Algebra Linear Algoritmica

Operações Elementares

1. $L_i \to k \cdot L_i$ (Multiplicar uma linha por um escalar K, ex: 2, $\frac{1}{2}$)
2. $L_i \leftrightarrow L_j$ (Inverter linhas)
3. $L_i \to L_i + k \cdot L_j$ (Somar duas linhas)

Semântica $\to$ Sintática

$$\text{Usuário} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = y_1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 = y_2 \\ 4x_1 + 10x_2 + 10x_3 = y_3 \end{cases} \to \text{Programador} \begin{bmatrix} & X_1 & X_2 & X_3 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \text{(Eq. 1)} & 3 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ \text{(Eq. 2)} & 4 & 5 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ \text{(Eq. 3)} & 4 & 10 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos na **sintaxe** e verificamos no modo **semântico**

Matriz:

$$\Downarrow$$

$$\begin{matrix} A_{(1,1)}x_1 + A_{(1,2)}x_2 + A_{(1,3)}x_3 = y_1 \\ A_{(2,1)}x_1 + A_{(2,2)}x_2 + A_{(2,3)}x_3 = y_2 \\ A_{(3,1)}x_1 + A_{(3,2)}x_2 + A_{(3,3)}x_3 = y_3 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} a_{(1,1)} & a_{(1,2)} & a_{(1,3)} \\ a_{(2,1)} & a_{(2,2)} & a_{(2,3)} \\ a_{(3,1)} & a_{(3,2)} & a_{(3,3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Composição de Função

$$f : R^2 \to R^2 \qquad g : R^2 \to R^2$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \quad g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 10x_1 + 11x_2 \\ 14x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo: $g(f(x))$

$$f\left(\begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 10(3x_1 + 2x_2) + 11(5x_1 + 4x_2) \\ 14(3x_1 + 2x_2) + 5(5x_1 + 4x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85x_1 + 62x_2 \\ 67x_1 + 48x_2 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$g \circ f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}^A \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^B \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 & 62 \\ 67 & 48 \end{bmatrix}^C \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Onde $A \cdot B = C$, é o mesmo que $A_(\text{Linha i}) \cdot B(\text{Coluna j}) = C_{(i,j)}$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}^A \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} ((A_{(1,1)} \cdot B_{(1,1)}) + (A_{(1,2)} \cdot B_{(2,1)})) & ((A_{(1,1)} \cdot B_{(2,1)}) + (A_{(1,2)} \cdot B_{(2,2)})) \\ ((A_{(2,1)} \cdot B_{(1,1)}) + (A_{(2,2)} \cdot B_{(2,1)})) & ((A_{(2,1)} \cdot B_{(1,2)}) + (A_{(2,2)} \cdot B_{(2,2)})) \end{bmatrix}$$

Função Inversa

$f(x) = y \leftrightarrow x = g(y)$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = y_1 \\ x_1 + 4x_2 = y_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{cases} x_1 = y_1 - 3(y_2 - y_1) \\ x_2 = y_2 - y_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4y_2 - 3y_2 \\ x_2 = y_2 - y_1 \end{cases} \rightarrow x = g(y)$$

$$g\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4y_2 - 3y_2 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Teorema: $f(g(y)) = y \leftrightarrow g(f(x)) = x$

Vetores Linearmente Independentes

$$\begin{bmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ (\text{Eq } 1) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\text{Eq } 2) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (\text{Eq } 3) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde, x_2 , x_5 são **variáveis dependentes** e x_1 , x_3 , x_4 são **variáveis independentes**, ou seja, x_2 e x_5 podem ser escritos como combinação linear de x_1 , x_3 , x_4.

Matriz Inversa

Se $b = Ax$ então $A^{-1}b = x$, ou seja

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1$$

Obs: A inversa existe se, e somente se, a eliminação produzir n pivôs
Se $\text{Det}(A) = 0$, então não tem inversa

Matriz quadrada 2×2

$$A^{-1} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{Det(A)} \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$$

Determinante

$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

Propriedades

- $\text{Det}(I) = 1$
- $\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}$
- $\text{Det}(AB) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B)$
- $\text{Det}(A^T) = \text{Det}(A)$

Transformações Lineares

Toda matriz simétrica A pode ser descrita como:

$$A\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = R_\theta(T(R_\theta^{-1}))$$

Ou seja, $R_\theta \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} R_\theta^{-1} = A$

Identidade

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$$

Cisalhamento

$$A = \begin{bmatrix}1 & a\\b & 1\end{bmatrix}$$

Rotação

$$R_{\theta^\circ} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

Reflexão

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

Projeção (no eixo x)

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

Regra de Linearidade

Para c e d escalares e A, V e W vetores:

$$A(cV + dW) = c(AV) + d(AW)$$

Autovalores e Autovetores

$$Av = \lambda v$$

Manipulando a equação acima:

$$\begin{aligned}Av &= \lambda v\\Av - \lambda v &= \overline{0}\\Av - \lambda \mathrm{I} v &= \overline{0}\\(A - \lambda \mathrm{I})v &= \overline{0}\end{aligned}$$

Como consequência, sabemos que: $det(A - \lambda \mathrm{I}) = \overline{0}$

Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial é um conjunto V, não vazio, munido de duas operações:

- Soma ($V \times V \to V$)
- Produto ($\mathbb{R} \times V \to V$)
  Temos que,

1. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ - Comutatividade
2. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
3. $\exists\, \bar{0} \in V \mid \overrightarrow{u} + \bar{0} = u$
4. $\exists\, -\overrightarrow{u} \in V \mid \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \bar{0}$
5. $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$
6. $(a+b)\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{b}$
7. $(ab)\overrightarrow{v} = a(b\overrightarrow{v})$
8. $1 \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

Subespaço vetorial

Seja V um espaço vetorial. $W \subset C$ é um subespaço vetorial se $\bar{0} \in W$ e:

- $\overrightarrow{u} + V \in W$
- $a\overrightarrow{u} \in W, \forall a \in \mathbb{R}$

Espaço Coluna ($c(A)$)

Dado o SL $A_{m \times n} x_n = b_m$
Se A é inversível, a solução do SL é única
Se A não tem inversa, há infinitas soluções ou nenhuma

De um modo gera

$$Ax + b = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + x_n A_n = b$$

onde A_n é a i-ésima vetor coluna de A.
Para que o SL tenha solução, é preciso que b possa ser descrito como uma combinação linear de A.
$Ax = b$ tem solução $\leftrightarrow$ b está no espaço coluna de A

Espaço Nulo ou Núcleo ($n(A)$)

O espaço nulo, ou núcleo, do SL homogêneo, é o conjunto de vetores que satisfazem $A_{m \times n} x_n = \bar{0}$.
OBS: A quantidade de variáveis livres (variáveis que são combinações lineares) nos diz a dimensão do vetor

Espaço Linha e Posto de A ($c(A^T)/r(A)$)

O posto de uma matriz $A_{m \times n}$ é o número de pivôs, ou seja, o número de linhas não nulas da matriz escalonada.
Os vetor colunas que não tem pivôs são combinações lineares as colunas com pivôs.

1. $r(A) = m = n$

    - Matriz quadrada invertível
    - $Ax = b$ tem solução única
    - Posto linha completo, posto coluna completo
2. $r(A) = m < n$
    - $Ax = b$ tem infinitas sol.
    - Posto linha completo
3. $r(A) = n < m$
    - $Ax = b$ tem 1 ou 0 sol.
    - Posto coluna completo
4. $r(A) < n, r(A) < m$
    - $Ax = b$ tem 0 ou infinitas sol.

As colunas de A são linearmente independentes (LI) quando $r(A) = n$, ou seja, há n pivôs e nenhum variável livre. $\rightarrow N(A) = \{0\}$

Um conjunto de vetores é uma base de um espaço vetorial se:
Não são nulos
São LI
Eles geram o espaço
A Dimensão de um espaço vetorial é a quantidade de vetores na base, ou seja, é a quantidade mínima necessária para representarmos um vetor qualquer do espaço como combinação linear dos vetores.

Teorema Fundamental da Algebra Linear

$c(A)$ tem dimensão $r(A)$ e $N(A^T)$ tem dimensão $m - r(A)$, ambos são subespaço R^m
$c(A^T)$ tem dimensão $r(A)$ e $N(A)$ tem dimensão $n - r(A)$, ambos são subespaços de R^n
$N(A)$ é o complemento ortogonal de $c(A^T)$
$N(A^T)$ é o complemento ortogonal de $c(A)$

Complemento ortogonal ($V^\perp$) é o conjunto de vetores que é ortogonal a um subespaço

Produto Interno

$$< w, v >= w^T v = [w_1 \; w_2] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = w_1 v_1 + w_2 v_2$$

Propriedades

- $w^T v = v^T w$
- $||v||^2 = v^t v = v_1^2 + v_2^2$
-

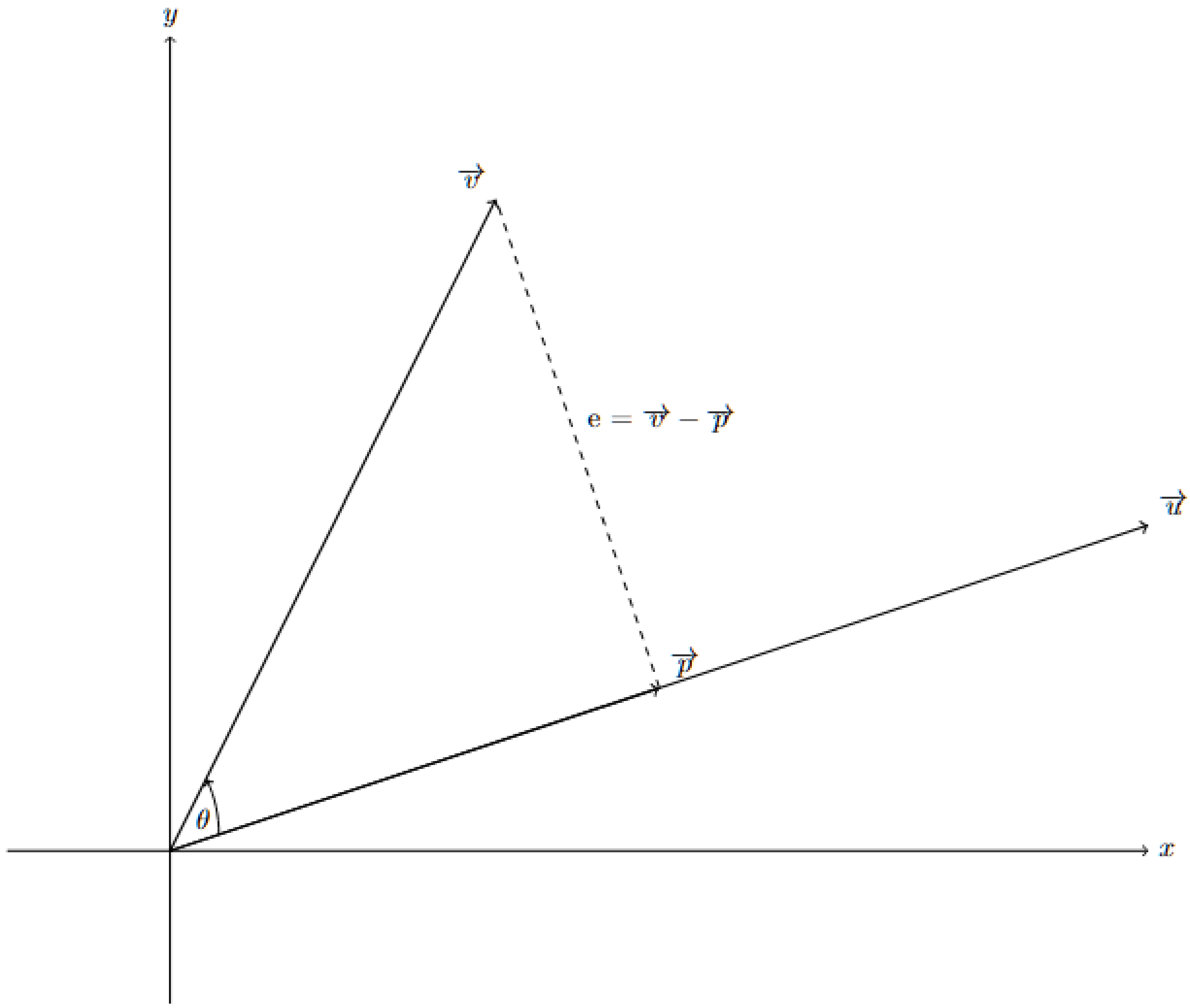
Ortogonalidade

Dois vetores são ortogonais se $p^T v = \overline{0} =< p, v >$.
Se p e v são ortogonais então:

$$||p+v||^2 = ||p||^2 + ||v||^2$$

Dois espaços vetoriais V e W são ortogonais se todos os vetores de V são ortogonais a todos vetores de W.

Projeção



Seja $e = v - p$, temos que $P = \alpha \overrightarrow{u}$

$$\alpha = \frac{u^T v}{u^T u}$$

Seja P um operador que leva qualquer vetor $\overrightarrow{v}$ ao vetor P, então

$$Pv = p$$

$$p = \alpha u = u \frac{u^T v}{u^T u} = \frac{u u^T}{u^T u} v$$

obs: $v^T u = u^T v$
Logo,

$$P = \frac{uu^T}{u^Tu}$$

Tamanho: $||v||$
obs: $||v||^2 = v^Tv$
Distância: $d(v,w) = ||v-w||$
Ângulo: $cos(\theta) = \frac{P_vw}{w}$
Projeção ortogonal de W em V: $P_v(w) = (\frac{w^Tv}{||v||^2}) \cdot v$
Tamanho da projeção: $w^T \cdot \tilde{v}$
Normalização: $\tilde{v} = \frac{v}{||v||}$

Projeção sobre um subespaço

$$A^TA = A^Tv \rightarrow \overline{x} = (A^TA)^{-1}A^Tv$$
$$p = A(A^TA)^{-1}A^Tv \rightarrow \text{Projeção de v sobre o espaço}$$
$$P = A(A^TA)^{-1}A^T \rightarrow \text{Matriz de Projeção}$$

Bases Ortogonais e Gran-Schmitt

Os vetores são ortonormais se:

$$< z_i, z_j >= z_i \cdot z_j = z_i^T \cdot z_j = \begin{cases} 0 & \text{se i} \neq j \\ 1 & \text{se i} = j \end{cases}$$

Seja A uma matriz cujas as colunas são LI
Queremos transformar essas colunas em vetores ortonormais, ou seja, transformar A em Q.
tomar $e_1 = q_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \frac{v_1}{||v_1||}$
Para

$$\text{proj}_u(v) = \frac{< v, u >}{< u, u >}u = \frac{v^Tu}{u^Tu}u$$

Então,

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, & q_1 &= \frac{u_1}{||u_1||} \\ u_2 &= v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2) & q_2 &= \frac{u_2}{||u_2||} \\ u_3 &= v_3 - \text{proj}_{u_1}(v_3) - \text{proj}_{q_2}(v_3) & q_1 &= \frac{u_3}{||u_3||} \\ u_4 &= v_4 - \text{proj}_{u_1}(v_4) - \text{proj}_{q_2}(v_4) - \text{proj}_{q_3}(v_4) & q_1 &= \frac{u_4}{||u_4||} \\ &\vdots & &\vdots \\ u_k &= v_k \sum \text{proj}_{q_j}(v_k) & q_k &= \frac{u_k}{||u_k||} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1, & \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2), & \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3), & \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \\
\mathbf{u}_4 &= \mathbf{v}_4 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_4) - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_4) - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_3}(\mathbf{v}_4), & \mathbf{e}_4 &= \frac{\mathbf{u}_4}{\|\mathbf{u}_4\|} \\
&\vdots & &\vdots \\
\mathbf{u}_k &= \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_j}(\mathbf{v}_k), & \mathbf{e}_k &= \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}.
\end{aligned}
$$

OBS:

$A = Q \cdot R \rightarrow R = Q^T A$

Fatoração QR

- $A = QR$, mutiplique ambos os lador por Q^T:
- $Q^T A = Q^T Q R$
- Dado $Q^T Q = I$, teremos $R = Q^T A$
- Dados $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$
- Então: $< q, a >= q^t a = q_1 a_1 + q_2 a_2 + \ldots$

$$
R = Q^T A = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_n \\ \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{q}_n^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n^T \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_n \\ 0 & \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{q}_n^T \mathbf{a}_n \end{bmatrix}
$$

Determinante

Dada uma matriz $A_{m \times n}$, $A = [A_{ij}]$, então

$$
det(A) = |A| = det[A_{ij}] = \sum (-1)^j a_{1f1} \cdot a_{1f2} \times \cdots \times a_{nfn}
$$

Onde $j = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ é o número de inversões para cada permutação de $\{1, 2, \ldots, n\} = (f_1, f_2, f_3, \ldots)$
Exemplo: $j = (0, 1) \rightarrow f = \{(1, 2), (2, 1)\}$ e $A = A_{2 \times 2}$

$$
det(A) = (-1)^0 a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 a_{12} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}
$$

Generalizando:

$$
det(A) = \sum (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|
$$

onde $|A_{ij}|$ é uma matriz formada após se retirar de A a linha i e coluna j.

Matriz Adjunta

Definimos o cofator Δ_{ij} do elemento a_{ij} de uma matriz $A_{m\times n}$, por

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$$

onde A_{ij} é a submatriz de A obtida após retirar a linha i e a coluna j.
A matriz $\overline{A}$ de cofatores de A é definida por $A = [\Delta_{ij}]$ e a matriz adjunta é definida por $\mathrm{adj}(A) = \overline{A}$.

Teorema: $A \cdot A^{-1} = A \cdot \mathrm{adj}(A) = det(A)I$.

Autovalores e Autovetores

$$A = XDX^{-1}$$

onde D é uma matriz diagonalizável, X é a matriz de autovetores invertível.

$$Av = \lambda v$$

Manipulando a equação acima:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ Av - \lambda v &= \overline{0} \\ Av - \lambda \mathrm{I} v &= \overline{0} \\ (A - \lambda \mathrm{I})v &= \overline{0} \end{aligned}$$

Como consequência, sabemos que: $det(A - \lambda \mathrm{I}) = \overline{0}$