AULA PASSADA VIMOS

DUALIDADE-

Relação entre os problemas Primal e Dual

Teorema da Folga Complementar

AULA PASSADA VIMOS

DUALIDADE- Resultados importantes

- Teorema da Dualidade Fraca (**COTA SUPERIOR**)
- Teorema da Dualidade Forte

Teorema da dualidade fraca

Para TODA solução primal viável $(x_1,x_2,\dots x_n)$ e para TODA solução dual viável $(y_1,y_2,\dots,y_m)$ tem-se:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{m} b_i y_i} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \max imize\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ sujeito\ a\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1,\dots,m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,\dots,n) \end{cases} \qquad \begin{cases} \min imize\ w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ sujeito\ a\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = 1,\dots,n) \\ y_i \geq 0 \quad (i = 1,\dots,m) \end{cases}$$

Resultado a partir da desigualdade:

se encontramos uma solução primal viável $(x_1^*, \dots, x_n^*)$

e uma solução dual viável $(y_1^*,\dots,y_m^*)$ tal que

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*}$$

Então nós concluímos que ambas soluções são ÓTIMAS

TEOREMA DE DUALIDADE FORTE

Se o primal (P)

(P) $\begin{cases} \max imize\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ sujeito\ a \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,\ldots,m) \\ \qquad x_j \ge 0 \quad (j = 1,\ldots,n) \end{cases}$ tem uma solução ótima $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$

Então o dual (D)

(D) $\begin{cases} \min imize\ w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ sujeito\ a \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j = 1,\ldots,n) \\ \qquad y_i \ge 0 \quad (i = 1,\ldots,m) \end{cases}$ tem uma solução ótima $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$

tal que

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*} \qquad \textbf{(1)}$$

VIMOS TAMBÉM A SEGUINTE RELAÇÃO

RELAÇÃO ENTRE OS PROBLEMAS PRIMAL E DUAL

- **Dual do dual é sempre o problema primal.**

Um corolário do Teorema da Dualidade a partir desta relação

COROLÁRIO:

O Problema primal tem uma solução ótima se o somente se o problema dual tem uma solução ótima.

o que você ainda pode concluir?

problema primal ilimitado => problema dual ….

problema dual ilimitado => problema primal

e quanto a ser inviável?

Se um dos dois problemas primal ou Dual for ilimitado então o conjunto viável do outro problema é vazio.

Prova :Segue diretamente do teorema da dualidade fraca.

Na verdade, suponha que o problema primal é ilimitado e, portanto,$z=\mathbf{c}^t\mathbf{x}\rightarrow+\infty$.

Por contradição, suponha que o problema dual seja viável. Então existiria uma solução, e

Pela teoria da dualidade fraca, teríamos que $w=\mathbf{b}^t\mathbf{y}$ seria um limite superior para o valor da função objetivo do primal $z=\mathbf{c}^t\mathbf{x}$, uma contradição porque (P) é ilimitado

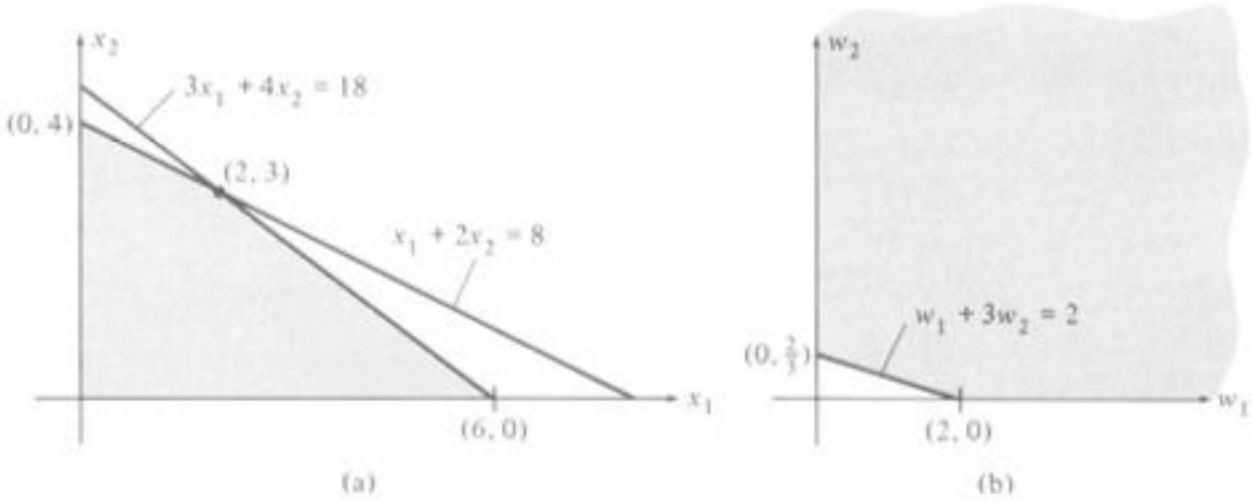
Teorema 2 Se PROBLEMA PRIMAL tem solução viável mas a função objetivo é ilimitada , então o PROBLEMA DUAL não tem solução viável
Se PROBLEMA DUAL tem solução viável mas a função objetivo é ilimitada , então o PROBLEMA PRIMAL não tem solução VIÁVEL

EXEMPLO 1.

Considere. O seguinte PPL

(P)

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



O seu dual é dado por

(D)

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & z' = 8w_1 + 18w_2 \\ \text{subject to} \quad & \\ & w_1 + 3w_2 \geq 2 \\ & 2w_1 + 4w_2 \geq 1 \\ & w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0. \end{aligned}$$

O conjuntos de soluções viáveis de (P) é mostrado em (a) e o conjuntos de soluções viáveis de (D) é mostrado em (b). .

A solução ótima do primal é x_1=6 e x_2=0 e z=12 e
a solução ótimo do Dual é w_1=0, w_2=3/2 e pelo Teorema Forte da Dualidade (TFD)

Exemplo 2

Primal

maximize $z=2x_1 + x_2$

sujeito a

$3x_1 - 2x_2 \leq 6$

$x_1 - 2x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0 \,,\; x_2 \,, \geq 0$

Dual

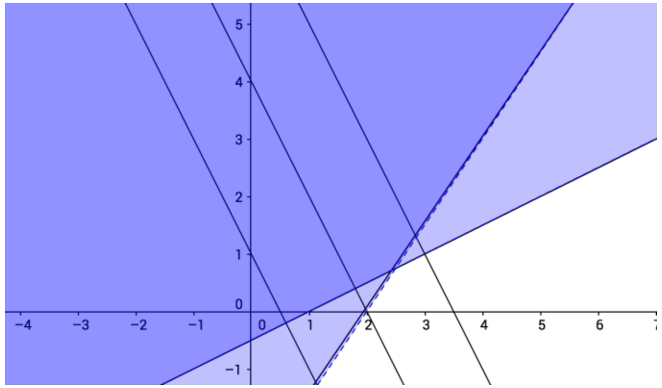
minimize $w = 6y_1 + y_2$

sujeito a

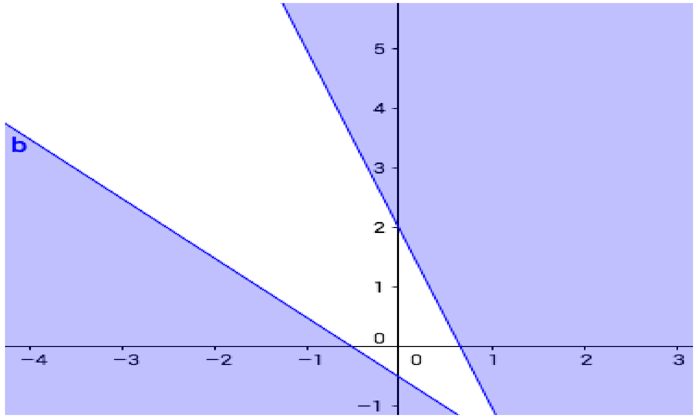
$3y_1 + y_2 \geq 2$

$-2y_1 - 2y_2 \geq 1$

$y_1 \geq 0,\; y_2 \geq 0$



ilimitado



inviável

EXEMPLO 2.

Considere. O seguinte PPL

$$\text{Maximize} \quad z = 2x_1 + x_2$$

ç

(P)

$$3x_1 - 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

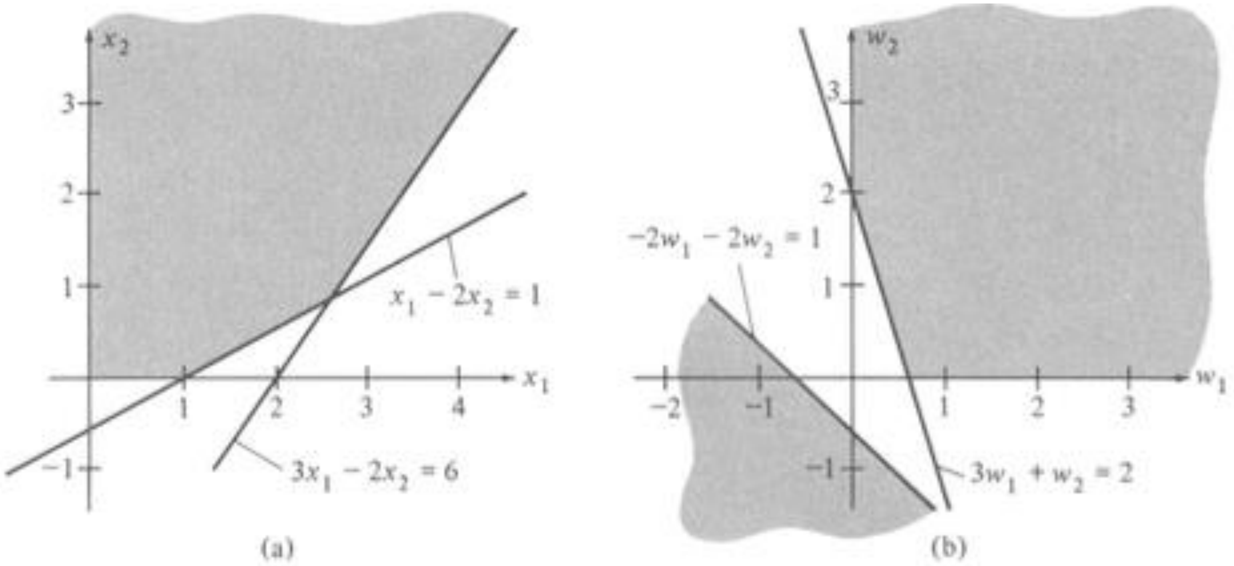
O seu dual é dado por

$$\text{Minimize} \quad z' = 6w_1 + w_2$$

(D) Sujeito a

$$3w_1 + w_2 \geq 2$$
$$-2w_1 - 2w_2 \geq 1$$
$$w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0.$$

Na figura abaixo



O conjuntos de soluções viáveis de (P) é mostrado em (a). O Problema primal tem solução ótima ilimitada. Observe que por exemplo, x_1=0, x_2 assume valores tão grandes quanto se queira , e nesse caso z= x_2 , também será tão grande quanto se queira.

As restrições do Dual (D) são mostradas em (b). Observe que não há solução viável para o problema

Exemplo3

- **Primal**

maximize $z = x_1 + x_2$

sujeito a

$-x_1 + x_2 = 4$

$x_1 - x_2 = 4$

$x_1, x_2, \geq 0$

Dual

minimize $w = 4y_1 + 4y_2$

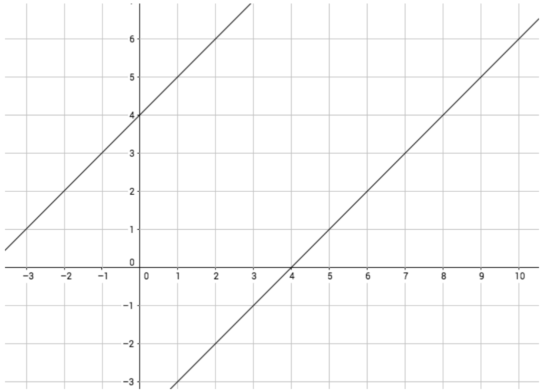
sujeito a

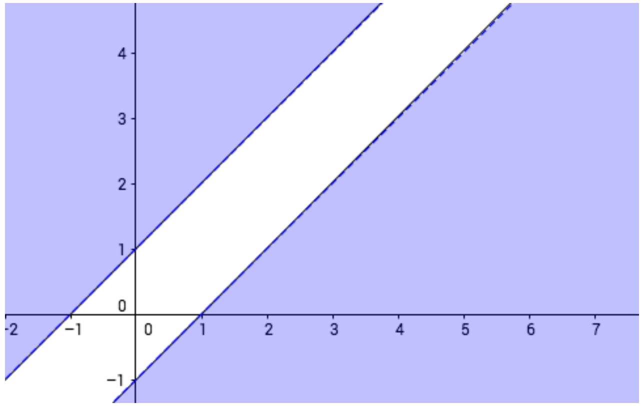
$-y_1 + y_2 \geq 1$

$y_1 - y_2 \geq 1$

y_1, y_2 irrestritos

Ambos problemas são inviáveis





É possível mostrar que nem o problema (P) , nem o problema (D) têm um solução viável

EXEMPLO 3.

Considere. O seguinte PPL

$$\text{Maximize} \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeito a

$$2x_1 - 2x_2 \le -1$$
$$-2x_1 + 2x_2 \le -4$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

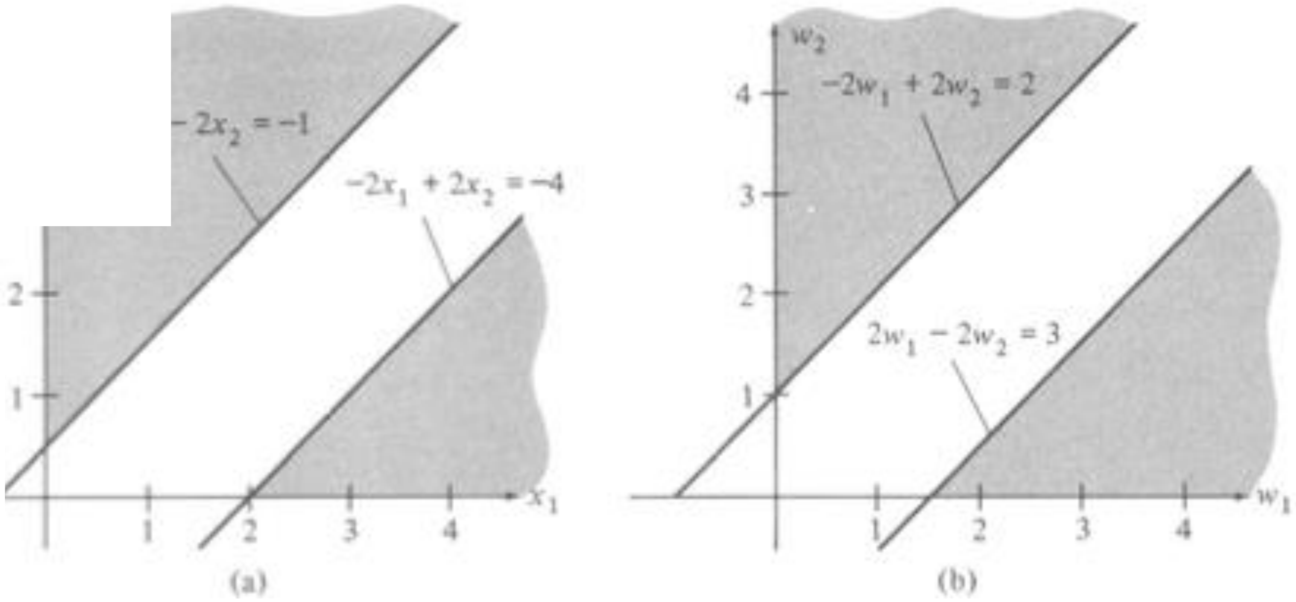
$$\text{Minimize} \quad z' = -w_1 - 4w_2$$

Sujeito a

$$2w_1 - 2w_2 \ge 3$$
$$-2w_1 + 2w_2 \ge 2$$
$$w_1 \ge 0, \quad w_2 \ge 0.$$

Na figura abaixo,

Os gráficos das restrições do problema primal são mostrados em (a) e os das restrições do dual são mostrados em (b). Nenhum dos problemas têm uma solução viável . Problemas são inviáveis.



Temos o seguinte corolário do Teorema da Dualidade (combinações Primal-Dual)

PRIMAL \ DUAL	ÓTIMA	INVIÁVEL	ILIMITADO
ÓTIMA	POSSÍVEL EXEMPLO 1	IMPOSSÍVEL (TEOREMA 3)	IMPOSSÍVEL TEOREMA 2
INVIÁVEL	IMPOSSÍVEL (TEOREMA 3)	POSSÍVEL EXEMPLO 3	POSSÍVEL EXEMPLO2
ILIMITADO	IMPOSSÍVEL (TEOREMA 2)	POSSÍVEL EXEMPLO 2	IMPOSSÍVEL (TEOREMA 2)

Problemas Primal Dual

Problema de programação linear na forma canônica

Problema Primal

$$\max \; c^{T}x$$
$$\text{S. t.} \;\; Ax \leq b$$
$$x \,\square\, 0$$

y

Problema Dual

$$\min \; b^{T}y$$
$$\text{S. t.} \;\; A^{T}y \,\square\, c$$
$$y \,\square\, 0$$

x

Programação linear na forma padrão

Problema Primal

$$\max \; c^{T}x$$
$$\text{S. t.} \;\; Ax = b$$
$$x \,\square\, 0$$

y

ProblemaDual

$$\min \; b^{T}y$$
$$\text{S. t.} \;\; A^{T}y \,\square\, c$$
y irrestito

x

Referência:Chvátal, V. *Linear Programming* 1983

Bazaraa,M. ; Jarvis , J; Sherali,H. Linear Programming and Network Flows

Relações entre os problemas primal e dual

PROBLEMA PRIMAL	PROBLEMA DUAL
maximize	minimize
Coeficientes da função objetivo	Lado direito das restrições
Coeficientes da i-ésima restrição	Coeficientes da i-ésima variável, um em cada restrição
i-ésima restrição é uma desigualdade $\leq$	i-ésima variável é ≥ 0
i-ésima restrição é uma igualdade	i-ésima variável é irrestrita
j-ésima variável é irrestrita	j-ésima restrição é uma igualdade
j-ésima variável é ≥ 0	j-ésima restrição é uma desigualdade $\geq$
Número de variáveis	Número de restrições

PRIMAL	MAXIMIZE	MINIMIZE	DUAL
	≥ 0	$\geq C_j$	
VARIÁVEIS	≤ 0	$\leq C_j$	RESTRIÇÕES
	IRRESTRITAS	$= C_j$	
	$\leq b_i$	≥ 0	
RESTRIÇÕES	$\geq b_i$	≤ 0	VARIÁVEIS
	$= b_i$	irrestrita	

DANDO CONTINUIDADE

- Folga Complementar/ Certificado de Otimalidade
- O Método Dual Simplex

Pode-se achar mais vantajoso, em certos casos, aplicar o simplex ao problema dual que diretamente ao problema primal. (a solução ótima do primal pode ser prontamente encontrada no dicionário

(tableau) final aplicado ao problema dual)

Por exemplo: m=99, n=9 => dicionário simplex tem 100 linhas no problema primal mas somente 10 no dual. Provavelmente será melhor resolver o problema dual, dado que o número de iterações guarda proporcionalidade com o número de linhas.

Do ponto de vista teórico

Dualidade aponta um modo sucinto e elegante de fornecer otimalidade de soluções de PPL:

•Uma solução ótima do problema dual fornece um **"certificado de otimalidade"** para o problema primal e vice versa.

•Mais ainda,o teorema de dualidade assegura que para *toda* solução ótima há um certificado de otimalidade.

Vejamos a seguir

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO UFRJ

O Impacto desse fato

Estudante deve resolver o problema

$$\begin{aligned} &\max imize\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &sujeito\ a \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ &\qquad\qquad x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1}$$

Aplicando o Método Simplex o estudante acha simultaneamente solução ótima $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ e uma solução ótima $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*$ do problema dual

$$\begin{aligned} &\min imize\ w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ &sujeito\ a \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ &\qquad\qquad y_i \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{2}$$

- Professor tem um modo fácil de checar se a resposta está correta. Para chegar a *viabilidade* da apresentada solução ótima , ele verificará as desigualdades

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \le b_i \quad i = 1, 2, \ldots m$$
$$x_j^* \ge 0 \quad j = 1, 2 \ldots n$$

Para checar a *otimalidade,*ele deve verificar as desigualdades

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \ge c_j \quad j = 1, 2, \ldots, n$$
$$y_i^* \ge 0$$

E a igualdade $\displaystyle \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$

Claramente envolve menos esforço computacional

VAMOS DEDUZIR AS CONDIÇÕES DE FOLGA COMPLEMENTAR

Pela dualidade fraca temos

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} (A^t y)_j x_j = \sum_{i=1}^{m} (Ax)_i y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

x solução ótima para (P) e y solução ótima de (D)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Portanto, todas as desigualdades são iguais

$$\forall j \quad c_j x_j = (A^t y)_j x_j$$

$$\forall i \quad b_i y_i = (Ax)_i y_i$$

Implicações práticas da dualidade

certificado de OTIMALIDADE

$$c_j x_j = \left(\sum_{I=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j$$

$$c_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

RESTRIÇÕES DO DUAL

ASSIM: TEMOS

$$c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

OU

$$x_j = 0$$

$$b_i y_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i$$

$$b_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

RESTRIÇÕES DO PRIMAL

ASSIM: TEMOS

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

OU

$$y_i = 0$$

Implicações práticas da dualidade

certificado de OTIMALIDADE

Concluindo que

Se x é solução ótima para o PRIMAL e y é solução ótima para o DUAL

então para todo j :

$$c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad ou \quad x_j = 0$$

para todo i:

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad ou \quad y_i = 0$$

Folga Complementar como certificado de otimalidade

TEOREMA: Seja $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ uma solução viável de (1) e $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*$ uma solução viável de (2). São condições necessárias e suficientes para otimalidade de $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ e $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*$:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \quad ou \quad x_j^* = 0 \; (ou\ ambas) \;\; para\ todo\ j = 1, 2 \ldots, n \; (3)$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* = b_j \quad ou \quad y_i^* = 0 \; (ou\ ambas) \;\; para\ todo\ i = 1, 2 \ldots, m \; (4)$$

Folga complementar a luz das variáveis de folga

Ao introduzir as variáveis de folga, as condições (3) e (4) ganham simplicidade na interpretação

Considere o PPL na forma canônica e o seu dual

$$\begin{aligned} &\max imize\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &sujeito\ a\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,\dots,m) \\ &\qquad\qquad x_j \ge 0 \quad (j = 1,\dots,n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min imize\ w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ &sujeito\ a\quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j = 1,\dots,n) \\ &\qquad\qquad y_i \ge 0 \quad (i = 1,\dots,m) \end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis de folga , obtemos;

$x_{n+i}=b_i-\Sigma_j\, a_{ij}x_j \quad i= 1,2, \dots,m$

$y_{m+j}=-c_j +\Sigma_i a_{ij}y_i \quad j= 1,2,\dots,n$

Para um par de soluções ótimas para o problema primal e seu dual tem-se:

(a) Para i=1,2,…,m, o produto da i-ésima variável de folga do problema primal e a i-ésima variável dual é zero. Isto é,

$x_{n+i}.y_i=0 \qquad i=1.2, \dots, m$

(b) Para j=1,2,…,n, o produto da j-ésima variável de folga para o problema dual e a j-ésima variável para o problema primal é zero $y_{m+j}.x_j=0$

em cada um dos n+m pares, pelo menos uma variável deve ter valor zero-

condições de folga complementar-

Uma forma mais aplicável do Teorema da Folga Complementar

TEOREMA: Considere o PPL (P)

$$\begin{cases} \max imize\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ sujeito\ a\ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,\dots,m) \\ \qquad x_j \ge 0 \quad (j = 1,\dots,n) \end{cases}$$

Uma solução viável $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ de (P) é ótima se somente se existem números e y_1^*, $y_2^*, \dots, y_m^*$ tais que

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \qquad \text{sempre que } x_j^* > 0 \quad (5)$$

$$y_i^* = 0 \qquad \text{sempre que } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \quad (6)$$

E tal que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \ge c_j \quad para\ todo \quad j = 1, 2 \dots n \\ &y_i^* \ge 0 \quad para\ todo \quad i = 1, 2 \dots m \end{aligned} \qquad (7)$$

Exemplo

Verifique se a solução dada é uma solução ótima para o problema abaixo:

$$\boxed{x_1^* = 2, x_2^* = 4, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 7, x_6^* = 0}$$

$$
\begin{aligned}
\max imize \quad & z = 18x_1 - 7x_2 + 12x_3 + 5x_4 \qquad + 8x_6 \\
sujeito \quad a \\
& 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 8x_6 \leq 1 \\
& -3x_1 - \ \ x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 1x_5 + 2x_6 \leq -2 \\
& 8x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 \qquad + 2x_6 \leq 4 \\
& 4x_1 \qquad + 8x_3 + 7x_4 - 1x_5 + 3x_6 \leq 1 \\
& 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 - 2x_5 - 1x_6 \leq 5 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Verificando (5) e(6)

$$
\begin{aligned}
2y_1^* - 3y_2^* + 8y_3^* + 4y_4^* + 5y_5^* &= 18 \\
-6y_1^* - y_2^* - 3y_3^* \qquad\quad + 2y_5^* &= -7 \\
3y_1^* + y_2^* \qquad\qquad - y_4^* - 2y_5^* &= 0 \\
y_2^* \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \\
y_5^* &= 0
\end{aligned}
$$

Desde que a solução (1/3, 0, 5/3, 1, 0) satisfaz também (7) a solução proposta para o primal é ótima

Exemplo 2

Verifique se a solução dada é uma solução ótima para o problema abaixo:

$$x_1^* = 0, x_2^* = 2, x_3^* = 0, x_4^* = 7, x_5^* = 0$$

$$\max imize \quad z = 8x_1 - 9x_2 + 12x_3 + 4x_4 + 11x_5$$

$$sujeito \quad a$$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 1$$

$$x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 1x_5 \leq 1$$

$$5x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 22$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$ sempre que $x_j^* > 0$ (5)

$y_i^* = 0$ sempre que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$ (6)

Verificando (5) e(6)

$$-3y_1^* + 7y_2^* + 4y_3^* = -9$$

$$y_1^* - 2y_2^* + 2y_3^* = 4$$

$$y_2^* = 0$$

Desde que a solução (17/5, 0 , 3/10) viola (7), isto é, não é solução viável para o dual, a solução proposta para o primal x_1^*, x_2^* , x_3^* , x_4^* x_5^* não é ótima

observação

Essa estratégia para verificação da otimalidade de uma dada suposta solução é aplicável somente se o sistema de equações (5), (6) tem uma única solução.

O resultado a seguir dá condições sob as quais isso sempre acontece:

TEOREMA: SE $x_1^*, x_2^* \ldots\ldots x_n^*$ é uma SBV não degenerada então o sistema dado

por (5), (6) tem uma única solução

Por que a hipótese SBV não degenerada? Pense nisso