Corp. Universitaria Empresarial Alexander von Humboldt

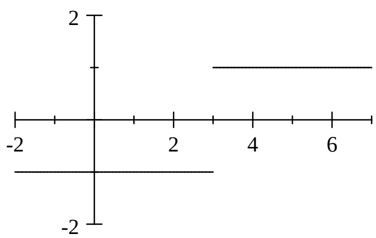
FACULTAD DE INGENIERÍA

Espacio Académico: CÁLCULO DIFERENCIAL

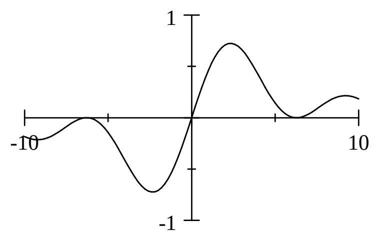
Contenido: TALLER DE LÍMITES

Docente: CARLOS ANDRÉS TRUJILLO SALAZAR

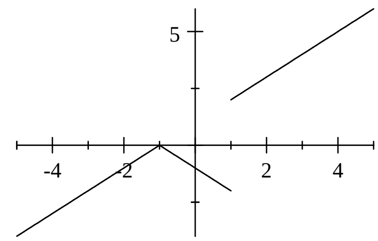
1. Use la gráfica para hallar el límite



$\lim\limits_{x\to 3}\frac{|x-3|}{x-3}$



$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$



$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left|x^2-1\right|}{x-1}$

2. Utilice la gráfica de $y=f(x)$ mostrada en la figura 1 para determinar

a. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ d. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

3. Utilice la gráfica de $y=h(x)$ mostrada en la figura 2 para determinar

a. $\lim\limits_{x\to -3} h(x)$ b. $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x)$ c. $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$ d. $h(2)$ e. $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$ f. $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

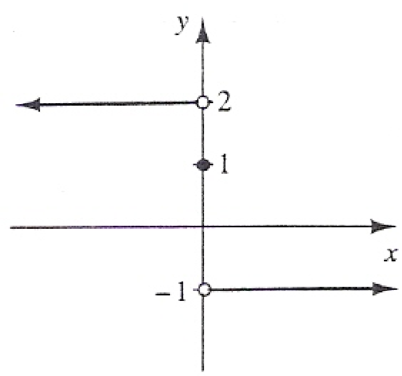


Figura 1.

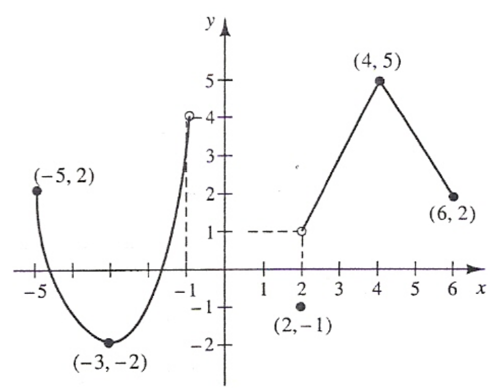


Figura 2.

4. Bosqueje la gráfica de $g(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si } x<1\\ x-1 & \text{si } 1<x<2\\ 6-x^2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

Después, determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

a. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ b. $g(1)$ c. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ d. $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$

5. Elabore la gráfica de la función f, de tal forma que satisfaga las siguientes condiciones:

   a) Su dominio es el intervalo $[0,4]$

   b) $f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$

   c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ *d)* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$ *e)* $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=1$ *f)* $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$

6. Determine el límite que se indica.

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2}{\sqrt{x^2-x+2}}$ b. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{(x+4)(x-2)^4}}{(3x-6)^2}$ c. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

d. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4-18x^2+81}{(x-3)^2}$ e. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-4x^2+x+6}{x+1}$ f. $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{(3u+4)(2u-2)^3}{(u-1)^2}$

g. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2-4}{h}$ h. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ i. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-6x^2+9x}{(x-3)^2}$

j. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^5}{x^5-1}$ k. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-13x-10}{2x^2-7x-15}$ l. $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

m. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ n. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16-x}}{x}$ o. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

p. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$ q. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2-16}{2x^3-5x^2+9x-14}$ r. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}$

7. Determine el límite que se indica.

a) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\theta}{\sin\theta}$ *b)* $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{3\theta\tan\theta}{\sin\theta}$ *c)* $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin 3\theta}{2\theta}$ *d)* $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin 3\theta}{\tan\theta}$

e) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\tan 5\theta}{\sin 2\theta}$ *f)* $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1-\cos\theta}{\theta\sin\theta}$ *g)* $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\tan 2\theta}{\sin 2\theta-1}$ *h)* $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin 3\theta+4\theta}{\theta\ \sec\theta}$

i) $\lim\limits_{\theta\to 2\pi} \dfrac{\theta-2\pi}{\sin\theta}$ *j)* $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\tan\theta-\sin\theta}{\sin^3\theta}$ *k)* $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ R/ $\dfrac{1}{2}$

l) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1-\cos^2\theta}{3\theta}$ *m)* $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{x+1}$ *n)* $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1-\cos(3\theta)}{\sin(4\theta)}$

o) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sec\theta-1}{\theta\ \sec\theta}$ *p)* $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{3-3\cos^2\theta}{\theta\sin\theta}$ *q)* $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cot(\pi\theta)\ \sin\theta}{2\sec\theta}$

8. Determine el límite que se indica.

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{(x-5)(3-x)}$ b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{2x^3-100x^2}$ c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\sqrt{x^3}+3x}{\sqrt{2x^3}}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{\pi x^3+3x}{\sqrt{2}\,x^3+7x}}$ e. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)}}$ f. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$

g. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x+1}}{x+4}$ h. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x^3+1}{x^2-2x+2}$ i. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-1}}$

j. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+2}}$ k. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5}\right)$ l. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$

R/ 1 R/ 0 R/ 1

Sugerencia: para el ejercicio 10k, multiplique y divida por $\left(\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-5}\right)$

9. Determine el límite que se indica.

a. $\lim\limits_{x\to4^+} \dfrac{x}{x-4}$ b. $\lim\limits_{\theta\to\pi^+} \dfrac{\theta^2}{\sin\theta}$ c. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\pi\theta}{\cos\theta}$

d. $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}$ e. $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ f. $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x-1}{x^2(x+2)}$

10. *Drogas ilegales*. El costo en millones de dólares que gasta una agencia gubernamental al incautar $x\,\%$ de cierta droga ilegal es: $C(x)=\frac{528x}{100-x}$, $0\leq x<100$.

   a) Calcule el costo de incautación del 25 %
   b) Encuentre el costo de incautación del 50 %
   c) Diga el costo de incautación del 75 %
   d) Determine el límite de C cuando $x\to100^-$

11. *Desechos tóxicos*. Recientemente uno de los pozos de cierta ciudad se contaminó con tricloroetileno, un agente cancerígeno, porque una antigua planta química derramó sustancias en el agua. Una propuesta enviada al comité consultivo de la ciudad indica que el costo de la eliminación de $x\,\%$ del contaminante tóxico, en millones de dólares, está dada por: $C(x)=\frac{0{,}5\ x}{100-x}$, $0\leq x<100$.

   a) Halle el costo de eliminación de 50 % del contaminante; 60 %, 70 %, 80 % y 90 %
   b) Evalúe $\lim\limits_{x\to100} \frac{0{,}5\ x}{100-x}$ e interprete los resultados

12. *Ingresos en taquilla*. Los ingresos totales en taquilla a nivel mundial de cierta película son aproximados por la función $T(x)=\frac{120x^2}{x^2+4}$.

   Donde T se mide en millones de dólares y x son los meses posteriores al lanzamiento de la película.

a) ¿Cuáles son los ingresos totales en taquilla después del primero, segundo y tercer mes?

b) ¿Cuál será el ingreso bruto total de la película a largo plazo?

13. *Costo de un automóvil.* Un estudio sobre el costo de uso de los automóviles subcompactos del año 1992 reflejó que el costo promedio, medido en centavos por km, es aproximado por la función: $C(x) = \frac{2010}{x} + 17{,}80$.

    Donde x denota los kilómetros recorridos por el automóvil en un año.

    a) ¿Cuál es el costo promedio de uso de un automóvil subcompacto que recorre 5000, 15000 y 25000 kilómetros al año?

    b) ¿Qué le ocurre al costo promedio cuando los kilómetros recorridos aumentan sin límite?

14. Establezca si la función indicada es continua en $c = 3$

    a. $g(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ b. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3-27}{t-3} & \text{si } t \neq 3 \\ 27 & \text{si } t = 3 \end{cases}$ c. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-6}{x^3-27} & \text{si } x \neq 3 \\ \frac{2}{29} & \text{si } x = 3 \end{cases}$

15. Para las siguientes funciones, halle los valores de x (si existe alguno) en los que f no es continua. Indique el tipo de discontinuidad

    a) $y = \dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$ *b*) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ *c*) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2-4x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

16. Las siguientes funciones no están definidas en cierto punto. Redefinalas, para que cada una de ellas sea continua en ese punto.

    a. $f(x) = \dfrac{x^2-49}{x-7}$ b. $f(x) = \dfrac{2x^2-18}{3-x}$ c. $g(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$

    d. $h(t) = \dfrac{\sqrt{t}-1}{t-1}$ e. $\phi(x) = \dfrac{x^4+2x^2-3}{x+1}$ f. $f(x) = \sin\left(\dfrac{x^2-1}{x+1}\right)$

17. Grafique una función que tenga una discontinuidad de salto en $x = 2$ y una discontinuidad removible en $x = 4$, pero que sea continua en todos los demás puntos

18. Dibuje la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones

    a) Su dominio es $[-2, 2]$

    b) $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 1$

    c) Es discontinua en -1 y 1

    d) Es discontinua por la derecha en -1 y continua por la izquierda en 1

19. Determine en cada caso el valor de k, de modo que la función dada sea continua en todas partes.

a. $f(x) = \begin{cases} kx - 3 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + k & \text{si } x > -1 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ kx^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c. $h(x) = \begin{cases} \frac{4\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ k - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

d. $\phi(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - k^2}{x - k} & \text{si } x \neq k \\ 8 & \text{si } x = k \end{cases}$

20. Determine en cada caso los valores de a y b, de modo que la función dada sea continua en todas partes.

a) $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

R/ $a = 4$ y $b = -2$

b) $\phi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ ax + b & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

R/ $a = -2$ y $b = 0$