CAPÍTULO 3

Dualidade

Vamos introduzir o conceito de problema Dual por meio do exemplo a seguir.

Exemplo:

Uma indústria que fabrica vergalhões de aço tem contratos fechados de fornecimento para 3 tipos diferentes de vergalhões que fabrica: espessuras fina, média ou grossa. Toda a produção da companhia é realizada em duas fábricas, uma localizada em São Paulo e a outra, no Rio de Janeiro. Segundo os contratos fechados, a empresa precisa entregar 16 toneladas de vergalhões finos, 6 toneladas de vergalhões médios e 28 toneladas de vergalhões grossos. A fábrica de São Paulo tem um custo de produção diária de $R\$150.000,00$ para uma capacidade produtiva de 8 toneladas de vergalhões finos, 1 tonelada de vergalhões médios e 2 toneladas de vergalhões grossos por dia. O custo de produção diário da fábrica do Rio de Janeiro é de $R\$230.000,00$ para uma produção de 2 tonela-

das de vergalhões finos, 1 tonelada de vergalhões médios e 7 toneladas de vergalhões grossos. Quantos dias cada uma das fábricas deverá operar para atender aos pedidos ao menor custo possível ?
O modelo para este problema que chamaremos de P1 é:

$$
\begin{aligned}
\text{(P1) Minimizar } Z = 150.000x_1 + 230.000x_2 \\
\text{Sujeito a: } 8x_1 + 2x_2 \geq 16 \\
x_1 + x_2 \geq 6 \\
2x_1 + 7x_2 \geq 28 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Neste problema, as variáveis x_1 e x_2 representam a quantidade mínima de dias que as fábricas de São Paulo e Rio devem funcionar para atender os contratos de fornecimento de vergalhões. Agora imagine que as fábricas desejam maximizar o lucro com a venda de vergalhões sabendo que seus custos de produção diários são de $R\$150.000,00$ para a fábrica de São Paulo e de $R\$230.000,00$ para a fábrica do Rio de Janeiro.
O modelo para este problema que chamaremos de D1 é:

$$
\begin{aligned}
\text{(D1) Maximizar } \; Z = 16w_1 + 6w_2 + 28w_3 \\
\text{Sujeito a: } \; 8w_1 + w_2 + 2w_3 \leq 150.000 \\
2w_1 + w_2 + 7w_3 \leq 230.000 \\
w_1, w_2, w_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

Neste caso, as variáveis w_1, w_2 e w_3 representam o valor máximo de venda de cada um dos produtos. O problema D1 é conhecido como o problema Dual de P1, que é chamado Primal e é muito comum na literatura o uso da expressão "par de problemas Primal-Dual", pois para todo problema primal existe um problema Dual associado.

3.1 Formulação do Problema Dual

Suponha que o problema primal linear seja dado na forma canônica:

$$
\begin{aligned}
\text{(P) Minimizar} \quad & Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{Sujeito a:} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Então, o dual do problema linear na forma canônica é definido por:

$$
\begin{aligned}
\text{(D) Maximizar} \quad & D = \sum_{i=1}^{m} w_i b_i \\
\text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \leq c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\
& w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Usando notação matricial ainda na forma canônica:

$$
\begin{aligned}
\text{(P) Minimizar} \quad & Z = cx \\
\text{Sujeito a:} \quad & Ax \geq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

onde $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$.

$$
\begin{aligned}
\text{(D) Maximizar} \quad & D = wb \\
\text{Sujeito a:} \quad & wA \leq c \\
& w \geq 0
\end{aligned}
$$

onde $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times m}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$.

Exemplo:

Dado o problema primal abaixo,

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{Sujeito a: } & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 6 \\ & 2x_2 - 3x_3 \geq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

o seu dual é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & D = 4w_1 + 6w_2 + 4w_3 \\ \text{Sujeito a: } & 2w_1 + 2w_2 \leq 4 \\ & w_1 - w_2 + 2w_3 \leq 2 \\ & 3w_1 - 3w_3 \leq 1 \\ & w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Suponha que o problema primal linear seja dado na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{(P) Minimizar } & Z = cx \\ \text{Sujeito a: } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$.
então a forma padrão do seu problema dual associado é:

$$\begin{aligned} \text{(D) Maximizar } & D = wb \\ \text{Sujeito a: } & wA \leq c \\ & w \ \text{ livres} \end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times m}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$.

Exemplo

Dado (P) na forma padrão:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } \; Z &= 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{Sujeito a: } \; 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \\
2x_1 - x_2 - x_5 &= 6 \\
2x_2 - 3x_3 - x_6 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

o seu problema dual associado é:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar } \; D = 4w_1 + 6w_2 + 4w_3 \\
\text{Sujeito a: } \; 2w_1 + 2w_2 \leq 4 \\
w_1 - w_2 + 2w_3 \leq 2 \\
3w_1 - 3w_3 \leq 1 \\
-w_1 \leq 0 \\
-w_2 \leq 0 \\
-w_3 \leq 0 \\
w_1, w_2, w_3 \quad \text{livres}
\end{aligned}
$$

Observe que existe exatamente uma variável dual para cada restrição do primal e exatamente uma restrição do dual para cada variável primal. Para construirmos o problema dual a partir de qualquer problema primal (ou seja, sem que ele esteja necessariamente na forma padrão), usamos as relações existentes entre os mesmos, as quais podem ser resumidas no seguinte quadro:

Exemplo

	Problema de Minimização		Problema de Maximização	
V				R
A				E
R	≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	S
I				T
A				R
V	≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	I
E				Ç
I				Õ
S	livre	$\Rightarrow$	$=$	E
				S
R				V
E				A
S	$\geq$	$\Rightarrow$	≥ 0	R
T				I
R				A
I	$\leq$	$\Rightarrow$	≤ 0	V
Ç				E
Õ				I
E	$=$	$\Rightarrow$	livre	S
S				

Tabela 35: Quadro de relações entre os problemas primal e dual

Considere o seguinte problema primal:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } \; Z &= 8x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeito a: } \; x_1 - 6x_2 + x_3 &\geq 2 \\ 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= -4 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\; \text{livre} \end{aligned}$$

Encontre o seu problema dual associado.

Primeiro, associamos uma variável dual a cada restrição do problema primal.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & Z = 8x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeito a: } & x_1 - 6x_2 + x_3 \geq 2 \ \ (w_1) \\ & 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4 \ \ (w_2) \\ & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ livre} \end{aligned}$$

Depois, escrevemos a função objetivo do problema dual
Minimizar $2w_1 - 4w_2$
Para encontrarmos as restrições do problema dual, transpomos a matriz A do problema primal, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ao observarmos a matriz A transposta, vemos que o problema dual terá 3 restrições. A primeira restrição, a menos do sinal, será:
$w_1 + 5w_2 (\leq \text{ ou } = \text{ ou } \geq)\ 8$
Observe que, nesta primeira restrição, todos os coeficientes (inclusive da função objetivo, que, no dual, é o lado direito da restrição) estão relacionados à variável x_1, por isso, o sinal da primeira restrição é dado pelo sinal da variável x_1. Ao olharmos no quadro 35, a variável $x_1 \leq 0$ no problema de maximização vai dar origem a uma restrição de menor ou igual no problema de minimização. Portanto, teremos:
$w_1 + 5w_2 \leq 8.$
Na segunda restrição, todos os coeficientes estão relacionados à variável x_2, portanto, o sinal da variável x_2 vai originar o sinal da segunda restrição. Consultando o quadro 35, temos que uma variável maior ou igual a zero no problema de

maximização dá origem a uma restrição maior ou igual no problema de minimização

$-6w_1 + 7w_2 \geq 3.$

Fazendo da mesma forma com a terceira restrição teremos:

$w_1 - 2w_2 = -2.$

Assim, teremos:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & 2w_1 - 4w_2 \\ \text{Sujeito a: } & w_1 + 5w_2 \leq 8 \\ & -6w_1 + 7w_2 \geq 3 \\ & w_1 - 2w_2 = -2 \end{aligned}$$

Agora ainda temos que estabelecer o sinal das variáveis duais. Como a variável w_1 foi associada à primeira restrição do problema primal, vemos, no quadro acima, que uma restrição de maior ou igual num problema de maximização dá origem a uma variável menor ou igual a zero no problema de minimização. Portanto, $w_1 \leq 0$. Como a variável w_2 foi associada à restrição de igualdade no problema de maximização, então, a variável w_2 no problema de minimização será livre. Agora temos o problema dual associado ao primal dado:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & 2w_1 - 4w_2 \\ \text{Sujeito a: } & w_1 + 5w_2 \leq 8 \\ & -6w_1 + 7w_2 \geq 3 \\ & w_1 - 2w_2 = -2 \\ & w_1 \leq 0, w_2 \text{ livre} \end{aligned}$$

Lema 1. *O dual do dual é o próprio problema primal.*

Seja o problema primal

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & Z = cx \\ \text{Sujeito a: } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

O seu dual é:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & D = wb \\ \text{Sujeito a: } & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

Associando a variável dual $\hat{w}$ ao problema dual acima e como $(A^t)^t = A$, teremos:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & D' = c\hat{w} \\ \text{Sujeito a: } & A\hat{w} \geq b \\ & \hat{w} \geq 0 \end{aligned}$$

que é o mesmo problema primal.

3.2 Relações Primais-Duais

Veremos a seguir que há importantes relações entre os problemas primal e dual.
A relação entre os valores das funções objetivo
Para os resultados a seguir considere os problemas primal e dual em suas formas canônicas, ou seja:

$$\begin{array}{lll} (P) \text{ Minimizar } Z = cx & \qquad & (D) \text{ Maximizar } D = wb \\ \quad \text{Sujeito a: } Ax \geq b & & \quad \text{Sujeito a: } wA \leq c \\ \qquad x \geq 0 & & \qquad w \geq 0 \end{array}$$

Sejam x_0 e w_0 soluções viáveis para os problemas primal e dual respectivamente. Como as soluções são viáveis, então, temos que:

- x_0 satisfaz $Ax_0 \geq b$, com $x_0 \geq 0$;
- w_0 satisfaz $w_0 A \leq c$, com $w_0 \geq 0$.

Multiplicando $Ax_0 \geq b$ pela esquerda por $w_0 \geq 0$, temos:

$$w_0 A x_0 \geq w_0 b \tag{3.1}$$

Multiplicando $w_0 A \leq c$ pela direita por $x_0 \geq 0$, temos:

$$w_0 A x_0 \leq c x_0 \tag{3.2}$$

De 3.1 e 3.2, temos:

$$w_0 b \leq w_0 A x_0 \leq c x_0.$$

E, desta forma, por transitividade, temos que:

$$w_0 b \leq c x_0. \tag{3.3}$$

Este resultado nos diz que o valor da função objetivo do problema dual é sempre menor ou igual ao valor da função objetivo do problema primal, ou seja, o problema dual pode fornecer limitantes inferiores para o problema primal. Este resultado é conhecido como **Propriedade da Dualidade Fraca**.

Exemplo:

$$\begin{array}{cc}
\text{Minimizar } 6x_1 + 8x_2 & \text{Maximizar } 4w_1 + 7w_2 \\
\text{Sujeito a: } 3x_1 + x_2 \geq 4 & \text{Sujeito a: } 3w_1 + 5w_2 \leq 6 \\
5x_1 + 2x_2 \geq 7 & w_1 + 2w_2 \leq 8 \\
x_1, x_2 \geq 0 & w_1, w_2 \geq 0
\end{array}$$

Se, nos problemas acima, tomarmos as soluções $x_0 = (7/5, 0)$ e $w_0 = (2, 0)$, então, $cx_0 = 42/5 = 8,4$ e $w_0 b = 8$. Assim, sabemos que os valores ótimos das funções objetivo dos dois problemas estão entre 8 e 8,4.

Corolário 1. *Sejam x_0 e w_0 são soluções viáveis para os problemas primal e dual respectivamente, tal que $cx_0 = w_0 b$ então x_0 e w_0 são soluções ótimas para seus respectivos problemas.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Pelo resultado anterior, temos que, para quaisquer soluções viáveis x_0 e w_0 para os problemas primal e dual respectivamente, $w_0 b \leq cx_0$.
Sendo assim, seja w uma solução viável para o problema dual, então, $wb \leq cx_0$ para qualquer solução viável para o dual. Pela hipótese deste Corolário, $cx_0 = w_0 b$, então temos que $wb \leq w_0 b$.
Como o problema dual é de maximização, $wb \leq w_0 b$ quer dizer que todas as soluções viáveis produzem valores de função objetivo menores ou iguais ao valor de função objetivo dada pela solução w_0 para o problema dual, o que nos diz que esta solução é ótima para o dual.

($\Leftarrow$) Da mesma forma, temos pelo resultado anterior que $cx_0 \geq w_0 b$. Tomando uma solução x viável para o problema primal, temos que $cx \geq w_0 b$. Pela hipótese deste Corolário, temos que $w_0 b = cx_0$, então temos que $cx \geq cx_0$.
Como o problema primal é de minimização, isto quer dizer que todas as soluções viáveis produzem valores de função objetivo maiores ou iguais ao valor da função objetivo dada pela solução x_0 para o problema primal, o que nos diz que esta solução é ótima para o primal. □

O resultado acima nos diz que, quando os valores das funções objetivo primal e dual são iguais, então, as respectivas soluções para os problemas são ótimas. Este resultado é conhecido como propriedade da dualidade forte.

Corolário 2. *Se um dos problemas (primal ou dual) tiver valor da função objetivo ilimitado, então, o outro problema (dual ou primal) não possuirá solução viável.*

Demonstração. Suponha que (D) tenha valor da função objetivo ilimitado e suponha, por absurdo, que (P) tenha solução, sendo x_0 uma solução viável. Pela propriedade da dualidade fraca, temos que $w_0 b \leq c x_0$, para qualquer solução viável w_0 de (D) e x_0 de (P), o que é absurdo, pois o máximo do conjunto $\{w_0 b\} \to \infty$. Logo, (P) é vazio. $\square$

O Corolário acima nos diz que se um dos problemas é ilimitado, então o outro problema é inviável. E se um dos problemas for inviável, então o outro problema será ilimitado? A resposta é: nem sempre.

Exercício: verifique graficamente que as regiões viáveis dos dois problemas abaixo são vazias. Para isto, você pode usar o aplicativo A^+Example do Dual Simplex em: www.aplusplatform.com.

$$\begin{array}{cc} \text{Minimizar } -x_1 - x_2 & \text{Maximizar } w_1 + w_2 \\ \text{Sujeito a: } x_1 - x_2 \geq 1 & \text{Sujeito a: } w_1 - w_2 \leq -1 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 & -w_1 + w_2 \leq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

Resumindo todos os resultados, temos o Teorema Fundamental da Dualidade, enunciado a seguir.

Teorema 5 (Teorema Fundamental da Dualidade)**.** *Com relação aos problemas de programação linear dual e primal, exatamente uma das seguintes cláusulas é verdadeira.*

- *Ambos possuem soluções ótimas x^* e w^*,*

  com $cx^* = w^* b$.

- *Um dos problemas tem valor de função objetivo ilimitado. Neste caso, o outro problema é inviável.*

- *Ambos os problemas são inviáveis.*

Teorema 6 (Teorema das Folgas Complementares)**.** *Dados os problemas primal e dual abaixo:*

$$\begin{array}{ll} (P)\ \textit{Minimizar } Z = cx & (D)\ \textit{Maximizar } D = wb \\ \quad \textit{Sujeito a: } Ax \geq b & \quad \textit{Sujeito a: } wA \leq c \\ \qquad x \geq 0 & \qquad w \geq 0 \end{array}$$

e sejam x^* e w^* soluções viáveis para (P) e (D) respectivamente. Estas soluções serão ótimas para (P) e (D) se e somente se

(i) $Ax^* \geq b,\ x^* \geq 0$;

(ii) $w^* A \leq c,\ w^* \geq 0$;

(iii)

$$w^*(Ax^* - b) = 0 \tag{3.4}$$

$$(w^* A - c)x^* = 0 \tag{3.5}$$

Supondo que a matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, podemos escrever:

$w^*(Ax^* - b) = \sum_{i=1}^{m} w_i^* [(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) - b_i] = 0.$

Como todos os m termos

$w_i^* [(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) - b_i]$ *desta soma são não negativos, isso implica que*

$w_i^* [(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) - b_i] = 0,\ i = 1, 2, ..., m.$

Assim, temos: $(w^* A - c)x^* = \sum_{j=1}^{n} [(\sum_{i=1}^{m} w_i^* a_{ij}) - c_j] x_j^* = 0.$

Como todos os n termos desta soma são não positivos, temos:

$[(\sum_{i=1}^{m} w_i^* a_{ij}) - c_j] x_j^* = 0,\ j = 1, 2, ..., n.$

Este ítem é denominado Teorema das Folgas Complementares.

A condição (i) exige que a solução x^* seja viável para o problema primal. A condição (ii) exige que a solução w^* seja viável para o problema dual. A condição (iii) exige que um dos termos seja nulo, ou seja:

em relação à equação 3.4, se $Ax^* - b \neq 0 \rightarrow w^* = 0$ e, da mesma forma, se $w^* \neq 0 \rightarrow Ax^* - b = 0$.

Em relação à equação 3.5 se $w^* A - c \neq 0 \rightarrow x^* = 0$ e, da mesma forma, se $x^* \neq 0 \rightarrow w^* A - c = 0$.

Uma observação associada ao Método Simplex

Suponha o par de problemas abaixo:

$$\begin{array}{ll} (P)\ \text{Minimizar } Z = cx & (D)\ \text{Maximizar } D = wb \\ \text{Sujeito a: } Ax = b & \text{Sujeito a: } wA \leq c \\ x \geq 0 & w \text{ livre} \end{array}$$

Tomemos qualquer solução básica $\bar{x}$ de $Ax = b$, satisfazendo ou não $\bar{x} \geq 0$, que será da forma $x = (B^{-1}b \mid 0)$, $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Nas condições do Teorema 6, item (iii) acima, só nos interessa a equação 3.5, pois a equação 3.4, $(A\bar{x} = b)$ será neste caso sempre verificada. Veremos o que se passa com a condição 3.5 quando consideramos um $\bar{w} = c_B B^{-1}$ e $z_j = \bar{w}\, a_j$, $j = 1, 2, ..., n$; assim podemos escrever: $\sum_{j=1}^{n}(z_j - c_j)\bar{x}_j = 0$, pois quando a variável $\bar{x}_j$ for básica, implica em $z_j - c_j = 0$ e, quando não básica, $\bar{x}_j = 0$, logo $(\bar{w} A - c)\bar{x} = 0$. Observamos que $\bar{x}$ e $\bar{w}$ satisfazem 3.5. Isto é exatamente o que se passa nos métodos Primal e Dual do Simplex, e o Teorema das Folgas Complementares sempre é respeitado.

Exemplo (Teorema das Folgas Complementares):

Resolvendo o primal através do dual. Considere os seguintes problemas primal e dual respectivamente:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar } & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\
\text{Sujeito a: } & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\
& 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar } & 4w_1 + 3w_2 \\
\text{Sujeito a: } & w_1 + 2w_2 \leq 2 \\
& w_1 - 2w_2 \leq 3 \\
& 2w_1 + 3w_2 \leq 5 \\
& w_1 + w_2 \leq 2 \\
& 3w_1 + w_2 \leq 3 \\
& w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}$$

A solução ótima do problema dual é: $w_1^* = 4/5$, $w_2^* = 3/5$. Com estas soluções dadas, vamos verificar quais restrições tem folga. A primeira restrição do problema dual é:
$w_1 + 2w_2 \leq 2$.
Substituindo os valores da solução ótima obtemos:
$\frac{4}{5} + 2\frac{3}{5} = \frac{10}{5} = 2$,portanto, a primeira restrição não tem folga, pois o lado esquerdo fica igual a 2, resultando numa igualdade, não tendo, desta forma, como afirmarmos nada sobre o valor da variável x_1^*.
A segunda restrição do dual é: $w_1 - 2w_2 \leq 3$.
Da mesma forma, substituindo os valores da solução ótima obtemos:
$\frac{4}{5} - 2\frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$.
Então, na segunda restrição, temos folga, já que, no lado esquerdo, temos o valor 2/5 e, no lado direito, temos o valor 3.
Segundo o Teorema das Folgas Complementares, $(w^*A - c)x^* = 0$.

Na segunda restrição já vimos que $w^* A - c \neq 0$, portanto, a variável do problema primal relativa a esta restrição dual, a saber, x_2^* , tem que ser igual a zero. Logo, já temos que $x_2^* = 0$.
Analisando a terceira restrição do problema dual, temos:
$2w_1 + 3w_2 \leq 5$,
e substituindo os valores ótimos do dual temos que o lado esquerdo da restrição vale
$2\frac{4}{5} + 3\frac{3}{5} = \frac{8}{5} + \frac{9}{5} = \frac{17}{5}$
então, na terceira restrição, temos folga também, já que, no lado esquerdo, temos o valor de $17/5$ e, no lado direito, temos o valor 5. De forma análoga ao que foi feito para a segunda restrição, temos que $x_3^* = 0$.
Para a quarta restrição dual $w_1 + w_2 \leq 2$, temos:
$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$ e como esta restrição também tem folga, $x_4^* = 0$.
Para a quinta e última restrição dual, $3w_1 + w_2 \leq 3$
$3\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{15}{5} = 3$ e como esta restrição não tem folga, não temos como dizer nada sobre o valor da variável x_5^*.
Agora, vamos analisar a outra equação do Teorema das Folgas Complementares, ou seja, a equação $w^*(Ax^* - b) = 0$.
Como a variável dual $w_1^* \neq 0$, temos que a primeira restrição do problema primal não pode ter folga, ou seja, $Ax^* = b$, então temos que
$x_1^* + x_2^* + 2x_3^* + x_4^* + 3x_5^* = 4$.
Da mesma forma, como $w_2^* \neq 0$ temos que a segunda restrição do problema primal também não pode ter folga, então,
$2x_1^* - 2x_2^* + 3x_3^* + x_4^* + x_5^* \partial = 3$.
Como já temos que $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$, temos duas equações e duas variáveis, ou seja, um sistema possível determinado

$$x_1^* + 3x_5^* = 4$$
$$2x_1^* + x_5^* = 3$$

Que resulta em ${x_1}^* = 1$ e ${x_5}^* = 1$.
Portanto, através da solução ótima do problema dual e usando o Teorema das Folgas Complementares descobrimos a solução ótima para o problema primal.

3.3 Método Dual-Simplex

Em certos problemas, é difícil encontrar uma solução básica inicial que seja viável (ou seja, todos os $b_i \geq 0$) para um problema linear sem adicionar variáveis artificiais. Nesses mesmos problemas, é frequentemente possível encontrar uma base inicial, a qual não é necessariamente primal viável, mas é dual viável (ou seja, todo $z_j - c_j \leq 0$ para um problema de minimização). Em tais casos, é comum desenvolver uma variante do Método Simplex que produzirá uma série de quadros simplex que manterão a viabilidade dual e complementaridade das folgas, buscando a viabilidade primal.
Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z &= cx \\ \text{Sujeito a: } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

E considere o quadro 36, representando uma solução básica.

VB	x_1	$...x_k$	$...x_n$	x_{n+1}	$...x_{n+r}$	$...x_{n+m}$	b
x_{n+1}	a_{11}	$...a_{1k}$	$...a_{1n}$	1	...0	0	b_1
$\vdots$							
x_{n+r}	a_{r1}	$...a_{rk}$	$...a_{rn}$	0	...1	...0	b_r
$\vdots$							
x_{n+m}	a_{m1}	$...a_{mk}$	$...a_{mn}$	0	...0	...0	b_m
	$z_1 - c_1$	$z_k - c_k$	$z_n - c_n$	0	...0	...0	Z

Tabela 36: Quadro Simplex solução básica

Mais do que isto, suponha que o quadro seja ótimo para o problema acima, ou seja, todo $z_j - c_j \leq 0$ com todos os $b_i \geq 0$. Vamos definir $w = c_B B^{-1}$, então, temos $z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j = w a_j - c_j \leq 0$ para todo $j = 1,\ldots,n$ e isto significa que $w A \leq c$, ou seja, esta solução é dual viável também. Considere agora o caso em que tenhamos todos os $z_j - c_j \leq 0$ porém com algum $b_r < 0$, o que faz com que esta solução não seja primal viável. Para contornar esta situação, selecionamos a linha r como a linha pivô e alguma coluna k tal que $a_{rk} < 0$ como a coluna pivô, e assim podemos encontrar um novo vetor do lado direito das restrições b'_r. Através de uma série de tais pivoteamentos tornaremos todos os $b_i \geq 0$ enquanto mantemos todos os $z_j - c_j \leq 0$, o que significa a otimalidade do problema primal e a viabilidade do problema dual como vimos acima. A questão que permanece é como selecionar a coluna pivô de tal modo que se mantenha a viabilidade dual após o pivoteamento. A coluna pivô k é determinada por :

$$\frac{z_k - c_k}{a_{rk}} = \text{mín}_{r=1,2,\ldots,m} \left\{ \frac{z_j - c_j}{a_{rj}},\ a_{rj} < 0, \right\}.$$

Uma vez escolhido $a_{rk} < 0$ como pivô, após o pivoteamento, teremos:

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{(z_k - c_k)}{a_{rk}} a_{rj}.$$

Sabemos que $(z_j - c_j)'$ tem que ser ≤ 0, , então, analisemos as duas hipóteses possíveis:

(i) $a_{rj} < 0$, então podemos escrever
$(z_j - c_j) - \frac{(z_k - c_k)}{a_{rk}} a_{rj} \leq 0 \rightarrow \frac{z_j - c_j}{a_{rj}} - \frac{z_k - c_k}{a_{rk}} \geq 0,$
assim sendo

$\frac{z_k-c_k}{a_{rk}} \leq \frac{z_j-c_j}{a_{rj}}, \;\; a_{rj} < 0;$

(ii) $a_{rj} \geq 0$, nesse caso $(z_j - c_j) - \frac{(z_k-c_k)}{a_{rk}} a_{rj} \leq 0$, pois $(z_j - c_j) \leq 0$ e $(-\frac{(z_k-c_k)}{a_{rk}} a_{rj}) \leq 0$.

Concluímos que a escolha da variável que sairá da base estará associada ao índice k, tal que,

$$\frac{z_k-c_k}{a_{rk}} = \text{mín}_{r=1,2,\ldots,m} \left\{ \frac{z_j-c_j}{a_{rj}}, \;\; \forall\; a_{rj} < 0, \right\}.$$

Caso não haja $a_{rj} < 0$, estaremos em presença de uma solução ilimitada para o problema dual, o que equivale também a dizer que o seu primal é vazio.

3.4 Algoritmo Dual Simplex

Passo i. Encontre uma base B do problema primal tal que

$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j \leq 0$ para todo j.

No caso da base trivial (composta inicialmente apenas pelas variáveis de folga), temos $c_B = 0$, logo $z_j = 0$ para todo j e basta que $c_j \leq 0$ para todo j.

Passo ii. Teste de viabilidade primal

Se todos os $b_i \geq 0, i = 1,\ldots,m$, pare, a solução corrente é ótima. Caso contrário, vá para o Passo iii.

Passo iii. Seleção da variável que deixa a base

Escolha a linha pivô r tal que: $b_r = \text{mín}\,\{b_i, \;\; b_i < 0\}$.

Passo iv. Seleção da variável que entra na base

Se $a_{rk} \geq 0$ para todo j, pare. O dual é ilimitado, e o primal é inviável.

Caso contrário selecione a coluna pivô dada por:

$$\frac{z_k-c_k}{a_{rk}} = \text{mín}_{r=1,\ldots,m} \left\{ \frac{z_j-c_j}{a_{rj}}, \;\; a_{rj} < 0 \right\}$$

Passo v. Efetue pivoteamento em a_{rk} e volte ao Passo ii.

Exemplo:
Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{Sujeito a: } & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Colocando o problema na forma padrão, temos:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Que também pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ & -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$B = [a_4\ a_5] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

$$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 = -2$$

$$z_2 - c_2 = c_B B^{-1} a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = -3$$

$$z_3 - c_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} - 4 = -4$$

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Seguindo o algoritmo, escolhemos:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	-2	1	-3	0	1	-4
z	-2	-3	-4	0	0	0

Tabela 37: Quadro Inicial Dual Simplex-exemplo

$b_r = \text{mín}\{b_i,\ \ b_i < 0\}$,ou seja, escolhemos a linha L_2 como a linha do pivô, pois $\text{mín}\{-3,\ -4\} = -4$. Agora escolheremos a variável a entrar na base:

$\frac{z_k - c_k}{a_{rk}} = \text{mín}\left\{\frac{z_j - c_j}{a_{rj}},\ a_{rj} < 0\right\}$

$= \text{mín}\left\{\frac{-2}{-2}, \frac{-4}{-3}\right\} = -1$,logo o pivô é o -2, o elemento da segunda linha na primeira coluna. Sendo assim, procedemos o pivoteamento e obtemos o quadro abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	0	-5/2	1/2	1	-1/2	-1
x_1	1	-1/2	3/2	0	-1/2	2
z	0	-4	-1	0	-1	4

Tabela 38: Primeiro Quadro Dual Simplex-exemplo

Observamos que todos os $z_j - c_j \leq 0$ e, portanto, a viabilidade dual foi preservada. Agora temos apenas um $b_i < 0$ e, portanto, a linha L_1 será a linha do pivô. Agora escolheremos a variável a entrar na base:

$= \text{mín}\left\{\frac{-1}{\frac{-5}{2}}, \frac{-1}{\frac{-1}{2}}\right\} = \frac{2}{5}$, logo o pivô é o elemento da primeira linha e segunda coluna. Fazemos o pivoteamento e obtemos o quadro abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	-1/5	-2/5	1/5	2/5
x_1	1	0	7/5	-1/5	-2/5	11/5
z	0	0	-9/5	-8/5	-1/5	28/5

Tabela 39: Segundo Quadro Dual Simplex-exemplo

Onde temos todos os $z_j - c_j \leq 0$ e todos os $b_i \geq 0$ significando que temos a viabilidade primal e dual. Como o quadro é ótimo para o primal, temos que é ótimo para o dual também e suas respectivas soluções ótimas são:

$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 0\right)$.

A base ótima é:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ cuja inversa é } B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que:

$$w^* = c_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 & 1/5 \end{pmatrix},$$

ou seja, $(w_1^*, w_2^*) = \left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Observe que os valores de w_1^* e w_2^* são os negativos dos valores de $z_4 - c_4$ e $z_5 - c_5$ respectivamente no quadro ótimo acima.

Em www.aplusplatform.com, utilize os aplicativos A^+Example e A^+Practice do Simplex Dual para acompanhar a resolução de outros exemplos e resolver os problemas lá propostos.

3.5 Interpretação Econômica do Dual

Considere os problemas primal e dual abaixo:

$$
\begin{array}{rl}
(P) & \text{Minimizar } Z = cx \\
& \text{Sujeito a: } Ax \geq b \\
& x \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
(D) & \text{Maximizar } D = wb \\
& \text{Sujeito a: } wA \leq c \\
& w \geq 0
\end{array}
$$

Suponhamos que x^* e w^* sejam soluções ótimas dos problemas primal e dual respectivamente. Então, pelo Corolário 1, temos que:

$$Z(x^*) = D(w^*) = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i^*$$

Se o lado direito da i-ésima restrição, ou seja, o valor b_i for alterado para

$$\hat{b}_i = b_i + \Delta b_i,$$

a variação de Z^* é dada por:

$$\Delta Z = (\Delta b_i) w_i^*,$$

o que significa que

$$\frac{\Delta Z}{\Delta b_i} = w_i^*$$

ou seja, w_i^* é taxa de variação do valor ótimo $Z(x^*)$ da função objetivo em relação à variação do valor de b_i em uma unidade. Esta variação é chamada “shadow price”, ou preço sombra, valor incremental na função objetivo resultante do acréscimo de uma unidade na i-ésima componente do vetor b.

De modo a esclarecer um pouco mais a interpretação, imaginemos que o problema primal seja de alocação de recursos, onde temos m recursos disponíveis nas quantidades $b_1, \ldots, b_m$

com os quais pretendemos fabricar n produtos, nas quantidades $x_1, \ldots, x_n$ a serem determinadas. Cada unidade do produto j consome a_{ij} unidades do recurso i, trazendo um retorno de c_j unidades monetárias. Queremos determinar a quantidade a ser fabricada de cada produto, de modo a maximizar o retorno. Então, a luz dessa interpretação, diríamos que w_i^* é o preço que estamos dispostos a pagar para aumentar em uma unidade a quantidade disponível da matéria-prima i, ou, melhor ainda, é o quanto vale para nós o incremento de uma unidade da matéria-prima i.

Exemplo:

Vamos tomar como exemplo o problema do início deste Capítulo, cujos modelos estão abaixo.

$$\begin{aligned}
\text{(P1) Minimizar } Z = 150.000x_1 + 230.000x_2 \\
\text{Sujeito a: } 8x_1 + 2x_2 \geq 16 \\
x_1 + x_2 \geq 6 \\
2x_1 + 7x_2 \geq 28 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(D1) Maximizar } \; D = 16w_1 + 6w_2 + 28w_3 \\
\text{Sujeito a: } \; 8w_1 + w_2 + 2w_3 \leq 150.000 \\
2w_1 + w_2 + 7w_3 \leq 230.000 \\
w_1, w_2, w_3 \leq 0
\end{aligned}$$

A solução para $P1$ é $x_1^* = 2.8$, $x_2^* = 3.2$ e $z^* = 1.156.000,00$, ou seja, para produzir as quantidades pedidas de vergalhões, a fábrica de São Paulo deverá trabalhar $2,8$ dias e a fábrica do Rio de Janeiro deverá trabalhar $3,2$ dias e o custo total será de $R\$1.156.000,00$. Agora, vamos aumentar em uma unidade o valor do lado direito da segunda restrição, ou seja, o problema primal ficará:

$$
\begin{aligned}
\text{(P1') Minimizar } Z = 150.000x_1 + 230.000x_2 \\
\text{Sujeito a: } 8x_1 + 2x_2 \geq 16 \\
x_1 + x_2 \geq 7 \\
2x_1 + 7x_2 \geq 28 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

A solução para $P1'$ é $x_1^* = 4.2$, $x_2^* = 2.8$ e $Z^* = 1.274.000,00$. Temos que:

$\Delta z = 1.274.000 - 1.156.000 = 118.000$

$\Delta b_i = 1$.

Logo, como $\frac{\Delta z}{\Delta b_i} = w_i^*$, concluímos que $w_2^* = 118.000$, ou seja, o ganho obtido ao aumentar a produção de vergalhões médios em uma tonelada é de $R\$118.000,00$, e poderíamos ter chegado a esta conclusão apenas resolvendo o problema dual $(D1')$ de $(P1')$abaixo:

$$
\begin{aligned}
\text{(D1') Maximizar } \; D = 16w_1 + 7w_2 + 28w_3 \\
\text{Sujeito a: } \; 8w_1 + w_2 + 2w_3 \leq 150.000 \\
2w_1 + w_2 + 7w_3 \leq 230.000 \\
w_1, w_2, w_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

cuja solução é: $w_1^* = 0, w_2^* = 118.000, w_3^* = 16.000$ e $D^* = 1.274.000,00$.

3.6 Referências associadas ao Capítulo 3

Você pode encontrar mais informações sobre o conteúdo deste capítulo em: (BAZARAA; JARVIS, 1977), (MACULAN; FAMPA, 2006), (MACULAN; PEREIRA, 1980), (HADLEY, 1965), (LUENBERGER, 1989), (SIMONNARD; CHOUTET, 1972), (BERT-SIMAS; TSITSIKLIS, 1997), (CHVATAL, 1983).

CAPÍTULO 4

Análise de Sensibilidade

Em muitas aplicações práticas, alguns dados do problema não são conhecidos exatamente, sendo, então são estimados tão bem quanto possível. Assim, é importante ser capaz de encontrar a nova solução ótima do problema com outras estimativas de alguns dados que se tornem disponíveis, fazendo isto com o custo de apenas alguns passos a mais. O modelo original pode ser modificado pela inclusão de uma nova variável ou restrição, pelo aumento na disponibilidade de um determinado recurso, pela exclusão de variáveis ou de restrições ou pela modificação do custo de uma determinada variável. Desta forma, ao se encontrar a solução ótima de um problema de programação linear, devemos analisar de que forma esta se comporta em relação às variações que podem ocorrer no modelo. Esses e outros tópicos relacionados constituem o que denominamos de análise de sensibilidade.

Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z &= cx \\ \text{Sujeito a: } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Suponha que o método simplex tenha produzido uma base ótima **B**. A seguir, veremos como fazer uso das condições de otimalidade (relações primais-duais), no sentido de encontrar a nova solução ótima ao modificarmos algum dado do problema, sem ter que resolvê-lo desde o início. Em particular, serão consideradas as seguintes modificações:

- Modificação no vetor de custos **c**;
- Modificação no vetor do lado direito **b**;
- Modificação na matriz de restrições **A**;
- Adição de novas variáveis;
- Adição de uma nova restrição.

Para cada modificação apresentaremos um exemplo que será produzido a partir do problema exemplo abaixo:

Problema Exemplo

Dona Júlia vende picolés de morango, limão e uva numa food bike na praia. Os picolés de morango, limão e uva utilizam, respectivamente, 3, 4 e 2 unidades de açúcar. Cada picolé recebe 1 palito de madeira. Por mês, dona Júlia compra o equivalente a 3000 unidades de açúcar e 1200 palitos. Cada picolé de morango, limão e uva é vendido a $R\$3,00$, $R\$1,00$ e $R\$2,00$ respectivamente. Quantos picolés de cada sabor dona Júlia deverá vender para maximizar a sua receita ?

Modelo

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1200 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Colocando o problema na forma padrão, temos:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1200 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

cujo quadro ótimo é:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

Tabela 40: Quadro Ótimo-Problema Exemplo

Ou seja, para ganhar $R\$4.200,00$, dona Júlia deve vender 600 picolés de morango, 600 picolés de uva e não vender nenhum picolé de limão.

4.1 Modificação no vetor de custos c

Dada uma solução básica viável ótima, suponha que o coeficiente de custo de uma (ou mais de uma) variável é alterado de c_k para $c_k^{'}$. O efeito desta mudança sobre o quadro ótimo

ocorrerá na linha da função objetivo, ou seja, a viabilidade dual pode ser perdida. Vejamos os seguintes casos:
CASO 1: x_k não é básica

Neste caso, o vetor de custo das variáveis básicas, ou seja, c_B não é afetado, e, então, $z_j = c_B B^{-1} a_j$ não é alterada para qualquer j. Deste modo, $z_k - c_k$ é trocado por $z_k - c_k^{'}$. Note que $z_k - c_k \leq 0$ uma vez que a solução básica atual é a solução ótima do problema original. Se $z_k - c_k^{'} = (z_k - c_k) + (c_k - c_k^{'})$ for positivo, então x_k deve entrar na base, e o método simplex deve ser retomado até que a otimalidade seja alcançada novamente. Caso contrário, a solução já obtida continua sendo ótima com relação ao novo problema.

Exemplo:
Suponha que dona Júlia queira saber qual efeito produzirá na solução ótima subir o preço do picolé de limão para $R\$2{,}00$, o que significa, no problema de minimização, mudar $c_2 = -1$ para $c_2^{'} = -2$. Como x_2 é não básica, então

$z_2 - c_2 = (z_2 - c_2) + (c_2 - c_2^{'}) = -4 + (-1 - (-2)) = -3$, e todos os outros $z_j - c_j$ não são afetados. Como $z_2 - c_2$ continua negativo, o quadro continua ótimo, como pode ser visto abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-3	0	-1	-1	-4200

Tabela 41: Modificação 1 no vetor custo c_k não básica

o que significa que nada será alterado ao subir o preço do picolé de limão para $R\$2,00$.
Agora suponha que o preço do limão subiu muito, e, como consequência, dona Júlia quer saber qual efeito produzirá na solução ótima subir o preço do picolé de limão para $R\$6,00$,

o que significa, no problema de minimização, mudar $c_2 = -1$ para $c_2^{'} = -6$. Como x_2 é não básica, então
$z_2 - c_2 = (z_2 - c_2) + (c_2 - c_2^{'}) = -4 + (-1 - (-6)) = 1$ e todos os outros $z_j - c_j$ não são afetados. Como $z_2 - c_2$ agora é positivo, o quadro deixa de ser ótimo e temos que continuar aplicando o algoritmo Simplex para alcançarmos a otimalidade novamente.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	1	0	-1	-1	-4200

Tabela 42: Modificação 2 no vetor custo c_k não básico

E o novo quadro ótimo após o pivoteamento é:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	1	2	0	1	-2	300
x_3	0	-1	1	-1	3	900
z	-1/2	0	0	-1/2	0	-4500

Tabela 43: Quadro ótimo modificação 2 no vetor custo c_k não básico

Que nos diz que dona Julia deve vender 300 picolés de limão, 900 picolés de uva e nenhum de morango e com isso ganhará R\$4500,00 por mês.

CASO 2: x_k é básica, digamos $x_k \equiv x_{B_t}$

Deste modo o vetor c_{B_t} é trocado por $c_{B_t}^{'}$ e seja o novo valor de z_j denotado por $z_j^{'}$. Então, os valores de $z_j^{'} - c_j$ para todas as variáveis não básicas são calculados da seguinte forma:

$z_j^{'} - c_j = c_B^{'} B^{-1} a_j - c_j = (c_B B^{-1} a_j - c_j) + (0, 0, ..., c_{B_t}^{'} - c_{B_t}, 0, ..., 0) y_j$

onde $y_j = B^{-1} a_j$, então:

$z_j^{'} - c_j = (z_j - c_j) + (c_{B_t}^{'} - c_{B_t}) y_{tj}$ para todo j, ou seja, para atualizar a linha da função objetivo de cada variável não básica, devemos adicionar ao $z_j - c_j$ antigo o resultado da subtração $(c_{B_t}^{'} - c_{B_t})$ vezes o valor atual existente na linha t (correspondente à variável básica x_{B_t} e coluna j do quadro ótimo.

Para as variáveis básicas x_k, o valor $z_k - c_k$ continuará 0.

Exemplo:

Suponha que dona Júlia queira vender o picolé de morango a $R\$5,00$, ou seja, no problema de minimização, $c_1 = -4$ será trocado por $c_1^{'} = -5$. Para melhor visualização, o quadro ótimo do problema original está copiado abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

De acordo com os critérios acima, para as variáveis não básicas, teremos:

$$z_2^{'} - c_2 = (z_2 - c_2) + (-5 - (-4)) y_1 2 = -4 + (-1 \times 2) = -6$$
$$z_4^{'} - c_4 = (z_4 - c_4) + (-5 - (-4)) y_1 4 = -1 + (-1 \times 1) = -2$$
$$z_5^{'} - c_5 = (z_5 - c_5) + (-5 - (-4)) y_1 5 = -1 + (-1 \times (-2)) = 1$$

e cada $z_j - c_j$ relacionado às variáveis básicas continuará zero. Assim, temos o quadro 44.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-6	0	-2	1	-4200

Tabela 44: Quadro inicial modificação no vetor custo c_k básico-ex

Como $z_5^{'} - c_5$ é positivo, o problema perdeu a otimalidade, portanto, precisamos aplicar novamente o algoritmo Simplex para encontrar a nova solução ótima. Após o pivoteamento, chegamos ao quadro abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	4/3	2/3	1/3	0	1000
x_5	0	-1/3	1/3	-1/3	1	200
z	0	-17/3	-1/3	-5/3	0	-4400

Tabela 45: Quadro ótimo modificação no vetor custo c_k básico-ex

Que nos diz que dona Júlia deve vender apenas picolés de morango (observe que não são usados todos os palitos de madeira, porém os 1000 picolés de morango consomem todo o açúcar que ela comprou), tendo, com isso, uma receita de $R\$4.400,00$ no mês, ao aumentar o valor do picolé de morango de $R\$4,00$ para $R\$5,00$.

4.2 Modificação no vetor do lado direito

Se o vetor **b** do lado direito das restrições é trocado por $b^{'}$, então $x_B^* = B^{-1}b$ será trocado por $\bar{x}_B = B^{-1}b^{'}$. Ao se modificar o vetor b por $b^{'}$, a otimalidade dual é mantida (pois os valores de $z_j - c_j$ não são alterados com a modificação do vetor b) e basta verificar se as variáveis básicas permanecem não negativas, ou seja, se o problema permanece primal viável e calcular seus valores ótimos. Se $\bar{x}_B = B^{-1}b^{'} \geq 0$, então $\bar{x}_B = x_B^*$, ou seja, esta base permanece ótima, e os valores ótimos das variáveis básicas são $x_B^* = B^{-1}b^{'}$ e a função objetivo vale $Z^* = c_B B^{-1} b^{'}$, caso contrário o método dual simplex é usado para encontrar a nova solução por restaurar a viabilidade primal.

Exemplo:
Vamos supor que dona Júlia compre 3300 unidades de açúcar, ou seja, o vetor b do lado direito das restrições será agora $b^{'} = \binom{3300}{1200}$. Vamos copiar abaixo o problema original na forma padrão e seu quadro ótimo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1200 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

e podemos observar que as variáveis básicas do quadro ótimo são x_1 e x_3, logo a base ótima B é $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ cuja inversa é $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e, desta forma, podemos calcular os novos valores para as variáveis básicas.

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b^{'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3300 \\ 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Como as variáveis básicas continuaram com valores não negativos, a solução permaneceu primal viável e, portanto, ótima e =-4500 e o novo quadro é:

$$z^* = c_B x_B^* = \begin{pmatrix} -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \end{pmatrix}$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	900
x_3	0	-1	1	-1	3	300
z	0	-4	0	-1	-1	-4500

Tabela 46: Quadro ótimo modificação no vetor b-ex

ou seja, dona Júlia deve vender 900 picolés de morango e 300 de uva e ter uma receita de $R\$4.500,00$ ao comprar o equivalente a mais 300 unidades de açúcar no mês.

4.3 Modificação na matriz de restrições

Discutiremos, a seguir, o efeito de mudanças em algumas entradas da matriz de restrições A. Serão estudados dois casos, a saber, mudanças envolvendo colunas não básicas e mudanças envolvendo colunas básicas.

CASO 1: Mudanças em vetores de atividade para colunas não básicas
Suponha que a coluna não básica a_j seja modificada para $a_j^{'}$, então a nova coluna y_j atualizada é:

$y_j^{'} = B^{-1} a_j^{'}$

e $z_j^{'} - c_j = c_B B^{-1} a_j^{'} - c_j$.

Se $z_j^{'} - c_j < 0$, então, a antiga solução é ótima; caso contrário, fazemos nova(s) iteração (iterações) do método simplex até obter a otimalidade novamente.

Exemplo:
Suponha que dona Júlia diminua a quantidade de açúcar no picolé de limão, passando de 4 unidades para 3. Desta forma, a nova coluna a_2 será $a_2^{'} = \binom{3}{1}$.

Para maior comodidade do leitor, reproduzimos abaixo o problema original na forma padrão e o seu respectivo quadro ótimo.

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & -4x_1 - x_2 - 3x_3 \\
\text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3000 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1200 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

A nova coluna y_2' será:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

$$y_2' = B^{-1}a_2' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_2' - c_2 = c_B B^{-1} a_2' - c_2 = c_B y_2' = \begin{pmatrix} -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1) = -3$$

Logo, como $z_2' - c_2 < 0$ então, o quadro continua ótimo. Apresentamos abaixo o quadro com as modificações. Tanto faz

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	1	0	1	-2	600
x_3	0	0	1	-1	3	600
z	0	-3	0	-1	-1	-4200

Tabela 47: Quadro Ótimo - Mudanças em vetores de atividade para colunas não básicas

dona Júlia mudar ou não a quantidade de açúcar no picolé de limão de 4 para 3 unidades porque esta mudança não vai alterar nada na solução ótima, ou seja, não é fazendo a redução na quantidade de açúcar no picolé de limão que dona Júlia vai colocá-lo na solução ótima.

CASO 2: Mudanças em vetores de atividade para colunas básicas

Suponha que a coluna básica a_k seja modificada para $\bar{a}_k$. Feita esta modificação, é possível que o conjunto atual de vetores básicos não mais produza uma solução básica viável, ou seja, pode ser que esta nova matriz não mais forme uma base após a mudança da coluna a_k para $\bar{a}_k$. Mesmo que ainda tenhamos uma base, uma mudança no vetor de atividades para uma única coluna básica irá modificar a matriz inversa B^{-1}, acarretando mudanças também em todas as colunas y. Veremos cada caso separadamente.
A coluna básica a_k será substituída pela coluna $\bar{a}_k$ na base. Consideremos $B = (a_1 a_2 ... a_{k-1} a_k a_{k+1} ... a_m)$ a base atual, e, como é uma base, existe B^{-1}.
Seja $\bar{B} = (a_1 a_2 ... a_{k-1} \bar{a}_k a_{k+1} ... a_m)$ a possível nova base e temos que saber se existe $\bar{B}^{-1}$. Procederemos da seguinte maneira:

$$B^{-1}\bar{B} = (e_1\ e_2 \cdots\ e_{k-1}\ B^{-1}\bar{a}_k\ e_{k+1} \cdots e_m),$$

onde os vetores e_i, $i = 1, 2, ..., m$, representam a base canônica, isto é, e_i é um vetor com todas componentes iguais a zero salvo a componente $e_{ii} = 1$.
Definamos $\bar{y}_k = B^{-1}\bar{a}_k$, se sua componente $\bar{y}_{kk} = 0 \rightarrow \bar{B}$ não será inversível. Por que?
Tomemos
$E = (e_1\ e_2 \cdots\ e_{k-1}\ B^{-1}\bar{a}_k\ e_{k+1} \cdots e_m)$
$\quad = (e_1\ e_2 \cdots\ e_{k-1}\ \bar{y}_k\ e_{k+1} \cdots e_m)$
cujo determinante de E

$det(E) = \bar{y}_{kk}$, se $\bar{y}_{kk} = 0 \rightarrow det(E) = 0$, logo, nesse caso, E não é inversível. Sabemos que:

$B^{-1}\bar{B} = E \rightarrow \bar{B} = BE, \rightarrow det(\bar{B}) = det(B)det(E)$, como $det(E) = 0 \rightarrow det(\bar{B}) = 0$.

$\bar{B}$ não poderá ser uma base.

Então temos:

- Se o elemento $\bar{y}_{kk} \neq 0$, então, x_j pode ser trocado por $\bar{x}_j$ na base, e a coluna da velha variável pode ser eliminada do problema, pois, mediante o pivoteamento, a nova coluna tomará o lugar da antiga. Este pivoteamento pode destruir tanto a viabilidade primal como a viabilidade dual, mas nós podemos restaurar viabilidade primal e dual usando variáveis artificiais, se necessário, e re-otimizando, ou seja, aplicando novamente o método Simplex;

- Caso ocorra $\bar{y}_{kk} = 0$, temos que eliminar $\bar{x}_j$ do problema e para fazermos isto temos que tratá-la como uma variável artificial que está na base e proceder como no Método de Duas Fases.

Exemplo:

Suponha agora que dona Júlia aumente a quantidade de açúcar no picolé de morango, passando de 3 unidades para 5. Desta forma, a nova coluna a_1 será $\bar{a}_1 = \binom{5}{1}$. Vamos calcular agora $\bar{y}_1$ e $\bar{z}_1 - c_1$.

$$\bar{y}_1 = B^{-1}\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z}_1 - c_1 = c_B B^{-1}\bar{a}_1 - c_1 = c_B\bar{y}_1 - c_1$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - (-4) = -2$$

Neste caso, o coeficiente na linha de x_1 em $\bar{y}_1$ não é zero, e, então, adicionamos a coluna $\binom{3}{-2}$ e o $\bar{z}_1 - c_1 = -2$ de $\bar{x}_1$, ficando o pivô na coluna $\bar{x}_1$ e a na linha x_1, e prosseguindo-se com a variável $\bar{x}_1$ entrando na base e a variável antiga x_1 sendo eliminada. Para maior comodidade do leitor, reproduzimos abaixo o problema original na forma padrão e o seu respectivo quadro ótimo.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1200 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Agora colocaremos a nova coluna $x^{-}{}_1$. Após o pivoteamento, obtemos o quadro abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

VB	$\bar{x}_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	3	2	0	1	-2	600
x_3	-2	-1	1	-1	3	600
z	-2	-4	0	-1	-1	-4200

Tabela 48: Quadro Inicial-Mudanças em vetores de atividade para colunas básicas-ex

Observe que o quadro 49 é ótimo.

VB	$\bar{x}_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$\bar{x}_1$	1	2/3	0	1/3	-2/3	200
x_3	0	1/3	1	-1/3	5/3	1000
z	0	-8/3	0	-1/3	-7/3	-4600

Tabela 49: Quadro Ótimo-Mudanças em vetores de atividade para colunas básicas-ex

O problema não perdeu a viabilidade dual e nem a viabilidade primal. Caso perdesse a viabilidade dual, continuaríamos aplicando o algoritmo Simplex. Caso contrário, aplicaríamos o algoritmo dual Simplex, encontrando, nos dois casos, a nova solução ótima para o problema.

4.4 Introdução de novas variáveis

Suponha que uma variável x_{n+1} com coeficiente de custo c_{n+1} e coluna a_{n+1} seja considerada. Sem resolver o problema, nós podemos facilmente determinar se x_{n+1} vai compor a solução ótima. Inicialmente, calculamos $z_{n+1} - c_{n+1}$. Se $z_{n+1} - c_{n+1} < 0$ (para um problema de minimização), então $x^*_{n+1} = 0$, e a solução atual é ótima. Por outro lado, se $z_{n+1} - c_{n+1} \geq 0$, então x_{n+1} deve ser introduzida na base e uma ou mais iterações do método simplex têm que ser realizadas até encontrarmos a nova solução ótima.

Exemplo:

Suponha que dona Júlia passe a fazer também picolés de abacaxi, que serão vendidos a $R\$4{,}00$. Serão necessárias 2 unidades de açúcar e um palito de madeira para cada, ou seja, será introduzida uma variável x_6 com $c_6 = -4$ e $a_6 = \binom{2}{1}$.

Para maior comodidade do leitor, reproduzimos abaixo o problema original e o seu respectivo quadro ótimo.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1200 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Primeiro, calcularemos y_6. Podemos observar no quadro

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

ótimo que a base ótima é composta pelas colunas a_1 e a_3, ou seja, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ cuja inversa é $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$y_6 = B^{-1}a_6 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Agora calcularemos $z_6 - c_6$.

$$z_6 - c_6 = c_B B^{-1} a_6 - c_6 = c_B y_6 - c_6$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-4) = -3 + 4 = 1$$

Assim temos o novo quadro abaixo com a variável x_6:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	2	0	1	-2	0	600
x_3	0	-1	1	-1	3	1	600
z	0	-4	0	-1	-1	1	-4200

Tabela 50: Quadro Inicial Introdução de novas variáveis-ex

Observamos que $z_6 - c_6 > 0$. Logo, a variável x_6 entra na base. Pelo critério de saída, temos que a variável a deixar a base será a variável x_3. Realizando o pivoteamento, chegamos ao quadro abaixo: que é ótimo. Logo, dona Julia deve vender 600 picolés de morango, 600 picolés de abacaxi, nenhum picolé de limão, também nenhum picolé de uva e ela ganhará R\$4800,00 neste mês.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	2	0	1	-2	0	600
x_6	0	-1	1	-1	3	1	600
z	0	-3	-1	0	-4	0	-4800

Tabela 51: Quadro Ótimo Introdução de novas variáveis-ex

4.5 Adicionando uma nova restrição

Suponha que uma nova restrição é adicionada ao problema, então, deve ocorrer uma redução do espaço viável. Para a função objetivo, pode haver uma piora, ou, na melhor hipótese, ficar inalterada. O procedimento, portanto, consiste em verificar se a atual solução ótima satisfaz a nova restrição. Se satisfizer, ela será ótima para o conjunto ampliado de restrições. Caso contrário, há que se acrescentar mais uma linha ao quadro ótimo do simplex, com sua correspondente variável básica, e prosseguir com o Simplex, ou o Dual Simplex.

Exemplo:

Considere que dona Júlia vender uma quantidade mínima de 50 picolés de limão, então, a restrição a ser introduzida no problema original será: $x_2 \geq 50$, e, colocando na forma padrão, temos $x_2 - x_6 = 50$. Podemos observar que a coluna da variável x_6 não será uma coluna da matriz identidade, por causa do sinal negativo e isto nos levaria ao Método de Duas Fases. Para contornar esta situação, podemos multiplicar esta restrição por (-1), obtendo: $-x_2 + x_6 = -50$.

Para maior comodidade do leitor, reproduzimos abaixo o problema original na forma padrão e o seu respectivo quadro ótimo.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1200 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

E adicionando a restrição $-x_2 + x_6 = -50$ ao quadro ótimo,

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

Temos o quadro abaixo, que não é primal viável.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	2	0	1	-2	0	600
x_3	0	-1	1	-1	3	0	600
x_6	0	-1	0	0	0	1	-50
z	0	-4	0	-1	-1	0	-4200

Tabela 52: Quadro Inicial Adicionando uma nova restrição-ex

Para restaurarmos a viabilidade primal devemos utilizar o algoritmo Dual Simplex, já que o problema continua sendo dual viável.

Seguindo o algoritmo, escolhemos: $b_r = \text{mín}\{b_i,\ \ b_i < 0\}$, ou seja, escolhemos a linha L_3 como a linha do pivô, pois o único $b_i < 0$ é o -50, que está na linha L_3. A variável a entrar na base será x_2 por ser a única candidata, pois só ela tem $a_{rj} < 0$ na linha L_3. Sendo assim, procedemos o pivoteamento e obtemos o quadro abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	0	0	1	-2	2	500
x_3	0	0	1	-1	3	1	650
x_2	0	1	0	0	0	-1	50
z	0	-4	0	-1	-1	0	-4000

Tabela 53: Quadro Ótimo Adicionando uma nova restrição-ex

Este quadro nos diz que dona Júlia tem que vender 500 picolés de morango, 650 picolés de uva e os 50 picolés de limão que ela não abre mão de vender. Como consequência da insistência em vender picolés de limão, a receita de dona Julia ficará em R\$4000,00 mensais.

4.6 Referências associadas ao Capítulo 4

Você pode encontrar mais informações sobre o conteúdo deste capítulo em:(BAZARAA; JARVIS, 1977), (HADLEY, 1965), (LUENBERGER, 1989), (SIMONNARD; CHOUTET, 1972), (BERT-SIMAS; TSITSIKLIS, 1997), (CHVATAL, 1983).

Referências

ARENALES, M. a. a. *Pesquisa Operacional*. Elsevier Brasil, 2007. ISBN 9788535251937. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=sB__Fi8rprEC>. Citado na página 49.

BARROSO, G.; ELLENRIEDER, A. R. *Programação Linear*.[S.l.]: Almeida Neves Editores, 1971. Citado na página 49.

BAZARAA, M.; JARVIS, J. *Linear Programming and Network Flows*. New York: John Willey and Sons, 1977. Citado 4 vezes nas páginas 49, 116, 141 e 160.

BERTSIMAS, D.; TSITSIKLIS, J. *Introduction to Linear Optimization*. 1st. ed. [S.l.]: Athena Scientific, 1997. ISBN 1886529191. Citado 2 vezes nas páginas 141 e 160.

BLAND, R. *New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method*. Center for Operations Research & Econometrics, 1976. (CORE discussion paper: Center for Operations Research and Econometrics). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=iOpxnQEACAAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 116.

BREGALDA, P. F.; OLIVEIRA; BORNSTEIN. *Introdução à Programação Linear*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1981. Citado na página 48.

CHVATAL, V. *Linear Programming*. W. H. Freeman, 1983.(Series of books in the mathematical sciences). ISBN 9780716715870. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=DN20_tW_BV0C>. Citado 3 vezes nas páginas 116, 141 e 160.

DANTZIG, G. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1998. (Landmarks in Physics and Mathematics). ISBN 9780691059136. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=2j46uCX5ZAYC>. Citado na página 49.

DANTZIG, G. B. *History of Mathematical Programming: A Collection of Personal Reminiscences*. CWI, 1991. ISBN 9780444888181. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Ib4fAQAAIAAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 116.

DORFMAN, R.; SAMUELSON, P.; SOLOW, R. *Linear Programming and Economic Analysis*. Dover Publications, 1987. (Dover Books on Advanced Mathematics). ISBN 9780486654911. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=1um6AAAAIAAJ>. Citado na página 49.

FILHO, V. F. *Gestão de Operações e Logística na Produção de Petróleo*. [S.l.]: Campus-RJ, 2015. ISBN 978-85-352-8037-1. Citado na página 49.

GARVIN, W. *Introduction to Linear Programming*. McGraw-Hill, 1960. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=l3cWAAAAIAAJ>. Citado na página 49.

GASS, S. *Linear Programming: Methods and Applications*. Dover Publications, 2003. (Dover Books on Computer Science Series). ISBN 9780486432847. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=dDIMnAntgUsC>. Citado na página 116.

GOLDBARG, M.; LUNA, H. *Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos*. CAMPUS - RJ, 2005. ISBN 9788535215205. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Q-bNGAAACAAJ>. Citado na página 49.

GOLDSTEIN, E.; YOUDINE, D. *Problèmes Particuliers de la Programmation Linéaire*. [S.l.]: MIR, 1973. Citado na página 49.

GONZAGA, C. C. Path-following methods for linear programming. *SIAM Review*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 34, n. 2, p. 167–224, 1992. ISSN 00361445. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2132853>. Citado na página 115.

HADLEY, G. *Linear Programming*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1965. Citado 4 vezes nas páginas 49, 116, 141 e 160.

ILLéS, T.; TERLAKY, T. Pivot versus interior point methods: Pros and cons. *European Journal of Operational Research*, v. 140, n. 2, p. 170 – 190, 2002. ISSN 0377-2217. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221702000619>. Citado na página 116.

JACQUET-LAGRÈZE, É. *Programmation linéaire: modélisation et mise en oeuvre informatique*. Economica, 1998. (P.I.Q. poche). ISBN 9782717834949. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=G2ldPQAACAAJ>. Citado na página 49.

KANTOROVICH, L. V. Mathematical methods of organizing andplanning production. *Management Science*, v. 6, p. 366–422, 1960. Citado na página 49.

KARMARKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, v. 4, n. 4, p. 373–395, dez. 1984. ISSN 0209-9683. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02579150>. Citado 2 vezes nas páginas 115 e 116.

KHACHIYAN, L. Polynomial algorithms in linear programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 20, n. 1, p. 53 – 72, 1980. ISSN 0041-5553. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0041555380900610>. Citado 2 vezes nas páginas 115 e 116.

KLEE, V.; MINTY, G.; MATHEMATICS., W. U. S. D. of. *HOW GOOD IS THE SIMPLEX ALGORITHM*. Defense Technical Information Center, 1970. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=R843OAAACAAJ>. Citado na página 115.

LASDON, L. *Optimization Theory for Large Systems*. [S.l.]: Dover Publications, 1970. (Dover books on Mathematics). ISBN 9780486419992. Citado na página 49.

LUENBERGER, D. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1989. Citado 4 vezes nas páginas 49, 116, 141 e 160.

LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *Linear and Non Linear Programming*. Stanford, USA: Springer, 2008. Citado na página 58.

MACHADO, H. In: *Anais do Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA*. Rio de Janeiro: [s.n.], 1975. Citado na página 116.

MACULAN, N.; FAMPA, M. H. C. *Otimização Linear*. Brasília: EdUnB, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 49, 116 e 141.

MACULAN, N.; PEREIRA, M. V. F. *Programação Linear*. São Paulo: Editora Atlas, 1980. Citado 3 vezes nas páginas 49, 116 e 141.

MAFFIOLI, F. *Elementi di programmazione matematica*. CEA, 1991. (Elementi di programmazione matematica, v. 2). ISBN 9788840811345. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=-TFFAAAACAAJ>. Citado na página 49.

MINOUX, M. *Mathematical programming: theory and algorithms*. Wiley, 1986. (Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization). ISBN 9780471901709. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=5kDvAAAAMAAJ>. Citado na página 116.

MURTY, K. *Linear and combinatorial programming*. Wiley, 1976. ISBN 9780471573708. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=-mJRAAAAMAAJ>. Citado na página 49.

PUCCINI, A. L. *Introdução à Programação Linear*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos - LTC, 1975. Citado na página 49.

SIMONNARD, M.; CHOUTET, X. *Programmation linéaire : technique du calcul économique*. Dunod, 1972. (Finance et économie appliquée). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=wx_gjgEACAAJ>. Citado 3 vezes nas páginas 116, 141 e 160.

SIMONSEN, M. H. *Introdução à Programação Linear*. [S.l.]: IMPA, 1958. (Notas de Matemática, 8). Citado na página 116.

TAHA, H. A. *Operations Research: An Introduction, 8/E*. Pearson Education, 2008. ISBN 9788131711040. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=QhU5BkVRm2oC>. Citado na página 49.

VANDERBEI, R. *Linear Programming: Foundations and Extensions*. Springer US, 2013. (International Series in Operations Research & Management Science). ISBN 9781461476306. Disponível em: <https://books.google.de/books?id=udqCBAAAQBAJ>. Citado na página 116.

VARAIYA, P. *Notes on optimization*. Van Nostrand Reinhold Co., 1972. (Van Nostrand Reinhold notes on system sciences). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=J\ _w-AAAAIAAJ>. Citado na página 116.

WERRA, D. de. *Éléments de programmation linéaire avec application aux graphes*. Presses polytechniques romandes, 1990. (Mathématiques (Presses polytechniques romandes)). ISBN 9782880741761. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ZUfxAAAAMAAJ>. Citado na página 116.

Licenciatura em Computação a Distância

Este material faz parte de uma coleção de livros que o aluno do Curso de Licenciatura em Computação, na modalidade a distância, recebe ao iniciar o período letivo na Universidade Federal da Paraíba. O curso está vinculado à Universidade Aberta do Brasil - UAB, que está compromissada em ampliar a interiorização da oferta de ensino superior gratuito e de qualidade no Brasil. É através deste programa que temos o financiamento para a produção deste livro e a execução do curso.

Desejamos um bom estudo!

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL
SAPIENTIA ÆDIFICAT
UFPBVIRTUAL
UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CAPES