Otimização
Modelagem Matemática

A modelagem, que trata de representação quantitativa de processos de problemas reais, é de grande importância nas diversas áreas do conhecimento. O objetivo de um modelo matemático é reproduzir o realidade da forma mais fiel possível, buscando entender o mundo real e obtendo as respostas que podem resultar a partir de ações.

Formulação de um Modelo

1. Compreender o problema
2. Descrever o objetivo
3. Definir as variáveis de decisão
4. Descrever cada restrição
5. Escrever o objetivo em termos das variáveis de decisão
6. Escrever as restrições em termos das variáveis de decisão

Modelagem em Programação Linear (PPL)

Hipóteses de Linearidade
Nos modelos de programação linear são admitidas algumas hipóteses que as grandezas envolvidas precisam obedecer:

- Proporcionalidade
- Aditividade
- Não integralidade de solução (fracionamento ou divisibilidade)
- Determinística

Exemplo

Uma empresa pode fabricar dois produtos (1 e 2).

Na fabricação do produto 1 a empresa gasta nove horas-homem e três horas-máquina. Margem de lucro R$ 4000,00
Na fabricação do produto 2 a empresa gasta uma hora-homem e uma hora- máquina. Margem de lucro R$1000,00
A empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina para um período de produção.

Quanto a empresa deve fabricar de cada produto para ter o maior lucro?

Primeiro descrevemos o objetivo (Função Objetiva)

A função lucro (função objetivo)
Tem-se a decidir quanto produzir do produto 1 (x_1)e quanto produzir do produto 2(x_2). Assim consideramos como variáveis as quantidades a serem produzidas da cada produto respectivamente
O lucro L depende da quantidade de cada produto

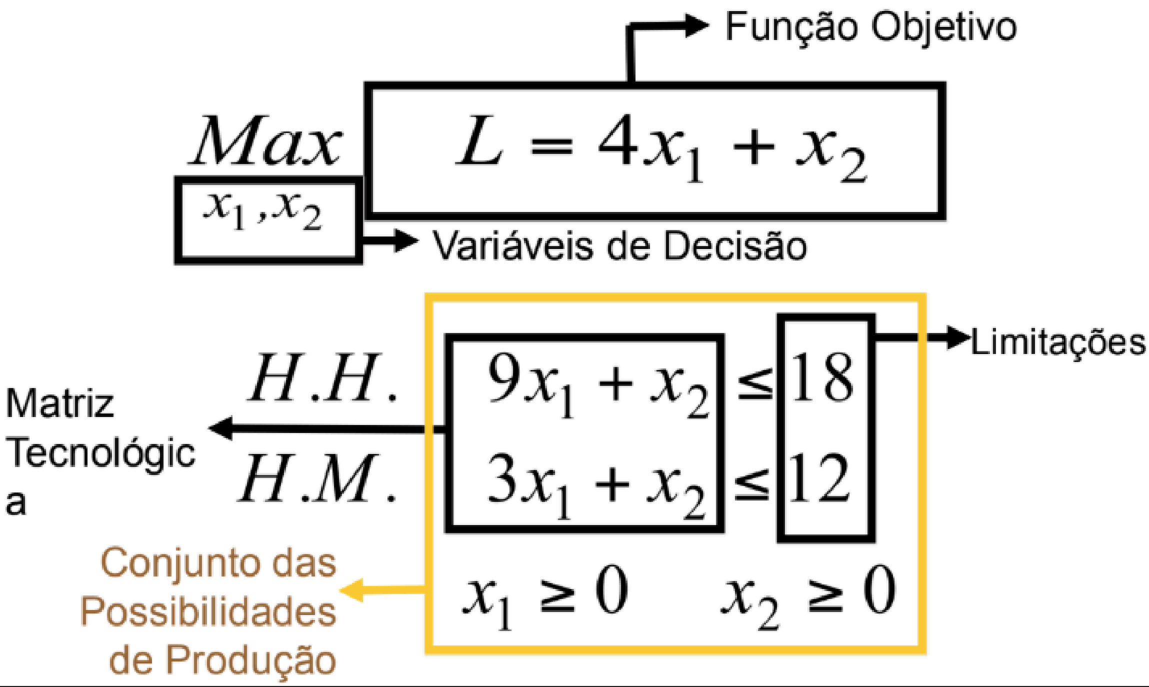
$$z = 4x_1 + x_2$$

Descrevendo as restrições

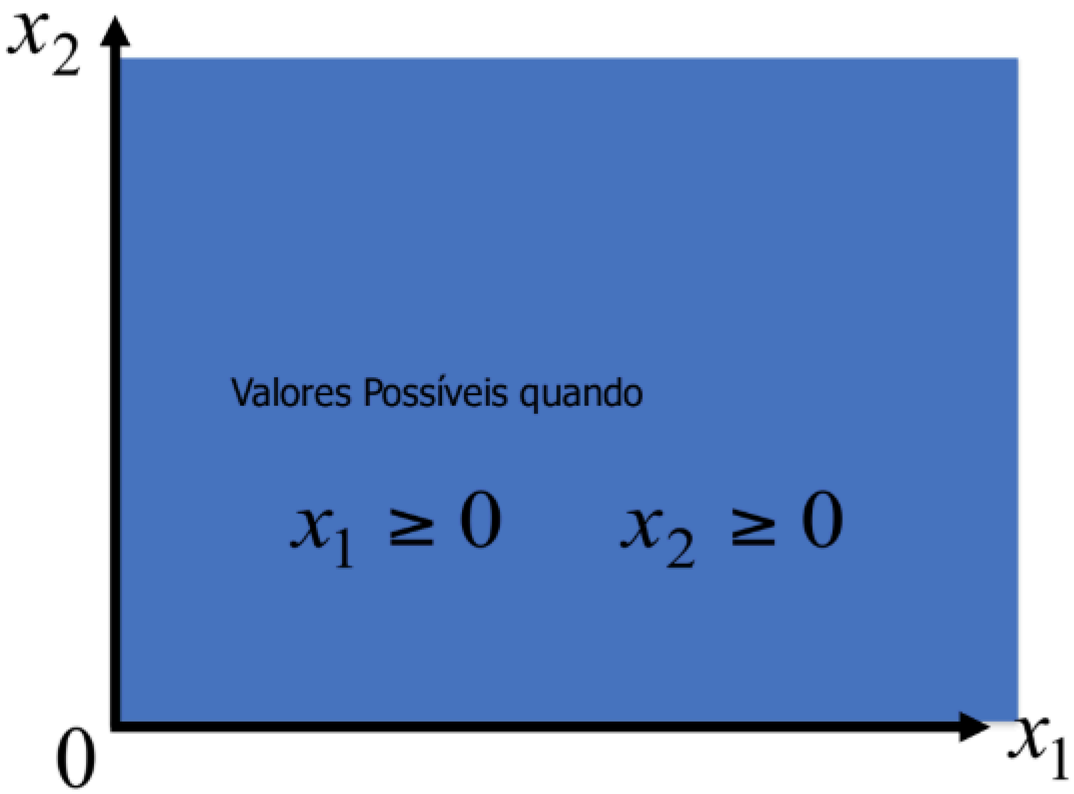
Não se pode utilizar o que não se tem!
A quantidade utilizada deve ser menor ou igual a quantidade disponível.
As quantidades de fabricação devem ser não negativas

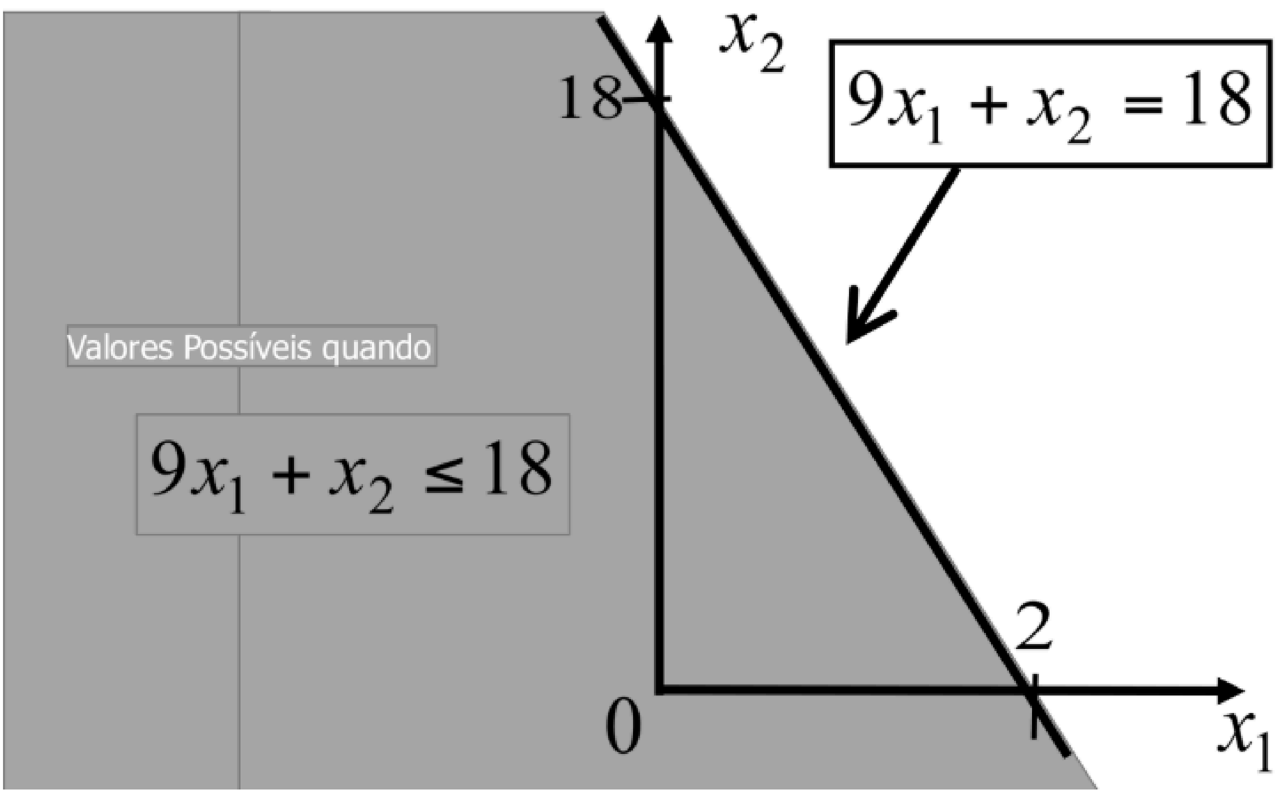
$$\begin{array}{cc} \text{(Hora Homem)} & 9x_1 + x_2 \leq 18 \\ \text{(Hora Máquina)} & 3x_2 + x - 2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 \end{array}$$

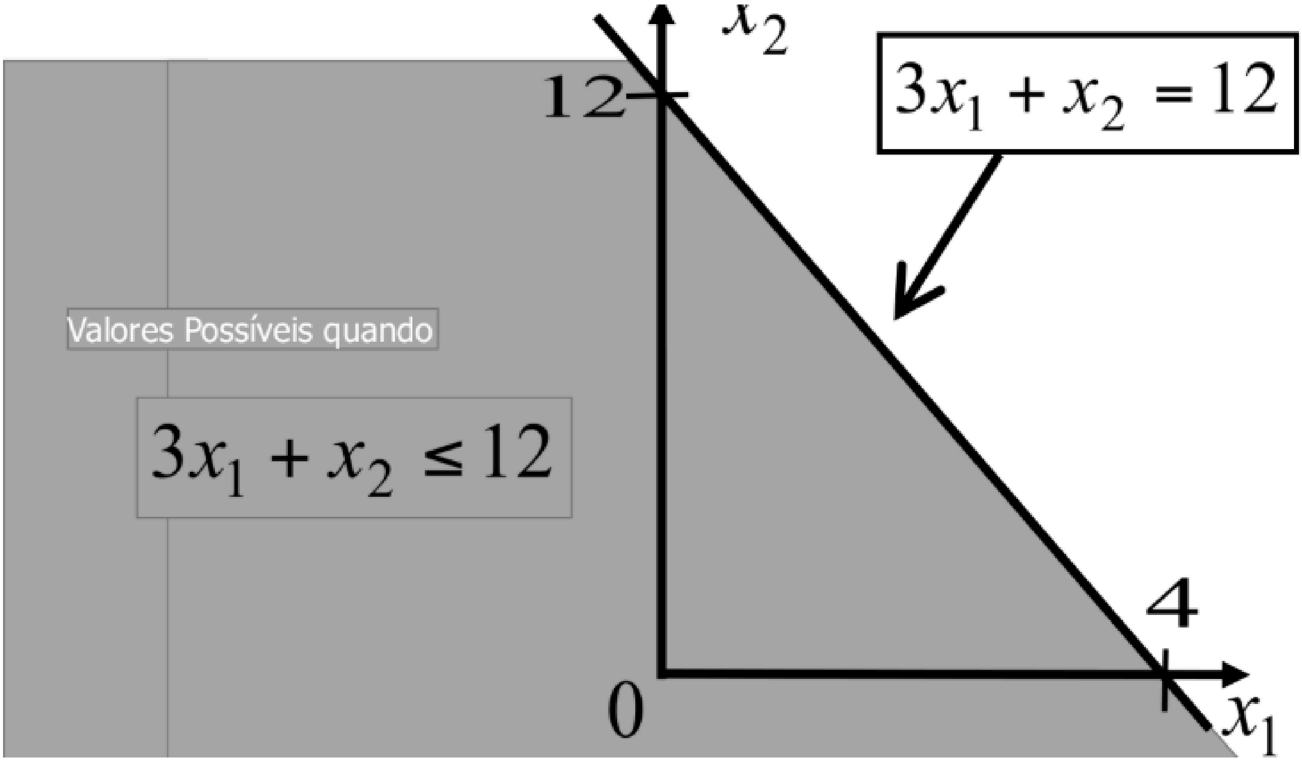
Problema de Programação Linear - PPL



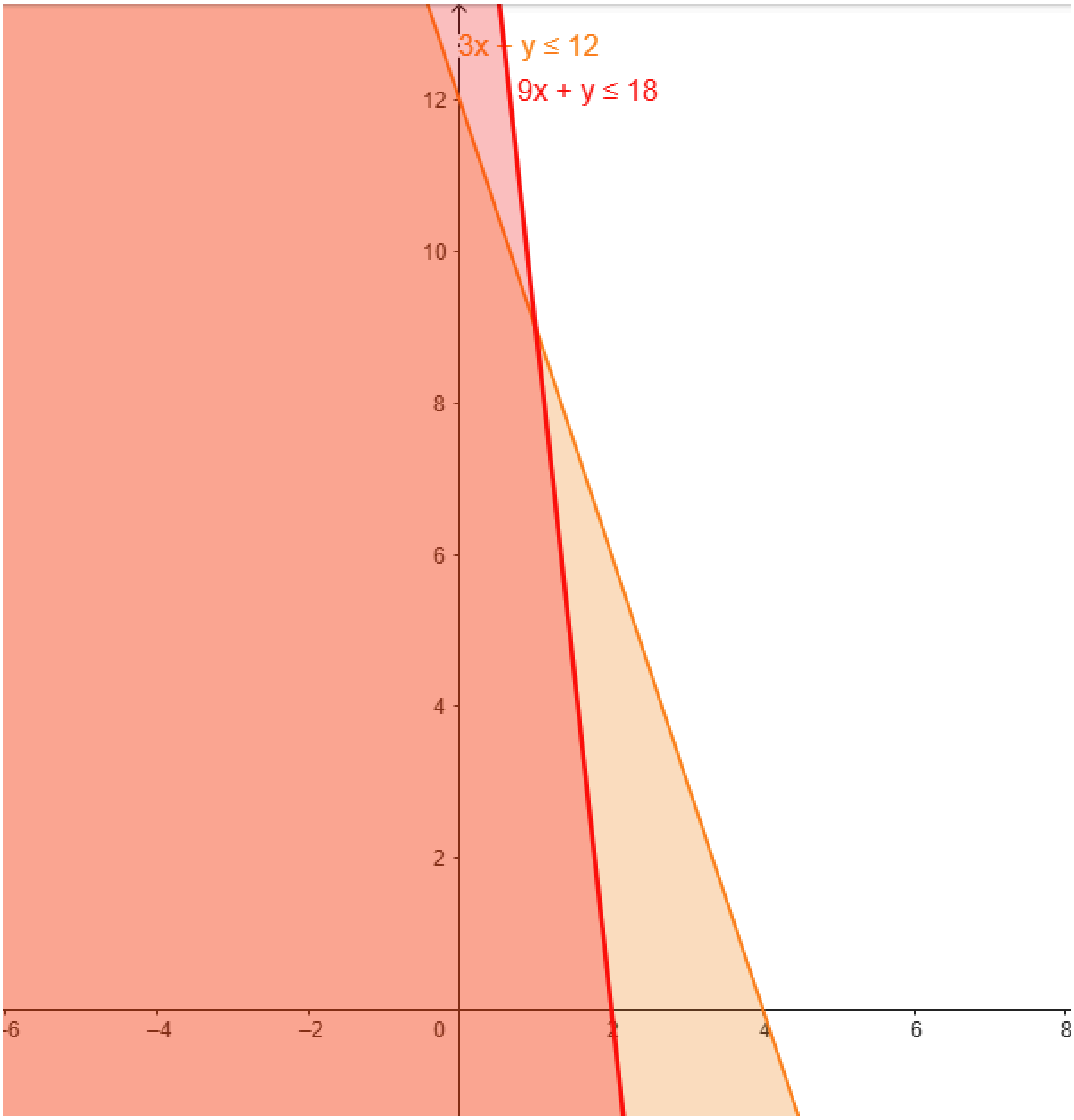
Resolução Geométrica


x_2
Valores Possíveis quando
$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$
0
x_1

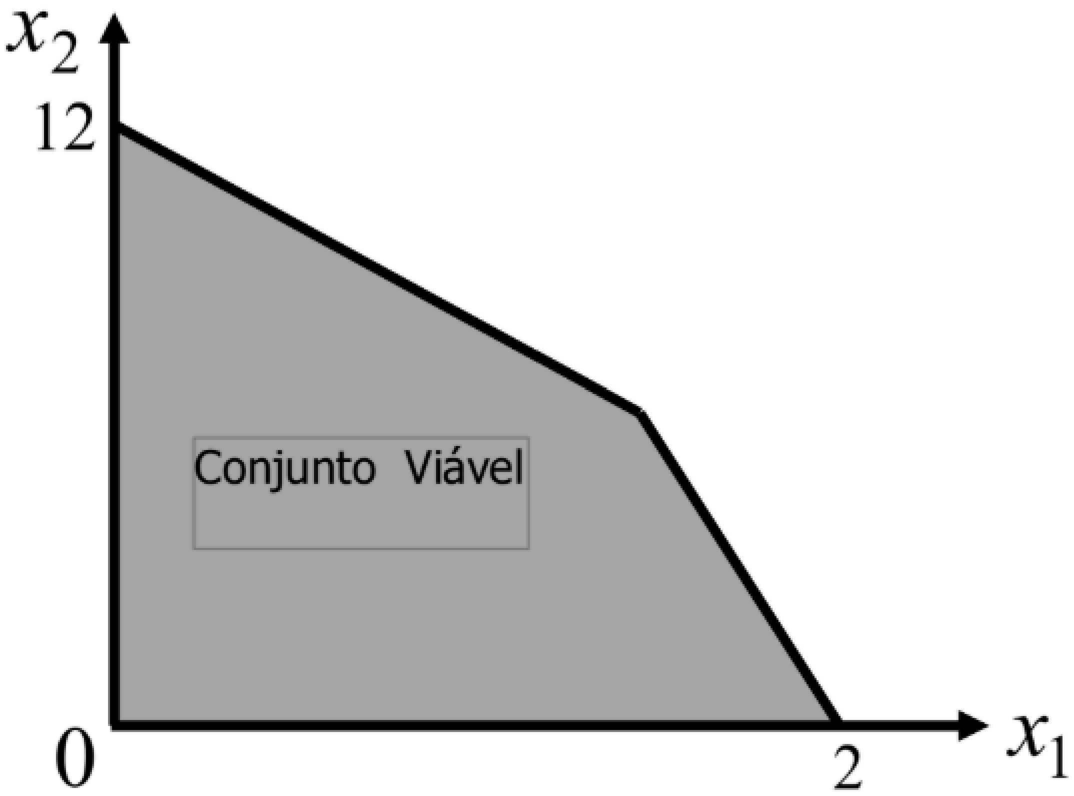

x_2
$9x_1 + x_2 = 18$
18
Valores Possíveis quando
$9x_1 + x_2 \leq 18$
2
0
x_1



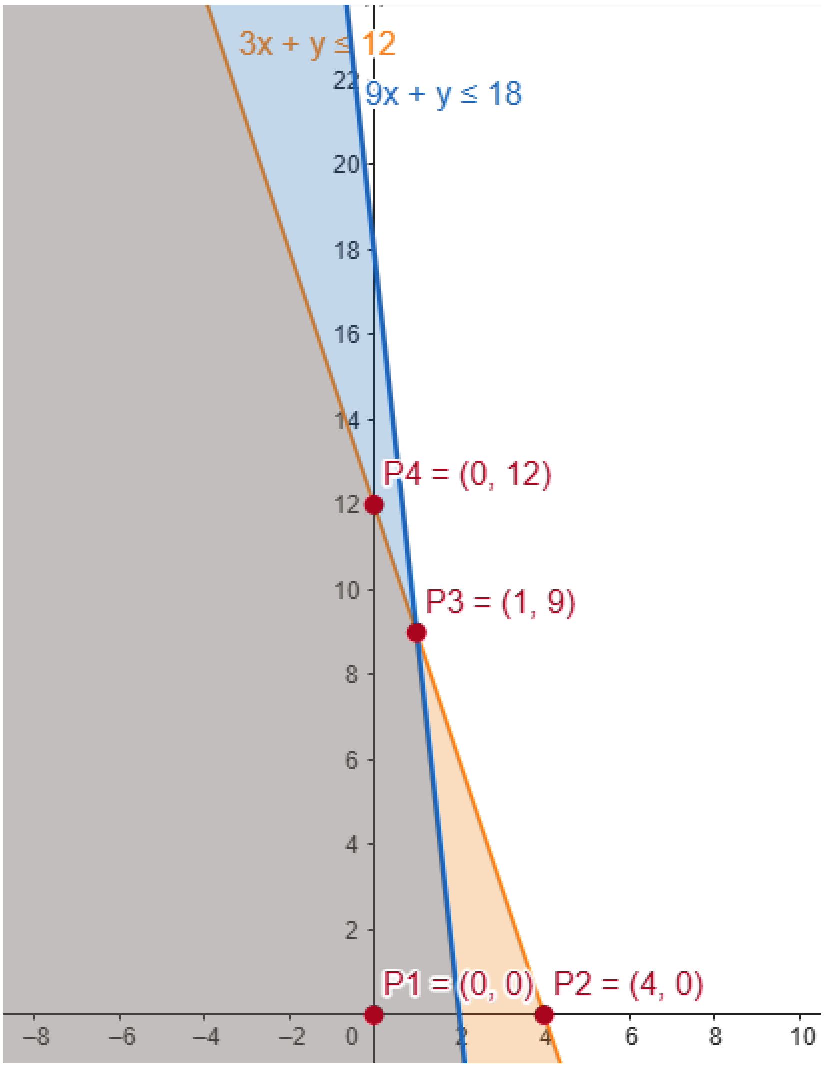
x_2
$3x_1 + x_2 = 12$
12
Valores Possíveis quando
$3x_1 + x_2 \le 12$
4
0
x_1



3x + y ≤ 12
9x + y ≤ 18



Possíveis Melhores Soluções



Como queremos Maximizar x_1 **e** x_2, então podemos desconsiderar **P1, P2 e P4**
Logo, substituindo $P4$, na função objetiva, $z = 4x_1 + x - 2$, temos:

$$(1, 9) \qquad 4 \cdot 1 + 9 = 13$$

Então a solução ótima é $x_1 = 1$ e $x_2 = 9$, para o valor ótimo $= 13$

Problema de Programação Linear - PPL

PPL Inteira

$$\begin{aligned} \min \text{ (ou max) } z = c^t x \\ \text{sujeito a} \\ Ax = b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

PPL Inteira-Mista

$$\begin{aligned} \min \text{ (ou max) } z = c^t x + d^t y \\ \text{sujeito a} \\ Ax + By = b \\ x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{Z}^p \end{aligned}$$

A Terminologia para um PPL

Função Objetivo:
A função a ser maximizada ou minimizada é chamada Função objetivo f.

Restrição:
As condições impostas pelo modelo são denominadas Restrições do PPL.
As restrições $x_j \geq 0$ são denominadas Restrições de não negatividade.
As outras Restrições funcionais.

Solução Viável:
Uma Solução Viável é uma solução para a qual todas as restrições são satisfeitas.

Solução Inviável:
Uma Solução Inviável é uma solução para a qual pelo menos uma restrição é violada.

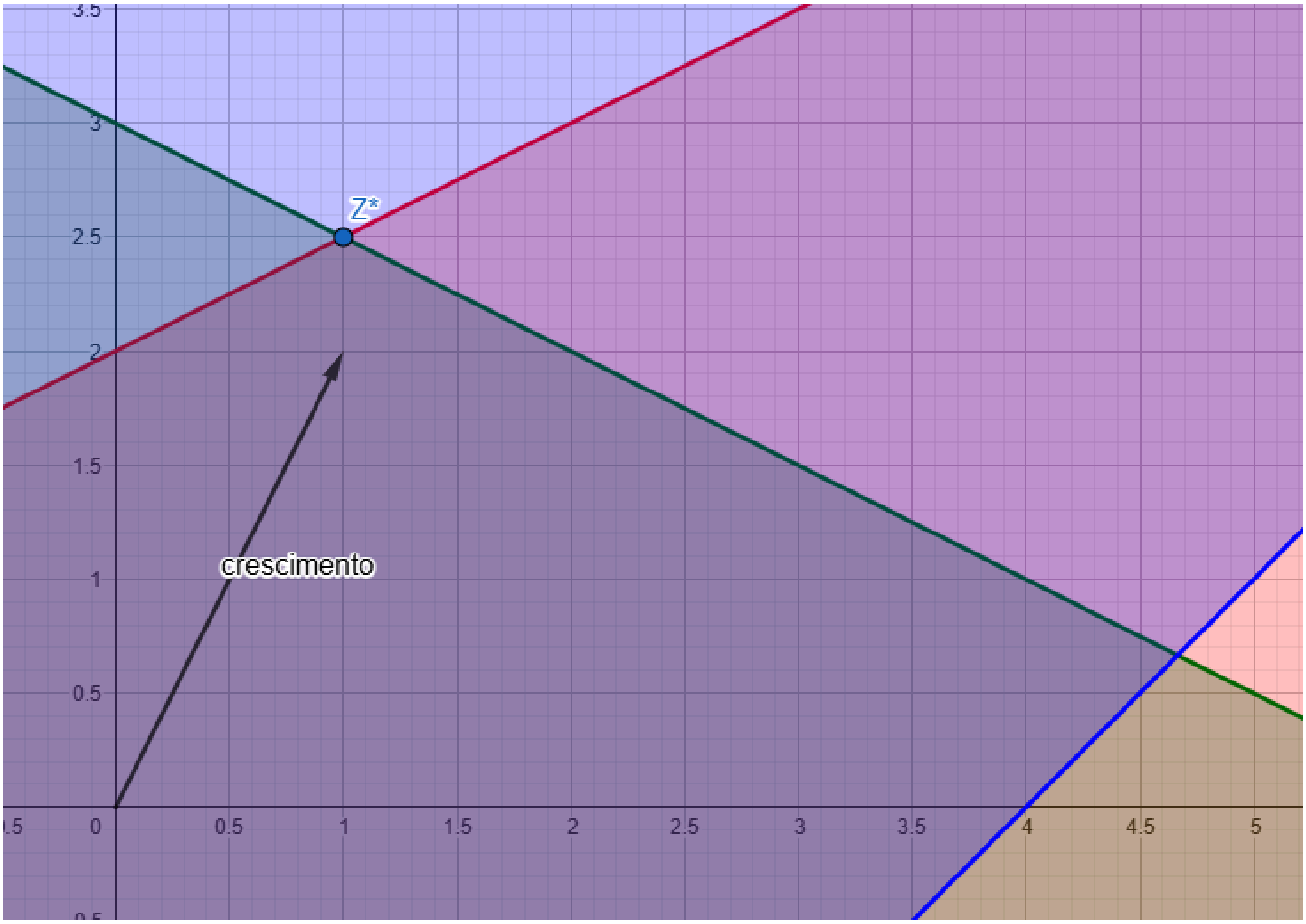
Região Viável:
a região viável é o conjunto de todas as soluções viáveis.

Solução Ótima:
Uma solução ótima ié uma solução viável onde onde a função objetivo atinge valor máximo(
PPL maximização) ou mínimo (PPL minimização)

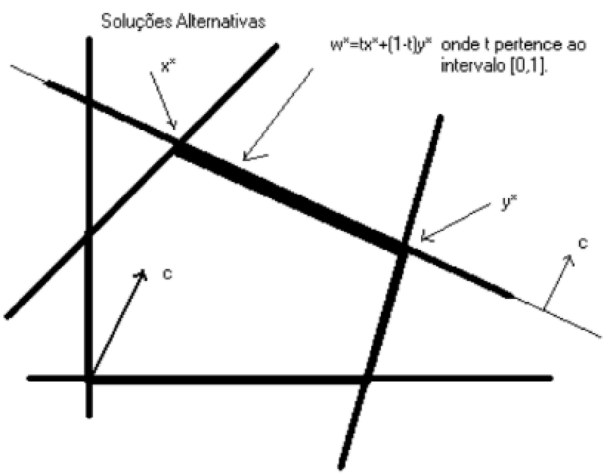
Geometria do PPL

Soluções de um PPL

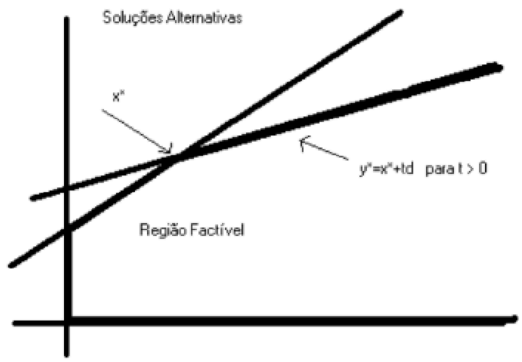
1. Solução Única



2. Solução Alternativa

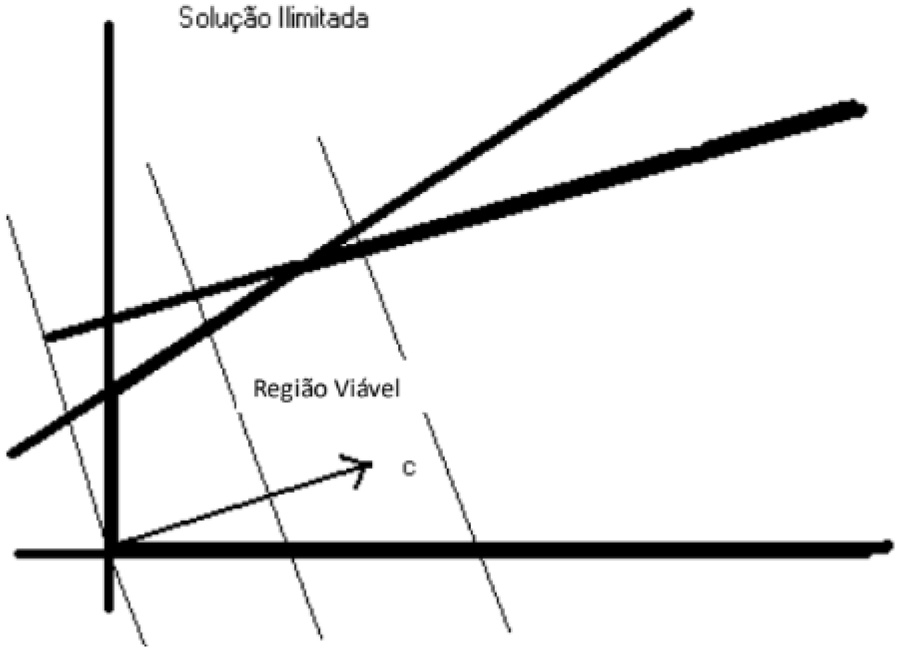


Segmento de reta como solução

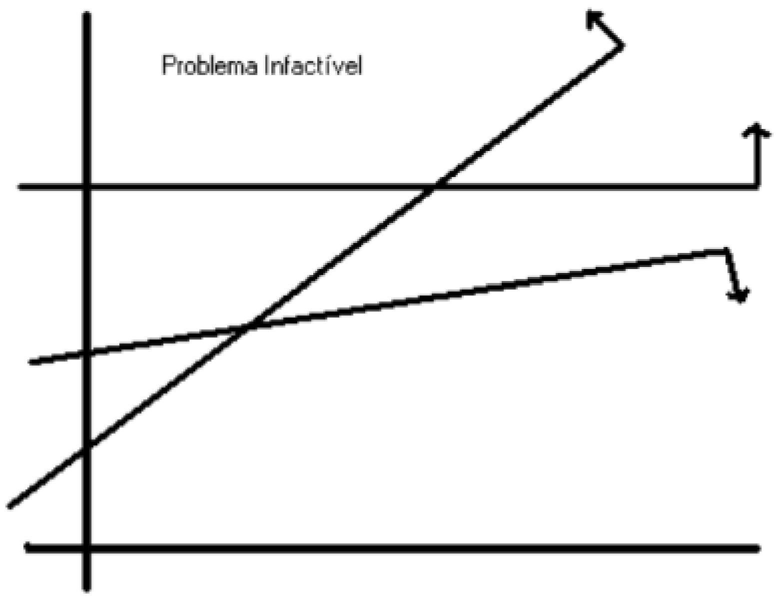


Raio ótimo
Semi reta como solução

3. Solução Ilimitada



4. Problema Inviável



Geometria de uma restrição(PPL forma canônica)

- Definição 1:
  O conjunto $x \in IR^n | a^T x \leq b$ é denominado semiespaço fechado
- Definição 2:
  Um conjunto S ⊂ IR^n é dito limitado se existe uma constante K tal que o valor absoluto de cada componente de todo elemento de S e ́ menor ou igual a K .
- Definição 3:
  Um politopo é um conjunto que pode ser expresso como a interseção de

um número finito de semiespaços fechados

- Definição 4:
  Um poliedro é politopo limitado, não vazio.
- Definição 5:
  Seja a um vetor não-nulo em IR^n e seja b um escalar. O conjunto $x \in IR^n | a^T x = b$ é chamado de hiperplano.

Geometricamente buscamos o hiperplano que intercepta o conjunto das soluções viáveis para o qual k é máximo (caso de problema de maximização) ou k é mínimo (problema de minimização)

Convexidade

Um conjunto **C** $\subset$ **R**^{n} é **conjunto convexo** se para todo. **p, q** $\in$ **C** e para qualquer $0 \leq \lambda \leq 1$, temos

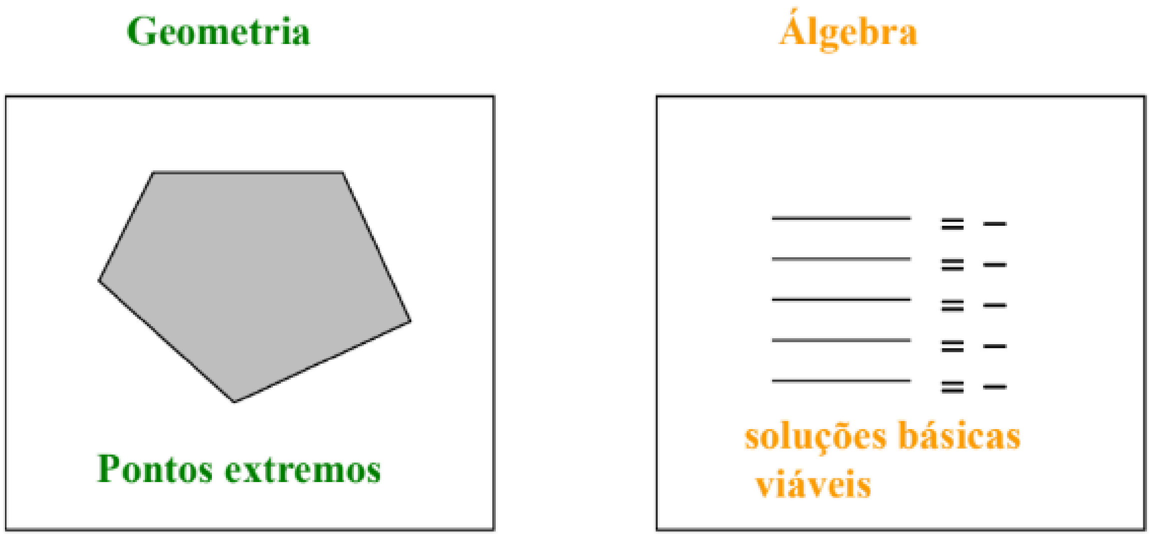
$$w = \lambda p + (1-\lambda)q \in \mathbf{C}$$

Portanto, um conjunto C é convexo ,se todo segmento de reta que une dois de seus elementos pontos está inteiramente contido em C.

Um ponto x de um conjunto convexo C é dito ser um ponto
extremo de C se ele não pode ser expresso como uma combinação convexa de
outros pontos distintos de C.

A região de contato (interseção) entre o hiperplano ótimo da função objetivo e o politopo da região viável é ou um ponto extremo ou uma face do politopo.

Relação entre a representação geométrica e representação algébrica do PPL:



TEOREMA 5: Otimalidade do Ponto Extremo
Se um problema de programação linear tem exatamente uma solução ótima, então esta solução deve ser um ponto extremo do conjunto viável
Lema
Se o PPL tem mais que uma solução ótima, ele tem infinitas soluções ótimas. Além disso, o conjunto das soluções ótimas é convexo

Dualidade

Passamos a ter dois problemas o Primal (P) e o Dual (D)
Exemplo
Primal

$$
\begin{array}{lcc}
 & & \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\
 & \text{sujeito a} & x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leqslant 1 \\
(\text{P}) & & 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leqslant 55 \\
 & & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leqslant 3 \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{lcc}
 & & \min w = 1y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\
 & \text{sujeito a} & y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 4 \\
 & & -y_1 + y_2 + y2_3 \geq 1 \\
(\text{D}) & & -y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 5 \\
 & & 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \geq 3 \\
 & & y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

DEFINIÇÃO: O dual do problema (P) (*Problema PRIMAL*) é definido como sendo o problema (D) (*Problema DUAL*)

$$\begin{array}{rl} \text{(P)} & \text{maximize } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sujeito a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{(D)} & \text{minimize } w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ & y_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \end{array}$$

Teorema de Dualidade Fraca:
Se x é uma solução viável de um problema primal e y é uma solução viável do problema dual correspondente, então

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{m} b_i y_i$$

Teorema da Dualidade Forte:
Se um problema de programação linear tem uma solução ótima, seu dual também tem e os custos ótimos de ambos os problemas são iguais.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{m} b_i y_i^*$$

Relação entre Primal e Dual

Dado o problema dual:

$$\begin{array}{rl} \text{(D)} & \text{minimize } w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ & y_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \end{array}$$

Podemos escrever com:

$$\begin{array}{rl} \text{(D)} & \text{maximize } -w = \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i \leq -c_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ & y_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \end{array}$$

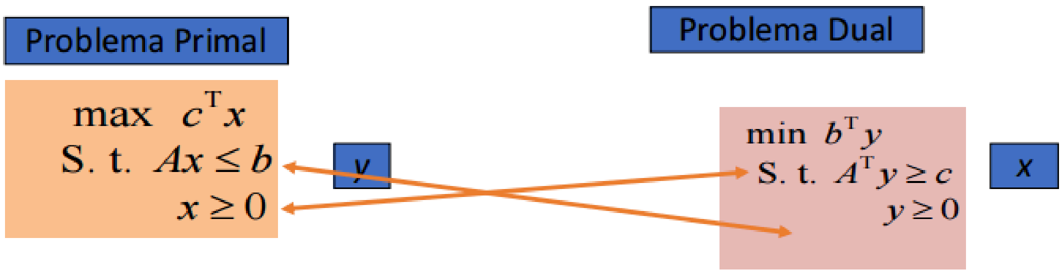
Analogamente...

$$\begin{array}{rl} \text{(P)} & \text{maximize } z = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j \\ \text{sujeito a} & \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \geq -b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \end{array}$$

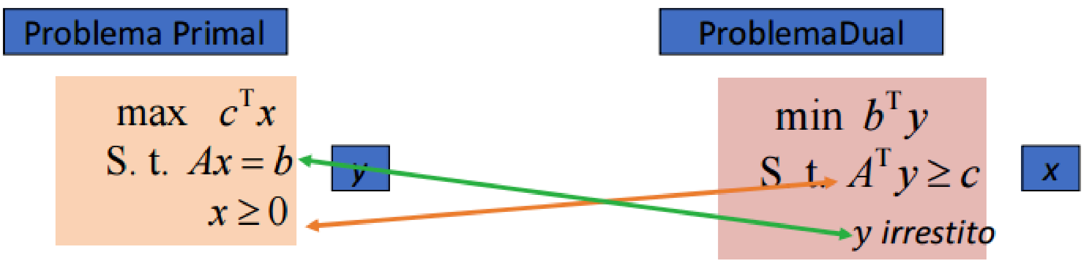
O dual deste problema, resulta no primal

$$
\begin{array}{rl}
\text{(P)} & \text{maximize } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{sujeito a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\
 & x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)
\end{array}
$$

PRIMAL \ DUAL	ÓTIMA	INVIÁVEL	ILIMITADO
ÓTIMA	POSSÍVEL EXEMPLO 1	IMPOSSÍVEL (TEOREMA 3)	IMPOSSÍVEL TEOREMA 2
INVIÁVEL	IMPOSSÍVEL (TEOREMA 3)	POSSÍVEL EXEMPLO 3	POSSÍVEL EXEMPLO2
ILIMITADO	IMPOSSÍVEL (TEOREMA 2)	POSSÍVEL EXEMPLO 2	IMPOSSÍVEL (TEOREMA 2)



Programação linear na forma padrão



PRIMAL	MAXIMIZE	MINIMIZE	DUAL
	≥0	≥ C_j	
VARIÁVEIS	≤0	≤C_j	RESTRIÇÕES
	IRRESTRITAS	=C_j	
	≤b_i	≥ 0	
RESTRIÇÕES	≥b_i	≤0	VARIÁVEIS
	=b_i	irrestrita	

Primal (P) = Max / Dual (D) = Min

Primal (P) Maximize		Dual (D) Minimize
Variáveis		*Restrições*
≥ 0		$\geq C_j$
≤ 0	$\longrightarrow$	$\leq C_j$
Irrestrita		$= C_j$
Restrições		*Variáveis*
$\leq b_i$		≥ 0
$\geq b_i$		≤ 0
$= b_i$		Irrestrita

Primal (P) = Min / Dual (D) = Min

Dual (D) Maximize		Primal (P) Minimize
Variáveis		*Restrições*
≥ 0		$\geq C_j$
≤ 0	$\longleftarrow$	$\leq C_j$
Irrestrita		$= C_j$
Restrições		*Variáveis*
$\leq b_i$		≥ 0
$\geq b_i$		≤ 0
$= b_i$		Irrestrita

Certificado de Otimalidade (Teorema da Folga Complementar)

Uma forma mais aplicável do Teorema da Folga Complementar

TEOREMA: Considere o PPL (P)

$$\begin{cases} \max imize\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ sujeito\ a\ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ \qquad x_j \ge 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

Uma solução viável x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* de (P) é ótima se somente se existem números e y_1^*, y_2^*, ..., y_m^* tais que

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \quad \text{sempre que } x_j^* > 0 \quad (5)$$

$$y_i^* = 0 \quad \text{sempre que} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \quad (6)$$

E tal que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \ge c_j \quad para\ todo \quad j = 1, 2 \dots n \\ y_i^* \ge 0 \quad para\ todo \quad i = 1, 2 \dots m \end{aligned} \quad (7)$$

1. Testar se a solução é viável, ou seja, aplicar $x^*_{1,2,...}$ nas restrições
2. Escrever o Dual
3. Zerar as colunas as quais no primal a solução $x_i^* = 0$
4. Zerar as linhas as quais $a_{ij}x_i^* < b$, ou seja, ao testar a viabilidade, há a presença de uma folga $(2 < 3$ e não $3 = 3)$
5. Resolver o sistema
6. Testar a solução dual, principalmente nas linhas que foram zerar.
7. Certificar a otimalidade ou não.

Método Dual Simplex

Dado um PPL

$$\begin{aligned} \min \text{ (ou max) } z = c^t x \\ \text{sujeito a} \\ Ax = b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Onde o PPL é um primal inviável, vamos tentar achar um dual viável, para isso temos que achar uma base $Ax \le b$, ou seja, (1) adicionar variáveis de folga
Exemplo:

$$\begin{aligned} \max z = -2x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeito a} \qquad 2x_1 - 3x_2 \le 30 \\ x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Transformamos a restrição R2 em:

$$
\begin{aligned}
& & \max z = -2x_1 - 3x_2 \\
&\text{sujeito a} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 30 \\
& & -x_1 - 2x_2 + x_4 = -10 \\
& & x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(2) Definir quem sai da base $\text{Min}\{b_i\}$ (Quem tiver o menor valor de b)

(3) Definir quem entra na base $\text{Max}\{\frac{Z}{\text{Restrição de Min\{b\}}}\}$ (Pegamos os coeficientes da função objetiva e dividimos pelos coeficientes da variável que sai da base, a variável que tiver o maior coeficiente entrará na base)

(4) Continua o algoritmo dual simplex e retornar para (2)