Exercícios de
Modelos Dinâmicos e
Método da Potência

2025

Exercício 1:

Já sabemos encontrar o autovetor associado ao maior autovalor. Agora, responda:

1. Como podemos achar o maior autovalor com o método da potência?
2. Como achar o segundo maior autovetor?
3. Como achar o menor autovetor com o método da potência?

Exercício 2:

Sabemos que $a_{k+2} + 4a_k = 5a_{k+1}$ e que $a_4 = 1$ e $a_5 = 2$.

1. Determine uma fórmula fechada (fórmula rápida) para a_{100} usando a teoria de autovetores e autovalores.
2. Determine $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+2}}$.

Exercício 3:

Seja $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Determine *exatamente* b_2 em função de k (uma fórmula fechada para b_2) com a teoria de autovalores e autovetores.

Exercício 4:

Num país politicamente instável 30% dos defensores da república passam a apoiar a monarquia a cada ano e 20% dos defensores da monarquia passa a apoiar a república a cada ano. Portanto, denotando por r_k e m_k o número de republicanos e monarquistas, respectivamente, a cada ano k.

1. Qual é o código para calcular r_k e m_k?
2. Sabendo que hoje metade da população apoia a república, em 10 anos qual será o percentual que apoia a república?
3. A longo prazo qual será o percentual de republicanos e monarquistas?

Exercício 5:

População de bactérias.

A população de uma certa espécie de bactéria pode ser compreendida da seguinte maneira. Existem bactéria novas, maduras e velhas. A cada mês:

- 80% das bactérias novas chegam à maturidade, e 20% morrem.
- 50% das bactérias maduras tornam-se velhas, e 50% morrem.
- 100% das bactérias velhas morrem.
- Uma a cada duas bactérias maduras geram uma nova bactéria.
- Uma a cada cinco bactérias velhas geram uma nova bactéria.

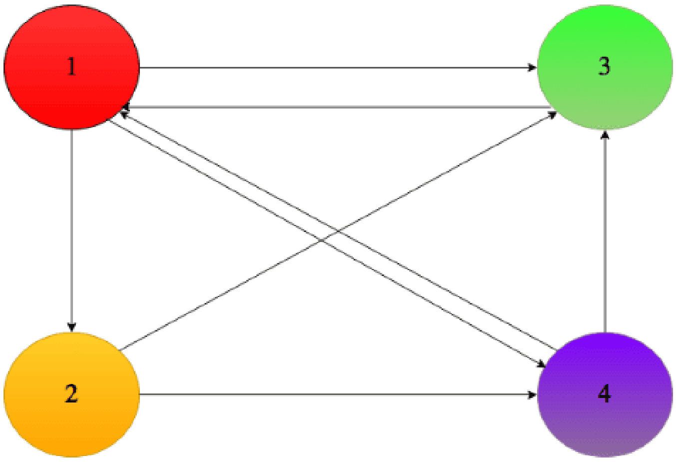
1. Modele o sistema populacional descrito acima – ou seja, determine o significado de cada coordenada do vetor que representa a população em um dado mês, e a matriz que representa a transição de um mês para o seguinte.
2. Se, no mês $t = 0$, existem apenas 250 bactérias novas (e 0 bactérias em outras faixas de idade), determine usando calculadora ou programa a população nos cinco primeiros meses.
3. Dada uma população inicial não-nula, suponha que, após um certo tempo, a proporção entre as populações de cada faixa de idade se estabilize. Determine essa proporção.
4. Qual método foi escolhido para encontrar essa proporção, e por quê ele funciona?

Exercício 6:

PageRank.

O modelo do surfista aleatório é muito usado quando se deseja realizar o ranqueamento de uma rede, não é a toa que o Google desenvolveu o *PageRank*!

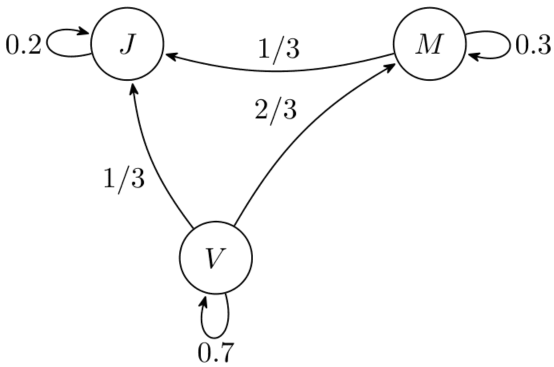
Vamos pensar num caso simples onde, partindo de algum site, temos uma mesma probabilidade de visitar link de vizinhos. A estrutura da rede é a seguinte:



1. Descreva o sistema dinâmico linear representado acima, encontrando a matriz de transição que representa um "passo" ou "clique" do surfista aleatório.
2. Escreva um programa que simule esse sistema dinâmico. Realize a transição de um site para o outro 100 vezes para cada estado inicial possível. Os resultados são similares? Se sim, por quê?

Exercício 7:

Sabemos que a dinâmica de uma população de animais, dividida em 3 faixas etárias: jovens, maduros e velhos, por ano é determinada pelo modelo gráfico.



1. Existe algum valor de a que esses animais vão entrar em extinção para qualquer condição inicial?
2. Agora suponha que $a = 2$ e suponha também que sabemos que a proporção de jovens para maduros depois de muito tempo é aproximadamente de 2 para 1. Determine b.

Dica: use o fato que é fácil calcular determinante de matrizes triangulares.

Exercício 8:

Vampiros.

Suponha que vampiros existem. Será que as criaturas da escuridão seriam capazes de manter sua existência em segredo? Será que eles dominariam o mundo, ou acabariam sendo extintos? Suponha que a cada ano:

- A taxa de natalidade humana (nascimentos/população) é de 2%.
- A taxa de contaminação (humanos transformadas em vampiros/população) é de 1%.
- Muitas vezes, vampiros brigam entre si. Às vezes, a briga resulta em morte. A taxa de morte vampiresca por competição interna (vampiros mortos/população) é também de 1%.

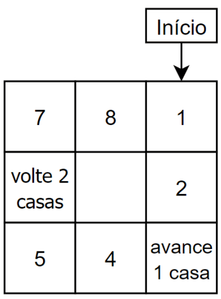
1. Descreva matematicamente o sistema dinâmico linear descrito acima.
2. Alguma das duas espécies será extinta?
3. Suponha que, caso a população de vampiros passasse de 1% da população total (humanos + vampiros) do mundo, eles seriam descobertos. Esse evento aconteceria?

Exercício 9:

(Desafio) Considere o seguinte problema: uma empresária meio esquecida possui dois guarda-chuvas que ela usa no percurso de casa para ou trabalho e vice-versa. Se estiver chovendo e um guarda-chuva estiver disponível em seu local atual, ela o pega. Se não estiver chovendo, ela sempre esquece de levar o guarda-chuva. Suponha que a probabilidade de chuva é p a cada vez que ela se desloca de um lugar pra outro, independente de deslocamentos anteriores. Nosso objetivo é determinar a fração de deslocamentos com que a empresária irá se molhar com a chuva. Escreva um sistema linear dinâmico que descreva a situação.

Exercício 10:

Dado o seguinte tabuleiro de Banco Imobiliário:



- Determine qual é a casa sobre a qual é mais provável que o jogador termine uma rodada.
- Determine qual é a probabilidade do jogador terminar uma rodada em cada casa.

Exercício 11:

Dado
$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3} \quad \text{e} \quad a_0 = 1,\ a_1 = 1 \text{ e } a_2 = 1,$$
determine a_{100} com um código rápido.

Exercício 12:

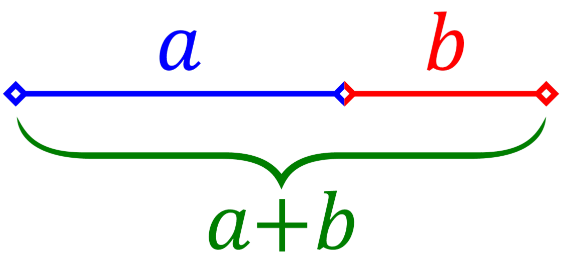
Sequência de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci é definida pelas fórmulas:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{t+1} = F_t + F_{t-1}$$

Os 13 primeiros números da sequência são 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.

Esta famosa sequência tem uma profunda conexão com o número irracional ϕ, conhecido como Proporção Áurea. Esta proporção possui a seguinte propriedade geométrica:



$$\frac{a}{b} = \phi = \frac{a+b}{a}$$

1. Seja $v = \begin{bmatrix} F_t & F_{t+1} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ um vetor cuja primeira coordenada é um elemento da sequência e a segunda coordenada é o elemento seguinte. Determine qual é a matriz A que avança o vetor v ao longo da sequência, ou seja, $Av = A\begin{bmatrix} F_t & F_{t+1} \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} F_{t+1} & F_{t+2} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

2. Determine os autovetores e autovalores da matriz A. Sabendo que o resultado da aplicação repetida de uma transformação linear tende ao autovetor de maior autovalor associado daquela transformação (*Método da Potência*), escreva em Português o que os autovetores e autovalores nos dizem sobre a sequência de Fibonacci e sua relação com a proporção áurea.

3. Dada a lista de números da sequência de Fibonacci acima, confira se as conclusões às quais você chegou no item anterior se verificam.

Exercício 13:

Seja $x = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ e $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. Determine uma aproximação para z_1/z_2 tal que $z = A^{1000000}x$.

Exercício 14:

P é uma transformação que permuta de maneira cíclica uma lista de 5 números tal que

$$P\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5\end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix}^\mathsf{T}.$$

1. Determine um autovalor de P.
2. Determine o autovetor correspondente ao autovalor do item anterior.

Exercício 15:

Seja

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}^{1000}\begin{bmatrix}1\\ 7\\ 5\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix}.$$

Aproxime $\dfrac{b_1}{b_3}$.

Dica: use o fato de ser fácil calcular o determinante de uma matriz triangular.

Exercício 16:

Prove algebricamente que se A é uma matriz tal que os valores de cada coluna somam 1, então A tem um autovalor igual à 1. Use o fato que para qualquer matriz B, $\det\left(B^\mathsf{T}\right) = \det(B)$.

Dica: escreva isso matricialmente