UNIVERSIDADE DE ITÁUNA

2ª APS de Cálculo I
Professora Maria Cristina Castanheira

1) **Calcule os limites a seguir:**

a) $\lim_{x\to 0} 2$

b) $\lim_{x\to 2} x$

c) $\lim_{x\to 2} x^3$

d) $\lim_{x\to 1} 2x$

e) $\lim_{x\to 1} x^6$

f) $\lim_{x\to -3} -10$

Resp.: a) 2 b) 2 c) 8 d) 2 e) 1 f) - 10

Observe os exemplos:

$$\lim_{x\to -2} 3x^5+4x^4-x^2-x+2=$$

$$3\times(-2)^5+4\times(-2)^4-(-2)^2-(-2)+2=$$

$$3\times(-32)+4\times 16-4+2+2=$$

$$-96+64-4+2+2=-32$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5}=\frac{(-1)^3+4(-1)^2-3}{(-1)^2+5}=\frac{0}{6}=0$$

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{5-4x}=\sqrt{\lim_{x\to -1}(5-4x)}=\sqrt{5-4\cdot(-1)}=\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$$

2) **Calcule os limites a seguir:**

$a)\lim_{x\to 1}(4x^2-7x+5)$ $b)\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{5-3x}$ $c)\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{3x^2-2x-5}{-x^2+3x+4}\right)^3$

$d)\lim_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{2x^2+3x-3}{5x-4}}$ $e)\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{3x^3-5x^2-x+3}{4x+3}}$ $f)\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x^2+3x+2}}{6-4x}$

Resp.: $a)\ 2$ $b)\ 0$ $c)\ 1/8$ $d)\ 2/3$ $e)\ \sqrt[3]{\dfrac{39}{5}}$ $f)\ -2$

Observe os exemplos: (lembrando que quando encontramos $\frac{0}{0}$, é uma indeterminação do limite, então temos que fatorar o numerador e o denominador, simplificar, para calcular o limite)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1}\frac{1^2+1-2}{1^2-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

3) Calcule os limites a seguir:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{2+x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{8+x^3}{4-x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+6x-4}{x^3-4x^2+8x-5}$

Resp.: a) 2
b) 4
c) – 7/3
d) 3/2
e) 3
f) 1 (tem que dividir o numerador pelo denominador, para calcular o limite)

Observe o exemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \frac{0}{0}$$ **Indeterminação**

Neste caso, para eliminar a indeterminação $\frac{0}{0}$, temos que multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo "conjugado" do numerador. Desta forma, temos:

1) $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{1+x}-2)(\sqrt{1+x}+2)}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{1+x})^2-2^2}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{1+x-4}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{(\sqrt{1+x}+2)} = \frac{1}{(\sqrt{1+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[\sqrt{4+x}-2\right]\left[\sqrt{4+x}+2\right]}{x\sqrt{4+x}+2} = \lim_{x\to 0}\frac{4+x-4}{x\sqrt{4+x}+2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\sqrt{4+x}+2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{4}$$

4) Calcule os limites a seguir:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

f) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x-1}$

Resp.: a) ½ b) ½ c) ¼ d) – 1 e) 1 f) $\sqrt{2}/4$

5) Calcule os limites a seguir:

$a)\ \lim_{x\to 2} \frac{3x-4}{(x-2)^2}$ $b)\ \lim_{x\to 1} \frac{2x+3}{(x-1)^2}$ $c)\ \lim_{x\to 1} \frac{1-3x}{(x-1)^2}$

$d)\ \lim_{x\to 0} \frac{3x^2-5x+2}{x^2}$ $e)\ \lim_{x\to -2} \frac{x+4}{x+2}$ $f)\ \lim_{x\to 3} \frac{1-2x}{x-3}$

$g)\ \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}$ $h)\ \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$

Resp.: $a)+\infty$ $b)+\infty$ $c)-\infty$ $d)+\infty$ $e)\nexists$ $f)\nexists$ $g)\nexists$ $h)\nexists$

6) Calcule os limites a seguir:

$a)\ \lim_{x\to+\infty}(2x+3)$ $b)\ \lim_{x\to-\infty}(4-5x)$ $c)\ \lim_{x\to+\infty}(5x^2-4x+3)$

$d)\ \lim_{x\to+\infty}(4-x^2)$ $e)\ \lim_{x\to-\infty}(3x^3-4)$

Resp.: $a)+\infty$ $b)+\infty$ $c)+\infty$ $d)-\infty$ $e)-\infty$

Exemplos:

1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{2x^2-3}\right)$, o resultado daria $\frac{\infty}{\infty}$ (indeterminação)

Dividindo todos os termos pelo maior grau de x, temos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{5x^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{2-\frac{3}{x^2}}\right)=\frac{5}{2-\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{5}{2-0}=\frac{5}{2}$$,

ou simplesmente considerando os termos de maior grau de x no numerador e no denominador

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{2x^2-3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{2x^2}\right)=\frac{5}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=\frac{5}{2}\lim_{x\to\infty}(1)=\frac{5}{2}$$

2) Calcular o limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)=\frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1+0}{0+0}=\frac{1}{0}=\infty$$

ou

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

3) Calcular o limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{\sqrt[3]{7x^3+3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{5x}{x}}{\frac{1}{x}\sqrt[3]{7x^3+3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}\left(7x^3+3\right)}}\right)=\frac{5}{\sqrt[3]{7+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}}=\frac{5}{\sqrt[3]{7}}$$

ou

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{\sqrt[3]{7x^3+3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{\sqrt[3]{7x^3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{\left(\sqrt[3]{7}\right)\sqrt[3]{x^3}}\right)=\frac{5}{\sqrt[3]{7}}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}\right)=\frac{5}{\sqrt[3]{7}}\lim_{x\to\infty}(1)=\frac{5}{\sqrt[3]{7}}$$

4) Calcular o limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(7x^2+3x^3\right)=\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(\frac{7x^2}{x^3}+\frac{3x^3}{x^3}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(\frac{7}{x}+3\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x^3(0+3)\right]$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^3(0+3)\right]=\lim_{x\to\infty}\left(3x^3\right)=3\lim_{x\to\infty}x^3=(3)\cdot(\infty)=\infty$$

ou simplesmente

$$\lim_{x\to\infty}\left(7x^2+3x^3\right)=7\lim_{x\to\infty}\left(x^2\right)+3\lim_{x\to\infty}\left(x^3\right)=\infty+\infty=\infty$$

7) Calcule os limites a seguir:

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{5x-1}$

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5-4x}{2x-3}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-4x+3}{3x+2}$

d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-1}{3x^2+5x-2}$

e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3-2x}{5x+1}$

f) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^2+1}$

g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+4}{3x^3+5x^2-6x+2}$

h) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4}{8x^3-1}$

i) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{(x+1)^3-x^3}$

j) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-3)^3}{x(x+1)(x+2)}$

k) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-3)^3(3x-2)^2}{x^5}$

Resp.: a) 3/5 b) - 2 c) + ∞ d) 0 e) - 2/5 f) - ∞
g) 0 h) 0 i) 1/3 j) 8 k) 72

Observe o teorema:

1) Sendo a ϵ R, 0 < a, a ≠ 1 e $\lim_{x\to b}f(x)=c$, então

$$\lim_{x\to b}a^{f(x)}=a^{\lim_{x\to b}f(x)}=a^c$$

8) Calcule os limites a seguir:

a) $\lim_{x\to 3}2^{2x^2-3x+1}$

b) $\lim_{x\to -2}3^{x^2+6x+2}$

c) $\lim_{x\to 0}e^{\frac{3x+2}{x-1}}$

d) $\lim_{x\to -2}10^{\frac{4x^2+6x-2}{3x+4}}$

e) $\lim_{x\to 2}3^{\frac{x^2-4}{x-2}}$

f) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-x^2}{x-1}}$

Resp.: a) 2^{10} b) 3^{-6} c) e^{-2} d) 10^{-1} e) 81 f) 4

Observe os exemplos:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{5} = \left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{5} = e^{5}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{4x}$

Neste caso, usaremos uma mudança de variável...

Faça $x = -3t$. Se $x \to -\infty$ então $t \to +\infty$.

Logo, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{4x} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\frac{3}{-3t}\right)^{4(-3t)} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-12t}$

$= \left[\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-12} = e^{-12}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{5/x} = \lim\limits_{x\to 0}[(1+x)^{1/x}]^{5} = e^{5}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{5^{3x}-1}{2x}\right]$

Neste caso, usaremos uma mudança de variável...

Faça $3x = t \qquad x \to 0$

$x = \frac{t}{3} \qquad t \to 0$

Logo, $\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{5^{t}-1}{2\cdot\frac{t}{3}}\right] = \lim\limits_{t\to 0}\left[(5^{t}-1)\cdot\frac{3}{2t}\right] = \lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{5^{t}-1}{t}\cdot\frac{3}{2}\right] = \left[\lim\limits_{t\to 0}\frac{5^{t}-1}{t}\right]\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{3}{2}$

$$\ln 5\cdot\frac{3}{2}$$

9) Calcule os limites a seguir:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{1/x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{2/x}$

Resp.: a) e b) e² c) $e^{1/3}$ d) e^4 e) e^6
f) e^4 g) e^{-6}