

Teste 3 - Cocada 2023-2 - Prof. João Paixão

Justifique suas respostas e coloque um item por página em ordem.

1. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 8x + 0.3y + 7$. Determine se o método do gradiente descendente converge para qualquer chute inicial com o tamanho do passo igual à 0.15.
2. Seja f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5 funções de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R} e

$$g(x_0, x_1, x_2) = f_5(f_3(f_1(x_0, x_1), f_2(x_1, x_2)), f_4(f_1(x_0, x_1), f_2(x_1, x_2))).$$

Também sabemos que no ponto $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ e $x_2 = 10$ as derivadas parciais valem $\frac{\partial f_1}{\partial x_0} = 5$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 7$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 3$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 4$, $\frac{\partial f_3}{\partial f_1} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial f_2} = 9$, $\frac{\partial f_4}{\partial f_1} = 5$, $\frac{\partial f_4}{\partial f_3} = 2$, $\frac{\partial f_4}{\partial f_4} = 1$ e $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 95$. Infelizmente não sabemos $\frac{\partial f_4}{\partial f_2}$. Determine a derivada parcial de $\frac{\partial g}{\partial x_0}$ e $\frac{\partial g}{\partial x_2}$ no ponto $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ e $x_2 = 10$ (Dica: use grafos computacionais e o backpropagation).

3. Determine uma matriz M_1 de posto 1 e uma matriz M_2 de posto 2 que melhor representam a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ na norma de Frobenius e calcule o erro (dica: usa a simetria dos pontos).
4. Sejam A e B matrizes. Prove **algebricamente** que se Q é uma matriz ortogonal ($Q^t Q = I$), então $\text{dist}(QA, QB) = \text{dist}(A, B)$.