Linguagens Formais

Prova 1 - 2024.1

Questão 01

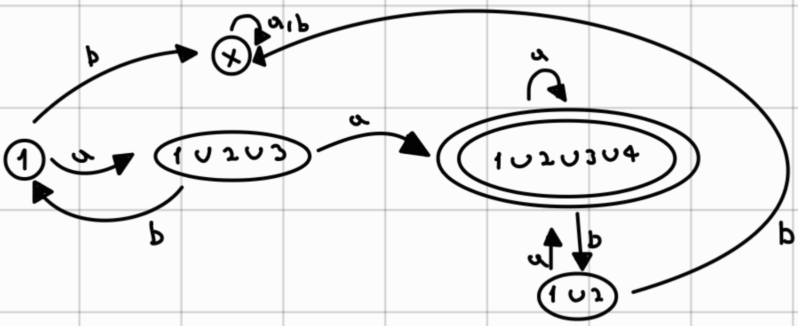
$A = (a \cup b)A \cup cD \cup \varepsilon = (a \cup b)A \cup c(cb)^*(b \cup c^2)A \cup \varepsilon \overset{\text{Arden}}{\Rightarrow} [(a \cup b) \cup c(cb)^*(b \cup c^2)]^* \cdot \varepsilon =$

$[(a \cup b) \cup c(cb)^*(b \cup c^2)]^*$ //

$D = bA \cup cC = bA \cup cbD \cup c^2A \overset{\text{Arden}}{\Rightarrow} D = (cb)^*(b \cup c^2)A$

$C = bD \cup cA$

Questão 02



Questão 03

$L = a(bc)^* \cup d)a^* = [a(bc)^* \cup ad]a^* = a(bc)^*a^* \cup ada^*$

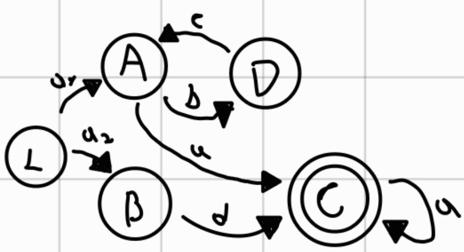
$a^{-1}L = (bc)^*a^* \cup da^* = A \cup B$

$b^{-1}L = c^{-1}L = d^{-1}L = \emptyset$ $\quad a^{-1}B = b^{-1}B = c^{-1}B = \emptyset$ $\quad a^{-1}D = b^{-1}D = d^{-1}D = \emptyset$

$a^{-1}A = a^* = C$ $\quad d^{-1}B = a^* = C$ $\quad c^{-1}D = (bc)^*a^* = A$

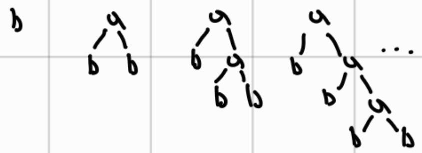
$b^{-1}A = c(bc)^*a^* = D$ $\quad b^{-1}C = c^{-1}C = d^{-1}C = \emptyset$

$c^{-1}A = d^{-1}A = \emptyset$ $\quad a^{-1}C = a^* = C$



Questão 07

a) Se L_D é a linguagem para computar árvores na seguinte sequência:



$\ldots = b, abb, ababb, abababb \ldots$

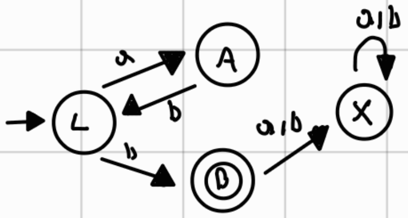
Podemos perceber que ela segue um padrão: alguma combinação (ou nenhuma) de (ab) e um (b). Mas, isso é o equivalente a dizer que:

$L_D = (ab)^*b$. Logo, podemos tentar achar um AFD para a linguagem:

$L = (ab)^*b$

$a^{-1}L = [a^{-1}(ab)^*]\cdot b \cup a^{-1}b = b(ab)^*b \cup \emptyset = b(ab)^*b = A$

$b^{-1}L = [b^{-1}(ab)^*]\cdot b \cup b^{-1}b = \emptyset \cdot b \cup \varepsilon = \emptyset \cup \varepsilon = \varepsilon = D$



$a^{-1}A = a^{-1}[b(ab)^*b] = \emptyset$

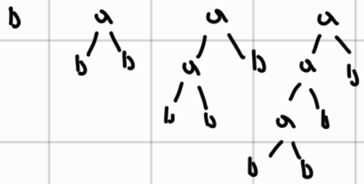
$b^{-1}A = b^{-1}[b(ab)^*b] = (ab)^*b = L$

$a^{-1}D = a^{-1}\varepsilon = \emptyset$

$b^{-1}D = b^{-1}\varepsilon = \emptyset$

Obtemos um autômato finito determinístico, e portanto, L_D é regular.

b) Se L_E é a linguagem para computar árvores na seguinte sequência:



$\ldots \Rightarrow b, abb, aabbb, aaabbbb \ldots$

Podemos perceber que ela segue um padrão tal que, para $n \geq 0$, $L_E = a^n b^{n+1}$. Podemos supor um conjunto infinito I de palavras de forma com que, se $x = a^i$ e $y = a^j$ pertencem a I, com $j > i$, sem perda de generalidade, e sendo $z = b^{i+1}$, temos:

$$xz = a^i b^{i+1} \Rightarrow xz \in L_E$$

$$yz = a^j b^{i+1} \Rightarrow yz \notin L_E$$

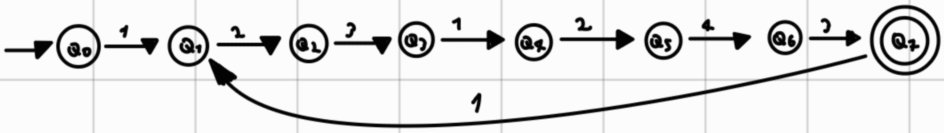
Logo, seriam necessários infinitos estados para computar $a^j b^{i+1}$, e portanto L_E não é regular.

Prova Final - 2024.1

Questão 01

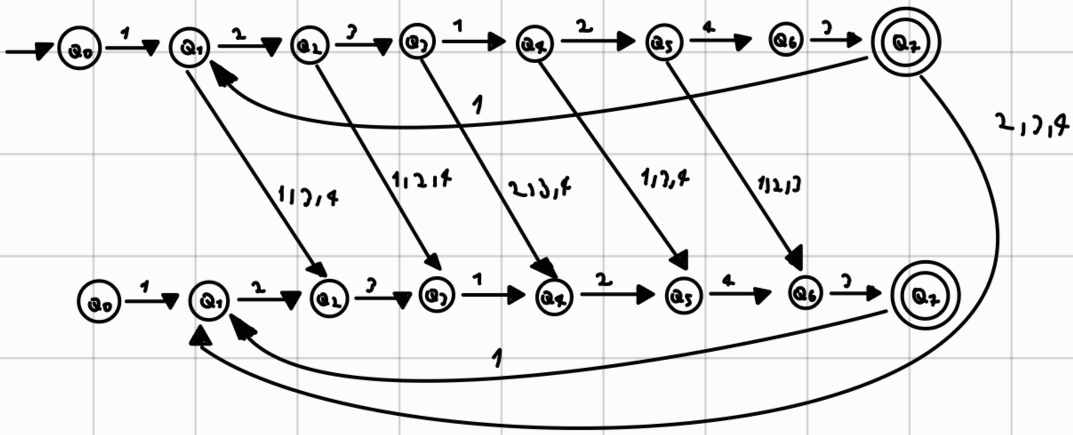
a) Vamos tentar construir um autômato para L_1:

Sabemos que $L_1 = (1231243)^*$, excluindo a palavra vazia ε.



O autômato respeita a ordem de leitura do começo da música, criando palavras que representam $(1231243)^*$, excluindo a palavra vazia ε.

b) Podemos interpretar "máximo um erro" como "se for cometido um erro, vá para o autômato sem erros". Ou seja, podemos utilizar o autômato de L_1 para construir o de L_2, da seguinte maneira:



O autômato para L_2 suporta tanto L_1 quanto L_4, que é a linguagem das palavras com exatamente um erro dado o contexto.

c) Seja L_4 a linguagem das palavras com até 1% de erro considerando o contexto da questão e um conjunto infinito I qualquer, e sejam os prefixos de I

sem perda de generalidade

$x = (2343412)^i$ e $y = (2343412)^j$ (100% de erro), com $j > i$, e sendo o sufixo $z = (1231243)^{100i}$, temos que:

$$xz = (2343412)^i \cdot (1231243)^{100i} \Rightarrow xz \in L_3$$

$$yz = (2343412)^j \cdot (1231243)^{100i} \Rightarrow yz \notin L_3$$

Logo, seriam necessários infinitos estados no autômato de L_3, e portanto, L_3 não é regular.

Prova 1 - 2023.2

Questão 01

$A = aD \cup bC \cup \varepsilon = a^2 A \cup a(ba^*)^2 bA \cup ba^*ba^*bA = [a^2 \cup a(ba^*)^2 b \cup (ba^*)^2 b] A \cup \varepsilon \therefore *$

$B = aB \cup bA \therefore \overset{\text{Arden}}{B = a^* bA}$

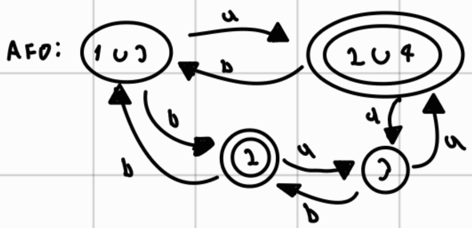
$C = aC \cup bD \therefore C = aC \cup ba^*bA \overset{\text{Arden}}{\therefore} C = a^* ba^* bA$

$D = aA \cup bC \therefore D = aA \cup ba^*ba^*bA = aA \cup (ba^*)^2 bA$

$*$
$A = [a^2 \cup a(ba^*)^2 b \cup (ba^*)^2 b]^* \cdot \varepsilon = [a^2 \cup a(ba^*)^2 b \cup (ba^*)^2 b]^*$

Questão 02

AFD:



Questão 03

$L = ((a \cup b^*)a)^*$

$a^{-1}L = a^{-1}[(a \cup b^*)a] \cdot ((a \cup b^*)a)^* = [(\varnothing \cup \varepsilon)a \cup a^{-1}a] \cdot ((a \cup b^*)a)^* = (a \cup \varepsilon) \cdot ((a \cup b^*)a)^*$

$= a \cdot ((a \cup b^*)a)^* \cup ((a \cup b^*)a)^* = A \cup L$

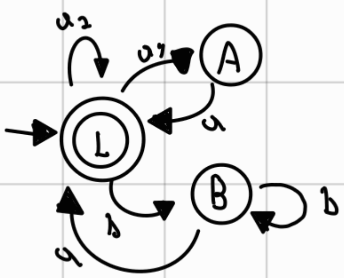
$b^{-1}L = b^{-1}[(a \cup b^*)a] \cdot ((a \cup b^*)a)^* = (b^* a \cup \varnothing) \cdot ((a \cup b^*)a)^* = b^* a((a \cup b^*)a)^* = B$

$a^{-1}A = L$

$b^{-1}A = \varnothing$

$a^{-1}B = ((a \cup b^*)a)^* = L$

$b^{-1}B = b^* a((a \cup b^*)a)^* = B$



Prova 1 - 2023.1

Questão 01

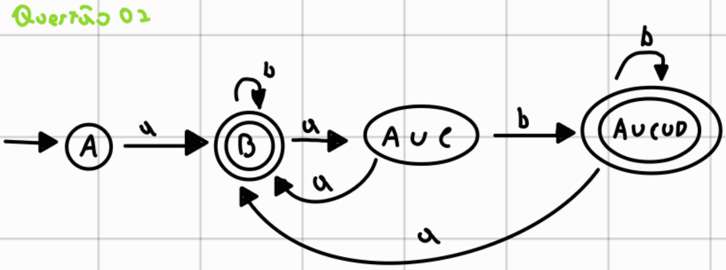
$A = bA \cup aD = bA \cup abaA \cup ab \overset{\text{Arden}}{\Rightarrow} A = (b \cup aba)^*(ab)$ //

$B = bD = baA \cup b$

$D = aA \cup \varepsilon$

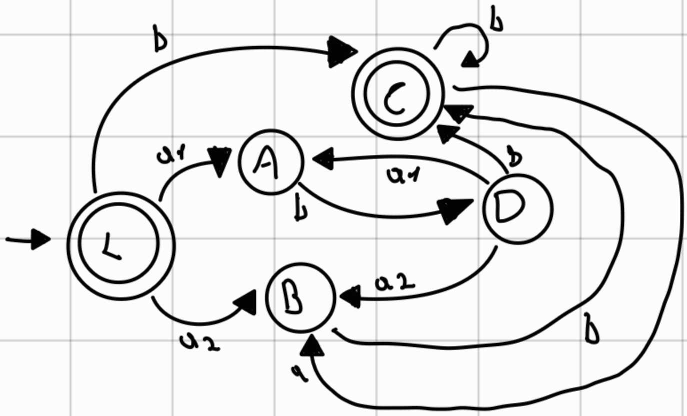
$C = \emptyset$

Questão 02



Questão 03

$L = ((ab)^* \cup b) \cdot (ab \cup b)^*$



$a^{-1}L = b(ab)^* \cdot (ab \cup b)^* \cup b(ab \cup b)^* = A \cup B$

$b^{-1}L = \emptyset \cup \varepsilon \cdot (ab \cup b)^* = (ab \cup b)^* = C$

$a^{-1}A = \emptyset$

$b^{-1}A = (ab)^* \cdot (ab \cup b)^* = D$

$a^{-1}B = \emptyset$

$b^{-1}B = (ab \cup b)^* = C$

$a^{-1}D = b(ab)^* \cdot (ab \cup b)^* \cup b(ab \cup b)^* = A \cup B$

$a^{-1}C = b(ab \cup b)^* = B$

$b^{-1}D = (ab \cup b)^* = C$

$b^{-1}C = (ab \cup b)^* = C$

Questão 04

a) Não é regular.

Seja a linguagem das rotas com o robô terminando apontando para o norte. Considere um conjunto infinito I de palavras tais que os prefixos

$x = P^i, y = EP^i \in I$ ($i > 0$). Seja o sufixo $z = P^i$, temos que

$xz = P^iP^i \Rightarrow xz \in L$

$yz = EP^iP^i \Rightarrow yz \notin L$

Logo, serão necessários infinitos estados para computar as palavras de L, e portanto, L não é regular.

b) Não é regular.

Seja a linguagem das rotas com o robô retornando ao ponto inicial. Considere um conjunto infinito I de palavras tais que os prefixos

$x = P^i, y = P^j \in I$ ($j > i > 0$). Seja o sufixo $z = EEP^i$, temos que.

$xz = P^iEEP^i \Rightarrow xz \in L$

$yz = P^jEEP^i \Rightarrow yz \in L$

Logo, serão necessários infinitos estados para computar as palavras de L, e portanto, L não é regular.

$$r = ((a \cup abcd)^* \cup bcb)^* dcba$$

$$r = ((9 \cup 9279)^* \cup 272)^* 9729$$

Prova 2 - 2024.1

Questão 01

A linguagem que captura os movimentos que retornam ao ponto de origem é composta por palavras na forma $N^mS^mE^nW^n$, onde N, S, E e W podem estar em qualquer ordem e $m, n \geq 0$. Podemos supor a ordem $w = N^mS^mE^mW^m$, já que esta palavra também pertence à linguagem.

Agora, vamos supor por absurdo que L é livre de contexto. Seguindo o lema do bombeamento, temos que $m \geq p$ e $|vxy| \leq p$, e portanto, a palavra não pode estar ao mesmo tempo N's, S's, W's e E's. Neste caso, nem v nem y podem conter W, mas vy deve conter pelo menos um N, ou um S ou um E. Assim, quando $k > 1$, o número de N's, S's e E's em uv^kxy^kz tem que ser maior que m, enquanto o número de W's permanece inalterado. Logo, esta palavra não pertence à linguagem com $k > 1$.

Porém agora, se vxy contém apenas N's e S's ou E's e W's, a palavra bombeada continua pertencendo à linguagem, já que n e m podem ser diferentes.

Mas se vxy contém N's e E's, N's e W's, S's e E's ou S's e W's, teremos que o número de uma direção vertical (ou horizontal) será maior que o da outra vertical (ou horizontal), quebrando o padrão da linguagem. Além disso, se bombearmos para baixo, podemos ter palavras com uma direção horizontal ou uma direção vertical apenas (escolhendo uma letra qualquer, duas letras de direções diferentes ou três letras), podendo existir 1 letra da mesma direção em quantidades diferentes. Logo, L não é livre de contexto.

Questão 02

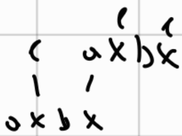
a) $S \to VH$

$V \to nVs \mid \varepsilon$

$H \to eHw \mid \varepsilon$

Questão 07

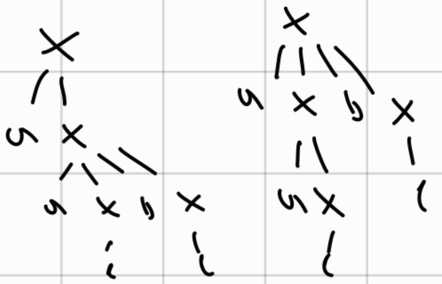
acbc ac c a^*



$X \to aXbX$

aacbc $a^*c(bc \cup \varepsilon)$

$X \to aX$



$X \to c$

$X \to aX$

$X \to Y$

$Y \to aYbX$

$Y \to c$

Prova 2 - 2023.2

Questão 01

a) $L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$

$S \to aSbb \mid \varepsilon$

Tem gramática => é livre de contexto.

b) $L = \{a^n b^{n^2} \mid n \geq 0\}$ $a^n b^{n^2}$

Vamos supor por contradição que a linguagem $a^p b^{p^2}$ é livre de contexto. Sabemos, seguindo o lema do bombeamento, que para uma palavra $w = uvxyz$ com $|vxy| \leq p$ e $vy \neq \varepsilon$ tal que para todo $k \geq 0$, a palavra $uv^k x y^k z$ também pertence à L. Se vxy for composto ape-nas por a's ou b's, teremos uma palavra que não pertence a linguagem. Logo, existem inteiros $i, j \geq 0$, $i+j \leq p$ tais que

$x = \varepsilon$

$u = a^{p-i}$, $vxy = a^i b^j$, $z = b^{p^2-j}$. Aplicando o bombeamento com k termos, obtemos:

$uv^k x y^k z = a^{p-i} \cdot a^{ki} b^{kj} \cdot b^{p^2-j}$

Porém, sabemos que a palavra no bombeamento deve ter no mínimo um número quadrado perfeito maior que o número de b's da palavra origi-nal (que possui p^2 b's). Logo, a nova palavra deve possuir no mínimo $(p+1)^2$ b's. Porém, ao bombearmos, a palavra terá no máximo kj b's, e sabemos que para respeitar o lema, é necessário um mínimo de $(p+1)^2$ b's. Logo, seja $k = 2$, obtemos:

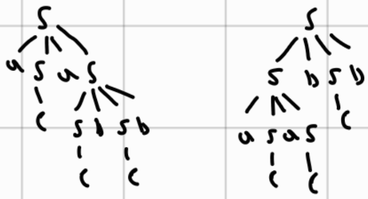
$i+j \leq p \therefore j \leq p \therefore 2j \leq 2p < (p+1)^2 = p^2+2p+1 \therefore 2j < p^2+2p+1$. Logo, bombeando por 2, a quantidade de b's não será suficiente, assim como para $k < 2$. Logo, a linguagem não satisfaz o lema, e portanto, não é livre de contexto.

Questão 02

$S \to aSaS$

$S \to SbSb$

$S \to c$



$\Rightarrow$ É ambígua