Noções Básicas

Regra do Produto

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \longleftrightarrow (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Exemplo: $h(x) = xe^x$

$$h'(x) = \tfrac{d}{dx}(xe^x) \longrightarrow \begin{cases} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g(x) = e^x & g'(x) = e^x \end{cases}$$
$$h'(x) = x\tfrac{d}{dx}(e^x) + e^x\tfrac{d}{dx}(x)$$
$$h'(x) = xe^x + e^x \cdot 1 = e^x(x+1)$$
$$h'(x) = (x+1)e^x$$

Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Exemplo:

$$h(x) = \underbrace{\sin}_{f(x)}(\underbrace{x^2+2}_{g(x)}) \longrightarrow \begin{cases} f'(x) = \cos \\ g'(x) = 2x \end{cases}$$
$$h'(x) = \underbrace{\cos}_{f'(x)}(\underbrace{x^2+2}_{g(x)}) \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}$$

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

$$\frac{dy}{dx} = xy(x) \leftrightarrow f'(x) = xf(x) \leftrightarrow y' = xy$$

Equações Separáveis

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y),\ \mathrm{f(y)} \neq 0$$

Solução

$$\tfrac{dy}{dx} = \frac{\overbrace{2x}^{g(x)}}{\underbrace{1+2y}_{f(y)}} \therefore (1+2y)\ \mathrm{dy} = 2x\ \mathrm{dx}$$
$$\textstyle\int(1+2y)\ \mathrm{dy} = \int 2x\ \mathrm{dx}$$
$$y + y^2 = x^2 + c$$

EDO (1ª Ordem)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \text{ , P e Q são funções ou constantes}$$

Solução

Exemplo: $x^2y' + xy = 1$

1. Dividir ambos os lados pelo coeficiente de y'

$$\frac{x^2y'}{x^2} + \frac{xy}{x^2} = \frac{1}{x^2} \therefore y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

2. Achar o fator integrante $P(x)$ e calcular $I(x) = e^{\int P(x) \text{ dx}}$

$$P(x) = \frac{1}{x} \to I(x) = e^{\int \frac{1}{x}} = e^{\ln x} = x$$

3. Multiplicar ambos os lados pelo fator integrante

$$x \cdot y' + x \cdot \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2 \cdot}x \therefore xy' + y = \frac{1}{x}$$

4. Usar a regra do produto: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$xy' + 1 \cdot y = (xy)' \therefore (xy)' = \frac{1}{x}$$

5. Integrar de ambos os lados

$$\int (xy)' = \int \frac{1}{x} \therefore xy = \ln x + c$$

6. Resolver o P.V.I. (Se houver)

EDO (2ª Ordem)

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

Para $P(x), Q(x), R(x), Q(x)$ sendo funções ou constantes

Caso Homogêneo - $G(x) = 0$

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \therefore Ay'' + By' + Cy = 0$$

Solução

1. Primeiro pegamos a equação auxiliar $Ay'' + By' + Cy = 0$
2. Achamos as suas raízes $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
3. Solucionamos caso a caso

a. $\Delta > 0 : y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

b. $\Delta < 0 : y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Integral por partes

$$\int u \ dv = uv - \int v \ du$$

Exemplo:

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{\text{dv}} dx \longrightarrow \begin{cases} u = x & du = 1 \\ v = e^x & dv = e^x \end{cases}$$
$$= uv - \int v \text{ du} \longrightarrow \underbrace{x}_{\text{u}} \underbrace{e^x}_{\text{v}} - \int \underbrace{e^x}_{\text{v}} \cdot \underbrace{1}_{\text{du}}$$
$$= xe^x - e^x + c$$

Integração por substituição

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \text{ dx} = F(g(x)) + C \qquad \int f(u) du = F(u) + C$$

Exemplo:

$$\int (x-3)^{12} \text{ dx} \longrightarrow \int \overbrace{\underbrace{(x-3)}_{u}{}^{12}}^{f} \underbrace{\text{dx}}_{\text{du}} \longrightarrow \begin{cases} u = x - 3 \\ du = 1 \end{cases}$$
$$= \int u^{12} \text{ du} = \frac{u^{13}}{13} \cdot 1 + C = \frac{(x-3)^{13}}{13} + C$$

1. Cinemática e Cálculo

- **Posição, Velocidade e Aceleração**: A velocidade é a primeira derivada da posição, e a aceleração é a segunda.
  a. Vetor Velocidade: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$
  b. Vetor Aceleração: $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$
- **Regra da Cadeia**: Essencial para derivar funções compostas, como $\cos(kt)$. 2, 4]
  a. $\frac{d}{dt}[f(g(t))] = f'(g(t)) \cdot g'(t)$
- **Derivação Implícita**: Usada quando `x` e `y` são funções do tempo e estão relacionados por uma equação de trajetória. Derivamos ambos os lados da equação em relação a `t`.
- **Norma de um Vetor**: Usada para encontrar a velocidade escalar a partir do vetor velocidade.
  * Para $\vec{v} = (v_x, v_y)$, a norma é $||\vec{v}|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 217, 218].
  Noções úteis:

- A componente **tangencial** da aceleração é ligada à variação da rapidez.

- A componente **normal (centrípeta)** é ligada à mudança de direção:

$$\$a_n = \frac{v^2}{R}$$

2. Dinâmica (Forças)

- **Segunda Lei de Newton**: A base para encontrar a equação de um movimento a partir das forças.
  a. $F_{resultante} = ma = m\ddot{r}$
- **Forças Comuns**:
  a. **Peso**: $\vec{P} = mg$, aponta verticalmente para baixo.
  b. **Força Normal (N)**: Perpendicular à superfície de contato, equilibra a componente perpendicular do peso.
  c. **Força de Atrito (F_a)**: Oposta ao movimento, $F_a = \mu N$. 912]
  d. **Força Centrípeta (F_c)**: Força resultante que aponta para o centro e mantém o corpo em movimento circular. Sua magnitude é $F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$.

3. Leis de Conservação

- **Conservação de Energia Mecânica**: Usada quando não há atrito ou outras forças dissipativas. A energia total (cinética + potencial) permanece constante.
  a. Energia Cinética: $K = \frac{1}{2}mv^2$
  b. Energia Potencial Gravitacional: $U_g = mgh$
  c. Princípio: $K_{inicial} + U_{inicial} = K_{final} + U_{final}$
- **Conservação de Momento Linear**: Chave para resolver **todas** as colisões em sistemas isolados.
  a. Momento Linear: $p = mv$
  b. Princípio: $P_{total,inicial} = P_{total,final}$

Resumo dos Exercícios Resolvidos

Capítulo 4 - Momento Linear

Exercício 1 (p. 74): Colisão Elástica em Sequência

- **Tópicos**: Colisão Elástica, Conservação de Momento.
- **Fórmulas**:
  a. Inversão de velocidade (choque com parede): $v_f = -v_i$.

b. Velocidade final da partícula 2 (alvo parado): $\overline{w}_2 = \frac{2m_1\overline{v}_1}{m_1+m_2}$.

- **Pontos de Atenção**: Manter a consistência dos sinais das velocidades e mapear corretamente as variáveis do problema para as da fórmula.

Exercício 2 (p. 74): Bola Quicando

- **Tópicos**: Conservação de Energia, Coeficiente de Restituição, Prova por Indução.
- **Fórmulas**: $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, $w = ev$, $h_n = e^{2n}h$.
- **Pontos de Atenção**: O coeficiente de restituição `e` conecta a velocidade *antes* do choque (`v`) com a velocidade *depois* (`w`). A prova por indução foi uma forma rigorosa de confirmar o padrão físico.

Capítulo 5 - Energia

Exercício 2 (p. 86): Carrinho na Rampa com Loop

- **Tópicos**: Conservação de Energia, Força Centrípeta, Movimento Circular.
- **Fórmulas**: $E_i = E_f$, $F_c = \frac{mv^2}{R}$, $v_{min} = \sqrt{gR}$.
- **Pontos de Atenção**: A condição para a velocidade mínima no topo do loop é quando a Força Normal (N) se torna zero 1291, 1293]. A solução exige a combinação da análise de forças (para a condição no topo) com a conservação de energia (para relacionar com a altura inicial).

Exercício 3 (p. 86): Colisão Perfeitamente Inelástica

- **Tópicos**: Colisão Inelástica, Conservação de Momento, Perda de Energia.
- **Fórmulas**: $P_{antes} = P_{depois}$, $K = \frac{1}{2}mv^2$.
- **Pontos de Atenção**: A característica principal é que os objetos se juntam e passam a ter uma única velocidade final. A energia cinética **não** é conservada.

Exercício 4 (p. 87): Cadeia de Colisões

- **Tópicos**: Colisão Elástica, Padrões, Conservação de Energia.
- **Fórmulas**: $w_{j+1} = \frac{2m_jv_j}{m_j+m_{j+1}}$, $h_n = \frac{v_n^2}{2g}$.
- **Pontos de Atenção**: O segredo para resolver problemas em cadeia é resolver para o primeiro caso, depois para o segundo, e então **observar o padrão** para generalizar para o n-ésimo caso.

Momento Angular, Torque e Coordenadas em Rotação

Tensor de Inércia

$$\mathbb{I} = \sum_k m_k((r_k^T r_k)I - r_k r_k^T)\$\$\$\$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i y_i x_i & \sum m_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i z_i x_i & -\sum m_i z_i y_i & \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}$$

Resumo de Estudo: Capítulos 6 e 7 (Modelagem Matemática)

Capítulo 6: Momento Angular e Dinâmica de Rotação

Este capítulo expande a mecânica de Newton para incluir movimentos de rotação. A ideia principal é que, assim como a *Força* causa variação no *Momento Linear*, o **Torque** (τ) causa variação no **Momento Angular** ($\vec{L}$).

Conceitos Fundamentais e Fórmulas Recorrentes

1. Momento de Inércia (I): A "Massa Rotacional"

O conceito mais importante do capítulo. É a medida da resistência de um objeto à aceleração angular.

- **Para Corpos Rígidos (Discos, Hastes, etc.):**
  a. A forma mais fácil de encontrar o I é consultando a **Tabela 1 (página 107)** .
  b. **Cilindro Sólido/Disco** (usado nos Ex 6, 15): $I = \frac{1}{2}mr^2$.
  c. **Casca Cilíndrica/Anel** (usado no Ex 9): $I = ma^2$.
  d. **Barra (pelo centro)** (usado no Ex 14): $I = \frac{1}{12}M\ell^2$.
     i. *Ponto de Atenção (Ex 14):* A haste tinha comprimento $2L$, então $I_{haste} = \frac{1}{12}M(2L)^2 = \frac{1}{3}ML^2$.
- **Para Sistemas de Partículas (Ex 2): O Tensor de Inércia**
  a. Para sistemas 3D discretos, I é uma matriz 3x3 .
  b. **Elementos Diagonais** (Momentos de Inércia): $I_{1,1} = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2)$.
  c. **Elementos Fora da Diagonal** (Produtos de Inércia): $I_{1,2} = -\sum m_i x_i y_i$.
- **Teorema dos Eixos Perpendiculares (Ex 8):**
  a. Provamos que para um conjunto de massas no plano $z = 0$, $I_z = I_x + I_y$.
  b. Isso foi feito mostrando que $I_x = \sum m_i y_i^2$, $I_y = \sum m_i x_i^2$ e $I_z = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$.

2. Energia Cinética de Rotação (T ou K_{rot})

- **Fórmula Base (Ex 6, 9, 15):** $T_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$.
- **Ponto de Atenção: "Rolar sem Deslizar" (Ex 9, 10, 15):**

a. Esta condição é crucial e conecta o movimento linear (translação) com o angular (rotação).

b. A fórmula de conexão é $v = \omega r$ 366

c. **Energia Cinética Total** é a soma da translação e da rotação : $K_{Total} = K_{Transla\backslash ccão} + K_{Rota\backslash ccão} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

d. No Ex 9 (casca cilíndrica, $I = ma^2$), isso resultou em $K_{Total} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(ma^2)(\frac{v}{a})^2 = mv^2$.

e. No Ex 15 (cilindro sólido, $I = \frac{1}{2}mr^2$), o sistema era $K_{Total} = K_{bloco} + K_{cilindro} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{4}mv^2$.

3. Conservação do Momento Angular (Ex 14)

- **Princípio:** Se não há torques externos ($\tau_{ext} = 0$), o momento angular total (L) do sistema é conservado 21* **Fórmula:** $L = I\omega$.
- **Aplicação (Ex 14):** As bolas deslizaram para fora, mudando o Momento de Inércia do sistema. Para L se manter constante, a velocidade angular ω teve que mudar.
  a. $L_{antes} = L_{depois} \implies I_{antes}\omega_1 = I_{depois}\omega_2$.
  b. Isso nos deu a nova velocidade angular: $\omega_2 = \omega_1 \left(\frac{I_{antes}}{I_{depois}}\right)$.

4. Equações de Euler (Dinâmica 3D Avançada)

- Estas são as equações de movimento para um corpo rígido em 3D, vistas do referencial do próprio corpo. Elas são usadas quando a rotação *não* é simples .
  a. $I_1\dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 + \tau'_1$
  b. $I_2\dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1)\Omega_1\Omega_3 + \tau'_2$
  c. $I_3\dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 + \tau'_3$
- **Aplicação 1: Rotação Estável (Ex 12, $\tau' = 0$)**
  a. Usamos as equações para provar que uma rotação com $\Omega_3 = \text{constante}$ e $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ só pode existir se $\Omega_1 = 0$ e $\Omega_2 = 0$.
  b. *Passo Chave:* $\Omega_3 = \text{constante} \implies \dot{\Omega}_3 = 0$. Substituindo na Eq. 3, $0 = (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2$. Como $I_1 \neq I_2$, concluímos que $\Omega_1\Omega_2 = 0$.
- **Aplicação 2: Encontrar Torque (Ex 13)**
  a. Usamos as equações para encontrar o torque τ' necessário para manter um movimento.
  b. A rotação $\vec{\omega}$ era constante, mas inclinada em um ângulo θ.
  c. *Passo Chave 1:* Decompomos $\vec{\omega}$ nos eixos principais: $\Omega = (0, \omega\sin\theta, \omega\cos\theta)$.
  d. *Passo Chave 2:* Como Ω é constante, todas as derivadas $\dot{\Omega}_1, \dot{\Omega}_2, \dot{\Omega}_3$ são zero.

e. *Passo Chave 3:* Substituímos isso nas Equações de Euler e isolamos as componentes do torque τ', descobrindo que $\tau_1' \neq 0$.

5. Forças Fictícias (Ex 4)

- Em um referencial giratório, objetos sentem "forças fictícias".
- **Força Centrífuga:** $F_c = m\omega^2 r$. Esta é a força que empurra a partícula para fora do canudo giratório .
- A equação de movimento radial se tornou $m\ddot{r} = F_c$, o que levou à EDO $\ddot{r} = \omega^2 r$.
- A solução $r(t) = a\cosh(\omega t)$ foi encontrada e a velocidade final foi determinada usando a identidade $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ para eliminar o tempo .

Capítulo 7: Equações de Lagrange

Este capítulo apresenta um método alternativo e mais poderoso para encontrar as equações de movimento. Em vez de vetores (Forças e Torques), ele usa escalares (Energia).

A "Receita" Lagrangiana

Para encontrar a equação de movimento de um sistema, seguimos 5 passos:

Passo 1: Escolher Coordenadas Generalizadas (q_i)

- Escolhemos o número mínimo de variáveis independentes que descrevem o sistema.
  a. (Ex 1) Queda Livre: $q_1 = z$
  b. (Ex 2) Conta na Parábola: $q_1 = x$.
  c. (Ex 8) Pêndulo-Haste: $q_1 = \theta$.
  d. (Ex 3) Bloco e Cunha: $q_1 = x$ (posição da cunha), $q_2 = y$ (posição do bloco na rampa) .

Passo 2: Calcular a Energia Cinética (T)

- Escrevemos T *apenas* em termos das coordenadas q_i e suas derivadas $\dot{q}_i$.
- **Ponto de Atenção (Regra da Cadeia):** Este é o passo mais crucial.
  a. (Ex 2, $y = ax^2$): Precisávamos de $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Usamos a Regra da Cadeia: $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = (\frac{dy}{dx})(\frac{dx}{dt}) = (2ax)\dot{x}$.
  b. (Ex 3, Bloco e Cunha): Precisávamos da velocidade absoluta do bloco m. Isso foi a soma vetorial da velocidade da cunha ($\dot{x}$) e da velocidade do bloco na rampa ($\dot{y}$).
    i. $v_x = \dot{x} + \dot{y}\cos\alpha$
    ii. $v_y = -\dot{y}\sin\alpha$

iii. $T_m = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha + \dot{y}^2)$.

c. (Ex 8, Pêndulo-Haste): Para rotação pura, $T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$. Usamos $I = \frac{m\ell^2}{3}$ (momento de inércia pela extremidade) .

Passo 3: Calcular a Energia Potencial (V)

- Escrevemos V *apenas* em termos das coordenadas q_i.
- (Ex 1, Queda Livre): $V = mgz$.
- (Ex 2, Parábola): $V = mgy = mg(ax^2)$.
- (Ex 3, Bloco e Cunha): $V = V_M + V_m = 0 - mgy\sin\alpha$ (definindo $V = 0$ no topo da rampa) .
- (Ex 8, Pêndulo-Haste): V depende da altura do centro de massa. $h_{cm} = \frac{\ell}{2}\cos\theta$. Definindo $V = 0$ no pivô, $V = -mg(\frac{\ell}{2}\cos\theta)$.

Passo 4: Montar o Lagrangiano (L)

- A definição é simplesmente $L = T - V$.

Passo 5: Aplicar a Equação de Lagrange

- Para *cada* coordenada generalizada q_i, aplicamos a fórmula: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.
- **Ponto de Atenção (Coordenadas Cíclicas):**
  a. No Ex 3, o Lagrangiano dependia de $\dot{x}$, mas **não** de x.

  b. Isso significa que $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$.

  c. A equação de Lagrange para x tornou-se $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = 0$.

  d. Isso implica que a quantidade $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ (o "momento generalizado" para x) é **conservada** durante todo o movimento.