COCADA - 2024.2 - P2 Resoluções

Questão 1

1- $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} = A$. Podemos fazer tanto A^TA, quanto AA^T!

A^TA será 4×4 e AA^T 3×3. Vamos fazer AA^T

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Os autovetores desta matriz serão nossos componentes principais

Podemos achar os autovalores e autovetores de AA^T resolvendo:

$AA^Tx = \lambda x$

$\iff$

$AA^Tx - \lambda x = 0$

$\iff$

$(AA^T - \lambda I)x = 0$

$\iff$

$\det(AA^T - \lambda I) = 0$

$$AA^T - \lambda I = \begin{bmatrix} 20-\lambda & 0 & 12 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 12 & 0 & 20-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(AA^T - \lambda I) = \begin{vmatrix} 20-\lambda & 0 & 12 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 12 & 0 & 20-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 20-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \\ 12 & 0 \end{matrix}$$

$= (20-\lambda)(-\lambda)(20-\lambda) + 12^2\lambda$

$= (20-\lambda)^2(-\lambda) + 12^2\lambda$

$= -400\lambda + 40\lambda^2 - \lambda^3 + 144\lambda$

$= \lambda(-\lambda^2 + 40\lambda - 256) = 0$

$\Delta = 40^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-256) = 1600 - 1024$

$\Delta = 576$

$$\lambda = \frac{-40 \pm \sqrt{576}}{-2} \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-40+24}{-2} = 8 \\ \lambda_2 = \dfrac{-40-24}{-2} = 32 \end{cases}$$

e $\lambda_3 = 0$

Como a questão pede parte 1 e 2, vamos calcular os autovetores associados aos 2 maiores autovalores: 32 e 8. Para encontrar um autovetor basta usar os valores de λ no sistema $(AA^T - \lambda I)x = 0$ e resolver.

$$\lambda = 32: \begin{bmatrix} 20-32 & 0 & 12 \\ 0 & -32 & 0 \\ 12 & 0 & 20-32 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\begin{cases} -12x_1 + 12x_3 = 0 \\ -32x_2 = 0 \\ 12x_1 - 12x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = x_1 \\ x_3 = x_1 \end{matrix}$$

Logo $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é o primeiro componente principal.

$$\lambda = 8: \begin{bmatrix} 20-8 & 0 & 12 \\ 0 & -8 & 0 \\ 12 & 0 & 20-8 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 12x_3 = 0 \\ -8x_2 = 0 \\ 12x_1 + 12x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = -x_3$$
$$x_2 = 0$$
$$x_1 = -x_3$$

Logo $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

é o segundo componente principal.

Posto 1: Para posto 1 vamos normalizar $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e adicionar a matriz B. C^T conterá em sua única linha o comprimento da projeção das colunas de A na reta gerada por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$b_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Projeção das colunas de A em b_1:

Para projetar uma coluna a_i em b_1 fazemos $(a_i^T b_1) b_1$*. Como queremos o comprimento da projeção, só nos interessa a parte dentro dos parênteses.

$$a_1^T b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [3\ 0\ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4/\sqrt{2}.$$
$$a_2^T b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [1\ 0\ 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4/\sqrt{2}.$$
$$a_3^T b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [-3\ 0\ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -4/\sqrt{2}.$$
$$a_4^T b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [-1\ 0\ -3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -4/\sqrt{2}.$$

* Isso só vale pois $\|b_1\| = 1$!!

Logo $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C^T = \frac{1}{\sqrt{2}} [4\ 4\ -4\ -4]$

Segue que

$$A \approx BC^T \iff A \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [4\ 4\ -4\ -4]$$
$$\iff A \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Posto 2: Usaremos agora os 2 componentes principais. O processo é o mesmo: B conterá $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ normalizados e cada linha de C^T terá o comprimento das projeções das colunas de A em cada componente.

$$b_2 = \frac{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Já temos os comprimentos relacionados a b_1, resta calcular o relacionados a b_2.

Projeções das colunas de A em b_2:

$$a_1^T b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[3\ 0\ 1]\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = -2/\sqrt{2}$$

$$a_1^T b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1\ 0\ 3]\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = 2/\sqrt{2}$$

$$a_2^T b_2 = 1/\sqrt{2}\,[-3\ 0\ -1]\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = 2/\sqrt{2}$$

$$a_3^T b_2 = 1/\sqrt{2}\,[-1\ 0\ -3]\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = -2/\sqrt{2}$$

Logo $B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$ e $C^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}4 & 4 & -4 & -4\\-2 & 2 & 2 & -2\end{bmatrix}$

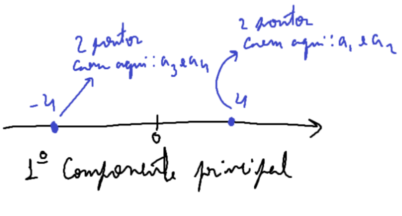
Segue que $A \approx BC \iff A \approx \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 4 & -4 & -4\\-2 & 2 & 2 & -2\end{bmatrix}$

$$\iff A \approx \frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & 2 & -6 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\\2 & 6 & -2 & -6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1 & -3 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 3 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

Plot em $\mathbb{R}^1$:

A C^T quem nos dá as coordenadas no espaço de dimensão reduzida encontrado pelo PCA.

No caso de $\mathbb{R}^1$ achamos $C^T = \begin{array}{c}\begin{bmatrix}4 & 4 & -4 & -4\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cccc} \| & \| & \| & \| \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{array}\end{array}$.

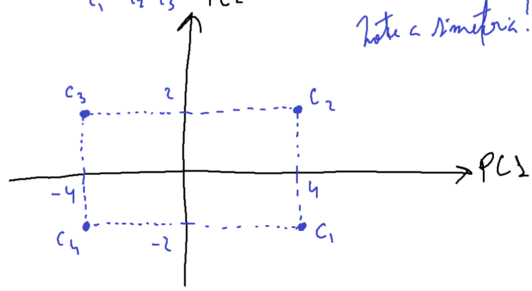


Plot em $\mathbb{R}^2$:

Mesma ideia. Nesse caso encontramos

$$C^T = \begin{array}{c}\begin{bmatrix}4 & 4 & -4 & -4\\-2 & 2 & 2 & -2\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cccc} \| & \| & \| & \| \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{array}\end{array}$$

Note a simetria!!



Questão 2

2- $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$\underset{A}{\parallel} \quad \underset{x}{\parallel} \quad \underset{b}{\parallel}$

Podemos decompor $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ como combinação dos autovetores de A. Por A ser 3x3 tem até 3 autovetores.

$X = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$ $\quad v_i =$ i-ésimo menor autovetor

Sendo assim

$A^k x = b$

$\Leftrightarrow \{x$ na base de autovetores de $A\}$

$A^k(a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3) = b$

$\Leftrightarrow \{$distributividade$\}$

$a_1 A^k v_1 + a_2 A^k v_2 + a_3 A^k v_3 = b$

$\Leftrightarrow \{A v_i = \lambda_i v_i\}$

$a_1 \lambda_1^k v_1 + a_2 \lambda_2^k v_2 + a_3 \lambda_3^k v_3 = b$

E esta é nossa fórmula fechada para achar b. Falta:

- achar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
- achar v_1, v_2, v_3
- achar a_1, a_2, a_3 por x

- achar λ_1, λ_2 e λ_3

$A: \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right)$. A é uma matriz triangular, então seu determinante é o produto de sua diagonal.

$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$

Novamente um polinômio de grau 3. Suas raízes são

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$ ✓

- achar v_1, v_2 e v_3.

$\lambda_1 = 2: \begin{bmatrix} 1-2 & -1 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & -1-2 \end{bmatrix} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -v_{11} - v_{12} + v_{13} = 0 \\ 0 = 0 \\ -3v_{13} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} v_{13} = 0 \\ \text{e} \\ v_{11} = -v_{12} \end{matrix}$

$v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{12} \\ v_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = v_{12}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 1: \begin{bmatrix} 1-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-1 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -v_{22} + v_{23} = 0 \\ v_{22} = 0 \\ -2v_{23} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} v_{22} = 0 \\ v_{23} = 0 \end{matrix}$

v_{21} variável livre!

$v_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{21} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = v_{21}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ✓

$\lambda_3 = -1: \begin{bmatrix} 1-(-1) & -1 & 1 \\ 0 & 2-(-1) & 0 \\ 0 & 0 & -1-(-1) \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 2v_{31} - v_{32} + v_{33} = 0 \\ 3v_{32} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} v_{32} = 0 \\ v_{33} = -2v_{31} \end{matrix}$

$v_3 = \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{31} \\ 0 \\ -2v_{31} \end{bmatrix} = v_{31}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ✓

• Achar a_1, a_2 e a_3.

Podemos achar eles resolvendo o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_2 & v_1 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{array}{ccc} a_2 & a_1 & a_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2} L_3 \end{array}$$

$$\hookrightarrow \begin{array}{ccc} a_2 & a_1 & a_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 21/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} a_2 = 21/2 \\ a_1 = 7 \\ a_3 = -5/2 \end{array}$$

Agora podemos determinar todos os valores da fórmula que tínhamos:

$$A^K \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = a_1 \lambda_1^K v_1 + a_2 \lambda_2^K v_2 + a_3 \lambda_3^K v_3$$

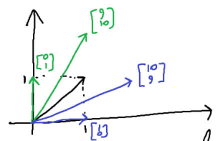
$$A^K \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = 7 \cdot 2^K \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{21}{2} 1^K \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{5}{2}(-1)^K \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Mas só queremos b_2, então seja $f(k)$ a função que nos dá b_2 para $A^k \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, temos

$$f(k) = 7 \cdot 2^k$$

Questão 3 e 4

3- $A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$. Podemos usar a simetria dos pontos.



Repare que o vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bem no meio faz uma divisão dos 2 Clusters.

Como $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ está igualmente distante dos 2 Clusters, pouco importa o cluster que o classificaremos.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obs: poderíamos usar $\begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$ na B também.

4- $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 8x + \frac{3}{10} y + 7$. Pelo método do gradiente descendente temos:

$$v^{k+1} = v^k - p \cdot \nabla f(v^k).$$ Onde p é o tamanho do passo.

Calculando ∇f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y + 8, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x + 3/10$$

Como $\nabla f = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 2y + 8 \\ -2x + 2y + 3/10 \end{bmatrix}$ e $p = \frac{15}{100}$

$$v^{k+1} = v^k - \frac{15}{100} \begin{bmatrix} 2x - 2y + 8 \\ -2x + 2y + 3/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{15}{100} \begin{bmatrix} 2x - 2y + 8 \\ -2x + 2y + 3/10 \end{bmatrix}$$

$$v^{k+1} = \begin{bmatrix} x - \frac{15}{100} 2x + \frac{15}{100} 2y \\ y - 15/100\, 2y + 15/100\, 2x \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 15/100 \cdot 8 \\ 15/100 \cdot 3/10 \end{bmatrix}}_{= C}$$

$$v^{k+1} = \begin{bmatrix} x(1 - \frac{30}{100}) + y(\frac{30}{100}) \\ x(\frac{30}{100}) + y(1 - \frac{30}{100}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15/100 \cdot 8 \\ 15/100 \cdot 3/10 \end{bmatrix}$$

$$v^{k+1} = \begin{bmatrix} 70/100 & 30/100 \\ 30/100 & 70/100 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{= v^k} - C$$

Para checar convergência vemos o maior autovalor em módulo.
Se $|\lambda| < 1$, converge. Mas se $|\lambda| > 1$, não converge.
Se $|\lambda| = 1$, dependerá de c, então vamos considerar que não converge.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 7\cancel{0}/10\cancel{0} - \lambda & 3\cancel{0}/10\cancel{0} \\ 3\cancel{0}/10\cancel{0} & 7\cancel{0}/10\cancel{0} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \left(\begin{bmatrix} 7/10 - \lambda & 3/10 \\ 3/10 & 7/10 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = \left(\frac{7}{10} - \lambda\right)^2 - \frac{9}{100} = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{49}{100} - \frac{14}{10}\lambda + \lambda^2 - \frac{9}{100} = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda^2 - \frac{14}{10}\lambda + \frac{40}{100} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{14}{10}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{40}{100} = \frac{196}{100} - \frac{160}{100} = \frac{36}{100}$$

$$\lambda = \frac{\frac{14}{10} \pm \sqrt{\frac{36}{100}}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{\frac{14}{10} + \frac{6}{10}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{\frac{14}{10} - \frac{6}{10}}{2} = \frac{0,8}{2} = 0,4$$

Como o maior autovalor em módulo é estritamente 1, o sistema não converge.