

Capítulo 1: Calculo de Probabilidade

Espaço Amostral (Ω): Enumeração (finita ou infinita) de todos os resultados possíveis.

$$\Omega = A_1, A_2, A_3, \dots$$

Evento (A): Resultados ou conjunto de resultados possíveis. Chamamos 'evento' qualquer subconjunto do espaço amostral.

Evento Impossível (\emptyset): Conjunto Vazio, pois ele nunca acontecerá.

Probabilidade ($P(A)$): Probabilidade de um evento **A** ocorrer.

$$P(A) = \frac{A}{\Omega}$$

União - ($A \cup B$)

Pelo menos um ocorre

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ Para eventos mutuamente exclusivos.}$$

Interseção - ($A \cap B$)

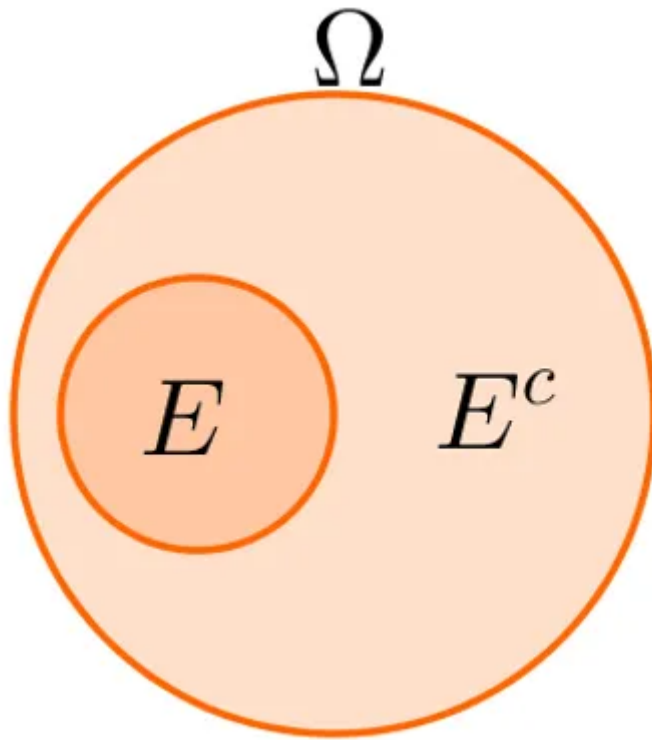
A e B ocorrem

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) - \text{Eventos Independentes}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) - \text{Eventos Dependentes}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Evento Complementar (A^c)



$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Permutação e Combinação

Uma *permutação de k elementos* é quando a ordem de sorteio importa, e a quantidade de possíveis permutações é dado por

$$P_{n,k} = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Uma *combinação de k elementos* é quando a ordem não importa, e a quantidade de possíveis combinações é dada por

$$\binom{n}{k} = \frac{P_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Axiomas de Probabilidade

Seja Ω um espaço amostral. Uma *probabilidade* é uma função \mathbb{P} que atribui a eventos $A \subseteq \Omega$ um número real $\mathbb{P}(A)$ e satisfaz os seguintes axiomas:

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ ou $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Para A_1, A_2, \dots, A_n disjuntos e tomados 2 a 2:

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Propriedades de Probabilidade

1. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2. $A \subset B \rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
3. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4. Princípio da inclusão-exclusão

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

5. Leis de Morgan

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i^c)$$

Capítulo 2: Dependência e condicionamento

Probabilidade Condicional

Para eventos A e B, a probabilidade condicional de **A dado B** é definida como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- $P(A|B) = 1 - P(A^c|B)$
- $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$

Independência

Dois eventos A e B são independentes se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Independência é o **oposto** de mutuamente exclusivos (disjuntos)!

Obs: $P(A|B) = P(A)$

Teorema de Bayes

Se A e B são eventos com probabilidade positiva, então

$$P(A|B) = \frac{(P(A) \cdot P(B|A))}{P(B)}$$

obs: $P(A \cap B) = P(A) \cdot (B|A)$

$$P(A|B) + P(A|B^c) = 1$$

Capítulo 3: Variáveis aleatórias discretas

Variável Aleatória

Seja Ω um espaço amostral. Uma **variável aleatória** (v.a) é uma função

$$X : w \in \Omega \rightarrow X(w) \in \mathbb{R}$$

Varáveis aleatórias são **características numéricas** de um experimento aleatório representado por w .

Também podemos usar a função $\mathbb{P}_x : A \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

para calcula probabilidades

\mathbb{P}_x é chama de distribuição de probabilidade da v.a. X .

Variável Aleatória Discreta

Uma v.a. X é **discreta** se o conjunto $\Omega_X \subset R$ de **todos os valores possíveis de X** (não confundir com Ω !) for enumerável.

A **função massa de probabilidade** (f.m.p.) de uma v.a. X discreta é a função $p_X : \Omega \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$p_X(x) = P(X = x).$$

Associa a cada valor possível da variável aleatória discreta suas respectiva probabilidade

Tal que,

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), & i = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Satisfazendo, $p(x) \geq 0$ e $\sum_{x \in R} p(x) = 1$

Modelos de Variáveis Aleatórias Discretas

Modelo Bernoulli

Sucesso ou Fracasso

$$X \sim Ber(p) \quad (0 < p < 1)$$

$$\mathbb{P}_X(x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad \text{para } x \in \{0, 1\}$$

- $E[X] = P$
- $Var(X) = P(1 - P)$

Modelo Binomial

$$X \sim Bin(n, p)$$

Chama-se de experimento binomial ao experimento que

- consiste em n ensaios de Bernoulli
- cujo ensaios são independentes, e
- para qual a probabilidade de sucessos em cada ensaio é sempre igual a p ($0 < p < 1$)

$$p_X = \mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x},$$
$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \quad x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

- $E[X] = n \cdot p$
- $Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Modelo Hipergeométrico

$$X \sim Hip(m, n, k)$$

$m \rightarrow$ Sucessos

$n \rightarrow$ Fracassos ($N-m$)

$k \rightarrow$ Tamanho da amostra

$m+n \rightarrow N$ (Ω)

$$p_X = \mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{m}{x} \cdot \binom{n}{k-x}}{\binom{m+n}{k}}$$

- $E[X] = \frac{k \cdot m}{m+n} = k \cdot \frac{m}{N} = kp$
- $Var(X) = \frac{k \cdot m}{m+n} \left[\frac{(k-1)(m-1)}{m+n-1} + 1 \right] = np(1-p) \frac{N-k}{N-1}$

Modelo Geométrico

$$X \sim Geom(p)$$

Número de repetições de um ensaio de Bernoulli com probabilidade de sucesso ($0 < p < 1$) até ocorrer o primeiro sucesso

$$\mathbb{P}(X = x) = p \cdot (1 - p)^x, \quad x \in \mathbb{N}$$

- $E[X] = \frac{1}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Modelo Binomial Negativo

Tentativas independentes com mesma probabilidade de sucesso $p \in [0, 1]$, sejam realizadas até que se acumule um total de r sucessos.

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r \cdot (1-p)^{x-r}, \quad x \in \{r, r+1, \dots\}$$

- $E[X] = \frac{r}{p}$
- $Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

Modelo Poisson

$$X \sim Poi(\lambda)$$

Eventos Raros

$$p(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$E[X] = Var(x) = \lambda$$

Capítulo 4: Esperança e variância

Valor Esperado (Esperança, média)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot p_X(x)$$

Onde, x é o valor de X , e $p(x)$ é a probabilidade de X .

O valor esperado é uma **constante**

O valor esperado é uma **medida de centralidade**. Esse valor depende somente da distribuição da v.a. X , isto é, da f.m.p. p_X .

Linearidade da Esperança

Se X é v.a., então para todos os números reais a e b

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\alpha X + b) &= \alpha \mathbb{E}(X) + b \\ \mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) &= \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

Esperança de Função de v.a.

$$\mathbb{E}(g(x)) = \sum_{x \in \Omega_X} g(x) \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

Variância e Desvio Padrão

- Variância

$$Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

- Desvio Padrão

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Capítulo 5: Distribuições de probabilidades conjuntas

Distribuição conjunta

Sejam X e Y v.a.s definidas no mesmo espaço amostral. O par (X,Y) é chamado vetor aleatório bidimensional

O vetor aleatório bidimensional (X,Y) é chamado discreto se X e Y são v.a.s discretas

A **função de massa de probabilidade conjunta** do v.a. (X,Y) discreto é a função $p_{X,Y}(x,y)$ definida por

$$p_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y) \text{ para todo } (x,y) \in \Omega_X \times \Omega_Y$$
$$\begin{cases} p_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y) \text{ para todo } (x,y) \in \Omega_X \times \Omega_Y \\ \sum_{x \in \Omega_X} \sum_{y \in \Omega_Y} p_{X,Y} = 1 \end{cases}$$

Distribuição Marginal

$$p_X(x) = \sum_{y \in \Omega_Y} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \text{ para todo } x \in \Omega_X$$
$$p_Y(y) = \sum_{x \in \Omega_X} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \text{ para todo } y \in \Omega_Y$$

Independência

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Distribuição Condicional

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \text{ para todo } x \in \Omega_X$$

Note que a f.m.p. condicional $p_{X|Y}$ satisfaz

$$\begin{cases} p_{X|Y}(x|y) \geq 0 & \text{para todo } (x,y) \in \Omega_X \times \Omega_Y \\ \sum_{x \in \Omega_X} p_{X|Y}(x|y) = 1 & \text{para cada } y \in \Omega_Y \end{cases}$$

Covariância

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \quad (\text{Linearidade da esperança}) \end{aligned}$$

As seguintes propriedades são imediatas da definição:

1. $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
2. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
3. $\text{Cov}(X, Z) = 0$, se Z é uma variável aleatória constante com probabilidade 1
4. $\text{Cov}(aX, Y) = a \cdot \text{Cov}(X, Y)$, para $a \in \mathbb{R}$
5. Para quaisquer números reais a, b, c e d ,

$$\text{Cov}(aX + bY, cX + dY) = ac \cdot \text{Var}(X) + bd \cdot \text{Var}(Y) + (ad + bc) \cdot \text{Cov}(X, Y)$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Uma $f(x)$ definida sobre o espaço amostral (Ω) e assumindo valores num intervalo de número reais, é dita uma variável aleatória contínua. Uma v.a. é contínua se existir $F_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denominada **função de densidade de probabilidade (f.d.p.)**, satisfazendo:

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

OBS: Satisfazendo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Variável Aleatória Discreta → **Contagem**

Variável Aleatória Contínua → **Medição**

- Função de Distribuição Acumulada (f.d.a.)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad \forall f(x) = F'(x)$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$\text{Var}(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E[X])^2 \cdot f(x)dx = E[X^2] - E[X]^2$$

Modelos Probabilísticos

Modelo Uniforme Contínuo

$$X \sim \text{Uniforme}(a, b)$$

Dizemos que X é uma variável uniforme no intervalo $[a, b]$, $(a, b) \in \mathbb{R}$, $a < b$, se a função de densidade de probabilidade da variável x é constante nesse intervalo e nula fora dele

- Função de densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

- Esperança

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

- Variância

$$Var(x) = \frac{(a+b)^2}{12}$$

Modelo Exponencial

$$X \sim Exp(\lambda)$$

Dizemos que X é uma variável exponencial com parâmetro λ , $\lambda > 0$, se a função de densidade de X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- Função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

- Esperança

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

- Variância

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Modelo Normal

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Esperança

$$E[X] = \mu$$

- Variância

$$Var(x) = \sigma^2$$