Relações entre a informática e a matemática[1]

Objectivos

No fim do estudo deste capítulo espera-se que seja capaz de:

- Indicar a influência que o computador tem tido no desenvolvimento de novos domínios e de novas linhas de investigação em domínios já estabelecidos da Matemática;
- Comentar a influência do computador na relação entre o contínuo e o discreto;
- Indicar o modo como o computador é usado nas aplicações da Matemática;
- Discutir os papéis que o computador desempenha no processo de investigação matemática;
- Indicar o alcance do computador como suporte para novas práticas de comunicação.

Resumo

As relações entre a Matemática e a Informática desenvolvem-se nos dois sentidos. A Matemática tem dado contributos decisivos para o surgimento e incessante aperfeiçoamento tanto dos computadores como das Ciências da Computação. Mas a Matemática, como ciência dinâmica e em constante evolução, está também a ser fortemente influenciada pela Informática, tanto no que respeita aos problemas que coloca como aos métodos que usa na sua investigação. Estas relações dão importantes indicações para a utilização dos instrumentos computacionais no processo de ensino-aprendizagem.

3.1 Uso do computador na investigação matemática

A Matemática, como todas as ciências, está em constante evolução. Problemas deixados em aberto numa dada época são resolvidos numa época mais à frente. Novos instrumentos e novas concepções fornecem novas maneiras de encarar problemas e resultados antigos, levando à reformulação de teorias, notações e modos de trabalho.

Uma parte importante da investigação em áreas como a análise numérica, a matemática discreta, os sistemas dinâmicos, a investigação operacional, a lógica e a ciência da computação faz-se hoje com forte recurso à utilização do computador.

O uso cada vez mais intensivo de computadores para o processamento e transmissão de informação está a levar ao surgimento de novos conceitos e novas práticas na investigação nesta ciência. É o que vamos procurar ilustrar com exemplos de diversas áreas.

---

[1] Capítulo 3 do livro Ponte, J. P., & Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

3.1.1 Teoria de Números

Uma das áreas em que o computador tem sido muito utilizado é a teoria de números, domínio que estuda as propriedades do conjunto dos números inteiros. Nesta área da Matemática merecem particular atenção, por exemplo, as propriedades de números primos, de classes de congruência, as soluções inteiras de equações de coeficientes inteiros, etc. A teoria de números é um dos domínios considerados mais difíceis da Matemática, sendo um dos seus teoremas mais conhecidos a célebre afirmação enunciada mas não demonstrada por Fermat:

• *Não existe um termo de números naturais (x, y, z) que verifique a equação* $x^n + y^n = z^n$*, para* $n > 2$*.*

Em 23 de Junho de 1993 foi anunciada uma demonstração para este teorema pelo matemático inglês Andrew Wiles (figura 8). Verificou-se que esta demonstração continha alguns erros, mas, depois de corrigida, ela é hoje (1996) considerada correcta pela generalidade dos matemáticos[2].

Figura 8 - O anúncio duma demonstração do teorema de Fermat

Um aspecto característico desta área da Matemática é que os seus problemas são muitas vezes fáceis de enunciar mas extremamente difíceis de resolver. Eis alguns exemplos de outros problemas em aberto nesta área, todos eles envolvendo o conceito de número primo:

• *Pode qualquer número par ser representado pela soma de dois números primos?* (conjectura de Goldbach),

• *O número de primos emparelhados, isto é, que diferem entre si de duas unidades (como 5 e 7, 11 e 13, 311 e 313, etc.) é infinito?*

• *Haverá um número infinito de primos da forma* 2^n-1 (números de Mersenne)?

• *Que números da forma* $2^{2^n}+1$ (números de Fermat) *são primos?*

Sabe-se, desde os tempos de Euclides, que o conjunto dos números primos é infinito. Mas ainda hoje há muitas coisas que não se sabe acerca destes números[3]. O facto de não se conhecer nenhuma fórmula para obter números primos, obriga a que a sua

[2] Uma descrição de várias tentativas de demonstrar este teorema encontra-se em Stewart (1985), capítulo 3.

[3] Para uma apresentação de diversos problemas e resultados sobre números primos, ver Stewart (1985), capítulo 2.

determinação seja feita um a um. Cada candidato tem de ser testado para ver se tem outros divisores para além de si mesmo e da unidade. Para números muito grandes isto implica um cálculo substancialmente moroso. Por isso, tem-se recorrido ao computador para encontrar números primos cada vez maiores. O quadro IV regista alguns marcos destas descobertas.

Quadro IV - Marcos na descoberta de números primos cada vez maiores

Data	Número primo	Número de dígitos
1963	$2^{3217}-1$	967
1985	$2^{216091}-1$	
1989	$391581 \times 2^{216193}-1$	65087
1992	$2^{756839}-1$	227832
1994	$2^{859433}-1$	258716
1996	$2^{1257787}-1$	378632

A teoria de números era até há bem pouco tempo uma área cultivada por um grupo muito restrito de matemáticos. Os seus problemas tinham-se tornado de tal maneira difíceis que poucos arriscavam dedicar-se ao assunto. O computador, permitindo abordagens de carácter experimental a muitos destes problemas, veio a proporcionar um novo *élan* a esta teoria.

O computador tornou possível a realização de experiências, testando conjecturas que envolvem grande quantidade de cálculos. Na verdade, a experimentação de casos particulares como estratégia de descoberta tem grande tradição na Matemática. Por exemplo, Isaac Newton, Karl Gauss e Srinivasa Ramanujam são três matemáticos que se notabilizaram pela sua prática de experimentação de casos especiais, procurando estabelecer proposições gerais a partir de exemplos. O computador vem dar um novo estímulo a este tipo de abordagem à investigação matemática (Stewart, 1995; Ulam, 1974).

Outra estratégia proporcionada pelo computador é a de decompor um problema num grande número de casos especiais, usando-o depois para verificar, um a um, esses casos todos. Um número tão grande de casos seria impossível de verificar pelos processos tradicionais, mas está perfeitamente ao alcance do computador.

A teoria de números é considerada um dos domínio mais "puros" da Matemática. A procura de números primos cada vez maiores não tem sido feita com base em preocupações de utilidade prática. Mas o facto é que os números assim descobertos têm sido usados em criptografia, para codificar e descodificar mensagens enviadas através de sistemas públicos de telecomunicações.

3.1.2 Análise combinatória

Outro domínio onde o computador faz sentir fortemente a sua presença é o da análise combinatória, onde se estudam as propriedades das ordenações e esquemas definidos por meio de classes finitas de objectos. Os problemas mais conhecidos são os de combinações, arranjos e permutações, mas há muitos outros.

Problemas interessantes neste domínio são por exemplo:

• Rainhas num tabuleiro de xadrez: *de quantas formas diferentes podem ser colocadas n rainhas num tabuleiro de xadrez de n quadrículas de lado, de modo que não se ataquem umas às outras?* (no caso de n = 8, o número de soluções é 12)

• Problema de Steiner: *dados n objectos, podemos agrupá-los num conjunto de ternos de tal modo que cada par de objectos apareça uma e uma só vez em cada terno?* (este problema tem solução apenas para certos valores de n)

• Problema do empacotamento: *dado um conjunto de objectos de diversos volumes, como dispô-los no menor número de caixas de um volume dado?* (não é preciso ter muitos objectos para que seja praticamente inviável encontrar a solução óptima; mas se os objectos forem ordenados por ordem decrescente do respectivo volume e arrumados tanto quanto possível por essa ordem obtemos uma solução que em geral não difere em mais do 20% da solução óptima)

• Problema do viajante: *dados n pontos no plano ou no espaço, como uni-los de modo a que o caminho total seja o mais curto possível?*

Neste último problema, quando os n pontos se distribuem num espaço multidimensional só é possível procurar soluções com a ajuda do computador, tal é a complexidade dos cálculos envolvidos.

A análise combinatória surge com frequência em problemas teóricos e práticos ligados aos computadores. Por exemplo, ao planear uma busca numa estrutura de dados encontramos muitas vezes questões da forma “De quantos modos...?” A instalação de redes de computadores envolve problemas semelhantes. Na verdade, para ligar os computadores num edifício temos de determinar, entre as diversas hipóteses de nós e ligações, quais as que envolvem maior eficiência no serviço e menor custo.

A análise combinatória tem uma forte relação com a geometria. Na verdade, as figuras têm ao lado das suas propriedades métricas (que se traduzem em relações de congruência e de semelhança), propriedades combinatórias que não se alteram por simples transformações nos comprimentos e nos ângulos. Assim, por exemplo, o número de vértices de um polígono não se altera se o “esticarmos” por um vértice, mas as suas propriedades métricas (área, forma, etc.) são completamente alteradas.

Muitos dos problemas de análise combinatória são difíceis de tratar por métodos analíticos. Simulando em computador os processos que lhes estão subjacentes é mais fácil obter elementos que ajudem à sua compreensão e levem à formulação de conjecturas, senão mesmo à sua resolução.

Muitos destes problemas podem ser resolvidos através de algoritmos, sendo particularmente importante saber se o tempo que demora a sua execução no computador varia com o tamanho do conjunto de entrada de modo polinomial (os “bons” algoritmos, segundo J. Edmonds e A. Cobham) ou de modo exponencial (os “maus” algoritmos, segundo os mesmos autores).

3.1.3 Sistemas dinâmicos não lineares

As funções mais exploradas na Matemática são, sem dúvida, as funções lineares[4], da forma geral $y = ax + b$, onde a e b são constantes. Estas funções são claramente as mais fáceis de estudar e têm sido usadas extensamente nas ciências naturais e na engenharia. Há no entanto muitos domínios, como a termodinâmica e a mecânica de fluidos, em que as equações que descrevem os fenómenos são não-lineares.

Um sistema dinâmico descreve o comportamento de um certo fenómeno num espaço particular, chamado o espaço das fases. A variável independente x pode ser um escalar ou um vector com m componentes. Os sistemas dinâmicos podem ser discretos, caso em que a função é uma sucessão, ou contínuos, caso em que é uma função real de variável real. O caso discreto é bastante mais simples de estudar, mas é interessante observar que todo o sistema discreto pode ser transformado num sistema contínuo de dimensão uma unidade superior e vice versa, todo o sistema contínuo pode ser discretizado, diminuindo de uma dimensão (Stewart, 1995).

O estudo das funções não-lineares pelos métodos analíticos clássicos é extremamente difícil, conhecendo-se muito pouco sobre as suas propriedades. No entanto, na realização de cálculos numéricos e representações gráficas, o computador lida com a mesma facilidade com equações lineares e não lineares.

Um aspecto que a certa altura atraiu a atenção dos matemáticos é o comportamento destas funções quando submetidas a um processo de iteração, isto é, de aplicação repetida da função a partir de um dado valor inicial:

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1)$$

$$\ldots$$

$$x_n = f(x_{n-1})$$

Neste estudo, o trabalho experimental com o computador revelou-se uma ajuda preciosa, permitindo compreender muitos aspectos do comportamento deste tipo de funções. Nalguns casos, os pontos que sucessivamente vão sendo obtidos convergem para um dado ponto fixo. Noutros casos, não convergem para um único ponto mas situam-se todos numa dada área ou lugar geométrico. Noutros casos, apesar da natureza determinista das equações em presença, aparentam comportamentos perfeitamente aleatórios. Noutros casos ainda, assumem comportamentos alternadamente regulares e irregulares, descoberta que deu origem a uma nova teoria, a teoria do caos (Stewart, 1995)[5].

3.1.4 Fractais

Os objectos matemáticos clássicos, estudados em geometria e em análise infinitesimal apresentam uma característica comum: a suavidade. Assim, olhando de perto um

[4] Usamos aqui o termo “linear” no sentido que lhe é atribuído nestas áreas da Matemática. No ensino básico e secundário é costume chamar funções afins a este tipo de funções, reservando o termo “linear” para aquelas em que o termo independente é zero.

[5] Para uma boa explicação da teoria do caos, ver Stewart (1991). Uma abordagem muito acessível dos algoritmos iterativos, com uma introdução à dinâmica linear e à dinâmica caótica pode ser encontrada em Martín, Morán e Reyes (1995).

pequeno troço duma circunferência, ele surge com um carácter bem uniforme, parecendo-se muito com um segmento de recta. No entanto, no final do século XIX começou a verificar-se que existem outros tipos de objectos matemáticos que na altura surgiam mais como monstros ou aberrações do que como seres matemáticos legítimos. Faltavam as ferramentas para os estudar. O computador veio a constituir essa ferramenta por excelência. Ganharam assim direito de cidadania em Matemática um novo tipo de objectos – os fractais – que, ao contrário dos objectos anteriores, têm uma estrutura complexa qualquer que seja a escala de ampliação em que sejam estudados.

Os fractais foram criados por Benoit Mandelbrot, um matemático francês que trabalha no centro de investigação da IBM nos EUA. Este investigador interessava-se pelo problema das linhas de costa marítima cujo comprimento aparenta diferentes medidas, conforme a escala em que são medidas, usando o computador para fazer experiências (Stuart, 1995).

As curvas fractais têm "zig-zags", definidos matematicamente, em qualquer escala em que sejam observadas. Têm assim a propriedade de serem auto-semelhantes — quer dizer, as suas propriedades são as mesmas em qualquer nível de complexidade. As formas fractais podem definir-se não só no plano mas num espaço a qualquer número de dimensões.

Na nossa geometria, o espaço tem 3 dimensões, um plano tem 2, uma recta 1 e um ponto 0. As linhas fractais têm uma dimensão situada algures entre 1 e 2. Dum modo análogo, as superfícies fractais têm uma dimensão situada entre 2 e 3.

Como se pode calcular dum modo exacto o valor da dimensão? Se ao reduzirmos a unidade de medida da curva por um factor de k, fazemos aumentar o comprimento da curva no valor de m, então dizemos que essa curva tem dimensão fractal de (log m)/(log k).

Já em 1906, o matemático Helge von Koch tinha mostrado como construir uma curva tipo "floco de neve", que tem um perímetro infinito mas limita uma área finita. Esta curva constrói-se começando com um triângulo equilátero, e dividindo depois cada lado em três partes. A parte do meio toma-se para base de um novo triângulo equilátero e continua-se indefinidamente o mesmo processo (ver a figura 9). Esta curva tem dimensão fractal de 1.2618... – ou melhor, (log 4)/(log 3).

O processo de construção desta curva é perfeitamente determinado e uniforme. Podemos, no entanto, pensar um processo irregular, em que em cada momento de geração da figura se fazem sentir os efeitos de parâmetros aleatórios. Escolhendo convenientemente estes efeitos podemos obter figuras com propriedades e aspecto extremamente interessantes.

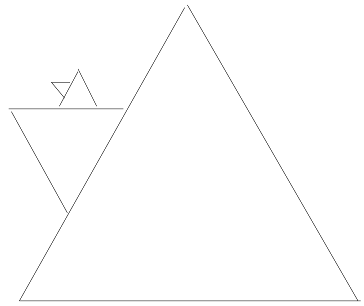

Figura 9 - O processo de geração da curva de Koch.

Um dos aspectos mais espectaculares das investigações com as formas fractais é que elas tornam possível a realização de figuras em computador que parecem paisagens reais, tendo já sido muito usadas em filmes de ficção científica.

3.1.5 A influência do computador no desenvolvimento da Matemática

Os exemplos poderiam multiplicar-se. Já anteriormente vimos a grande importância da utilização do computador na análise tensorial e na teoria da gravitação[6]. Em teoria de grupos permitiu a classificação dos grupos finitos simples. É também fácil de imaginar a tremenda importância que ele tem na análise numérica, quer como fonte de problemas quer como meio de simulação.

O computador ajudou a trazer para primeiro plano áreas da Matemática já anteriormente estudadas mas entretanto postas de parte. Por exemplo, despertou a álgebra linear (em especial a teoria das matrizes) dum estado de letargia de mais de meio século. Relançou o estudo de métodos iterativos já abordado por matemáticos como Euler e Gauss. *Conduziu a um grande desenvolvimento de certos domínios de investigação* como a análise numérica, a lógica e as estruturas discretas abstractas. *Estimulou o desenvolvimento de novas áreas* como a teoria do caos, os fractais, a programação linear e não linear e o estudo da complexidade computacional.

O computador constitui assim uma forte influência no desenvolvimento da Matemática actual, levando ao estabelecimento de um novo paradigma de investigação, a Matemática experimental. Além disso, valoriza sobretudo as áreas da Matemática que assentam em processos construtivos, relegando para plano secundário os domínios que vivem sobretudo de demonstrações de existência.

6 Recordar o que se disse a respeito do uso do computador nestes domínios no ponto 2.2.3.

Tarefas

1) *Fractais:* Tomando como ponto de partida um triângulo equilátero de base 1, mostre que a dimensão fractal desta curva é de facto log 4/log 3.

2) *Regularidades e caos*. Usando a calculadora ou o computador, estude as iterações da função $x_n = k\ x_{n-1}^2 - 1$, dando a k primeiro o valor 1 e depois o valor 2, e experimentando diferentes valores iniciais x_0 no intervalo [0,1].

Leituras recomendadas

Gleick, J. (1989). *Caos: A construção de uma nova ciência*. Lisboa: Gradiva. (em especial as pp. 33-58, 117-160 e 301-338)

Stewart, I. (1995). *Os problemas da Matemática.* Lisboa: Gradiva. (capítulos 2-3 e 15-16)

3.2 Uso do computador em áreas de aplicação da Matemática[7]

No que respeita às aplicações da Matemática, o computador tem contribuído para alargar tremendamente o seu âmbito e o seu alcance, automatizando processos, constituindo um meio insubstituível para gerar, tratar e analisar dados e para tomar decisões.

Desde há muito que os cientistas têm criado modelos matemáticos para descrever e intervir sobre o mundo. O surgimento do computador permitiu automatizar o processo de cálculo associado a estes modelos, tornando o seu uso muito mais atractivo e eficaz. Tornou-se, por exemplo, possível resolver por métodos numéricos aproximados problemas de engenharia de grande importância.

Os diversos processos físicos podem ser modelados através de equações que conduzem a cálculos numéricos, ou, o que vai dar ao mesmo, por operações lógicas com zeros e uns no computador. Para os estudar, é por vezes mais eficiente construir um modelo e testá-lo em diversas condições, num computador, do que simular esses processos ou mesmo reproduzi-los em termos reais[8]. Na verdade, as representações analógicas são mais próximas da realidade física. Mas as digitais são muito mais simples, e – se forem bem usadas – podem levar a resultados espantosamente mais exactos (ver Fiolhais, 1992).

Na construção de um modelo matemático é preciso ter em conta os aspectos físicos, químicos e de engenharia das situações bem como os aspectos da implementação numérica do modelo. Na verdade, a capacidade dos modelos para representar aspectos

[7] A distinção entre Matemática Pura e Matemática Aplicada é sempre algo artificial. Um dado assunto pode ser desenvolvido sem qualquer intenção de uso posterior e revelar-se muito útil noutras áreas, quer da Matemática quer de outros domínios. Um conceito originário da Física ou da Engenharia pode revelar-se fecundo na Matemática. Um mesmo assunto pode, frequentemente ser tratado em qualquer das duas perspectivas. No entanto, trata-se duma distinção cómoda, dada a diferença de perspectiva de uso do computador num e noutro domínio.

[8] Um exemplo simples duma actividade de modelação encontra-se no ponto 5.2.4 deste livro. Outros exemplos podem encontrar-se no livro de J. F. Matos (1995) desta mesma colecção.

da realidade está naturalmente limitada pelos recursos computacionais disponíveis. Presentemente, no desenvolvimento de modelos matemáticos, estão a ser cada vez mais usadas ferramentas de s*oftware*. Para muitos investigadores, a situação ideal é ter acesso ao código dos programas sem ter necessidade de programar tudo desde o princípio. Mas para poder alterar esse código é preciso conhecer as estratégias algorítmicas utilizadas pelo *software*. Muitos casos de fracasso na tentativa de modelar fenómenos diversos resultam de não terem sido tidos em conta aspectos essenciais dos algoritmos utilizados e das suas limitações (Cross, 1994).

A Matemática tem uma longa tradição de aplicações à Engenharia e às ciências como a Física, a Química e a Biologia. Essas aplicações fazem-se em regra através de equações diferenciais ou sistemas de equações diferenciais. Na maior parte dos casos chega-se a um ponto em que não é possível resolver estas equações ou sistemas em termos exactos e é necessário recorrer a métodos numéricos. A importância do computador na resolução destes problemas é mais do que evidente.

Mas a Matemática tem encontrado nos últimos anos numerosas aplicações em novos domínios. Começando pelas questões do ambiente natural desde a qualidade do ar e da água que consumimos, aos recursos energéticos, tudo isto envolve numerosos problemas em que a Matemática se tem revelado essencial. Por exemplo, no que respeita às florestas, a Matemática tem sido aplicada ao desenvolvimento de modelos que ajudam a definir políticas de gestão de populações de animais selvagens, de modo a equilibrar a defesa das espécies animais com a produção de madeira (McDonald, 1981). Mas para além de tornar possível o estudo de sistemas ambientais bem delimitados, o uso de modelos matemáticos computacionais permite igualmente o estudo dos problemas globais do planeta Terra e a criação de novas metodologias para a tomada de decisões (ver Lions, 1990)[9].

Passando ao domínio da produção, para que as indústrias sejam competitivas é preciso evitar desperdício de recursos. Estas preocupações colocam-se tanto às grandes como às pequenas empresas, desde as que produzem calçado e vestuário em grandes quantidades às que produzem pequenas peças que apoiam a produção das primeiras. Por exemplo, até a produção de cilindros anti-fricção, uma componente essencial de muitas máquinas industriais, pode ser objecto de um estudo matemático envolvendo modelos computacionais (Huntley, 1981).

É preciso procurar melhorar a produtividade da agricultura. Neste domínio, por exemplo, tem sido estudada através de modelos matemáticos a quantidade de nitratos a colocar no solo, de modo a proporcionar os melhores resultados (Moscardini, 1981).

Tanto a produção de bens e serviços como a sua distribuição dependem de redes que façam chegar até às empresas e às nossas casas desde serviços absolutamente essenciais como electricidade até outros não menos importantes como livros e jornais. É preciso que haja boas comunicações e que os sistemas de telefones e de transportes estejam bem organizados. É importante que haja eficiência nestas áreas, cabendo à Matemática dar um significativo contributo nesse sentido, nomeadamente através da investigação operacional, da programação e da teoria de grafos.

No que respeita ao comércio, é fundamental que o sistema monetário funcione, assistindo-se à progressiva invasão do chamado dinheiro de plástico. A nível do país,

[9] Para o estudo e intervenção em sistemas complexos, este autor propõe uma trilogia universal baseada nos elementos modelação, análise e controlo.

tem de haver dinheiro para pagar os salários e as pensões. Como protecção dos desastres, são necessários sistemas de seguros. Em todas estas áreas o computador desempenha um papel fundamental, registando dados, realizando operações, ajudando a gerir o sistema e a tomar decisões.

O computador pode ser usado para estudar problemas de ruídos de tráfego, importantes, por exemplo, para a localização e construção de auto-estradas. Este tipo de investigação envolve uma forte base de acústica teórica, equacionando-se como um problema em duas dimensões de propagação do som a partir de uma fonte pontual com diversos tipos de fronteira, sendo estudados no computador através de métodos de análise numérica (Chandler-Wilde, 1988).

A força vital que faz a Matemática avançar é a formulação e resolução de problemas. Os resultados são depois generalizados, relacionados, e estruturados em teorias coerentes. Todos os processos essenciais da Matemática – descoberta de regularidades, formulação de conjecturas, demonstração, matematização de situações da vida real, axiomatização das teorias, refinamento dos conceitos – são atravessados por esta actividade de resolução de problemas.

O próprio computador tem constituído uma fecunda fonte de problemas para os matemáticos. Uma das questões mais apaixonantes tem sido a determinação dos limites da calculabilidade. Dum modo geral, os problemas ligados à análise de algoritmos e estruturas de dados têm levado ao surgimento de novos conceitos e novos métodos de trabalho, sendo em muitos casos impossível distinguir a linha separadora entre a Matemática e as Ciências da Computação.

Em resumo, desde há muito tempo que foram desenvolvidas abordagens numéricas para numerosos problemas da ciência e da engenharia (como o cálculo de zeros de funções, a determinação de valores próprios de matrizes, a resolução de equações diferenciais, etc.). No entanto, dado o volume de cálculos necessário, essas abordagens tinham, na maior parte dos casos, uma reduzida utilização prática. *Com o surgimento do computador, o panorama mudou por completo, existindo hoje diversos domínios das ciências humanas e das ciências naturais cujas actividades de pesquisa se baseiam na construção e análise de modelos computacionais, baseados em modelos matemáticos que exploram justamente a sua extraordinária capacidade de cálculo*.

As ligações entre a Matemática e o computador dificilmente poderiam ser mais fortes. A Matemática começou por dar um contributo decisivo ao nível dos fundamentos das Ciências da Computação. Mas a grande versatilidade das aplicações susceptíveis de serem tratadas em computador com base em modelos matemáticos alargou profundamente a natureza desta relação. Como se lê no relatório *Everybody counts* (MSEB, 1989, p. 36),

> "Tal como os computadores trazem novas oportunidades à Matemática, também é a Matemática que os torna incrivelmente eficazes... As aplicações, o computador e a Matemática constituem um poderoso sistema fortemente unido produzindo resultados que anteriormente seriam impossíveis e originando ideias até aqui nunca imaginadas."

Tarefa

Investigue a utilização de modelos matemáticos numa área de aplicação à sua escolha (Biologia, Química, Física, Economia, Psicologia, Sociologia, Agricultura...). Seleccione um modelo duma situação que possa ser abordado com alunos do 3º ciclo.

Leitura recomendada

Davis, P. J. e Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva. (capítulo 3)

3.3 As NTI na actividade dos investigadores

Tenhamos em atenção que os computadores têm potencialidades muito diversas para apoiar o trabalho de investigação. Eles servem como:

• Instrumentos de cálculo numérico, quer em cálculo numérico aproximado, quer em teoria de números;

• Instrumentos de cálculo simbólico em numerosas teorias, executando tarefas de acordo com sistemas de regras bem definidas;

• Geradores de gráficos, proporcionando a visualização de figuras que obedecem a certas propriedades;

• Meios de comunicação, possibilitando o registo e transmissão de ideias matemáticas, tanto em linguagem corrente como recorrendo a formas de expressão que possibilitam o uso de símbolos matemáticos.

A capacidade dos computadores de realizar cálculo numérico e manipulação simbólica tem sido largamente explorada na investigação matemática, tanto em domínios fortemente abstractos como em problemas de engenharia e de modelação matemática.

No início de uma comunicação apresentada num encontro internacional, o matemático inglês R. F. Churchhouse (1988) refere do seguinte modo o papel do computador em três investigações que realizou em teoria de números:

> "Em cada caso um ou mais teoremas... emergiram, e num caso algumas conjecturas também... O facto de poder usar a máquina em modo interactivo para avaliar nova evidência foi duma ajuda considerável para encontrar cada uma das demonstrações" (p. 1)

Outra capacidade dos computadores é a manipulação de gráficos da mais variada espécie, aspecto especialmente patente nas máquinas que possuem grande memória e rapidez. As representações gráficas são desde há muito um elemento fundamental da actividade matemática. Traduzem toda a tradição do pensamento geométrico que continua a permear profundamente a Matemática do nosso tempo. Estas representações são fundamentais para o desenvolvimento de intuições e de significados nos matemáticos, ajudando na formulação de conjecturas e na procura de vias de demonstração. O computador revela-se neste aspecto um auxiliar precioso na criação de novas ideias, novos conceitos e novas teorias.

O computador também pode ser utilizado para realizar demonstrações. Ele é capaz de operar com os símbolos correspondentes às operações lógicas da álgebra de Boole (e, ou, não). Deste modo, com uma sequência de instruções, o computador executa um conjunto pré-definido de passos, escolhendo entre todas as alternativas possíveis aquelas que satisfazem, em cada momento, o resultado dos passos anteriores. Através deste processo, é possível programar um computador para demonstrar teoremas elementares de geometria (Ulam, 1974).

Um caso célebre diz respeito à demonstração do teorema das 4 cores, um enunciado que vinha desafiando a capacidade dos matemáticos desde há mais de um século. Numa linguagem simples, este teorema afirma que num mapa em que cada país corresponda a uma única região, é possível usar apenas quatro cores para distinguir uns dos outros os países com uma fronteira comum. Depois de várias tentativas de demonstração fracassadas, usando os métodos tradicionais, em 1973 foi finalmente proposta por Kenneth Appel e Wolfgang Haken[10] uma prova assentando parcialmente na verificação de um grande número de casos através de um algoritmo de compreensão extremamente difícil e de tempo de execução proibitivo.

Esta demonstração provocou viva discussão, sendo muitos os matemáticos que não a aceitavam como válida porque não era possível uma verificação manual de todos os seus passos[11]. O algoritmo foi já entretanto executado em diversos computadores, sendo presentemente esta demonstração aceite pela grande maioria dos matemáticos (Swart, 1980).

O acesso à informação e a possibilidade de troca de informações são hoje aspectos essenciais da actividade de investigação nas mais diversas áreas científicas e, em particular, na Matemática.

O computador veio a dar origem à constituição de redes de comunicações em que informação de todo o tipo – desde simples mensagens a textos, imagens e *software* – circula a grande velocidade. Destas redes, a mais conhecida é a INTERNET, que estabelece comunicação entre computadores à escala mundial. Esta rede interliga outras redes já anteriormente existentes como a BITNET, EUNET, JANET etc. de modo a que os diversos computadores passaram a ser capazes de falar entre si, mesmo usando sistemas operativos muito diversos. Ela viabiliza a troca de ficheiros, o envio de mensagens, o acesso a informações disponíveis em bases de dados internacionais, etc. Torna-se possível contactar com pessoas em lugares muito distantes e até quando ausente em viagem, se pode aceder ao seu próprio posto de trabalho.

Em Julho de 1993 havia 1 776 000 computadores ligados à INTERNET. Em Janeiro de 1995 esse número tinha subido para 4 852 milhões e em Junho do mesmo ano para 6 642 milhões, quase dois terços dos quais nos EUA.

Neste momento esta rede ainda é um pouco lenta para transferência de imagens, esperando-se um grande desenvolvimento nos anos mais próximos. Só para dar um exemplo, espera-se que, com cabos de fibra óptica, um filme de 30 minutos demore 4,3 segundos a ser transferido de um ponto para o outro do mundo.

---

[10] Uma descrição desta demonstração em termos informais pode ver-se em Appel e Haken (1978).

[11] Seria preciso mais do que 10 matemáticos trabalhando em grande velocidade e durante a sua vida toda para a realizar!

A troca de mensagens é uma actividade constante entre os matemáticos. Por exemplo, quando foi anunciada a demonstração de Wiles do teorema de Fermat, muitos deles passaram largas horas nos terminais de computador procurando saber mais informações e querendo saber qual a credibilidade da demonstração proposta.

Para aceder à INTERNET é necessário ter um computador, um modem e acesso a um servidor[12]. Tanto as instituições (universidades, organismos oficiais, empresas) como as pessoas individuais podem ter acesso a este serviço. A INTERNET permite que informação de interesse geral passe a estar disponível ao grande público. Assim, diversas universidades têm páginas a que podem facilmente aceder todos os interessados. O Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra dispõe de uma página com informações de interesse geral sobre a educação matemática em Portugal. Também a Associação de Professores de Matemática prepara presentemente (1996) uma página com informações sobre as suas actividades.

A INTERNET permite a constituição de grupos de utilizadores, chamados fóruns, que levam a cabo "debates electrónicos" sobre temas de interesse comum. Existem fóruns internacionais sobre diversos temas como o ensino da geometria ou o uso de calculadoras gráficas. A Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação criou um fórum para discutir os problemas do ensino da Matemática em Portugal que funciona desde Maio de 1995[13].

É de prever que este meio de comunicação venha a assumir no futuro uma importância tão grande para a educação matemática quanto a que já assume hoje para a própria Matemática.

Em conclusão, os computadores desempenham quatro papéis diferenciados na investigação matemática pura e aplicada como:

• *Fonte de problemas, por exemplo no estudo das propriedades de certos algoritmos e na avaliação da sua eficiência;*

• *Meios auxiliares para a formulação de conjecturas, permitindo a simulação do comportamento de determinados sistemas e a influência neles exercida por estes ou aqueles parâmetros ou propriedades estruturais;*

• *Meios auxiliares (parciais ou integrais) de demonstração, modificando o conceito usual de demonstração;*

• *Meios de comunicação, permitindo a troca de informações entre os investigadores.*

Um dos fenómenos mais marcantes do mundo moderno é a matematização e informatização geral da sociedade, com utilização generalizada de modelos matemáticos. Na sociedade de informação, a Matemática passou a desempenhar um novo papel social, sendo cada vez mais extensivamente usada em todas as esferas da actividade humana, nomeadamente nas áreas da gestão política e económica, o que não deixa de trazer novos problemas de ordem filosófica, social e política (Davis e Hersh, 1988).

---

12 Um servidor é um computador de elevada potência que funciona como elemento de apoio para todo um grupo de utilizadores a ele directamente ligados.

13 Passados 6 meses da sua criação este fórum tinha já mais de 50 subscritores, tendo discutido extensamente a proposta de ajustamento dos programas do ensino secundário e, muito particularmente, o uso das novas tecnologias.

Existe uma íntima ligação entre o computador e a Matemática que se põe tanto ao nível das questões da estrutura e dos conceitos básicos como ao das questões ligadas às aplicações baseadas nos mais diversos modelos. As primeiras já são ensinadas correntemente no ensino universitário, mas a sua natureza extremamente abstracta sugere que só de forma progressiva (e muitas vezes indirecta) virão a afectar os níveis de ensino mais elementares. As questões ligadas às suas aplicações assumem no entanto já plena actualidade. O computador é usado constantemente. Não se trata apenas de tirar partido da sua existência. Trata-se igualmente de compreendê-lo, conhecendo as suas potencialidades e limitações, não aceitando que ele seja usado para nos manipular e controlar.

Tarefas

1) Dê exemplos de mapas envolvendo 4 (e só 4) países que a) possam ser pintados com 3 cores sem risco de confusão; b) exijam 4 cores para que se distingam claramente todos os países.

2) Faça uma pesquisa na INTERNET de temas ligados ao uso de computadores no ensino da Matemática. Eis alguns endereços por onde pode começar:

— http://forum.geometry.edu

— http://eryx.syr.edu/colections.html

— http://www.tc.cornell.edu/Edu/MathSciGateway/

— http://www.mat.uc.pt./~jaimecs/index.html

— http://acorn.educ.nottingham.ac.uk/SchEd/pages/gates/names.html

Leitura recomendada

Pavelle, R., Rothstein, M., & Fitch, J. (1991). Álgebra por computador. In J. P. Ponte (Org.), *O computador na educação matemática* (pp. 11-27). Lisboa: APM.