Noções Básicas

Regra do Produto

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \longleftrightarrow (f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

Exemplo: $h(x) = xe^x$

$$h'(x) = \tfrac{d}{dx}(xe^x) \longrightarrow \begin{cases} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g(x) = e^x & g'(x) = e^x \end{cases}$$
$$h'(x) = x\tfrac{d}{dx}(e^x) + e^x\tfrac{d}{dx}(x)$$
$$h'(x) = xe^x + e^x\cdot 1 = e^x(x+1)$$
$$h'(x) = (x+1)e^x$$

Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Exemplo:

$$h(x) = \underbrace{\sin}_{f(x)}(\underbrace{x^2+2}_{g(x)}) \longrightarrow \begin{cases} f'(x) = \cos \\ g'(x) = 2x \end{cases}$$
$$h'(x) = \underbrace{\cos}_{f'(x)}(\underbrace{x^2+2}_{g(x)})\cdot\underbrace{2x}_{g'(x)}$$

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

$$\frac{dy}{dx} = xy(x) \leftrightarrow f'(x) = xf(x) \leftrightarrow y' = xy$$

Equações Separáveis

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y),\ \mathrm{f(y)} \neq 0$$

Solução

$$\tfrac{dy}{dx} = \frac{\overbrace{2x}^{g(x)}}{\underbrace{1+2y}_{f(y)}} \therefore (1+2y)\ \mathrm{dy} = 2x\ \mathrm{dx}$$
$$\int(1+2y)\ \mathrm{dy} = \int 2x\ \mathrm{dx}$$
$$y + y^2 = x^2 + c$$

EDO (1ª Ordem)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \text{ , P e Q são funções ou constantes}$$

Solução

Exemplo: $x^2y' + xy = 1$

1. Dividir ambos os lados pelo coeficiente de y'

$$\frac{x^2y'}{x^2} + \frac{xy}{x^2} = \frac{1}{x^2} \therefore y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

2. Achar o fator integrante $P(x)$ e calcular $I(x) = e^{\int P(x) \text{ dx}}$

$$P(x) = \frac{1}{x} \rightarrow I(x) = e^{\int \frac{1}{x}} = e^{\ln x} = x$$

3. Multiplicar ambos os lados pelo fator integrante

$$x \cdot y' + x \cdot \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2 \cdot}x \therefore xy' + y = \frac{1}{x}$$

4. Usar a regra do produto: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$xy' + 1 \cdot y = (xy)' \therefore (xy)' = \frac{1}{x}$$

5. Integrar de ambos os lados

$$\int (xy)' = \int \frac{1}{x} \therefore xy = \ln x + c$$

6. Resolver o P.V.I. (Se houver)

EDO (2ª Ordem)

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

Para $P(x), Q(x), R(x), Q(x)$ sendo funções ou constantes

Caso Homogêneo - $G(x) = 0$

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \therefore Ay'' + By' + Cy = 0$$

Solução

1. Primeiro pegamos a equação auxiliar $Ay'' + By' + Cy = 0$
2. Achamos as suas raízes $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
3. Solucionamos caso a caso

a. $\Delta > 0 : y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

b. $\Delta < 0 : y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Integral por partes

$$\int u \ dv = uv - \int v \ du$$

Exemplo:

$$\int \underbrace{x}_{\text{u}} \underbrace{e^x}_{\text{dv}} dx \longrightarrow \begin{cases} u = x & du = 1 \\ v = e^x & dv = e^x \end{cases}$$

$$= uv - \int v \ \text{du} \longrightarrow \underbrace{x}_{\text{u}} \underbrace{e^x}_{\text{v}} - \int \underbrace{e^x}_{\text{v}} \cdot \underbrace{1}_{\text{du}}$$

$$= xe^x - e^x + c$$

Integração por substituição

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \ \text{dx} = F(g(x)) + C \qquad \int f(u) du = F(u) + C$$

Exemplo:

$$\int (x-3)^{12} \ \text{dx} \longrightarrow \int \overbrace{\underbrace{(x-3)}_{u}{}^{12}}^{f} \underbrace{\text{dx}}_{\text{du}} \longrightarrow \begin{cases} u = x - 3 \\ \quad du = 1 \end{cases}$$

$$= \int u^{12} \ \text{du} = \frac{u^{13}}{13} \cdot 1 + C = \frac{(x-3)^{13}}{13} + C$$

1. Cinemática e Cálculo

- **Posição, Velocidade e Aceleração**: A velocidade é a primeira derivada da posição, e a aceleração é a segunda.
  a. Vetor Velocidade: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$
  b. Vetor Aceleração: $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$
- **Regra da Cadeia**: Essencial para derivar funções compostas, como $\cos(kt)$. [cite: 2, 4]
  a. $\frac{d}{dt}[f(g(t))] = f'(g(t)) \cdot g'(t)$
- **Derivação Implícita**: Usada quando `x` e `y` são funções do tempo e estão relacionados por uma equação de trajetória. Derivamos ambos os lados da equação em relação a `t`.
- **Norma de um Vetor**: Usada para encontrar a velocidade escalar a partir do vetor velocidade.
  a. Para $\vec{v} = (v_x, v_y)$, a norma é $||\vec{v}|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$[cite: 217, 218].

2. Dinâmica (Forças)

- **Segunda Lei de Newton**: A base para encontrar a equação de um movimento a partir das forças.
  a. $F_{resultante} = ma = m\ddot{r}$
- **Forças Comuns**:
  a. **Peso**: $\vec{P} = mg$, aponta verticalmente para baixo.
  b. **Força Normal (N)**: Perpendicular à superfície de contato, equilibra a componente perpendicular do peso.
  c. **Força de Atrito (F_a)**: Oposta ao movimento, $F_a = \mu N$. [cite: 912]
  d. **Força Centrípeta (F_c)**: Força resultante que aponta para o centro e mantém o corpo em movimento circular. Sua magnitude é $F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$.

3. Leis de Conservação

- **Conservação de Energia Mecânica**: Usada quando não há atrito ou outras forças dissipativas. A energia total (cinética + potencial) permanece constante.
  a. Energia Cinética: $K = \frac{1}{2}mv^2$
  b. Energia Potencial Gravitacional: $U_g = mgh$
  c. Princípio: $K_{inicial} + U_{inicial} = K_{final} + U_{final}$
- **Conservação de Momento Linear**: Chave para resolver **todas** as colisões em sistemas isolados.
  a. Momento Linear: $p = mv$
  b. Princípio: $P_{total,inicial} = P_{total,final}$

Resumo dos Exercícios Resolvidos

Capítulo 4 - Momento Linear

Exercício 1 (p. 74): Colisão Elástica em Sequência

- **Tópicos**: Colisão Elástica, Conservação de Momento.
- **Fórmulas**:
  a. Inversão de velocidade (choque com parede): $v_f = -v_i$.
  b. Velocidade final da partícula 2 (alvo parado): $\overline{w}_2 = \frac{2m_1\bar{v}_1}{m_1+m_2}$.
- **Pontos de Atenção**: Manter a consistência dos sinais das velocidades e mapear corretamente as variáveis do problema para as da fórmula.

Exercício 2 (p. 74): Bola Quicando

- **Tópicos**: Conservação de Energia, Coeficiente de Restituição, Prova por Indução.

- **Fórmulas**: $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, $w = ev$, $h_n = e^{2n}h$.
- **Pontos de Atenção**: O coeficiente de restituição `e` conecta a velocidade *antes* do choque (`v`) com a velocidade *depois* (`w`). A prova por indução foi uma forma rigorosa de confirmar o padrão físico.

Capítulo 5 - Energia

Exercício 2 (p. 86): Carrinho na Rampa com Loop

- **Tópicos**: Conservação de Energia, Força Centrípeta, Movimento Circular.
- **Fórmulas**: $E_i = E_f$, $F_c = \frac{mv^2}{R}$, $v_{min} = \sqrt{gR}$.
- **Pontos de Atenção**: A condição para a velocidade mínima no topo do loop é quando a Força Normal (N) se torna zero[cite: 1291, 1293]. A solução exige a combinação da análise de forças (para a condição no topo) com a conservação de energia (para relacionar com a altura inicial).

Exercício 3 (p. 86): Colisão Perfeitamente Inelástica

- **Tópicos**: Colisão Inelástica, Conservação de Momento, Perda de Energia.
- **Fórmulas**: $P_{antes} = P_{depois}$, $K = \frac{1}{2}mv^2$.
- **Pontos de Atenção**: A característica principal é que os objetos se juntam e passam a ter uma única velocidade final. A energia cinética **não** é conservada.

Exercício 4 (p. 87): Cadeia de Colisões

- **Tópicos**: Colisão Elástica, Padrões, Conservação de Energia.
- **Fórmulas**: $w_{j+1} = \frac{2m_j v_j}{m_j + m_{j+1}}$, $h_n = \frac{v_n^2}{2g}$.
- **Pontos de Atenção**: O segredo para resolver problemas em cadeia é resolver para o primeiro caso, depois para o segundo, e então **observar o padrão** para generalizar para o n-ésimo caso.