

Prova Final - Cocada 2023-2 - Prof. João Paixão

Justifique suas respostas e coloque um item por página em ordem.

1. Sequência de Fibonacci. A sequência de Fibonacci é definida pelas fórmulas:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

Calcule $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_k}{F_{k+1}}$

2. Considere a função $f(x) = \frac{(x-12)^2}{9} + 10$. Determine todos os tamanhos (se existir) que o passo pode ter para o método convergir qualquer x inicial.
3. Usando a informação que a decomposição QR de A é

$$A = Q \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

e a_1, a_2 e a_3 são as colunas de A e q_1, q_2 e q_3 são as colunas de Q .

Determine o tamanho da projeção do vetor a_3 no plano gerado por a_1 e a_2 .

4. A tabela abaixo foi obtida como resultado de um experimento relativo ao valor da temperatura T (em graus Celsius) com a posição x (em centímetros):

$$\begin{array}{ccccc} x & 1 & 10 & 1000 \\ T(x) & \frac{1}{10} & 1 & 100 \end{array}$$

Determine a curva da forma $T(x) = x^c$ que melhor se ajusta aos dados da tabela com o método de mínimos quadrados com coeficientes não-lineares e use o modelo para calcular $T(2)$.

5. Dado um sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- (a) Descreva como você pode aproximar a solução de do sistema com o gradiente descendente com o passo=0.5. Precisar escrever somente o código.
- (b) Escreva o código do método de Jacobi para esse sistema linear.
6. Sabendo que os autovalores de A são 1 e -1 e os autovetores são respectivamente $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine $\lim_{k \rightarrow \infty} (A - 3I)^k \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

1 Segunda Chamada da T3

1. Descreva como você pode aproximar a solução de um sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

com o gradiente descendente com o passo=0.5. Faça dois passos do método gradiente descendente com vetor nulo sendo o vetor inicial. O método converge?

2. Seja $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Essa é a melhor fatoração de posto 1?
3. Prove a fórmula $A^t Ax = A^t b$ de mínimos quadrados usando derivadas parciais. Pode supor que A é 3 por 2 e b é 3 por 1.
4. Usando a informação que a decomposição QR de A é

$$A = Q \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

e a_1, a_2 e a_3 são as colunas de A e q_1, q_2 e q_3 são as colunas de Q . Determine a norma de frobenius de A .

5. Considere a função $f(x) = \frac{(x-12)^2}{9} + 10$. Determine todos os tamanhos (se existir) que o passo pode ter para o método do gradiente descendente convergir qualquer x inicial.