

Noções Básicas

Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Exemplo:

$$h(x) = \underbrace{\sin}_{f(x)}(\underbrace{x^2 + 2}_{g(x)}) \longrightarrow \begin{cases} f'(x) = \cos \\ g'(x) = 2x \end{cases}$$
$$h'(x) = \underbrace{\cos}_{f'(x)}(\underbrace{x^2 + 2}_{g(x)}) \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}$$

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

$$\frac{dy}{dx} = xy(x) \leftrightarrow f'(x) = xf(x) \leftrightarrow y' = xy$$

Equações Separáveis

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y), f(y) \neq 0$$

Solução

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overbrace{2x}^{g(x)}}{\underbrace{1+2y}_{f(y)}} \therefore (1+2y) dy = 2x dx$$
$$\int (1+2y) dy = \int 2x dx$$
$$y + y^2 = x^2 + c$$

EDO (1ª Ordem)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), P \text{ e } Q \text{ são funções ou constantes}$$

Solução

Exemplo: $x^2y' + xy = 1$

1. Dividir ambos os lados pelo coeficiente de y'

$$\frac{x^2y'}{x^2} + \frac{xy}{x^2} = \frac{1}{x^2} \therefore y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

2. Achar o fator integrante $P(x)$ e calcular $I(x) = e^{\int P(x) dx}$

$$P(x) = \frac{1}{x} \rightarrow I(x) = e^{\int \frac{1}{x}} = e^{\ln x} = x$$

3. Multiplicar ambos os lados pelo fator integrante

$$x \cdot y' + x \cdot \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2} x \therefore xy' + y = \frac{1}{x}$$

4. Usar a regra do produto: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$xy' + 1 \cdot y = (xy)' \therefore (xy)' = \frac{1}{x}$$

5. Integrar de ambos os lados

$$\int (xy)' = \int \frac{1}{x} \therefore xy = \ln x + c$$

6. Resolver o P.V.I. (Se houver)

EDO (2ª Ordem)

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

Para $P(x), Q(x), R(x), G(x)$ sendo funções ou constantes

Caso Homogêneo - $G(x) = 0$

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \therefore Ay'' + By' + Cy = 0$$

Solução

1. Primeiro pegamos a equação auxiliar $Ay'' + By' + Cy = 0$

2. Achamos as suas raízes $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3. Solucionamos caso a caso

a. $\Delta > 0 : y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

b. $\Delta < 0 : y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Integral por partes

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Exemplo:

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x}_{dv} dx \longrightarrow \begin{cases} u = x & du = 1 \\ v = e^x & dv = e^x \end{cases}$$

$$= uv - \int v \, du \longrightarrow \underbrace{x}_u \underbrace{e^x}_v - \int \underbrace{e^x}_v \cdot \underbrace{1}_{du}$$

$$= xe^x - e^x + c$$

Integração por substituição

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$$

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

Exemplo:

$$\int (x-3)^{12} \, dx \longrightarrow \int \underbrace{(x-3)^{12}}_u \underbrace{dx}_{du} \longrightarrow \begin{cases} u = x-3 \\ du = 1 \end{cases}$$

$$= \int u^{12} \, du = \frac{u^{13}}{13} \cdot 1 + C = \frac{(x-3)^{13}}{13} + C$$