Capítulo 1: Calculo de Probabilidade

Espaço Amostral (Ω) : Enumeração (finita ou infinita) de todos os resultados possíveis.

$\Omega = A1, A2, A3, \ldots$

Evento (A): Resultados ou conjunto de resultados possíveis. Chamamos 'evento' qualquer subconjunto do espaço amostral.

Evento Impossível (ø): Conjunto Vazio, pois ele nunca acontecerá.

Probabilidade (P(A)): Probabilidade de um evento **A** ocorrer.

$$P(A) = \frac{A}{\Omega}$$

União - (A ∪ B)

> Pelo menos um ocorre

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, Para eventos mutuamente exclusivos.

Interseção - (A ∩ B)

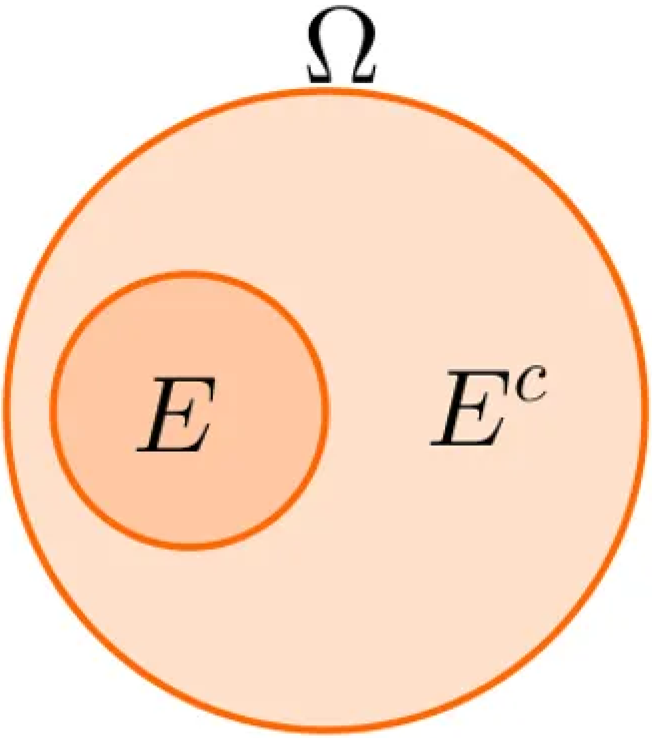
> A **e** B ocorrem

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ - Eventos Independentes

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ - Eventos Dependentes

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Evento Complementar (A^c)



$P(A^c) = 1 - P(A)$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Permutação e Combinação

Uma *permutação de k elementos* é quando a ordem de sorteio importa, e a quantidade de possíveis permutações é dado por

$$P_{n,k} = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Uma *combinação de k elementos* é quando a ordem não importa, e a quantidade de possíveis combinações é dada por

$$\binom{n}{k} = \frac{P_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Axiomas de Probabilidade

Seja Ω um espaço amostral. Uma *probabilidade* é uma função $\mathbb{P}$ que atribui a eventos $A \subseteq \Omega$ um número real $\mathbb{P}(A)$ e satisfaz os seguintes axiomas:

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ ou $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Para $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disjuntos e tomados 2 a 2:

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Propriedades de Probabilidade

1. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2. $A \subset B \rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
3. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4. Princípio da inclusão-exclusão

   $$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

5. Leis de Morgan

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i^c)$$

Capítulo 2: Dependência e condicionamento

Probabilidade Condicional

Para eventos A e B, a probabilidade condicional de *A dado B* é definida como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Independência

Dois eventos A e B são independentes se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Independência é o oposto de mutuamente exclusivos (disjuntos)!
Obs: $P(A|B) = P(A)$

Teorema de Bayes

Se A e B são eventos com probabilidade positiva, então

$$P(A|B) = \frac{(P(A) \cdot P(B|A))}{P(B)}$$

obs: $P(A \cap B) = P(A) \cdot (B|A)$

Capítulo 3: Variáveis aleatórias discretas

Variável Aleatória

Seja Ω um espaço amostral. Uma variável aleatória (v.a) é uma função

$$X : w \in \Omega \rightarrow X(w) \in \mathbb{R}$$

Varáveis aleatórias são *características numéricas* de um experimento aleatório representado por w.

Também podemos usar a função $\mathbb{P}_x : A \to [0, 1]$ definida por

$$\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

para calcula probabilidades
$\mathbb{P}_x$ é chama de distribuição de probabilidade da v.a. X.

Variável Aleatória Discreta

Uma v.a. X é discreta se o conjunto $\Omega_X \subset R$ de *todos os valores possíveis de X* (não confundir com Ω!) for enumerável.
A função massa de probabilidade (f.m.p.) de uma v.a. X discreta é a função $p_X : \Omega \to [0, 1]$ dada por

$$p_X(x) = P(X = x).$$

> Associa a cada valor possível da variável aleatória discreta suas respectiva probabilidade

Tal que,

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x), & x \in Rx \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Satisfazendo, $p(x) \geq 0$ e $\sum_{x \in Rx} p(x) = 1$

Modelos de Variáveis Aleatórias Discretas

Modelo Bernoulli

> Sucesso ou Fracasso

$$X \sim Ber(p) \qquad (0 < p < 1)$$

$$\mathbb{p}_X(x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad \text{para } x \in \{0, 1\}$$

- $E[X] = P$
- $Var(X) = P(1 = P)$

Modelo Binomial

$X \sim Bin(n, p)$

> Chama-se de experimento binomial ao experimento que
>
> - consiste em n ensaios de Bernoulli
> - cujo ensaios são independentes, e
> - para qual a probabilidade de sucessos em casa ensaio é sempre igual a p $(0 < p < 1)$

$$p_X = \mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x},$$
$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \qquad\qquad x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

- $E[X] = n \cdot p$
- $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Modelo Hipergeométrico

$X \sim Hip(m, n, k)$

> m $\rightarrow$ Sucessos
>
> n $\rightarrow$ Fracassos
>
> k $\rightarrow$ Tamanho da amostra

$$p_X = \mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{m}{x} \cdot \binom{n}{k-x}}{\binom{m+n}{k}}$$

- $E[X] = k \cdot \frac{m}{m+n}$
- $Var(X) = n \cdot \frac{k}{m+n} \cdot \frac{m+n-m}{m+n} \cdot \frac{m+n-k}{m+n-1} = \frac{n^2k(m+n-k)}{(m+n)^2(m+n-1)}$

Modelo Geométrico

$X \sim Geom(p)$

> Número de repetições de um ensaio de Bernoulli com probabilidade de sucesso $(0 < p < 1)$ até ocorrer o primeiro sucesso

$$\mathbb{P}(X = x) = p \cdot (1-p)^x \qquad , x \in \mathbb{N}$$

- $E[X] = \frac{1}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-P}{p^2}$

Modelo Binomial Negativo

> Tentativas independentes com mesma probabilidade de sucesso $p \in [0, 1]$, sejam realizadas até que se acumule um total de r sucessos.

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r \cdot (1-p)^{x-r}, \qquad x \in \{r, r+1, \ldots\}$$

Modelo Poisson

$X \sim Poi(\lambda)$

> Eventos Raros

$$p(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = \{0, 1, 2, ..\}$$

$E[X] = Var(x) = \lambda$

Capítulo 4: Esperança e variância

Valor Esperado (Esperança, média)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot p_X(x)$$

Onde, x é o valor de X, e $p(x)$ é a probabilidade de X.

O valor esperado é uma **constante**

O valor esperado é uma medida de centralidade. Esse valor depende somente da distribuição da v.a. X, isto é, da f.m.p. p_X.

Linearidade da Esperança

Se X é v.a., então para todos os números reais a e b

$$\mathbb{E}(\alpha X + b) = \alpha \mathbb{E}(X) + b$$
$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{Y}$$

Esperança de Função de v.a.

$$\mathbb{E}(g(x)) = \sum_{x \in \Omega_X} g(X) \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

Variância e Desvio Padrão

- Variância

$$Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

- Desvio Padrão

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Capítulo 5: Distribuições de probabilidades conjuntas

Distribuição conjunta

Sejam X e Y v.a.s definidas no mesmo espaço amostral. O par (X,Y) é chamado vetor aleatório bidimensional

O vetor aleatório bidimensional (X,Y) é chamado discreto se X e Y são v.a.s discretas

A função de massa de probabilidade conjunta do v.a. (X,Y) discreto é a função $p_{X,Y}(x, y)$ definida por

$$p_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y) \text{ para todo } (x, y) \in \Omega_X \times \Omega_Y$$

$$\begin{cases} p_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y) \text{ para todo } (x,y) \in \Omega_X \times \Omega_Y \\ \sum_{x \in \Omega_X} \sum_{y \in \Omega_Y} p_{X,Y} = 1 \end{cases}$$

Distribuição Marginal

$$p_X(x) = \sum_{y \in \Omega_Y} \mathbb{P}(X=x, Y=y) \text{ para todo } x \in \Omega_X$$

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \Omega_X} \mathbb{P}(X=x, Y=y) \text{ para todo } y \in \Omega_Y$$

Independência

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$$

Distribuição Condicional

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega_X$$

Note que a f.m.p. condicional $p_{X|Y}$ satisfaz

$$\begin{cases} p_{X|Y}(x|y) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in \Omega_X \times \Omega_Y \\ \sum\limits_{x \in \Omega_X} p_{X|Y}(x|y) = 1 \quad \text{para cada} \quad y \in \Omega_Y \end{cases}$$

Covariância

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \quad \text{(Linearidade da esperança)} \end{aligned}$$

As seguintes propriedades são imediatas da definição:

1. $\operatorname{Cov}(X,X) = \operatorname{Var}(X))$
2. $\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Cov}(Y,X)$
3. $\operatorname{Cov}(X,Z) = 0$, se Z é uma variável aleatória constante com probabilidade 1
4. $\operatorname{Cov}(aX,Y) = a \cdot \operatorname{Cov}(X,Y), \quad \text{para } a \in \mathbb{R}$
5. Para quaisquer números reais a, b, c e d,

$$\operatorname{Cov}(aX+bY, cX+dY) = ac \cdot \operatorname{Var}(X) + bd \cdot \operatorname{Var}(Y) + (ad+bc) \cdot \operatorname{Cov}(X,Y)$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

> Uma $f(x)$ definida sobre o espaço amostral (Ω) e assumindo valores num intervalo de número reais, é dita uma variável aleatória contínua. Uma v.a. é contínua se existir $F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denominada **função de densidade de probabilidade (f.d.p.)**, satisfazendo:

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

OBS: Satisfazendo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

> Variável Aleatória Discreta $\rightarrow$ **Contagem**
> Variável Aleatória Contínua $\rightarrow$ **Medição**

- Função de Distribuição Acumulada (f.d.a.)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad x \subset \mathbb{R} \ \ \forall f(x) = F'(x)$$

$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \centerdot f(x)dx$

$Var(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E[X])^2 \centerdot f(x)dx = E[X^2] \centerdot E[X]^2$

Modelos Probabilísticos

Modelo Uniforme Contínuo

$X \sim Uniforme(a, b)$

> Dizemos que X é uma variável uniforme no intervalo $[a.\, b], (a, b) \in \mathbb{R}, a < b$, se a função de densidade de probabilidade da variável x é constante nesse intervalo e nula fora dele

- Função de densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

- Esperança

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

- Variância

$$Var(x) = \frac{(a+b)^2}{12}$$

Modelo Exponencial

$X \sim Exp(\lambda)$

> Dizemos que X é uma variável exponencial com parâmetro λ, $\lambda > 0$, se a função de densidade de X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- Função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

- Esperança

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

- Variância

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Modelo Normal

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Esperança

$$E[X] = \mu$$

- Variância

$$Var(x) = \sigma^2$$