- *DUALIDADE*
- PARTE 2

Aula passada: consideramos um dado PPL para a abordagem de uma cota superior para este problema

$$\max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

sujeito a

(P)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &\leq 1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\leq 55 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \end{aligned}$$

Seja z*= valor ótimo do PPL

ALGUMAS ESTIMATIVAS
(0,0,1,0)
(2,1,1,1/3) SOLUÇÕES VIÁVEIS
(3,0,2,0)

Z=3 , z*≥ 3
Z=15 , Z*≥15
Z=22, Z*≥ 22

NÃO TEMOS INFORMAÇÃO SOBRE A QUALIDADE DO LIMITANTE

Introduzimos uma estratégia para achar cotas, procedimento este , que resultou em um novo PPL que denominamos o dual do PPL dado DUALIDADE

E assim surge o **seguinte PPL.** ***O PROBLEMA DUAL***

$$
\begin{aligned}
&\max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\
&\textit{sujeito a} \\
&\qquad x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \\
&\qquad 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \\
&\qquad -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_{4\square}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Minimize} \ \ w = y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\
&\textit{sujeito a} \qquad y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 4 \\
&\qquad -y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\
&\qquad -y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 5 \\
&\qquad 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \geq 4 \\
&\qquad y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

DUALIDADE

$$\begin{cases} \text{maximize } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sujeito a } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{minimize } w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{sujeito a } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ y_i \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

DUALIDADE

Vimos que toda solução viável do DUAL, fornece um limite superior para o valor ótimo do PRIMAL.

(P)

$$\max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &\leq 1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\leq 55 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_{4\geq} & \end{aligned}$$

$Por\ exemplo\ y_1 = 11, y_2 = 0, y_3 = 6, fornece\ um\ limite\ superior\ para\ (P)$

DUALIDADE- Resultados importantes

- Teorema da Dualidade Fraca (**COTA SUPERIOR**)
- Teorema da Dualidade Forte
- Teorema da Folga Complementar

Teorema da dualidade fraca

Para TODA solução primal viável $(x_1,x_2,\dots x_n)$ e para TODA solução dual viável $(y_1,y_2,\dots,y_m)$ tem-se:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{m} b_i y_i} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \max imize\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ sujeito\ a\ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=1,\dots,m) \\ \qquad x_j \ge 0 \quad (j=1,\dots,n) \end{cases} \qquad \begin{cases} \min imize\ w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ sujeito\ a\ \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j=1,\dots,n) \\ \qquad y_i \ge 0 \quad (i=1,\dots,m) \end{cases}$$

De fato

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\Big) x_j = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big) y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

A desigualdade (1) é extremamente útil

Resultado a partir da desigualdade:

se encontramos uma solução primal viável $(x_1^*, \ \ldots, x_n^*)$

e uma solução dual viável $(y_1^*,\ldots,y_m^*)$ tal que

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*}$$

Então nós concluímos que ambas soluções são ÓTIMAS

De fato, de (1) temos que toda solução primal viável $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ satisfaz

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$$

E que toda solução dual viável $(y_1,y_2,\ldots y_m)$ satisfaz

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

- De fato, de (1) temos que toda solução primal viável $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ satisfaz

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$$

Logo solução ótima do primal

- E que toda solução dual viável $(y_1,y_2,\ldots y_m)$ satisfaz

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Logo solução ótima do dual

➢ Assim, torna-se fácil mostrar, para o nosso exemplo da introdução, que a solução primal viável $x_1=0,x_2=14,x_3=0,x_4=5$ é ótima. Apenas considere a solução dual viável $y_1=11,y_2=0,y_3=6$

➢ **Não é óbvio entretanto que uma prova análoga de otimalidade possa ser dada para todo PPL que tem solução ótima viável.**

➢ ESTE RESULTADO É O TEOREMA CENTRAL DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

TEOREMA DE DUALIDADE FORTE

Se o primal (P)

$$(P)\quad \begin{cases} \text{maximize } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sujeito a } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,\ldots,m) \\ \qquad x_j \ge 0 \quad (j = 1,\ldots,n) \end{cases}$$

tem uma solução ótima $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$

Então o dual (D)

$$(D)\quad \begin{cases} \text{minimize } w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{sujeito a } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j = 1,\ldots,n) \\ \qquad y_i \ge 0 \quad (i = 1,\ldots,m) \end{cases}$$

tem uma solução ótima $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$

tal que

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*} \quad (1)$$

Antes de apresentar a prova do Teorema da Dualidade, vamos brevemente ilustrar seu ponto crucial :

a solução ótima do dual pode ser prontamente determinada na linha z do dicionário final do problema primal.

Voltando ao exemplo que usamos para motivar o conceito de Problema dual. O dicionário final é dado por

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= 14 - 2x_1 - 4x_3 - 5x_5 - 3x_7 \\ x_4 &= 5 - x_1 - x_3 - 2x_5 - x_7 \\ x_6 &= 1 + 5x_1 + 9x_3 + 21x_5 + 11x_7 \\ z &= 29 - x_1 - 2x_3 - 11x_5 - 6x_7 \end{aligned}}$$

Observe que

as variáveis de folga x_5, x_6, x_7 podem ser associadas às variáveis duais y_1, y_2, y_3 por um caminho natural:

$\mathbf{x_5}$ variável de folga da primeira restrição enquanto $\mathbf{y_1}$ representa o multiplicador da mesma restrição.

Pela mesma lógica associa – se $\boldsymbol{x_6}$ ***com*** $\boldsymbol{y_2}$ *e* $\boldsymbol{x_7}$ ***com*** $\boldsymbol{y_3}$

$$x_5 \rightarrow y_1 \quad x_6 \rightarrow y_2 \quad x_7 \rightarrow y_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= 14 - 2x_1 - 4x_3 - 5x_5 - 3x_7 \\ x_4 &= 5 - x_1 - x_3 - 2x_5 - x_7 \\ x_6 &= 1 + 5x_1 + 9x_3 + 21x_5 + 11x_7 \\ z &= 29 - x_1 - 2x_3 - 11x_5 - 6x_7 \end{aligned}}$$

Na li**nha z** do dicionário final, os coeficientes das variáveis de folga são:

-11 para x_5, 0 para x_6 , -6 para x_7

Associando esses valores, com o sinal trocado, à correspondente variável dual obtemos a solução ótima do dual:

y_1=11 y_2=0 y_3 =6 **PULO DO GATO? MÁGICA?**

PASSEMOS ENTÃO À DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Demonstração do Teorema da Dualidade

Precisamos somente achar uma solução viável $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ que satisfaça

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

De fato, tal solução será *ótima,* em consequência de já termos mostrado que, para soluções viáveis de (P) e(D), tem-se

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{m} b_i y_i$$

Para achar a solução, vamos resolver o problema primal (P) , usando o Simplex.

Introduzindo as variáveis de folga:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad i = 1, 2 \ldots m$$

Por hipótese, (P) tem solução ótima, assim eventualmente chegamos ao dicionário final, sendo sua última linha dada por

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \overline{c_k} x_k \quad onde\ \overline{c_k} \leq 0 \qquad (1)$$

$\overline{c_k}$, de fato, é zero quando x_k é uma variável básica.

Assim

Em adição, z* é o valor ótimo da função objetivo e assim

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \quad (2)$$

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \bar{c}_k x_k \quad onde\ \bar{c}_k \le 0$$

Substituindo z por $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{c}_k x_k \; \text{variáveis de folga} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_{n+i}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)$$

O qual pode ser escrito como

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z^* + \sum_{j=1}^{n}\left(\bar{c}_j - \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_{n+i} a_{ij}\right) x_j + \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_{n+i}[b_i]$$

para toda escolha de $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Definindo para i=1,2…m $\boxed{y_i^* = -\bar{c}_{n+i}}$ (3)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z^* - \sum_{i=1}^{m} [b_i] y_i^* + \sum_{j=1}^{n}\left(\bar{c}_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^*\right) x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z^* - \sum_{i=1}^{m} [b_i] y_i^* + \sum_{j=1}^{n} \left(\bar{c}_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^* \right) x_j$$

Esta identidade deve ser verificada para todos valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Consequentemente

$$z^* = \sum_{i=1}^{m} [b_i] y_i^* \quad (4)$$

$$e \quad c_j = \left(\bar{c}_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^* \right) \quad j = 1, 2, \ldots n \quad (5)$$

Desde que $\bar{c}_k \leq 0$ **para todo k=1,2…n+m**

De (5) e (3) resulta

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j \quad j = 1, 2 \ldots n$$

$$y_i^* \geq 0 \qquad i = 1, 2 \ldots m$$

Finalmente, de (2) e(4) resulta

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*}$$

RELAÇÃO ENTRE OS PROBLEMAS PRIMAL E DUAL

- **Dual do dual é sempre o problema primal.**

De fato, o problema dual

$$\begin{cases} \min imize\ w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ sujeito\ a \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = 1,\dots,n) \\ \qquad y_i \geq 0 \qquad (i = 1,\dots,m) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

pode ser escrito

$$\begin{cases} \max imize\ -w = \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i \\ sujeito\ a \quad \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i \leq -c_j \quad (j = 1,\dots,n) \\ \qquad y_i \geq 0 \qquad (i = 1,\dots,m) \end{cases}$$

- **Dual deste problema resulta no Problema Primal**

$$\begin{cases} \min imize\ z = \sum_{j=1} (-c_j) x_j \\ sujeito\ a \quad \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \geq -b_i \quad (i = 1,\dots,m) \\ \qquad x_j \geq 0 \qquad (j = 1,\dots,n) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \max imize\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ sujeito\ a \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1,\dots,m) \\ \qquad x_j \geq 0 \qquad (j = 1,\dots,n) \end{cases}$$