Noções Básicas

Regra do Produto

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \longleftrightarrow (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Exemplo: $h(x) = xe^x$

$$h'(x) = \tfrac{d}{dx}(xe^x) \longrightarrow \begin{cases} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g(x) = e^x & g'(x) = e^x \end{cases}$$
$$h'(x) = x\tfrac{d}{dx}(e^x) + e^x\tfrac{d}{dx}(x)$$
$$h'(x) = xe^x + e^x \cdot 1 = e^x(x+1)$$
$$h'(x) = (x+1)e^x$$

Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Exemplo:

$$h(x) = \underbrace{\sin}_{f(x)}(\underbrace{x^2+2}_{g(x)}) \longrightarrow \begin{cases} f'(x) = \cos \\ g'(x) = 2x \end{cases}$$
$$h'(x) = \underbrace{\cos}_{f'(x)}(\underbrace{x^2+2}_{g(x)}) \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}$$

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

$$\frac{dy}{dx} = xy(x) \leftrightarrow f'(x) = xf(x) \leftrightarrow y' = xy$$

Equações Separáveis

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y), \ \mathrm{f(y)} \neq 0$$

Solução

$$\tfrac{dy}{dx} = \frac{\overbrace{2x}^{g(x)}}{\underbrace{1+2y}_{f(y)}} \therefore (1+2y)\ \mathrm{dy} = 2x\ \mathrm{dx}$$
$$\int(1+2y)\ \mathrm{dy} = \int 2x\ \mathrm{dx}$$
$$y + y^2 = x^2 + c$$

EDO (1ª Ordem)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \text{ , P e Q são funções ou constantes}$$

Solução

Exemplo: $x^2y' + xy = 1$

1. Dividir ambos os lados pelo coeficiente de y'

$$\frac{x^2y'}{x^2} + \frac{xy}{x^2} = \frac{1}{x^2} \therefore y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

2. Achar o fator integrante $P(x)$ e calcular $I(x) = e^{\int P(x) \text{ dx}}$

$$P(x) = \tfrac{1}{x} \to I(x) = e^{\int \frac{1}{x}} = e^{\ln x} = x$$

3. Multiplicar ambos os lados pelo fator integrante

$$x \cdot y' + x \cdot \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2 \cdot}x \therefore xy' + y = \frac{1}{x}$$

4. Usar a regra do produto: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$xy' + 1 \cdot y = (xy)' \therefore (xy)' = \frac{1}{x}$$

5. Integrar de ambos os lados

$$\int (xy)' = \int \frac{1}{x} \therefore xy = \ln x + c$$

6. Resolver o P.V.I. (Se houver)

EDO (2ª Ordem)

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

Para $P(x), Q(x), R(x), Q(x)$ sendo funções ou constantes

Caso Homogêneo - $G(x) = 0$

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \therefore Ay'' + By' + Cy = 0$$

Solução

1. Primeiro pegamos a equação auxiliar $Ay'' + By' + Cy = 0$
2. Achamos as suas raízes $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
3. Solucionamos caso a caso

a. $\Delta > 0 : y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

b. $\Delta < 0 : y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Integral por partes

$$\int u \ dv = uv - \int v \ du$$

Exemplo:

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{\mathrm{dv}} dx \longrightarrow \begin{cases} u = x & du = 1 \\ v = e^x & dv = e^x \end{cases}$$

$$= uv - \int v \,\mathrm{du} \longrightarrow \underbrace{x}_{\mathrm{u}} \underbrace{e^x}_{\mathrm{v}} - \int \underbrace{e^x}_{\mathrm{v}} \cdot \underbrace{1}_{\mathrm{du}}$$

$$= xe^x - e^x + c$$

Integração por substituição

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \,\mathrm{dx} = F(g(x)) + C \qquad \int f(u) du = F(u) + C$$

Exemplo:

$$\int (x-3)^{12} \,\mathrm{dx} \longrightarrow \int \overbrace{(\underbrace{x-3}_{u})^{12}}^{f} \underbrace{\mathrm{dx}}_{\mathrm{du}} \longrightarrow \begin{cases} u = x - 3 \\ du = 1 \end{cases}$$

$$= \int u^{12} \,\mathrm{du} = \frac{u^{13}}{13} \cdot 1 + C = \frac{(x-3)^{13}}{13} + C$$