) = \frac{c}{b}$
secante:	$sec(\alpha) = \frac{a}{b}$	$sec(\beta) = \frac{a}{c}$
cossecante:	$csc(\alpha) = \frac{a}{c}$	$csc(\beta) = \frac{a}{b}$

Figura 9.5: As razões trigonométricas.

Razões trigonométricas de alguns ângulos notáveis

Na Figura 9.6(a) traçamos a diagonal de um quadrado de lado a e então determinamos as razões trigonométricas para o ângulo de 45^o obtido:

$$cos(45^o) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad sen(45^o) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad tg(45^o) = \frac{a}{a} = 1.$$

Na Figura 9.6(b) traçamos a altura de um triângulo equilátero de lado a e então determinamos as razões trigonométricas para os ângulos de 30^o e 60^o obtidos:

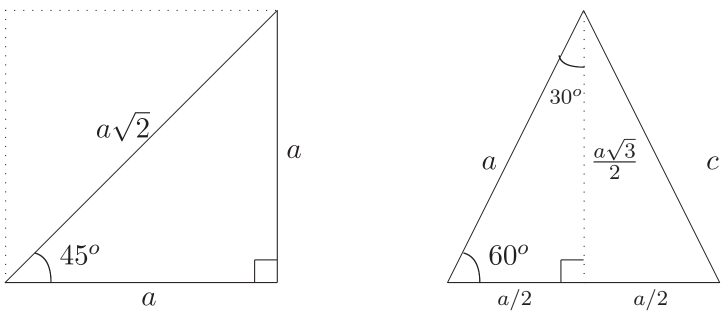
$$cos(30^o) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad sen(30^o) = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \quad , \quad tg(30^o) = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$cos(60^o) = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \quad , \quad sen(60^o) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad tg(60^o) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a/2} = \sqrt{3}.$$

A tabela 9.1 resume estes resutados.

ângulo	30^o	45^o	60^o
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 9.1: Valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos 30^o, 45^o e 60^o.



(a) Ângulo de 45^o. (b) Ângulos de 30^o e 60^o.

Figura 9.6: Ângulos notáveis.

9.3 Algumas identidades trigonométricas

Na Figura 9.5 temos que $b = a\,cos(\alpha)$ e $c = a\,sen(\alpha)$; obtemos então as seguintes identidades:

$$tg(\alpha) = \frac{c}{b} = \frac{a\,sen(\alpha)}{a\,cos(\alpha)} \;\therefore\; tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} \tag{9.4a}$$

$$cotg(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{a\,cos(\alpha)}{a\,sen(\alpha)} \;\therefore\; cotg(\alpha) = \frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)} \tag{9.4b}$$

$$sec(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{a\,cos(\alpha)} \;\therefore\; sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} \tag{9.4c}$$

$$csc(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\,sen(\alpha)} \;\therefore\; csc(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)} \tag{9.4d}$$

Usando o Teorema de Pitágoras obtemos

$$b^2 + c^2 = a^2 \;\therefore\; a^2\,cos^2(\alpha) + a^2\,sen^2(\alpha) = a^2 \;\therefore\; a^2\big[cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)\big] = a^2$$

donde

$$cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) = 1 \tag{9.4e}$$

A identidade (9.4e) é chamada de identidade fundamental: o quadrado do cosseno mais o quadrado do seno de qualquer ângulo é sempre igual a um. A partir da identidade fundamental obtemos outras duas importantes identidades:

$$\frac{cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \frac{1}{cos^2(\alpha)} \;\therefore\; 1 + \frac{sen^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \frac{1}{cos^2(\alpha)} \;\therefore\; 1 + tg^2(\alpha) = sec^2(\alpha) \tag{9.4f}$$

$$\frac{cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)} = \frac{1}{sen^2(\alpha)} \;\therefore\; \frac{cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)} + 1 = \frac{1}{sen^2(\alpha)} \;\therefore\; cotg^2(\alpha) + 1 = csc^2(\alpha) \tag{9.4g}$$

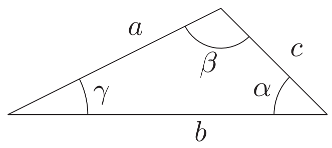
Exemplo 9.3 *Para um dado ângulo θ sabe-se que $cos(\theta) = \frac{1}{5}$. Determine as outras razões trigonométricas para θ.*

Da identidade fundamental obtemos

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + sen^2(\theta) = 1 \quad\therefore\quad sen^2(\theta) = 1 - \frac{1}{25} \quad\therefore\quad sen(\theta) = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Logo:

- *pela identidade* (9.4a)*:* $tg(\theta) = \frac{2\sqrt{6}/5}{1/5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}\,\frac{5}{1} = 2\sqrt{6}$;
- *pela identidade* (9.4b)*:* $cotg(\theta) = \frac{1/5}{2\sqrt{6}/5} = \frac{1}{5}\,\frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$;
- *pela identidade* (9.4c)*:* $sec(\theta) = \frac{1}{1/5} = 5$;
- *pela identidade* (9.4d)*:* $csc(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{6}/5} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$.



Para o ângulo α: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos(\alpha)$

Para o ângulo β: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos(\beta)$

Para o ângulo γ: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos(\gamma)$

Figura 9.7: A Lei dos Cossenos.

9.4 Triângulos quaisquer

9.4.1 A Lei dos Cossenos

Vimos que para triângulos retângulos as medidas dos lados estão relacionadas pelo Teorema de Pitágoras. Para triângulos quaisquer os comprimentos dos lados estão relacionados pela Lei dos Cossenos (Figura 9.7).

A demonstração da Lei dos Cossenos para o ângulo γ pode ser obtida a partir da Figura 9.8. No triângulo retângulo da esquerda temos

$$cos(\gamma) = \frac{x}{a} \therefore x = acos(\gamma) \tag{9.5a}$$

$$a^2 = x^2 + H^2 \therefore H^2 = a^2 - x^2. \tag{9.5b}$$

No triângulo retângulo da direita temos

$$c^2 = H^2 + (b-x)^2 = H^2 + b^2 - 2bx + x^2 \tag{9.5c}$$

Substituindo (9.5a) e (9.5b) em (9.5c) obtemos

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - x^2 + b^2 - 2ab\,cos(\gamma) + x^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\,cos(\gamma) \end{aligned}$$

que é a Lei dos Cossenos para o ângulo γ.

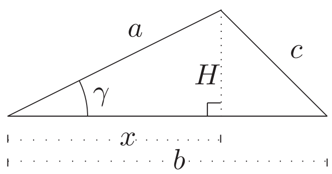
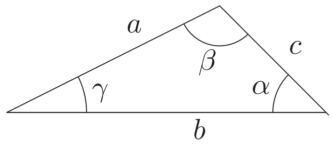


Figura 9.8: A demonstração da Lei dos Cossenos para o ângulo γ.

9.4.2 A Lei dos Senos

Outra relação entre os comprimentos dos lados e os ângulos de um triângulo qualquer é a Lei dos Senos (Figura 9.9), cuja demonstração fica a cargo do leitor (Problema Teórico 9.1).

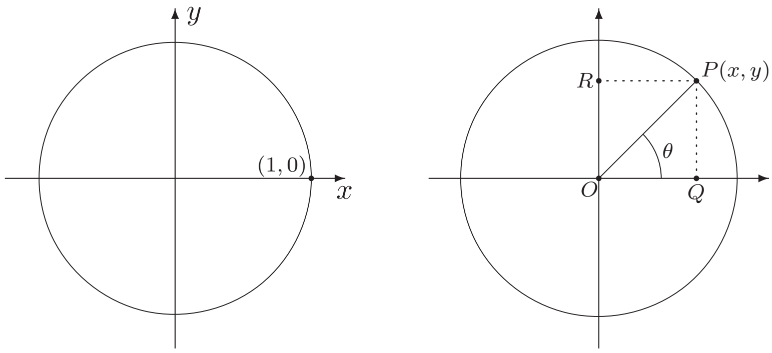


$$\frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\gamma)}{c}$$

Figura 9.9: A Lei dos Senos.

9.5 Círculo Trigonométrico e Funções Circulares

Círculo trigonométrico é o circulo[2] de raio unitário e centro na origem do sistema cartesiano - Figura 9.10(a).



(a) O circulo trigonométrico (b) Seno e cosseno

Figura 9.10: O seno e o cosseno no círculo trigonométrico

No triângulo OPQ da Figura 9.10(b) (lembrando que $\overline{OP} = 1$) observamos que

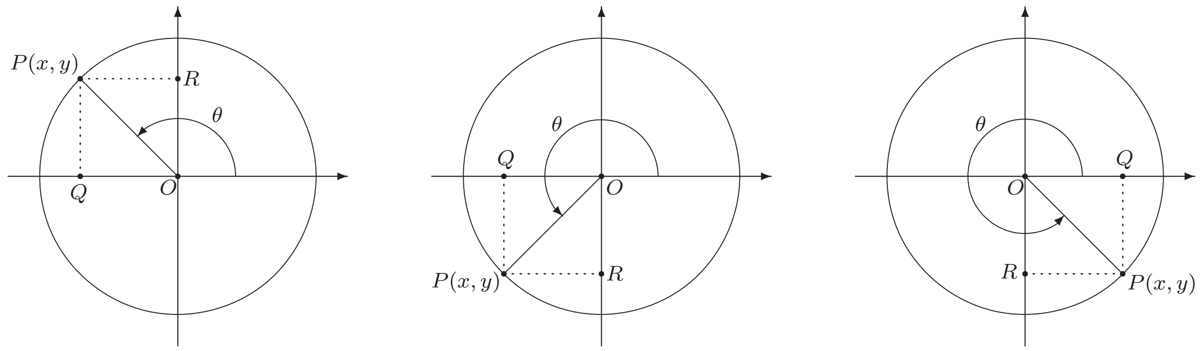
$$cos(\theta) = \overline{OQ}/\overline{OP} = x/1 = x \quad \text{e} \quad sen(\theta) = \overline{PQ}/\overline{OP} = \overline{OR}/\overline{OP} = y/1 = y,$$

de modo que as coordenadas cartesianas do ponto P são dadas por

$$P = (x, y) = \Big(cos(\theta), sen(\theta)\Big).$$

Raciocinando no sentido inverso, seja $P(x, y)$ um ponto qualquer sobre o círculo unitário e θ o ângulo correspondente, medido no sentido anti-horário a partir do semi-eixo positivo das abscissas. Definimos o cosseno deste ângulo como o valor da abscissa de P e seu seno como o valor da ordenada de P. Esta definição do seno e cosseno no círculo trigonométrico nos permite calcular os valores das razões trigonométricas para ângulos dados por qualquer número real, e não apenas para ângulos agudos como no caso de triângulos retângulos. A Figura 9.11 ilustra este raciocínio para ângulos no segundo, terceiro e quarto quadrantes.

[2]Um termo mais apropriado seria circunferência trigonométrica, mas o termo círculo trigonométrico é tradicionalmente utilizado na literatura e vamos mantê-lo.



(a) Ângulo no 2^o quadrante (b) Ângulo no 3^o quadrante (c) Ângulo no 4^o quadrante

Figura 9.11: $cos(\theta) = \overline{OQ} = x$ e $sen(\theta) = \overline{OR} = y$.

Sinal do seno e cosseno

- se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ então $sen(\theta) > 0$ e $cos(\theta) > 0$ - Figura 9.10(b);
- se $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ então $sen(\theta) > 0$ e $cos(\theta) < 0$ - Figura 9.11(a);
- se $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ então $sen(\theta) < 0$ e $cos(\theta) < 0$ - Figura 9.11(b);
- se $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ então $sen(\theta) < 0$ e $cos(\theta) > 0$ - Figura 9.11(c).

9.5.1 As funções circulares

A função seno

Seja x um ângulo variável no círculo trigonométrico. A cada valor de x associamos um único valor para seu seno, denotado $sen(x)$. Definimos então a função $f(x) = sen(x)$, cujo gráfico, chamado senóide, é mostrado na Figura 9.12.

A Figura 9.12 exibe duas propriedades importantes da função $sen(x)$:

- é periódica de período $T = 2\pi$; isto significa que suas imagens se repetem de 2π em 2π radianos, isto é, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ temos que $sen(x) = sen(x + 2\pi)$;
- é limitada entre -1 e 1, isto é, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ temos que $-1 \leq sen(x) \leq 1$.

A função cosseno

De modo análogo ao seno, seja x um ângulo variável no círculo trigonométrico. A cada valor de x associamos um único valor para seu cosseno, denotado $cos(x)$. Definimos então a função $f(x) = cos(x)$, cujo gráfico é mostrado na Figura 9.13.

A Figura 9.13 exibe duas propriedades importantes da função $cos(x)$:

- é periódica de período $T = 2\pi$; isto significa que suas imagens se repetem de 2π em 2π radianos, isto é, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ temos que $cos(x) = cos(x + 2\pi)$;
- é limitada entre -1 e 1, isto é, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ temos que $-1 \leq cos(x) \leq 1$.

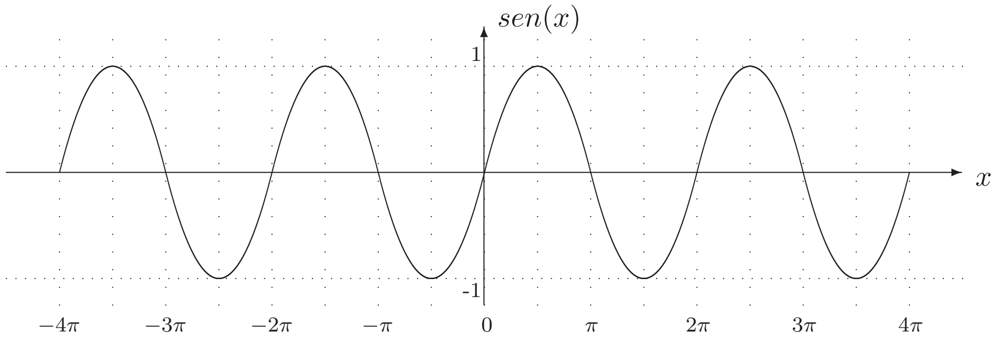


Figura 9.12: Senóide $sen(x)$

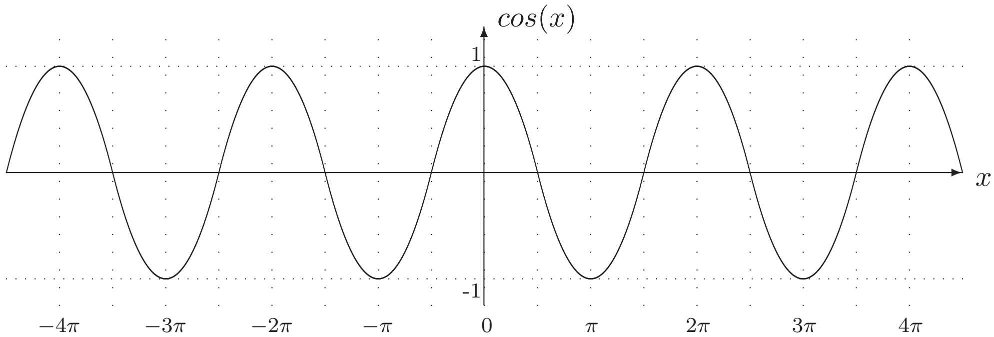


Figura 9.13: Senóide $cos(x)$

9.6 Mais identidades trigonométricas

Simetrias

As identidades de simetria estabelecem o efeito da substituição de α por $-\alpha$. Pela Figura 9.14 temos

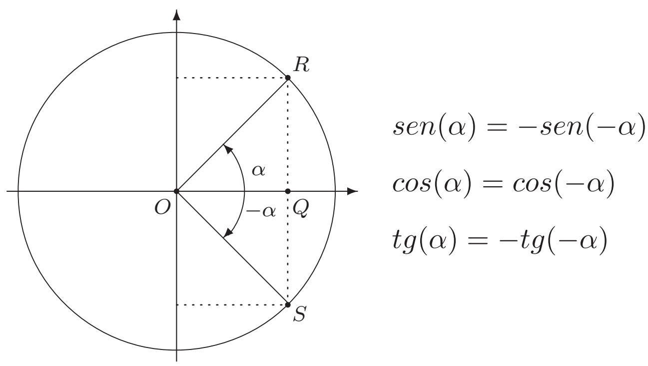


Figura 9.14: Simetrias do seno, cosseno e tangente.

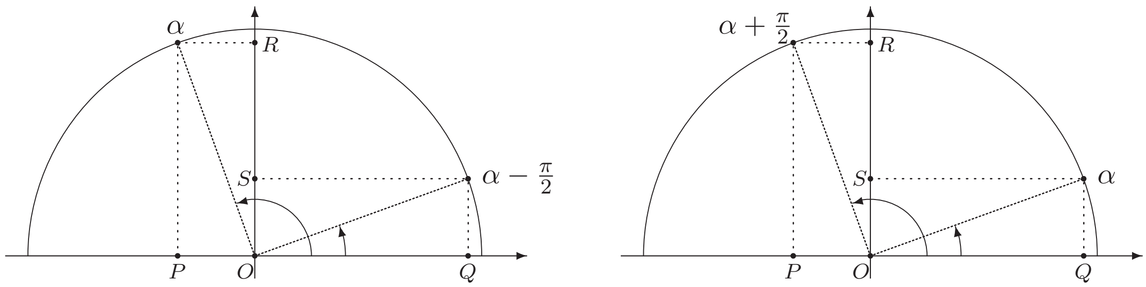
$$sen(\alpha) = \overline{QR} = -\overline{QS} = -sen(-\alpha) \quad \therefore \quad sen(\alpha) = -sen(-\alpha). \tag{9.6a}$$

$$cos(\alpha) = \overline{OQ} = cos(-\alpha) \quad \therefore \quad cos(\alpha) = cos(-\alpha). \tag{9.6b}$$

Estas identidades também podem ser facilmente observadas nas Figuras 9.12 e 9.13 respectivamente. Finalmente

$$tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{-sen(-\alpha)}{cos(-\alpha)} = -tg(-\alpha) \quad \therefore \quad tg(\alpha) = -tg(-\alpha). \tag{9.6c}$$

Deslocamentos (translações) horizontais



(a) Ângulos α e $\alpha - \frac{\pi}{2}$ (b) Ângulos α e $\alpha + \frac{\pi}{2}$

Figura 9.15: Ângulos deslocados (transladados).

As identidades de translação estabelecem o efeito da substituição de α por $\alpha - \frac{\pi}{2}$ e de α por $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Pela congruência dos triângulos da Figura 9.15(a) observamos que

$$\overline{OR} = \overline{OQ} \quad \therefore \quad sen(\alpha) = cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \tag{9.6d}$$

e

$$\overline{OP} = -\overline{OS} \quad \therefore \quad cos(\alpha) = -sen\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right). \tag{9.6e}$$

De modo análogo, pela Figura 9.15(b) observamos que

$$\overline{OQ} = \overline{OR} \quad \therefore \quad cos(\alpha) = sen\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \tag{9.6f}$$

e

$$\overline{OS} = -\overline{OP} \quad \therefore \quad sen(\alpha) = -cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \tag{9.6g}$$

Cosseno da diferença

Iniciamos deduzindo a fórmula do cosseno da diferença. Calculando o quadrado da distância entre os pontos P e Q da Figura 9.16 temos:

$$\begin{aligned}
\overline{PQ}^2 &= \big[cos(\alpha) - cos(\beta)\big]^2 + \big[sen(\alpha) - sen(\beta)\big]^2 \\
&= cos^2(\alpha) - 2cos(\alpha)cos(\beta) + cos^2(\beta) + sen^2(\alpha) - 2sen(\alpha)sen(\beta) + sen^2(\beta) \\
&= cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) + cos^2(\beta) + sen^2(\beta) - 2cos(\alpha)cos(\beta) - 2sen(\alpha)sen(\beta) \\
&= 1 + 1 - 2cos(\alpha)cos(\beta) - 2sen(\alpha)sen(\beta) \\
&= 2 - 2\big[cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)\big]
\end{aligned}$$

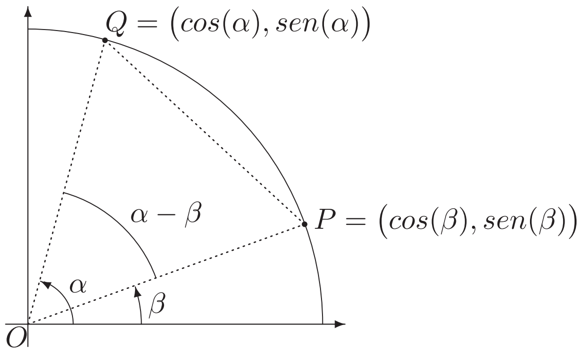


Figura 9.16: O cosseno da diferença: $cos(\alpha - \beta)$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo OPQ da Figura 9.16 temos:

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\,\overline{OP}\,\overline{OQ}\,cos(\alpha - \beta) \\ &= 1 + 1 - 2cos(\alpha - \beta) \\ &= 2 - 2cos(\alpha - \beta)\end{aligned}$$

Igualando os resultados obtidos para $\overline{PQ}^2$ obtemos o cosseno da diferença

$$cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)$$

Cosseno da soma

O cosseno da soma pode agora ser obtido usando um artifício algébrico engenhoso - substituímos a soma por uma diferença e aplicamos o cosseno da diferença

$$cos(\alpha + \beta) = cos\big[\alpha - (-\beta)\big] = cos(\alpha)cos(-\beta) + sen(\alpha)sen(-\beta)$$

e então aplicamos as identidades (9.6a) e (9.6b) para obtermos o cosseno da soma

$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$$

Seno da diferença

Para obtermos o seno da diferença, inicialmente usamos a identidade (9.6d) para escrever

$$sen(\alpha - \beta) = cos\left(\alpha - \beta - \frac{\pi}{2}\right) = cos\left[\alpha - \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

e a seguir aplicamos o cosseno da diferença no membro direito

$$sen(\alpha - \beta) = cos(\alpha)cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) + sen(\alpha)sen\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Mas, pelo cosseno da soma

$$cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = cos(\beta)cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(\beta)sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = -sen(\beta)$$

e pela identidade (9.6f)

$$sen\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = cos(\beta).$$

Assim o seno da diferença é dado por

$$sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) - cos(\alpha)sen(\beta)$$

Seno da soma

O seno da soma pode ser obtido pelo mesmo artifício aplicado na dedução do cosseno da soma - substituímos a soma por uma diferença e aplicamos o seno da diferença

$$sen(\alpha + \beta) = sen\big[\alpha - (-\beta)\big] = sen(\alpha)cos(-\beta) - cos(\alpha)sen(-\beta)$$

e então aplicamos as identidades (9.6a) e (9.6b) para obtermos o seno da soma

$$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sen(\beta)$$

Sumário das fórmulas da soma e da diferença

Sumarizamos aqui os resultados obtidos:

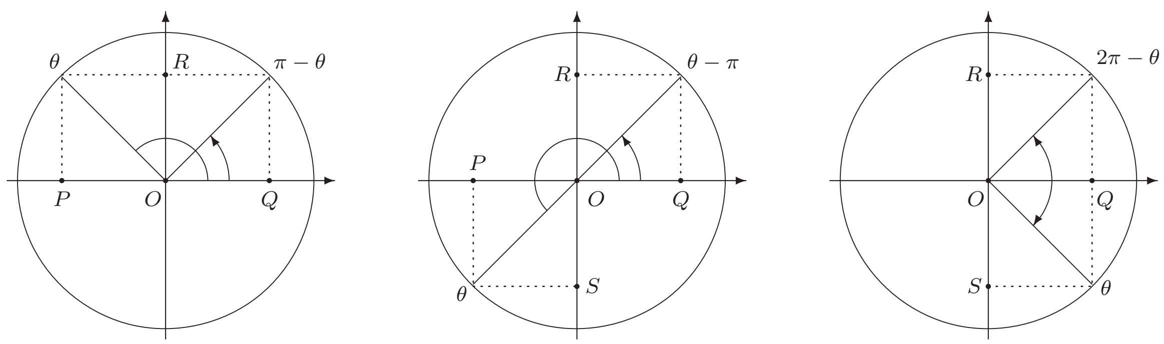
$$cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) \tag{9.6h}$$

$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta) \tag{9.6i}$$

$$sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) - cos(\alpha)sen(\beta) \tag{9.6j}$$

$$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sen(\beta) \tag{9.6k}$$

9.7 Redução ao Primeiro Quadrante



(a) Do 2^o ao 1^o quadrante (b) Do 3^o ao 1^o quadrante (c) Do 4^o ao 1^o quadrante

Figura 9.17: Redução ao primeiro quadrante.

Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quadrantes:

- 1^o quadrante: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$;
- 2^o quadrante: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$;
- 3^o quadrante: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$;
- 4^o quadrante: $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$.

Dado um ângulo θ, reduzi-lo ao primeiro quadrante consiste em determinar um ângulo no primeiro quadrante que possua as mesmas razões trigonométricas de θ, a menos de um sinal. Devemos considerar 3 casos.

Redução do segundo ao primeiro quadrante

Na Figura 9.17(a) observamos que se $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ então sua redução ao primeiro quadrante é $\pi - \theta$. Temos que

- $sen(\theta) = \overline{OR} = sen(\pi - \theta)$
- $cos(\theta) = \overline{OP} = -\overline{OQ} = -cos(\pi - \theta)$

Conseqüentemente

- $tg(\theta) = -tg(\pi - \theta)$
- $ctg(\theta) = -cotg(\pi - \theta)$
- $sec(\theta) = -sec(\pi - \theta)$
- $csc(\theta) = csc(\pi - \theta)$

Exemplo 9.4 *O ângulo* $\frac{5\pi}{6}$ *está no segundo quadrante, pois* $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$. *Assim sua redução ao primeiro quadrante é* $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. *Logo*

$$sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad e \qquad cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Redução do terceiro ao primeiro quadrante

Na Figura 9.17(b) observamos que se $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ então sua redução ao primeiro quadrante é $\theta - \pi$. Temos que

- $sen(\theta) = \overline{OS} = -\overline{OR} = -sen(\theta - \pi)$
- $cos(\theta) = \overline{OP} = -\overline{OQ} = -cos(\theta - \pi)$

Conseqüentemente

- $tg(\theta) = tg(\theta - \pi)$
- $ctg(\theta) = cotg(\theta - \pi)$
- $sec(\theta) = -sec(\theta - \pi)$
- $csc(\theta) = -csc(\theta - \pi)$

Exemplo 9.5 *O ângulo* $\frac{5\pi}{4}$ *está no terceiro quadrante, pois* $\pi < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$. *Assim sua redução ao primeiro quadrante é* $\frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$. *Logo*

$$sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad e \qquad cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Redução do quarto ao primeiro quadrante

Na Figura 9.17(c) observamos que se $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ então sua redução ao primeiro quadrante é $2\pi - \theta$. Temos que

- $sen(\theta) = \overline{OS} = -\overline{OR} = -sen(2\pi - \theta)$
- $cos(\theta) = \overline{OQ} = cos(2\pi - \theta)$

Conseqüentemente

- $tg(\theta) = -tg(2\pi - \theta)$
- $ctg(\theta) = -cotg(2\pi - \theta)$
- $sec(\theta) = sec(2\pi - \theta)$
- $csc(\theta) = -csc(2\pi - \theta)$

Exemplo 9.6 *O ângulo $\frac{5\pi}{3}$ está no quarto quadrante, pois $\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$. Assim sua redução ao primeiro quadrante é $2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. Logo*

$$sen\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad e \qquad cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

9.8 Equações trigonométricas

Uma equação trigonométrica é aquela que envolve as funções trigonométricas *seno*, *cosseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante*, *cossecante*. Resolver uma equação trigonométrica significa encontrar os valores do ângulo que a verifica. Para este propósito a Tabela 9.2, que nos dá os valores do *seno*, *cosseno* e *tangente* dos ângulos notáveis do 1^o quadrante, será de grande auxílio.

θ	$sen(\theta)$	$cos(\theta)$	$tg(\theta)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$

Tabela 9.2: Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis do 1^o quadrante

A Tabela 9.2 nos fornece os valores de *seno*, *cosseno* e *tangente* apenas para os ângulos notáveis do 1^o quadrante. A Figura 9.18 mostra os ângulos nos segundo, terceiro e quarto quadrantes redutíveis aos notáveis do primeiro quadrante.

Exemplo 9.7 *Resolver a equação $sen(x) = 0$.*

Solução: pela Tabela 9.2 temos que $x = 0$. Observando a Figura 9.18 temos que $x = \pi$ também é uma solução da equação dada. Além disto, qualquer arco côngruo a estes também são soluções, de modo que a solução geral é da forma

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

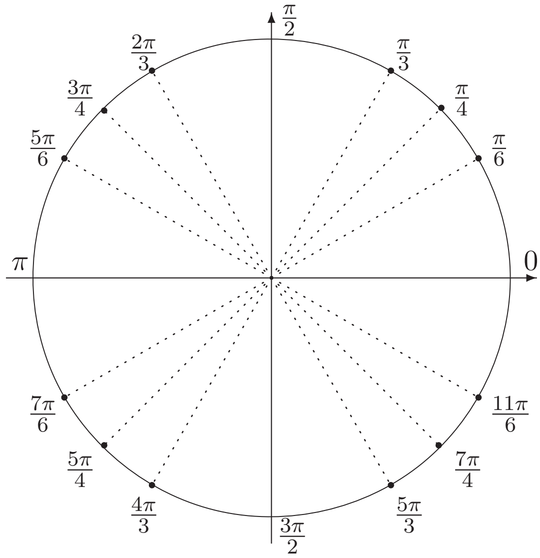


Figura 9.18: Ângulos redutíveis aos notáveis

Exemplo 9.8 *Resolver a equação* $sen(x) = cos(x)$.

Solução: pela Tabela 9.2 temos que $x = \frac{\pi}{4}$. *Observando a Figura 9.18 temos que* $x = \frac{5\pi}{4}$ *(simétrico de* $\frac{\pi}{4}$ *em relação à origem) também é uma solução da equação dada. Além disto, qualquer arco côngruo a estes também são soluções, de modo que a solução geral pode ser dada como*

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 9.9 *Resolver a equação* $2cos(x) - 1 = 0$.

Solução: temos que $cos(x) = \frac{1}{2}$, *e pela Tabela 9.2 temos que* $x = \frac{\pi}{3}$. *Observando a Figura 9.18 observamos que* $x = \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ *(simétrico de* $\frac{\pi}{3}$ *em relação ao eixo horizontal) também é uma solução da equação dada. Além disto, qualquer arco côngruo a estes também são soluções, de modo que a solução geral pode ser dada como*

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \ , k \in \mathbb{Z}.$$

9.9 Problemas Propostos

9.1 *[Mack-SP] A medida de um ângulo é* 225^o. *Determine sua medida em radianos.*

9.2 *[Fuvest-SP] Qual o valor do ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à* 1 *hora e* 12 *minutos.*

9.3 *[UF-PA] Quantos radianos percorre o ponteiro dos minutos de um relógio em* 50 *minutos?*

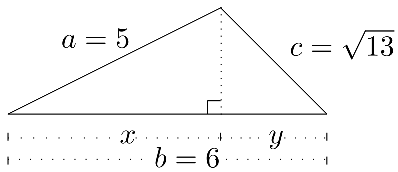
9.4 *A altura de um triângulo equilátero mede* $2\,cm$. *Determine seu perímetro e sua área.*

9.5 *A diagonal de um quadrado mede* $3\sqrt{6}\,cm$. *Determine seu perímetro e sua área.*

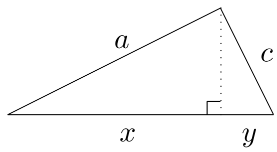
9.6 *[PUC-SP] Se a altura de um trapézio isósceles medir* $8\,dm$ *e suas bases medirem, respectivamente,* $27\,dm$ *e* $15\,dm$*, determine a medida de suas diagonais.*

9.7 *[UEPB] Com uma velocidade constante de* $30\ Km/h$*, um móvel parte de* A *e segue numa direção que forma com a reta* AB *um ângulo de* 30^o*. Após* $4\ h$ *de percurso, a que distância o móvel se encontra da reta* AB*?*

9.8 *No triângulo dado determine as medidas* x *e* y*.*



9.9 *No triângulo dado sabe-se que* $c = 5$*,* $y = 3$ *e lado de comprimento* a *é perpendicular ao lado de comprimento* c*. Determine* a *e* x*.*



9.10 *Em um triângulo retângulo um dos catetos mede* $5\,cm$ *e sua projeção sobre a hipotenusa mede* $4\,cm$*. Determine:*

(a) o comprimento do outro cateto;

(b) o comprimento da hipotenusa;

(c) seu perímetro;

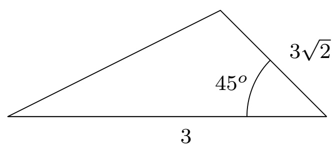
(d) sua área.

9.11 *Em um triângulo a hipotenusa mede* $10\,dm$ *e a razão entre os comprimentos dos catetos é* $\frac{3}{4}$*. Determine os comprimentos das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

9.12 *[PUC-SP] O perímetro de um losângo mede* $20\,cm$ *e uma de sua diagonais mede* $8\,cm$*. Quanto mede a outra diagonal?*

9.13 *Num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa mede* $12\,cm$ *e a projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa mede* $16\,cm$*. Determine o comprimento dos catetos deste triângulo.*

9.14 *Determine o perímetro e a área do triângulo dado.*



9.15 *Os lados de um triângulo medem* $a = \sqrt{2}$*,* $b = 2$ *e* $c = 1 + \sqrt{3}$*. Determine as medidas de seus ângulos.*

9.16 *Um triângulo tem seus vértices nos pontos A, B e C. Sabe-se que* $\overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{2}$. *Se* $\overline{AB} = 2$ *e* α *é o ângulo oposto ao lado* $\overline{BC}$, *determine* α.

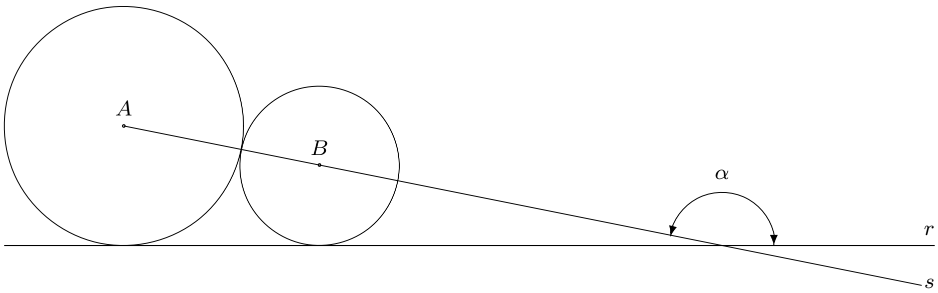
9.17 *Um terreno tem a forma de um paralelogramo cujos lados medem* $40\,m$ *e um dos ângulos internos mede* 120^o. *Seu proprietário irá cercá-lo e também dividi-lo ao meio com uma cerca com* 3 *fios de arame. Determine a menor quantidade de arame a ser utilizada.*

9.18 *[ITA-SP] Os lados de um triângulo medem a, b e c centímetros. Qual o valor do ângulo interno deste triângulo, oposto ao lado que mede a centímetros, se forem satisfeitas as seguintes relações:* $3a = 7c$ *e* $3b = 8c$.

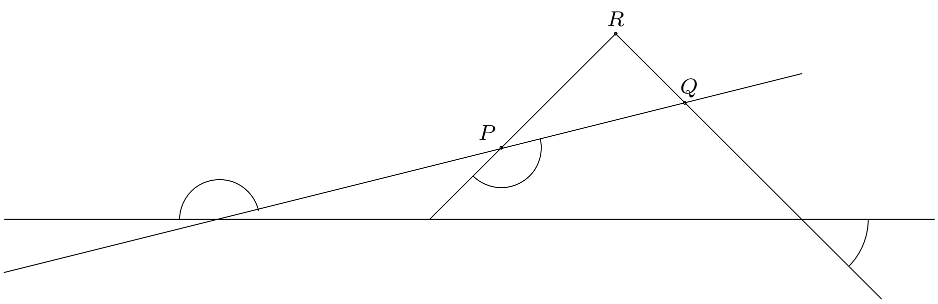
9.19 *[ITA-SP] Num losângo* $ABCD$ *a soma das medidas dos ângulos obtusos é o triplo da soma das medidas dos ângulos agudos. Se sua diagonal menor mede d, determine sua aresta.*

9.20 *[Universidade Gama Filho - RJ] Calcular os valores de k que verificam simultaneamente as igualdades:* $sen(\theta) = k - 1$ *e* $cos(\theta) = \sqrt{3 - k^2}$.

9.21 *[UFJF-MG] Duas circunferências de centros A e B, cujos raios são* 15 *cm e* 5 *cm, respectivamente, são tangentes entre si e tangentes a uma reta r, conforme a Figura abaixo. Sabendo-se que a reta s passa pelos centros A e B, determine a medida do ângulo* α.



9.22 *[UFRN] No triângulo PQR, representado na Figura a seguir, o lado PQ mede* 10 *cm. Qual a área desse triângulo?*



9.23 *Para cada razão trigonométrica dada utilize as identidades da Seção 9.3 para determinar as outras cinco.*

(a) $sen(\alpha) = \frac{3}{5}$

(b) $cos(\beta) = \frac{1}{7}$

(c) $tg(\gamma) = 4$

(d) $cotg(\delta) = 3$

(e) $cos(\epsilon) = \frac{3}{5}$

(f) $tg(\theta) = \frac{1}{2}$

(g) $csc(\phi) = 2$

(h) $sec(\sigma) = 3$

9.24 *Uma pessoa na margem de um rio vê, sob um ângulo de* 60^o*, o topo de uma torre na margem oposta. Quando ela se afasta* $40\,m$ *perpendicularmente à margem do rio, esse ângulo é de* 30^o*.*

(a) *Qual a largura do rio?*

(b) *Qual a altura da torre?*

9.25 *Verifique a veracidade das igualdades a seguir.*

(a) $\frac{sen(\alpha)}{1+cos(\alpha)} + \frac{1+cos(\alpha)}{sen(\alpha)} = 2csc(\alpha)$

(b) $\frac{2-sen^2(\beta)}{cos^2(\beta)} - tg^2(\beta) = 2$

(c) $\frac{tg(\gamma)}{1+tg^2(\gamma)} = sen(\gamma)cos(\gamma)$

(d) $\frac{sec(\theta)+sen(\theta)}{csc(\theta)+cos(\theta)} = tg(\theta)$

(e) $sec^2(\phi)csc^2(\phi) = tg^2(\phi) + cotg^2(\phi) + 2$

(f) $\big[tg(\sigma) - sen(\sigma)\big]^2 + \big[1 - cos(\sigma)\big]^2 = \big[sec(\sigma) - 1\big]^2$

9.26 *Explique por quê as igualdades dadas são inválidas.*

(a) $sen(\alpha) = 3$

(b) $cos(\alpha) = 5$

(c) $sec(\alpha) = \frac{1}{2}$

(d) $csc(\alpha) = \frac{3}{4}$

9.27 *Dois ângulos* α *e* β *são ditos complementares se* $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$*. Use a Figura 9.5 para se convencer dos seguintes fatos:*

(a) *o seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu complementar;*

(b) *o cosseno de um ângulo é igual ao seno de seu complementar;*

(c) *a tangente de um ângulo é igual à cotangente de seu complementar;*

(d) *a cotangente de um ângulo é igual à tangente de seu complementar;*

(e) *a secante de um ângulo é igual à cossecante de seu complementar;*

(f) *a cossecante de um ângulo é igual à secante de seu complementar.*

9.28 *Os lados de um paralelogramo medem* a *e* b *e suas diagonais* x *e* y*. Mostre que*

$$x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2).$$

9.29 *[Cescem-SP] Em quais quadrantes estão os ângulos* α, β *e* γ *tais que:* $sen(\alpha) < 0$ *e* $cos(\alpha) < 0$; $cos(\beta) < 0$ *e* $tg(\beta) < 0$; $sen(\gamma) > 0$ *e* $cotg(\gamma) > 0$, *respectivamente.*

9.30 *[FECAP-SP] Determine o valor da expressão:* $sen(\pi/4)+cos(\pi/4)+cos(\pi/2+\pi/4)$.

9.31 *[Santa Casa-SP] Seja a função f, de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 1 + 4sen(x)$. *Determine o intervalo do conjunto imagem dessa função.*

9.32 *[UFP-RS] Qual o intervalo do conjunto imagem da função f,* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 2sen(x) - 3$.

9.33 *Para quais valores de a as sentenças* $sen(x) = \sqrt{a}$ *e* $cos(x) = 2\sqrt{a} - 1$ *são verdadeiras para todo x real.*

9.34 *[UF São Carlos-SP] Calcule o valor da expressão:* $\frac{2-sen^2(x)}{cos^2(x)} - tg^2(x)$.

9.35 *[FGV-RJ] Determine a funçaõ trigonométrica equivalente a* $\frac{sec(x)+sen(x)}{cossec(x)+cos(x)}$.

9.36 *[PUC-RS] Determine a igualdade da expressão:* $\frac{sen(x)}{1+cos(x)} + \frac{1+cos(x}{sen(x)}$.

9.37 *[FEP-PA] No círculo trigonométrico um ângulo é tal que seu seno vale* $\frac{3}{5}$ *e encontra-se no segundo quadrante. Calcule o valor da tangente deste ângulo.*

9.38 *[Edson Queiroz-CE] Sabendo que* $sec(x) = 3$ *e* $tg(x) < 0$, *calcule sen(x).*

9.39 *[ITA-SP] Calcule o valor da expressão* $y = \frac{2tg(x)}{1-tg^2(x)}$ *quando* $cos(x) = \frac{-3}{7}$ *e* $tg(x) < 0$.

9.40 *[PUC-RS] Sendo* $tg(x) = \frac{-\sqrt{7}}{7}$ *e* $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, *calcule* $sen(x)$.

9.41 *[PUC-SP] Quais os valores de x satisfazem a equação* $cos(3x - \frac{\pi}{5}) = 0$.

9.42 *[Cescea-SP] Determine a soma das raízes da equação* $1 - 4cos^2(x) = 0$ *compreendidas entre* 0 *e* π.

9.43 *[AMAN-RJ] Determine os valores de x que satisfazem a equação* $3^{cos(2x)} = 1$.

9.44 *[FC Chagas-BA] Determine o número de soluções da equação* $cos(2x) = -\frac{1}{2}$, *no intervalo* $[-\pi, \pi]$.

9.45 *[Mack-SP] Determine os valores de x para que* $sen(x) = sen(x + \pi)$, *no intervalo* $0 \leq x \leq 2\pi$.

9.46 *[Osec-SP] Determine o conjunto solução da equação* $cos(x) = cos(\frac{\pi}{3} - x)$, *sendo* $0 < x < 2\pi$.

9.47 *[UF Uberlândia-MG] Determine o conjunto solução da equação*

$$tg(x + 1)\sqrt{3}cotg(x) - 1 = 0$$

no intervalo $[0, \pi]$.

9.48 *[Fac. Belas Artes-SP] Determine os valores de x na equação $tg(x) + cotg(x) = 2$.*

9.49 *[Mack-SP] Determine os valores de x na equação $sen^2(x) = \frac{1+cos(x)}{2}$, no intervalo $[0, 2\pi]$.*

9.50 *[Metodista-S.B. do Campo-SP] Determine os valores de x na equação*

$$sec^2(x) + 2tg^2(x) = 2$$

no intervalo$[0, 2\pi]$.

9.51 *[Cesgranrio-RJ] Determine as raizes da equação $cos^2(x) - sen^2(\pi - x) = \frac{1}{2}$ no intervalo $[0, \pi]$.*

9.52 *[Cesgranrio-RJ] Determine a soma das quatro raizes da equação*

$$sen^2(x) + sen(-x) = 0$$

no intervalo $[0, 2\pi]$.

9.53 *[CESESP-PE] Determine o conjunto solução da equação $\frac{1}{1+sen(x)} + \frac{1}{1-sen(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}$.*

9.54 *[Mack-SP] Determine a expressão geral dos arcos x para os quais $2\big[cos(x) + sec(x)\big] = 5$.*

9.55 *[FGV-RJ] Determine a solução da equação: $3\big[1 - cos(x)\big] = sen^2(x)$.*

9.56 *[FGV-SP] Determine a soma das raízes da equação*

$$sen^3(x) - 3sen^2(x)cos(x) + 3sen(x).cos^2(x) - cos^3(x) = 0$$

no intervalo $[0, 2\pi]$.

9.57 *[Mack-SP] Sendo $sen(x) = \frac{12}{13}$ e $sen(y) = \frac{4}{5}$, $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$, determine $sen(x - y)$.*

9.58 *[FEI-SP] Se $cos(x) = \frac{3}{5}$, calcule $sen(x - \frac{\pi}{2})$.*

9.59 *[F . S . Judas-SP] Se $sen(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e x um arco do segundo quadrante, então calcule*

$$sen(x - \frac{\pi}{2})cos(x - \frac{\pi}{2}).$$

9.60 *[UC-MG] Prove que $\frac{2tg(x)}{1+tg^2(x)}$ é idêntica a $sen(2x)$.*

9.61 *[UF-GO] Se $sen(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}$, calcule $cos(2x)$.*

9.62 *[F. S. Judas-SP] Se $sen(x) = \frac{2}{3}$ e x um arco do primeiro quadrante, então calcule $sen(2x)$.*

9.63 *[UCP-PR] Sabendo que $cos(36^o) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, calcule $cos(72^o)$.*

9.64 *[AMAN-RJ] Determine os valores de x que satisfazem a inequação: $cos(5x) \leq \frac{1}{2}$.*

9.65 *[FGV-SP] Determine a solução da inequação $\sqrt{2}.cos^2(x) > cos(x)$ no intervalo $[0, \pi]$.*

9.66 *[UF São Carlos-SP] Determine o conjunto solução da inequação $\frac{1}{cossec(x)} - \frac{1}{sec(x)} > 0$, para $0 \leq x \leq \pi$.*

9.67 *[Mack-SP] Determine a solução da inequação $\frac{cos(x)-sen(x)}{cos(x)+sen(x)}$, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$.*

9.68 *[PUC-SP] Determine a solução da inequação $\frac{sen(x)-2}{cos(2x)+3cos(x-1)} > 0$, no conjunto $0 \leq x \leq 2\pi$.*

9.69 *[ITA-SP] Dado o polinômio P definido por $P(x) = sen(\theta) - tg(\theta)x + sec^2(\theta)x^2$, determine os valores de θ no intervalo $[0, 2\pi]$ tais que P admita somente raízes reais.*

9.70 *Use as identidades* (9.6i) *e* (9.6k) *para deduzir a tangente da soma*

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha)tg(\beta)}.$$

9.71 *Use as identidades* (9.6h) *e* (9.6j) *para deduzir a tangente da diferença*

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha)tg(\beta)}.$$

9.72 *(**Fórmulas do ângulo duplo**).*

(a) Use a identidade (9.6i) *para mostrar o cosseno do ângulo duplo (sugestão: faça $2\alpha = \alpha + \alpha$)*

$$cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha).$$

(b) Use a identidade (9.6k) *para mostrar o seno do ângulo duplo*

$$sen(2\alpha) = 2cos(\alpha)sen(\alpha).$$

9.73 *(**Fórmulas do ângulo metade**). Use a identidade fundamental e o cosseno do ângulo duplo para deduzir o cosseno e o seno do ângulo metade*

$$cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\Big[1 + cos(2\alpha)\Big].$$

$$sen^2(\alpha) = \frac{1}{2}\Big[1 - cos(2\alpha)\Big].$$

9.1 *Demonstre a Lei dos Senos (Figura 9.9).*

9.10 Respostas dos Problemas Propostos - Capítulo 9

- 9.1 (página 74) $\frac{5\pi}{4}$
- 9.2 (página 74) 36^o
- 9.3 (página 74) $\frac{5\pi}{3}$
- 9.4 (página 74)
  perímetro $= 4\sqrt{3}\,cm$ e área $= \frac{4\sqrt{3}}{3}\,cm^2$
- 9.5 (página 74)
  perímetro $= 12\sqrt{3}\,cm$ e área $= 27\,cm^2$
- 9.5 (página 74)
  $\sqrt{505}\,dm$
- 9.8 (página 75) $x = 4$ e $y = 2$
- 9.9 (página 75) $a = \frac{20}{3}$ e $x = \frac{16}{3}$
- 9.10 (página 75)

  (a) $\frac{15}{4}$;
  (b) $\frac{25}{4}$;
  (c) 15;
  (d) $\frac{75}{8}$.

- 9.11 (página 75) $\frac{18}{5}$ e $\frac{32}{5}$
- 9.12 (página 75) $6\,cm$
- 9.13 (página 75) $15\,cm$ e $20\,cm$
- 9.14 (página 75) perímetro $= 6 + 3\sqrt{2}$ e área $= \frac{9}{2}$
- 9.15 (página 75) 30^o, 45^o e 105^o
- 9.16 (página 76) $\alpha = 45^o = \frac{\pi}{4}$ radianos
- 9.17 (página 76) $600\,m$ de arame
- 9.18 (página 76) 60^o
- 9.19 (página 76) $\frac{d}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
- 9.20 (página 76) $k = \frac{3}{2}$
- 9.23 (página 76)

  (a) $cos(\alpha) = \frac{4}{5}$, $tg(\alpha) = \frac{3}{4}$, $cotg(\alpha) = \frac{4}{3}$, $sec(\alpha) = \frac{5}{4}$, $csc(\alpha) = \frac{5}{3}$.

  (b) $sen(\beta) = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $tg(\beta) = 4\sqrt{3}$, $cotg(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{12}$, $sec(\beta) = 7$, $csc(\beta) = \frac{7\sqrt{3}}{12}$.

  (c) $cos(\gamma) = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $sen(\gamma) = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $cotg(\gamma) = \frac{1}{4}$, $sec(\gamma) = \sqrt{17}$, $csc(\gamma) = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

  (d) $cos(\delta) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $sen(\delta) = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $tg(\delta) = \frac{1}{3}$, $sec(\alpha) = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $csc(\alpha) = \sqrt{10}$.

  (e) $sen(\epsilon) = \frac{4}{5}$, $tg(\epsilon) = \frac{4}{3}$, $cotg(\epsilon) = \frac{3}{4}$, $sec(\epsilon) = \frac{5}{3}$, $csc(\epsilon) = \frac{5}{4}$.

  (f) $cos(\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $sen(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $cotg(\theta) = 2$, $sec(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $csc(\theta) = \sqrt{5}$.

  (g) $cos(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sen(\phi) = \frac{1}{2}$, $tg(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $cotg(\phi) = \sqrt{3}$, $sec(\phi) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

  (h) $cos(\sigma) = \frac{1}{3}$, $sen(\sigma) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $tg(\sigma) = 2\sqrt{2}$, $cotg(\sigma) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $csc(\sigma) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

- 9.24 (página 77)

  (a) $20\,m$
  (b) $20\sqrt{3}\,m$

- 9.29 (página 78) 3^o, 2^o e 1^o
- 9.30 (página 78) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 9.31 (página 78) $[-3, 5]$
- 9.32 (página 78) $[-5, -1]$
- 9.33 (página 78) $a = 0$ ou $a = \frac{16}{25}$
- 9.34 (página 78) 2
- 9.35 (página 78) $tg(x)$
- 9.36 (página 78) $2cossec(x)$
- 9.37 (página 78) $-3/4$
- 9.38 (página 78) $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$
- 9.39 (página 78) $\frac{12\sqrt{10}}{31}$
- 9.40 (página 78) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- 9.41 (página 78) $\frac{7\pi}{30} + k\frac{\pi}{3}$
- 9.42 (página 78) π
- 9.43 (página 78) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

- 9.44 (página 78) $4: -\frac{2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$
- 9.45 (página 78) $0, \pi, 2\pi$
- 9.46 (página 78) $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$
- 9.47 (página 78) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{4}$
- 9.48 (página 79) $\frac{\pi}{4} \pm \pi$
- 9.49 (página 79) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ e π
- 9.50 (página 79) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
- 9.51 (página 79) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
- 9.52 (página 79) $\frac{7\pi}{2}$
- 9.53 (página 79) $\frac{\pi}{2} + k\pi$
- 9.54 (página 79) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
- 9.55 (página 79) $x = k.360^o$
- 9.56 (página 79) $\frac{3\pi}{2}$
- 9.57 (página 79) $\frac{16}{65}$
- 9.58 (página 79) $\frac{-3}{5}$
- 9.59 (página 79) $0, 5$
- 9.61 (página 79) $\frac{5}{6}$
- 9.62 (página 79) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$
- 9.63 (página 79) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
- 9.64 (página 80) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{15} \leq x \leq \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{3}$
- 9.65 (página 80) $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$
- 9.66 (página 80) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$
- 9.67 (página 80) $0 < x < \frac{\pi}{4}$
- 9.68 (página 80) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$
- 9.69 (página 80) $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$