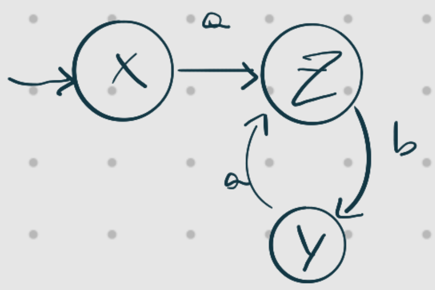
$L(X) = \{w \mid (X, w) \vdash^* (Z, \varepsilon) \wedge Z \in F\}$

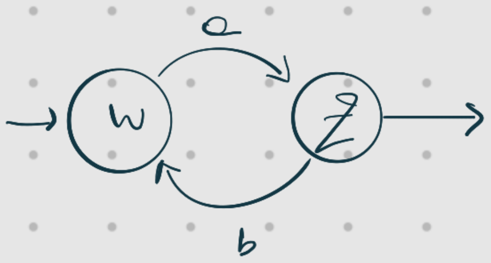
A linguagem do estado X são as palavras que, saindo de X, levam a um estado final



$L(X) = a(ba)^*$

$L(Y) = a(ba)^*$

$L(Z) = (ba)^*$



$L(W) = a(ba)^* = (ab)^* a$

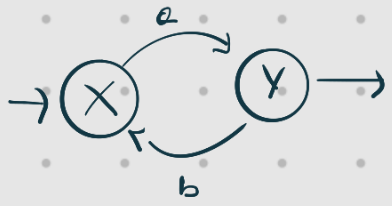
$L(Z) = (ba)^*$

Recapitulando ~ Exemplo

- Para todo X, $(X, w) \vdash^* (X, w)$

- Se há arestas $X\,a\,Y$ e há caminho $(Y, w) \vdash^* (Z, z)$ então há caminho $(X, aw) \vdash^* (Z, z)$

- Não existem outros caminhos.



~ Geral

Estamos interessados em caminhos que terminam em um estado final.

- Se X é final $(X, \varepsilon) \vdash^* (X, \varepsilon)$

- Se há aresta $X\,a\,Y$ e há caminho $(Y, w) \vdash^* (Z, \varepsilon)$ com Z final, então há caminho $(X, aw) \vdash^* (Z, \varepsilon)$

- Não há outros caminhos.

- $\varepsilon \in L(B)$

- Se $w \in L(B)$ onde estão $aw \in L(A)$

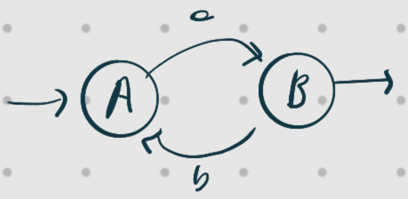
- Se $w \in L(A)$ então $bw \in L(B)$

- Nada mais é aceito.

- $\{\varepsilon\} \subseteq L(B)$

- $a \cdot L(B) \subseteq L(A)$

- $b \cdot L(A) \subseteq L(B)$

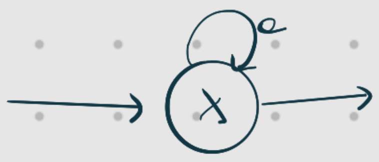


$L(A) = a(ba)^* = (ab)^* a$

$L(B) = (ba)^*$

conferindo

$$\{\varepsilon\} \subseteq \{ba\}^*$$
$$a(ba)^* \subseteq a(ba)^*$$
$$ba(ba)^* \subseteq (ba)^*$$



- $\{\varepsilon\} \subseteq L(X)$
- $a\, L(X) \subseteq L(X)$

$L(X) \supseteq a\, L(X) \cup \varepsilon$

$\forall Y$, se $Y \supseteq a \cdot Y \cup \varepsilon$ então $Y \supseteq L(X)$

a^* resolve essas condições?

$a^* = a\, a^* \cup \varepsilon$?

$$a\, a^* \cup \varepsilon$$
$$\overset{(\text{def } *)}{=}$$
$$\left(a \cdot \bigcup_{i=0}^{\infty} a^i\right) \cup \varepsilon$$
$$=$$
$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} a^i\right) \cup a^0$$
$$=$$
$$\bigcup_{i=0}^{\infty} a^i = a^*$$

Resta provar se $Y \supseteq aY \cup \varepsilon \Rightarrow Y \supseteq a^*$

Vamos começar intuitivamente...

$$\begin{aligned} Y &\supseteq aY \cup \varepsilon \\ &\supseteq a(aY \cup \varepsilon) \cup \varepsilon = aaY \cup a \cup \varepsilon \\ &\supseteq a^2(aY \cup \varepsilon) \cup a \cup \varepsilon = a^3 Y \cup a^2 \cup \varepsilon \\ &\supseteq a^3(aY \cup \varepsilon) \cup a^2 \cup a^1 \cup a^0 = a^4 Y \cup a^3 \cup a^2 \cup a^1 \cup a^0 \end{aligned}$$

Lema: Se $\underbrace{Y \supseteq aY \cup \varepsilon}_{\text{Hipótese principal}}$ então $\forall n .\ a^n \in Y$

Prova por indução em n:

Caso base $n = 0$

queremos provar $a^0 \in Y$

é verdade pois a hipótese exige $Y \supseteq \{\varepsilon\}$

Caso indutivo:

queremos provar $\underbrace{a^n \in Y}_{\text{hipótese indutiva}} \Rightarrow a^{n+1} \in Y$

como $Y \supseteq aY$ e $a^n \in Y$

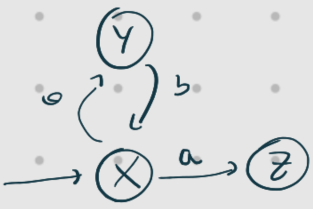
então $a . a^n \in Y$

$$a^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} a^n$$

Lembre que

$$w \in \bigcup_{n=0}^{\infty} a^n \iff \exists n .\ w = a^n$$

Portanto, se $w \in a^*$ e $\forall n .\ a^n \in Y$ então $w \in Y$ ∎



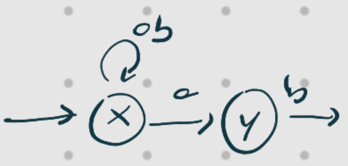
$A \supseteq aY \cup bX \cup aZ \cup E$

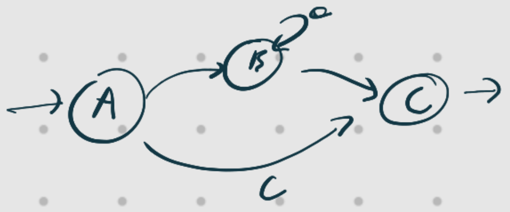
(1) $Z \supseteq \varepsilon$

$X \supseteq aZ$

$Y \supseteq bX$

$X \supseteq aY$





(1) ou

$X \supseteq aZ \cup aY$

$Y \supseteq bX$

$Z \supseteq \varepsilon$

(2) $X \supseteq aX \cup bX \cup aY$

$Y \supseteq bZ$

$Z \supseteq aZ \cup bZ \cup \varepsilon$

(3) $A \supseteq B \cup cC$

$B \supseteq aB \cup C$