Aluno(a): GABARITO

P1 de MAD - 2024/2

Prof. Vinícius Gusmão

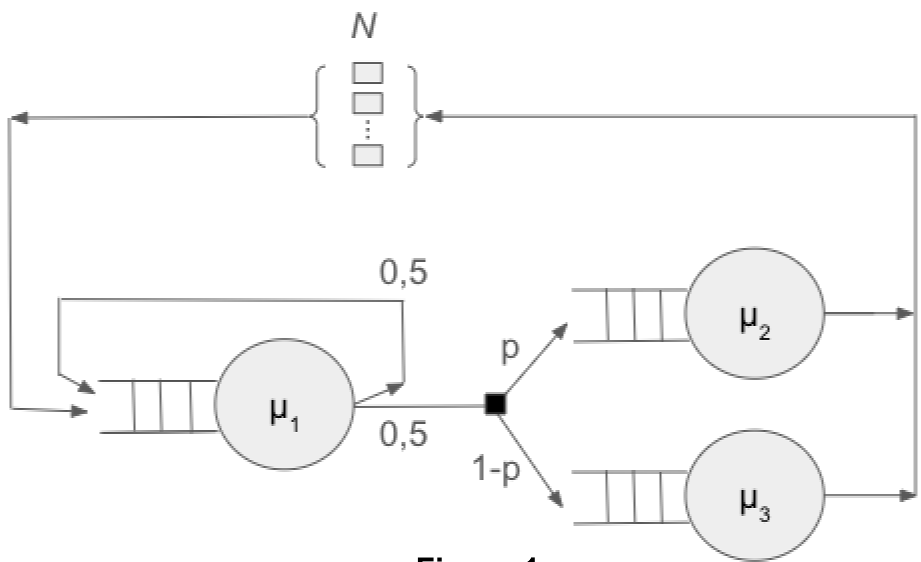

Figura 1

QUESTÃO 1 (***4 pontos = 0,5 pontos por item***)**:** As seguintes medidas foram obtidas sobre o sistema fechado de filas da Figura 1 observado durante **2 horas**:

- o dispositivo 1 realizou 2320 serviços, com média de 0,36 segundos por serviço
- o dispositivo 2 realizou 800 serviços, ficando ocioso por 40 minutos no total
- a capacidade nominal de serviço do dispositivo 3 é de μ_3 = 30 serviços por minuto

a) Qual o número médio de visitas ao dispositivo 1? $\mathbf{E}[V_1]$ = 2 visitas/job

V_1 ~ Geométrica(0,5) → $\mathbf{E}[V_1] = 1 / 0{,}5 = 2$

b) Qual a demanda média no dispositivo 1? $\mathbf{E}[D_1]$ = 0,72 s/job

$\mathbf{E}[D_1] = \mathbf{E}[S_1] \,.\, \mathbf{E}[V_1] = 0{,}36 \,.\, 2 = 0{,}72$

c) Qual o tempo médio de serviço no dispositivo 2? $\mathbf{E}[S_2]$ = 6 s/job

$\mathbf{E}[S_2]$ = [(120 - 40) . 60] segundos / 800 jobs =

= 6 segundos / job

d) Qual a utilização do dispositivo 2? ρ_2 = 2/3

ρ_2 = 80 minutos trabalhando / 120 minutos total =

= 2/3 ≅ 66,6%

e) Qual a vazão no dispositivo 2? X_2 = **1/9** jobs/s

X_2 = 800 jobs / 2 horas = 400 jobs/h
= 800 jobs / (120 * 60) segundos =
= 8/72 = 1/9 ≅ 0,11 jobs/s

f) Qual a utilização do dispositivo 3? ρ_3 = **1/10**

Lei da Utilização: $\rho_3 = X_3 . E[S_3] = X_3 . (1/\mu_3)$
Foi dado μ_3. Vamos então calcular X_3.
Sabemos que a vazão X do sistema é particionada de forma que $X = X_2 + X_3$.
Como já temos X_2, do item (e), falta termos X.
Forced Flows: $X_1 = X . \mathbf{E}[V_1]$
X_1 = 2320 jobs / 2 horas = 1160 jobs/h
$\mathbf{E}[V_1]$ = 2, calculado no item (a)
Então 1160 = X . 2
X = 1160/2 = 580 jobs/h
Substituindo:
580 jobs/h = 400 jobs/h + X_3
X_3 = 580 - 400 = 180 jobs/h
Finalmente:
ρ_3 = 180 jobs/h . (1/30) min/job =
= 180/60 jobs/min . (1/30) min/job =
= 3 jobs/min . (1/30) min/job =
= 1/10 = 0,1 = 10%

g) Qual a vazão na fila do dispositivo 3? X_{Q3} = **0,05** jobs/s

A vazão na fila do dispositivo 3 é igual à vazão no próprio dispositivo 3. O cálculo dessa vazão foi feito no item anterior.
$X_{Q3} = X_3$ = 180 jobs/h = 180 jobs / 3600 s =
= 1/20 = 0,05 jobs/s

h) Qual a fração dos jobs que vai para o dispositivo 2? **p** = **20/29**

Forced Flows: $X_2 = X . \mathbf{E}[V_2]$
$\mathbf{E}[V_2]$ é claramente igual a **p**, pois todo job que é roteado para o dispositivo 2 é atendido exatamente uma vez por aquele dispositivo.
X nós conhecemos do item (f). X_2 nós conhecemos do item (e).
Então, temos:
400 jobs/h = 580 jobs/h . **p**
p = 400/580 = 20/29 ≅ 0,69

QUESTÃO 2 (***2,5 pontos = 0,5 pontos por item***)**:** Seja novamente um sistema de filas esquematizado pela Figura 1 (trata-se de *outro* sistema, portanto esqueça todas as informações apresentadas na Questão 1). Sobre este novo sistema, sabe-se apenas que:

- ao terminar seu(s) atendimento(s) pelo servidor 1, cada job está sujeito a um roteamento probabilístico que manda **p** = ⅔ dos jobs para o dispositivo 2, e ⅓ dos jobs para o dispositivo 3; e
- são conhecidas as demandas médias em cada dispositivo:
  $\mathbf{E}[D_1] = 2$ s/job, $\mathbf{E}[D_2] = 6$ s/job, $\mathbf{E}[D_3] = 1$ s/job

As perguntas abaixo são totalmente independentes, isto é, qualquer modificação proposta em uma delas não afetará o cenário para as perguntas seguintes.

a) Para E[Z] = 0 e N = 3 (3 jobs concorrentes num sistema em batch), qual a fração ótima **p** dos jobs que deveria ser roteada para o servidor 2 de forma a maximizar a vazão do sistema?

Para maximizar a vazão, vamos primeiro entender o que é que a está limitando.

$D = 2 + 6 + 1 = 9$ s/job
$D_{max} = 6$ s/job
$N^* = (D + \mathbf{E}[Z]) / D_{max} = (9 + 0) / 6 = 1,5$

Como $N = 3 > N^*$, precisamos minimizar a demanda no gargalo.

O gargalo atual é o dispositivo 2, e sua demanda pode ser diminuída se diminuirmos o valor de **p**. Só precisamos ter o cuidado de não diminuir demais, de forma que o dispositivo 3 passasse a ser o gargalo. Isso será conseguido igualando-se as demandas naqueles dois dispositivos sujeitos ao roteamento. Para isso, vamos descobrir como ficam suas demandas em função de **p**.

Lei da Demanda: $\mathbf{E}[D_i] = \mathbf{E}[S_i] \,.\, \mathbf{E}[V_i]$

Usando as demandas nos três dispositivos para o valor dado de **p**, podemos inferir os tempos médios de serviço.

$\mathbf{E}[D_1] = \mathbf{E}[S_1]\ .\ \mathbf{E}[V_1]$
2 s/job = $\mathbf{E}[S_1]$. 2 $\rightarrow$ $\mathbf{E}[S_1]$ = 1 s/job

$\mathbf{E}[D_2] = \mathbf{E}[S_2]\ .\ \mathbf{E}[V_2]$
6 s/job = $\mathbf{E}[S_2]$. 2/3 $\rightarrow$ $\mathbf{E}[S_2]$ = 9 s/job

$\mathbf{E}[D_3] = \mathbf{E}[S_3]\ .\ \mathbf{E}[V_3]$
1 s/job = $\mathbf{E}[S_3]$. 1/3 $\rightarrow$ $\mathbf{E}[S_3]$ = 3 s/job

Calculando agora as demandas nos dispositivos 2 e 3
em função de **p**, que pretendemos modificar.

$\mathbf{E}[D_1]$ = 1 s/job
$\mathbf{E}[D_2]$ = 9**p** s/job
$\mathbf{E}[D_3]$ = 3(1 - **p**) s/job

Igualando as demandas nos dispositivos 2 e 3…
9**p** = 3(1 - **p**)
9**p** = 3 - 3**p**
12**p** = 3
p = 1/4

Com isso, as demandas nos dispositivos 2 e 3 ficariam ambas iguais a 2,25 s/job, e esses dois dispositivos compartilhariam o status de gargalo do sistema, com D_{max} = 2,25.

p = **1/4**

b) Para E[Z] = 51 segundos e N = 8 (8 produtores num sistema interativo), qual a fração ótima **p** dos jobs que deveria ser roteada para o servidor 2 de forma a minimizar o tempo médio de resposta?

Primeiro, note que, num sistema fechado, o menor tempo de resposta acontece quando temos a maior vazão. Então, novamente, para maximizar a vazão, vamos primeiro entender o que é que a está limitando.

D = 2 + 6 + 1 = 9 s/job
D_{max} = 6 s/job
$N^* = (D + \mathbf{E}[Z]) / D_{max} = (9 + 51) / 6 = 10$

Como $N = 8 < N^*$, precisamos agora minimizar a demanda total.

Como não podemos mexer em **E**[D_1] apenas mudando o valor de **p**,
o que vamos querer na realidade minimizar será a soma
E[D_2] + **E**[D_3].

Já temos essas demandas médias em função de **p**.
Vamos, portanto, usar isso.

$$\mathbf{E}[D_2] + \mathbf{E}[D_3] = 9\mathbf{p} + 3(1 - \mathbf{p}) =$$
$$= 6\mathbf{p} + 3.$$

Essa função é crescente, então seu mínimo no intervalo [0, 1]
se dá no ponto **p** = 0.

Ou seja, podemos desligar o dispositivo 2 completamente.
Isso nos deixaria com **E**[D_2] = 2 s/job, **E**[D_2] = 0, **E**[D_3] = 3 s/job,
com demanda total D = 5 s/job,
e demanda no gargalo D_{max} = 3 s/job.

p = **zero**

c) Para E[Z] = 0 e N = 1, e supondo que você possa fazer apenas uma mudança no sistema, que é a de trocar um (e apenas um) dos dispositivos por outro com a mesma função mas que tenha "velocidade de processamento infinita" (isto é, que gaste tempo ZERO em todo e qualquer atendimento), qual dos dispositivos você trocaria para maximizar a vazão do sistema?

Como N = 1, claramente vamos querer minimizar a demanda total, independentemente de quem seja o gargalo. Trocar um dispositivo por outro com "velocidade infinita" é o mesmo que zerar a demanda naquele dispositivo, já que a demanda é o produto do tempo médio de serviço (que passará a ser zero) pelo número médio de visitas por job àquele dispositivo.

Porém, o maior efeito na demanda total ao zerarmos a demanda em um dos dispositivos será obtido exatamente quando zerarmos a demanda… no gargalo!

Ou seja, a melhor escolha seria fazermos a troca do dispositivo 2.

Dispositivo **2**

d) Para E[Z] = 0 e N = 1, e supondo que você possa novamente trocar um (e apenas um) dos dispositivos por outro com "velocidade de processamento infinita", mas possa dessa vez mexer *também* na probabilidade de roteamento **p**, qual dos dispositivos você trocaria e qual seria o valor de **p** para minimizar o tempo médio de resposta?

Novamente, o objetivo será o de minimizar a demanda total.
Porém, agora podemos mexer *também* no roteamento que particiona o tráfego pelos dispositivos 2 e 3.

Então, algo que podemos fazer será zerar a demanda *em ambos*!
Como? Ora, fazendo **p** = 1 (isto é, mandando todo o tráfego para o dispositivo 2), zeramos a demanda no dispositivo 3. E trocando o dispositivo 2 por um com velocidade infinita, zeramos a demanda no dispositivo 2! A demanda total passaria a ser apenas a demanda no dispositivo 1, que é igual a 2 s/job.
Note que o mesmo efeito seria obtido se fizéssemos p = 0 e trocássemos o dispositivo 3 pelo de velocidade infinita.

Agora… podemos também trocar o dispositivo 1 por um de velocidade infinita! Será melhor? Bem, se fizéssemos isso, a demanda do dispositivo 1 seria zerada, e, para minimizar a soma $\mathbf{E}[D_2] + \mathbf{E}[D_3]$ nós faríamos como no item (b), obtendo 3 s/job de demanda total. Isso é pior do que a opção anterior, que dava 2 s/job de demanda total. Então já sabemos o que fazer!

Dispositivo 2	ou	Dispositivo 3
p = 1		**p** = 0

QUESTÃO 3 (***2 pontos = 0,5 pontos por item***): Num consultório médico, há uma sala de atendimento com um único médico atendendo (um paciente por vez) e uma sala de espera. Sabe-se que o médico está em atendimento durante apenas 80% do tempo em um dia típico, embora tivesse condições físicas de atender sem qualquer período de ociosidade, se fosse necessário. A média, ao longo de um dia típico, do número de pacientes aguardando na sala de espera é igual a 4, e o tempo médio de atendimento médico (serviço) é de 6 minutos e 40 segundos.

a) Qual a vazão do sistema? **7,2** atendimentos/hora

Lei da Utilização: $\boldsymbol{\rho} = X \cdot \mathbf{E}[S]$

$0{,}8 = X \cdot 400$ segundos/atendimento

$X = 0{,}8 / 400 = 1 / 500$ atendimentos/segundo

$= (1 / 500) * 3600 = 7{,}2$ atendimentos/hora

b) Qual o tempo médio gasto por um paciente no consultório? **40** minutos

Lei de Little no consultório todo (espera + atendimento):

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[T] &= \mathbf{E}[N] \cdot (1 / X) \\
&= (\mathbf{E}[N_Q] + \mathbf{E}[N_S]) \cdot (1 / X) \\
&= (\mathbf{E}[N_Q] + \boldsymbol{\rho}) \cdot (1 / X) \\
&= (4 + 0{,}8) \cdot (1 / 7{,}2) = \\
&= 4{,}8 / 7{,}2 \text{ horas} = \\
&= (48 / 72) \cdot 60 \text{ minutos} = \\
&= (2 / 3) \cdot 60 = \\
&= 40 \text{ minutos}
\end{aligned}$$

c) Considerando-se *apenas os momentos em que o médico está em atendimento*, qual o número médio de pacientes *dentro do consultório*?

Aqui queremos $\mathbf{E}[N \mid \text{médico ocupado}]$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[N \mid \text{médico ocupado}] &= \mathbf{E}[N_Q \mid \text{médico ocupado}] + \mathbf{E}[N_S \mid \text{médico ocupado}] \\
&= \mathbf{E}[N_Q \mid \text{médico ocupado}] + 1
\end{aligned}$$

Então precisamos descobrir $\mathbf{E}[N_Q \mid \text{médico ocupado}]$.

Pela Esperança Total:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[N_Q] = {} & \mathbf{E}[N_Q \mid \text{médico ocupado}] \cdot \Pr\{\text{médico ocupado}\} + \\
& + \mathbf{E}[N_Q \mid \text{médico ocioso}] \cdot \Pr\{\text{médico ocioso}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4 = {} & \mathbf{E}[N_Q \mid \text{médico ocupado}] \cdot 0{,}8 + \\
& + 0 \cdot 0{,}2
\end{aligned}$$

$\mathbf{E}[N_Q \mid \text{médico ocupado}] = 4 / 0{,}8 = 5$

$\mathbf{E}[N \mid \text{médico ocupado}] = 5 + 1 = 6$

6 pacientes

d) Qual seria a maior taxa de chegada de pacientes ao consultório que manteria o sistema em estabilidade?

Sistema aberto.
Queremos garantir que taxa de chegada não exceda a taxa de serviço.

$\lambda < \mu = 1 / E[S] = 1 / 400$ pacientes/segundo
$= (1 / 400) . 3600$ pacientes/hora
$= 9$ pacientes por hora

Resposta: **9** pacientes/hora

QUESTÃO 4 (***1,5 pontos = 0,5 pontos por item***):

Você deseja obter amostras de uma variável aleatória *X* cuja PDF é dada pela seguinte função:

$$f_X(x) = \frac{2}{x^3} \quad , \ x \geq 1$$

A CDF dessa V.A. é dada pela integral definida

$$F_X(x) = \int_1^{\infty} f_x(x)\, dx = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

a) Qual a inversa dessa CDF?
(Escreva "não se conhece fórmula fechada" se for o caso.)

$$u = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$u - 1 = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = 1 - u$$

$$x^2 = \frac{1}{1-u}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-u}} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{1-u}}$$

Como x precisa ser positivo, ficamos apenas com a primeira solução.

$$F_X^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u}}$$

b) Qual você diria ser o método mais eficiente para se obter as amostras desejadas?
( ) Accept/Reject com V.A. auxiliar exponencial (**X**) Método da Inversa da CDF
( ) Accept/Reject com V.A. auxiliar linear ( ) Outro

É muito difícil ser mais eficiente do que o método da inversa da CDF, quando podemos utilizá-lo. A questão é que nem sempre conseguimos uma expressão fechada para a inversa da CDF… Mas, nesse caso, foi super tranquilo conseguir uma.

c) Escreva em pseudocódigo um algoritmo *qualquer* para obter amostras de X.

```
função obter_amostra_de_X( ):
    u ← amostra de uma Uniforme(0, 1)
    x ← 1 / raiz_quadrada(1 - u)
    retorne x
```