

Algoritmos e Grafos

Lista de Exercícios 1

IC/UFRJ

Todos os exercícios levam em consideração a referência principal do curso, em inglês, como segue: Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2022). Introduction to algorithms. MIT press.

Questões

1. Considere o tabuleiro 6×6 abaixo, em que

0 = célula livre, X = célula bloqueada, R = posição inicial do coelho Rico, C = cenoura.

e o coelho Rico pode mover-se de sua célula atual para qualquer célula adjacente (acima, abaixo, à esquerda ou à direita) que exista e não esteja bloqueada.

0	0	0	0	0	0
0	X	0	0	0	0
0	0	X	C	0	0
X	0	X	X	X	0
X	0	0	0	0	0
R	0	0	0	X	0

- a. Qual é o número mínimo de passos que Rico precisa dar para chegar à cenoura C ?
 - b. Como podemos modelar esse problema utilizando um grafo não ponderado?
 - c. Para o caso geral, onde modelamos o problema por meio de um grafo não ponderado, qual algoritmo (busca em largura, profundidade ou ambos) você usaria para encontrar o menor número de passos da origem ao destino? Justifique.
2. Considere um grafo G de uma rede social chamada Kutor. Nessa rede social, os usuários têm permissão de seguir outros usuários. Isto é, o usuário A pode seguir B , mas não necessariamente B deverá seguir A . Cada usuário pode ser representado por uma identificação numérica única. Responda às seguintes perguntas:
 - a. Modele o grafo de Kutor. Escolha entre listas ou matrizes de adjacências. Explique qual escolha é melhor com base no que é pedido nas questões subsequentes (b–d).
 - b. Escreva uma função $\text{numero_seguidos}(G, u)$ para descobrir quantos usuários um determinado usuário u segue.
 - c. Escreva a função $\text{numero_seguidores}(G, u)$ para descobrir quantos usuários seguem o usuário u .

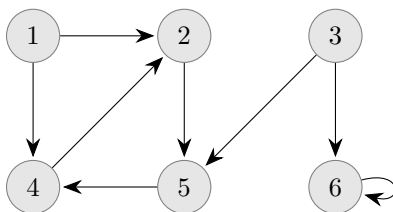
- d. Escreva a função *get_cfc*(G, u) que irá retornar todos os usuários que estão no mesmo componente fortemente conexo que o usuário u . Utilize outras estruturas de dados, caso necessário. Explique o que significa o usuário u estar num CFC com outros usuários da rede.
3. Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado. A *transposta* de G , denotada por $G^T = (V, E^T)$, é o grafo obtido ao inverter todas as arestas de G . Formalmente, temos:

$$E^T = \{(v, u) \in V \times V \mid (u, v) \in E\}$$

Ou seja, G^T é o grafo G com todas as suas arestas revertidas.

Descreva algoritmos eficientes para computar G^T a partir de G , considerando as representações por lista de adjacência e por matriz de adjacência. Analise o tempo de execução dos algoritmos propostos.

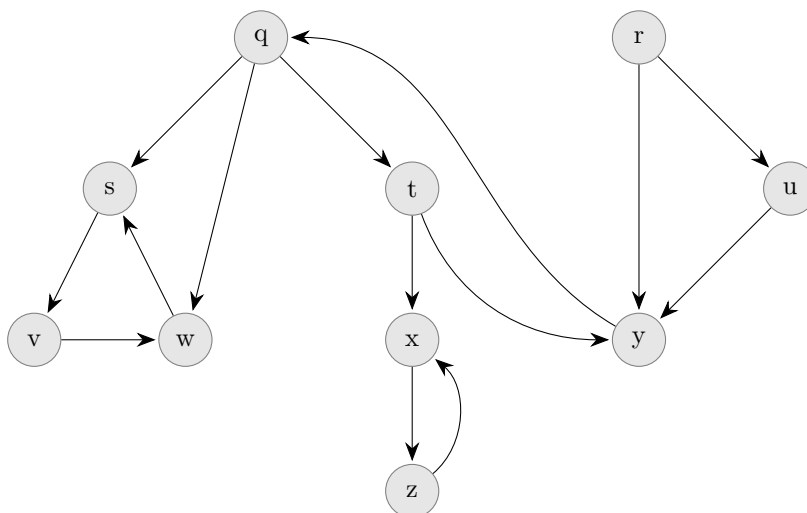
4. Considere uma rede social de compartilhamento de notícias chamada *NewsNet*. Nessa rede, cada usuário pode receber notícias de outros usuários e compartilhá-las adiante. Cada usuário somente poderá ver notícias de quem ele segue, e se um usuário segue outro, não necessariamente ele é seguido de volta. Cada usuário e cada notícia possuem identificação numérica única. Responda às seguintes perguntas:
- Modele o sistema de compartilhamento de notícias como um grafo apropriado. Escolha entre representação por listas de adjacência ou por matriz de adjacência e justifique sua escolha com base nos requisitos dos itens subsequentes (b–d).
 - Escreva a função `alcance_noticia(G, x)` que retorna o número total de usuários que visualizaram a notícia de identificação numérica x .
 - Um dos grandes problemas originados por redes sociais é o que foi definido como *filter bubble*¹. Com efeito, você deve elaborar um algoritmo para descobrir quais são os principais grupos de pessoas que mais espalham a notícia x entre si.
 - Suponha agora que você queira medir a propagação apenas em uma janela de tempo fixo (por exemplo, nos últimos T minutos). Descreva como modificaria seu modelo de grafo e os algoritmos acima para incorporar essa restrição temporal.
5. Suponha um sistema interbancário modelado por um grafo direcionado em que cada vértice representa um banco e existe uma aresta ($u \rightarrow v$) sempre que o banco u tomou empréstimo de v . Um *sumidouro universal* (*universal sink*) nesse contexto é um banco que não tomou empréstimos de ninguém (grau de saída zero), mas de quem todos os demais bancos tomaram empréstimos (grau de entrada $|V| - 1$). Explique por que identificar esse banco em tempo $O(|V|)$, com uma **matriz de adjacência**, pode ser útil para detectar o “nó-central” de liquidez no sistema.
6. Considere o seguinte grafo direcionado:



- a. Mostre os valores de d e π que resultam da execução do algoritmo de *busca em largura* no grafo acima, usando o vértice **3** como fonte.

¹Conceito de Eli Pariser sobre sistemas de recomendação. Refere-se à seleção de ideias e notícias que os indivíduos provavelmente irão gostar ou com as quais irão concordar, com base em seus padrões de comportamento digital. Como resultado, os indivíduos são predominantemente expostos a informações que se alinham com suas crenças pré-existentes e passam a depender cada vez menos de pontos de vista alternativos para formar suas opiniões — reduzindo, assim, a alteridade.

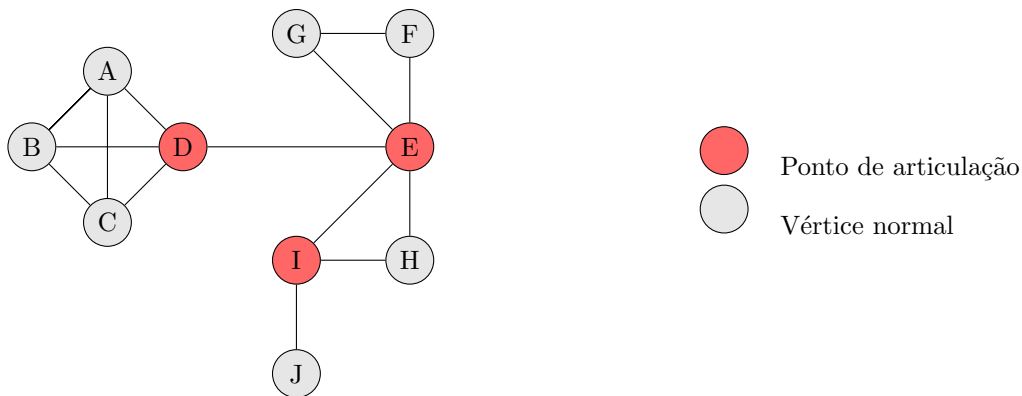
- b. Tal como em (a), mostre os valores de d e π , mas usando o vértice **5** como fonte. O que acontece de diferente? Explique.
7. Em um grande assalto, n comparsas planejam fugir em dois carros de fuga — Carro A e Carro B. Entretanto, há exatamente r pares de comparsas que se odeiam mutuamente e se recusam a viajar juntos sob risco de brigas. Modele este problema como um grafo, e formule um algoritmo que determine se é possível atribuir cada comparsa a um dos dois carros de modo que nenhum par de inimigos fique no mesmo veículo. Caso a atribuição seja possível, o algoritmo deve produzir uma distribuição válida (isto é, uma partição dos comparsas em “Carro A” e “Carro B”). Dica: a busca em largura ajuda neste problema!
8. Considere o seguinte grafo direcionado:



Mostre como o algoritmo de *busca em profundidade* trabalha no grafo acima. Assuma que os vértices-fonte de cada busca em profundidade sempre serão visitados em ordem alfabética, e também suponha que cada lista de adjacência também esteja ordenada alfabeticamente. Para cada vértice, apresente os tempos de descoberta d e de finalização f e a classificação de cada aresta dada pelo algoritmo de busca em profundidade.

9. Dê um contraexemplo para a seguinte conjectura: seja G um grafo direcionado que contém um caminho de u a v . Se, em uma execução de DFS em G , vale $u.d < v.d$, então v é descendente de u na floresta de busca em profundidade resultante.
10. Em uma rede social, modelamos os usuários por vértices e cada relação de “amizade” por arestas não direcionadas, como ocorre no Facebook. Suponha que ao longo do tempo surjam comunidades distintas — grupos de usuários conectados entre si — que trocam intensamente notícias e opiniões. Com efeito, existem determinados porta-vozes que são capazes de se comunicar com outras comunidades, de tal forma que sua ausência acarretaria numa completa desconexão entre essas comunidades. Os porta-vozes podem ser definidos como um *ponto de articulação* como segue:

Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado e conectado. Um *ponto de articulação* de G é um vértice cuja remoção — juntamente com todas as arestas incidentes a ele — desconecta G .

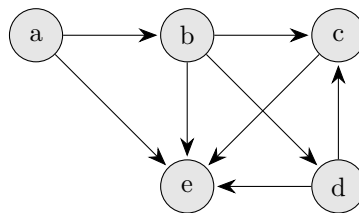


Desenvolva um algoritmo que identifique todos os pontos de articulação num grafo não direcionado e conectado. Com base nisso, discuta o papel desses usuários como “ponte” entre grupos e o impacto de sua eventual saída na difusão de informações na rede. Além disso, discuta a importância de estudar estes atores na rede.

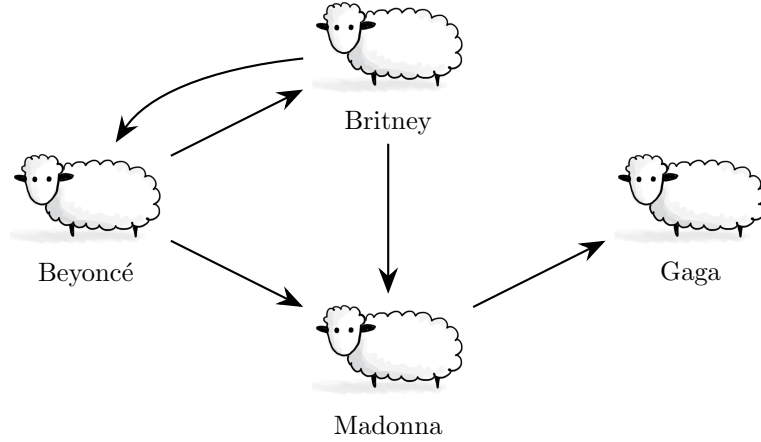
11. Verdadeiro ou Falso?

- Se uma aresta (u, v) é aresta de retorno em uma busca em profundidade feita em um grafo G , então (u, v) será aresta de retorno em toda busca em profundidade feita em G .
- Na busca em profundidade, se $u.d < v.d < v.f < u.f$, então v é descendente de u na floresta predecessora, mas somente para grafos direcionados.
- Todo grafo direcionado e acíclico admite pelo menos duas ordenações topológicas.
- Somente é possível identificar se um grafo não direcionado tem ciclos com a busca em profundidade.
- É possível identificar os componentes conectados de um grafo não direcionado tanto por meio da busca em profundidade quanto pela busca em largura.

12. Encontre uma ordenação topológica para o grafo direcionado abaixo. Liste todas as etapas, incluindo os valores de d e f para cada vértice:



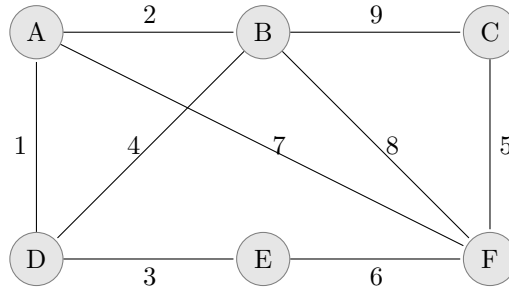
13. Em uma ilha vivem n ovelhas que se comunicam pela rede social *Mééé!* Modelamos essa rede por um grafo direcionado $G = (V, E)$, cujos vértices representam as ovelhas. Algumas ovelhas seguem outras ovelhas nessa rede social. As ovelhas acreditam e repetem qualquer coisa que elas escutam. Isto é, elas irão compartilhar qualquer conteúdo que qualquer ovelha que elas seguem publicar. Podemos modelar esse grafo de maneira que uma aresta $(u, v) \in E$ significa que v vai compartilhar qualquer coisa publicada por u . O exemplo a seguir ilustra um grafo como esse:



Pelo diagrama acima, Gaga segue Madonna, e Madonna, por sua vez, segue Britney e Beyoncé. Isso significa que Gaga irá compartilhar qualquer conteúdo publicado por Madonna². Consequentemente, dizemos que uma ovelha é *influencer* se toda postagem sua é eventualmente repostada por todas as outras ovelhas da ilha.

- Prove que, se existe pelo menos um influencer, então
 - todos os influencers pertencem à mesma componente fortemente conectada de G , e
 - toda ovelha dessa componente é um influencer.
- Suponha que haja pelo menos um influencer. Descreva um algoritmo que, em tempo $O(V + E)$, encontre um influencer em G .

14. Considere o grafo G abaixo, não direcionado e valorado:



- Prim*: Em que ordem o algoritmo de Prim adiciona arestas à árvore geradora mínima de G quando iniciado a partir do vértice D ?
- Kruskal*: Em que ordem o algoritmo de Kruskal seleciona arestas para construir a árvore geradora mínima de G ?

(Em ambos os casos se espera uma listagem, em ordem, das arestas adicionadas na AGM)

15. Considere um grafo não dirigido e conexo $G = (V, E)$, com função de peso $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que $|E| \geq |V|$ e que todos os pesos $w(e)$ sejam distintos. Seja \mathcal{T} o conjunto de todas as árvores geradoras de G , e seja $T' \in \mathcal{T}$ a árvore geradora mínima de G . Definimos uma *segunda melhor árvore geradora mínima* como qualquer outra árvore $T \in \mathcal{T} - \{T'\}$ que satisfaça

$$w(T) = \min_{T'' \in \mathcal{T} - \{T'\}} w(T'').$$

²Se houver um ciclo, então cada ovelha vai compartilhar um post apenas uma vez.

- a Dê um exemplo, sob as hipóteses acima, indicando que a árvore geradora mínima T' é única, mas que a segunda melhor árvore geradora mínima pode não ser única.

16. A república de Atlantis contratou você para instalar uma rede de fibra óptica que conecte todas as suas n cidades. Há duas tecnologias disponíveis:

- *Fibra 1.0*: tecnologia confiável e de custo relativamente baixo. Existe uma lista de pares de cidades entre as quais é possível instalar um enlace direto de Fibra 1.0, e cada par (u, v) tem um custo inteiro positivo $w(u, v)$.
- *Fibra 2.0*: tecnologia avançada que permite conectar diretamente qualquer par de cidades, mas é tão cara que o governo não pode pagar nem um único enlace.

Todos os enlaces são bidirecionais. A rede instalada deve ser conexa, ou seja, entre quaisquer duas cidades deve haver um caminho de enlaces diretos.

Um filantropo se dispôs a doar integralmente o custo de exatamente $k < n$ enlaces de Fibra 2.0, que você pode usar para conectar quaisquer k pares de cidades sem custo para o governo. Seu objetivo é minimizar o total pago pelo governo pelos enlaces de Fibra 1.0 necessários para formar uma rede conexa.

Note que é possível construir a rede conectando todas as cidades de Atlantis usando somente enlaces Fibra 1.0, mas que seria benéfico ter os k enlaces Fibra 2.0 doados pelo filantropo para minimizar o custo do que é pago pelo governo.

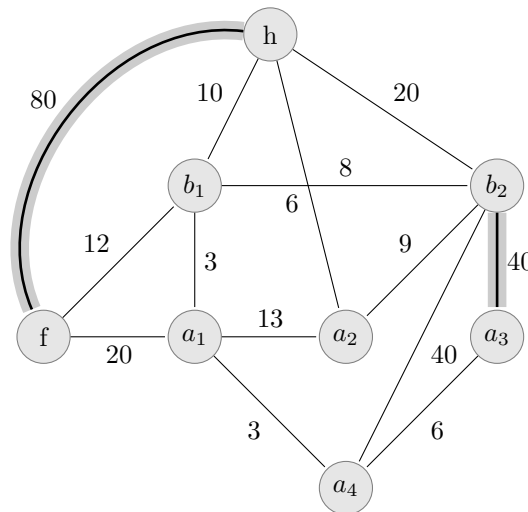
- a Seu objetivo é minimizar o custo do que é pago pelo governo para os enlaces de Fibra 1.0, que são necessários para construir a rede conectada. Descreva um algoritmo que ache a rede que custa a menor quantidade de dinheiro ao governo.

17. Um novo banco local está sendo criado e precisará conectar, por meio de uma rede de fibra óptica, os seguintes pontos:

sede h , filiais b_1, b_2 , ATMs a_1, a_2, a_3, a_4 , e o Banco Central f .

A rede deve ser *conexa*: de qualquer nó a qualquer outro existe um caminho (talvez passando por nós intermediários). Devido a requisitos de alta velocidade, as conexões $\{h, f\}$ e $\{b_2, a_3\}$ **já foram contratadas** obrigatoriamente.

Os demais enlaces possíveis e seus custos (em dezenas de milhares de reais) são:



- a. Liste quais conexões (além de $\{h, f\}$ e $\{b_2, a_3\}$) o banco deve contratar para obter uma rede conexa de custo mínimo. Explique como selecionou cada enlace e justifique por que o custo total é mínimo.