Contents

Análise Real

Davi Asher da C. Barrocas Prof: Luiz Alberto Viana

Abstract

Essas notas são referentes a disciplina de Análise Real, lecionada pelo Prof. Dr. Luiz Alberto Viana. A disciplina em questão é obrigatória para os alunos do Bacharelado em Matemática, sendo lecionada no 4º período do curso na Universidade Federal Fluminense (UFF). Devido a pandemia da COVID-19, as aulas foram ministradas através do Google Meet. Também foi recomendado assistir as aulas do Curso de Verão de 2017 ministrado no IMPA.

Há uma chance não trivial de que haja algo errado ou incompleto (principalmente nas demonstrações), dessa maneira, consulte a bibliografia do curso que está indicada no final do documento. Todos os erros são minha responsabilidade.

1 Semana 1: Conjuntos Finitos e Infinitos

Nessa primeira aula, é definido os conceitos de conjunto finito e infinito, também definido os conjuntos infinitos enumeráveis e não-enumeráveis.

1.1 Números Naturais

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é definido pelos seguintes fatos, conhecidos como Axiomas de Peano:

Teorema 1.1.
- *Existe uma função injetiva* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*. A imagem* $s(n)$ *de cada número natural* $n \in \mathbb{N}$ *chama-se* ***sucessor*** *de* n
- *Existe um único natural* $1 \in \mathbb{N}$ *tal que 1 não é sucessor de nenhum outro natural.*
- *(Indução) Se um conjunto* $X \subset \mathbb{N}$ *é tal que* $1 \in X$ *e* $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$*, então* $X = \mathbb{N}$

Em posse dos axiomas de Peano, podemos definir a operação de *adição* e de *multiplicação*:

- (Adição) $m + 1 = s(m)$ e $m + s(n) = s(m + n)$
- (Multiplicação) $m.1 = m$ e $m.(n + 1) = mn + m$

Embora não nos aprofundemos, vale a pena ressaltar as operações no conjunto dos naturais possuem todas as propriedades que já conhecemos na escola. A prova será omitida.

Problema 1.1. *Prove que* $n + 1 = 1 + n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Proof. O caso $n = 1$ é óbvio. Se vale para n, queremos mostrar que também vale para $s(n)$. Temos que:

$$1 + s(n) = s(n + 1) \overset{hipotese}{=} s(1 + n) = 1 + s(n)$$

Logo a soma de números naturais é **comutativa**. □

Problema 1.2. *Prove que para todo n natural, não existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $n < p < n + 1$

Proof. Suponha por absurdo que exista tal p. Então teremos $p = n + q$ e $n + 1 = p + r$. Daí $p + 1 = n + 1 + q = p + r + q \Rightarrow r + q = 1$. E isso é um absurdo, pois somar 2 naturais é obter o sucessor de um número natural, que por definição, deve ser maior do que 1. □

Teorema 1.2. *(Princípio da Boa Ordem): Todo subconjunto não vazio* $A \subset \mathbb{N}$ *possui um* ***único*** *menor elemento.*

Proof. Se $1 \in A$ então 1 é o elemento mínimo. Definimos o conjunto I_n como o conjunto dos números naturais menores ou iguais a n. Se $1 \notin A$, então $A \cap I_1 = \varnothing$. Seja $B = \{n \in \mathbb{N} \mid A \cap I_n = \varnothing\}$. Como A não é vazio, então $B \neq \mathbb{N}$. Ou seja, B não pode cumprir o 3º axioma de Peano. Como $1 \in B$, existe $n \in B$ tal que $s(n) \notin B$. Portanto $s(n)$ será o mínimo de A, pois ,de fato, $A \cap I_n = \varnothing$, mas $A \cap I_{n+1} \neq \varnothing$ e $I_{n+1} = I_n \cup \{n + 1\}$, logo $n + 1 \in A$. □

Uma afirmação que é muito forte e útil é que o Princípio da Boa Ordem é *equivalente* ao Princípio da Indução. A primeira parte da prova já foi feita a cima.

1.2 Conjuntos Finitos

Dizemos que um conjunto X é *finito* quando é vazio ou quando existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : X \to I_n$. Escrevendo $x_j = f(j)$ temos então $X = \{x_1, ..., x_n\}$. A bijeção f denomina-se *contagem* dos elementos de X e n é o *número de elementos* de X. Veja que n é **único**.

Teorema 1.3. *Se* A *é um subconjunto próprio de* I_n*, não existe uma bijeção* $f : A \to I_n$

Proof. Por absurdo, suponha que n_0 é o menor natural tal que existe uma bijeção $f : A \to I_{n_0}$. Se $n_0 \in A$, então existe uma bijeção $g : A \to I_{n_0}$ tal que $g(n_0) = n_0$. Dessa forma a restrição de g é uma bijeção de $A - \{n_0\}$ sobre $I_{n_0 - 1}$, o que gera a contradição quanto a minimalidade do n_0. Caso $n_0 \notin A$, então seja $a \in A$ com $f(a) = n_0$, teremos que a restrição de f ao subconjunto próprio de $A - \{a\}$ será uma bijeção sobre $I_{n_0 - 1}$, o que contraria a minimalidade de n_0. □

Problema 1.3. *Prove o Princípio das Casas dos Pombos: Se* $m > n$*, para alojar* m *pombos em* n *casas é preciso que pelo menos uma casa abrigue mais de um pombo.*

Proof. O problema é equivalente a provar que não existe uma função injetiva $f : I_m \to I_n$. Se tal f existe, então ela é uma bijeção do domínio de I_m em $A = Im(I_m)$ a qual está contida em I_n e portanto é um subconjunto próprio de I_m, pois $m < n$, o que contraria o Teorema 1.3. □

Teorema 1.4. *Todo subconjunto de um conjunto finito, é finito.*

Proof. Se $X = \varnothing$, então o único subconjunto de X é $\varnothing$, que é vazio. (Completar em breve) $\square$

Corolário 1.4.1. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e só se, é limitado.*

Proof. Primeiramente, vamos definir o que é um subconjunto limitado: Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é *limitado* quando existe p natural tal que $x \leq p$ para todo $x \in X$. Dessa forma, se $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ é finito, pondo $p = \sum_{x_j \in X} x_j$, vemos que $x \in X \Rightarrow x \leq p$. Reciprocamente, se $X \in \mathbb{N}$ é limitado, então $X \subset I_p$ para alguem $p \in \mathbb{N}$, logo pelo Teorema 1.4, X é finito. $\square$

1.3 Conjuntos Infinitos

Dizemos que um conjunto é *infinito* quando ele não é finito (Sim, a definição é bem sem graça). Mais formalmente, X é infinito quando, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ não existe uma bijeção $f : X \to I_n$. O conjunto dos números naturais é infinito.

Teorema 1.5. *Se X é um conjunto infinito, existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$.*

Proof. Seja $A \subset X$ um subconjunto não vazio, escolhemos um elemento $x_A \in A$. Daí, pomos $f(1) = x_X$ e escrevemos $A_n = X - \{f(1), ..., f(n)\}$, veja que A é nao vazio, pois X é infinito. Então definimos $f(n+1) = x_{A_n}$. Para mostrar que é injetiva, sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Suponha sem perda de generalidade $m < n$. Então $f(m) \in \{f(1), ..., f(n-1)\}$ enquanto $f(n) \in X - \{f(1), ..., f(n-1)\}$, logo $f(m) \neq f(n)$. $\square$

Corolário 1.5.1. *Um conjunto X é infinito se, e só se, existe uma bijeção $\phi : X \to Y$, onde Y é um subconjunto próprio de X.*

Desse corolário tiramos conclusões muito interessantes, que rondam nossa cabeça quando aprendemos sobre conjuntos infinitos com a tia Ana Maria na escola. Podemos concluir que há uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_k$ onde $\mathbb{N}_k = \{k+1, k+2, ...\}$. Entretanto uma observação mais legal é que *há tantos números pares quanto números naturais*, essa relação é dada pela bijeção $\phi(n) = 2n$. O mesmo vale para os ímpares, quando definimos a função $\psi(n) = 2n - 1$.

1.4 Conjuntos Enumeráveis

Agora será respondida outra pergunta que rodeia a cabeça do estudante do Ensino Fundamental quando aprende sobre números inteiros e racionais. O questionamento é: Qual conjunto tem mais elemento? O dos números inteiros ou o dos naturais? E os racionais?

Um conjunto X é *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$, onde escrevemos $f(j) = x_j$, temos então $X = \{x_1, x_2, ..., x_j, ...\}$

Teorema 1.6. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável*

Proof. Veja que, se X é finito, não há o que demonstrar. Caso X infinito, enumerados os elementos de X, colocando x_1 como o menor elemento de X e definimos da mesma forma os demais x_j, escrevemos $A_n = X - \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Como X, por hipótese, é infinito, então A_n não é vazio, dessa forma definimos x_{n+1} como sendo o menor elemento de A_n, logo $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Caso existisse alguem $x \in X$ difererente de todos os x_n, teríamos $x \in A_n$ para todo n natural, ou seja, n seria maior que todos os elementos do conjunto infinito X, o que contraria a infinidade de X. □

Corolário 1.6.1. *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável*

Proof. O produto cartesiano de 2 conjuntos é definido da seguinte forma: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Se A e B são enumeráveis, então existem as sobrejeções $f : \mathbb{N} \to A$ e $g : \mathbb{N} \to B$, portanto $\phi(a, b) = (f(a), g(b))$, onde $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$, (veja que ϕ é sobrejetiva).

Dessa forma, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para isso considere a função $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $\phi(a, b) = 2^a.3^b$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, ϕ é injetiva. Logo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. □

Corolário 1.6.2. *A união de conjuntos enumeráveis é enumerável. Isto é, seja X_j enumerável, temos que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável.*

Daí podemos concluir que o infinito enumerável "é o menor" dos infinitos. Ou seja, *todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável.*

Problema 1.4. *Prove que o conjuntos dos números inteiros é enumerável*

Proof. Seja $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ o conjunto dos números inteiros. Definimos a bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, onde

- $f(n) = \frac{(n-1)}{2}$ se n é ímpar;
- $f(n) = -\frac{n}{2}$ se n é par.

Logo veja que há tantos números negativos quanto pares e tantos positivos quanto ímpares. □

Problema 1.5. *Prove que o conjunto dos racionais é enumerável.*

Proof. Temos que $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$. Já sabendo que o conjuntos dos números inteiros é enumerável, definimos uma função sobrejetora $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$, tal que, $(m, n) \mapsto \frac{m}{n}$. □

2 Semana 2: Números Reais

Agora nosso objeto de estudo é o conjunto dos números reais. Não será feita uma definição axiomática dos reais (por meio de cortes de Dedekind e afins), nosso foco será provar que o conjunto dos números reais é um **corpo ordenado completo**. E mais: O conjunto dos reais é o único corpo ordenado completo.

2.1 É um corpo

Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio sobre o qual podemos definir duas aplicações binárias denominadas *adição*$(+)$ e *multiplicação*$(.)$; A estrutura $(\mathbb{K}, +, .)$ é um corpo se:

- $(\mathbb{K}, +)$ é um grupo abeliano;
- $(\mathbb{K} - \{0\}, .)$ é grupo abeliano;
- A operação . é distributiva em relação a $+$.

Ou seja, um corpo é dotado de todas as propriedades que gostamos e estamos acostumados. Dessa forma, é evidente que $(\mathbb{R}, +, .)$, de fato, é um corpo. Outros exemplos de corpos são: $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$ e $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ com p primo.

Problema 2.1. *Prove que* $x.0 = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Proof. Temos que $x + 0.x = 1.x + 0.x = x(1 + 0) = x.1 = x \Rightarrow 0.x = 0$ □

2.2 É um corpo ordenado

Essa é a parte mais chata. Aqui vamos mostrar as relações de ordem no corpo dos reais, ou seja, falar sobre os conceitos de menor, maior e igual. Dizer que o conjunto dos reais é um corpo ordenado significa dizer que existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, denominado conjunto dos *reais positivos*, que cumpre as condições:

- A soma e o produto de reais positivos são positivos
- Dado $x \in \mathbb{R}$ ocorre exatamente uma das 3 possibilidades: ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$

Definimos o conjunto $\mathbb{R}^-$ (*reais negativos*) o conjunto dos números x tal que $-x \in \mathbb{R}^+$. Dessa forma, concluimos que: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.

Dizemos que x é menor do que y quando $y - x \in \mathbb{R}^+$, o conceito de maior é definido de forma análoga. É bom ressaltar que a relação de ordem $x < y$ possui algumas propriedades, entretanto não serão abordadas aqui, visto que já estamos habituados com todas elas.

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ são exemplos de corpos ordenados.

Problema 2.2. *Se $x, y \in \mathbb{R}$ então $|x+y| \leq |x| + |y|$*

Proof. Como já conhecemos, a definição do valor absoluto de um número é a seguinte: $|x| = x$, se $x \geq 0$ e $|x|$ $-x$ se $x < 0$.

Para demonstrar a desigualdade, vamos usar o fato de que $|x| + |y| \geq x + y$ e também $|x| + |y| \geq -(x+y)$, logo $|x| + |y| \geq |x+y| = max\{x+y, -(x+y)\}$ ☐

Teorema 2.1. *Sejam $a.x.\delta$ com $\delta > 0$. Tem-se $|x-a| < \delta$ se, e só se, $x \in (a-\delta, a+\delta)$*

Proof. De fato, $|x-a| < \delta \Leftrightarrow max\{x-a, a-x\} < \delta \Leftrightarrow x-a < \delta$ e $a-x < \delta$, ou seja, $x < a+\delta$ e $x > a-\delta \Leftrightarrow x \in (a-\delta, a+\delta)$. ☐

2.3 É um corpo ordenado completo

Chegamos na parte mais legal. Até agora não conseguimos distinguir o corpo dos racionais do corpo dos reais. Essa semelhança será eliminada agora, pois o conjunto dos racionais não são um corpo ordenado completo.

Dizemos que um corpo ordenado é **completo** se todo subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{R}$ *limitado superiormente* possui um *supremo*. Mas o que significa ser limitado superiormente e o que é o supremo? Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito *limitado superiormente* quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$ $\forall a \in A$. Analogamente, definimos o conceito de *limitado inferiormente.*

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e limitado superiormente. Dizemos que b é o *supremo* de X quando b é a menor cota superior de X, isto é, b é o menor número que é maior que todos os elementos de X. Denotamos $b = supX$

Analogamente, definimos o *ínfimo* de X como sendo a maior cota inferior de X, isto é, o maior número que é menor que todos os elementos de X, seja c tal número, denotamos $c = infX$

Vale a pena ressaltar que o supremo (e o ínfimo) de um conjunto nem sempre pertence ao intervalo o qual o conjunto está contido. Por exemplo, seja $X = [a, b)$, a é o elemento mínimo, e portanto $a = infX$ e $b = supX$, veja porém, que $b \notin X$

Veja também que: Seja o conjunto $-X = \{-x \mid x \in X\}$, então $infX = -(sup(-X))$, pois como $-X$ é limitado superiormente, então X é limitado inferiormente.

Teorema 2.2 ($\mathbb{R}$ é um corpo arquimediano)**.**

- *O conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ não é limitado superiormente;*
- *O ínfimo do conjunto $X = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ é 0;*
- *Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\exists n \in \mathbb{N} \mid n.a > b$*

Proof. 1) Se $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ fosse limitado superiormente, existiria $c = sup\mathbb{N}$. Logo $c-1$ não seria uma cota superior de $\mathbb{N}$, isso é, existiria $n > c-1 \Rightarrow c < n+1$, logo c não seria uma cota superior.☐

2) Obviamente 0 é uma cota inferior de X, basta provar então que não existe $c > 0$ que é cota superior de X, isto é, queremos provar que 0 é a maior cota inferior de X. Ora, dado $c > 0$ existe, um natural $n > 1/c \Leftrightarrow 1/n < c$. ☐

3) Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ por 1) sabemos que existe $n > b/a \Rightarrow na > b$. $\square$

Teorema 2.3 (Intervalos Encaixados)**.** *Sejam* $a_n, b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ *e* $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq ... \leq b_2 \leq b_1$*,isto é,* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ...$*, ou de forma mais geral,* $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$*, então* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing$

Proof. Temos que o conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ é limitado superiormente, e portanto, possui um supremo, seja $c = supA$, logo temos que $c \geq a_n$ e além disso, todo $c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto $c \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\square$

Teorema 2.4. *O conjunto dos números reais é não enumerável e todo intervalo não degenerado é não enumerável.*

Proof. $\square$

Um número é chamado de *irracional* quando ele não é racional. Como o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável, então pelo Teorema 2.4, de fato, existem números irracionais e mais: O conjunto dos irracionais ($\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) é não enumerável e portanto, formam a maioria dos reais. Ou seja, a maior parte do conjunto dos reais é formada por números irracionais.

Teorema 2.5 ($\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$)**.** *Todo intervalo não degenerado* I *contém números racionais e irracionais*

Proof. Com certeza, I contém números irracionais, pois caso contrário seria enumerável. Para provar que I possui números racionais, tomemos $[a, b] \subset I$, onde $a < b$ podem ser irracionais. Fixemos n natural tal que $1/n < b - a$. Temos que $\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} I_m$, onde $I_m = [m/n, (m+1)/n], m \in \mathbb{Z}$. Logo existe m tal que $a \in I_m$. Como a é irracional, $m/n < a < (m+1)/n$. Sendo $1/n$ o comprimento do intervalo I_m menor que $b - a$, segue que $(m+1)/n < b$, logo o racional $(m+1)/n$ pertence ao intervalo $[a, b]$ e portanto, pertence a I. $\square$

3 Semana 3: Sequências

References

[1] Elon Lages Lima. *Análise Real*. Vol. 1. Impa Rio de Janeiro, 2004.