# Linguagens Formais - Caderno de Aulas

## Aula 1 - Introdução

### O que é uma linguagem formal?

=> Um conjunto (potencialmente infinito)

De palavras (finitos)

### Aplicações

- Linguagens Regulares
  - ↳ Busca de texto
  - ↳ Análise Léxica
- Linguagens Livres de Contexto
  - ↳ Sintaxe de linguagens de programação
- Linguagem Recursivamente Enumeráveis
  - ↳ Algoritmos e computabilidade

### Questionamento

P(x) => O programa x entra em loop

if (P(P)) then ok ver Alan Turing e Matéria Lógica e Computabilidade

else while (true)

P(P)

## Definições

- Alfabeto $\Sigma$ conjunto finito de símbolos
- Cadeia / String / Palavra $w = a_1, \dots, a_n$ (sequência finita de símbolos do alfabeto)
- Cadeia vazia: $\varepsilon$
- Conjunto Universo: $\Sigma^*$
- Linguagem: conjunto de cadeias: $L \subseteq \Sigma^*$

## Operações sobre palavras

- Comprimento $|w|$
- Concatenação $ab \cdot cd = abcd = a \cdot b \cdot c \cdot d$
- Repetição: $w^n$ $(ab^3) = ababab$
- $1 = \varepsilon$

## Operações sobre conjuntos

- União $L_1 \cup L_2$
- Interseção $L_1 \cap L_2$
- Diferença $A \setminus B$ ou $A - B$
- Complemento $\overline{A}$
- Concatenação de conjuntos $A \cdot B$ $\{ab, cd\} \cdot \{x, y\} = \{abx, aby, cdx, cdy\}$
- Repetição de conjuntos $A^n$ $\{aa, b\}^3 = \{aa, b\} \cdot \{aa, b\} \cdot \{aa, b\} = \{aaaaaa, aaaab, aabaa, aabb, baaaa, baab, bbaa, bbb\}$

$A^0 = \{\varepsilon\}$ → nosso "1", não é o conjunto vazio → "zero"

$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$

$\{a, b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb \ldots\}$

Exercícios

Prove que $A^0 \cdot A^m = A^m$

→ $\{\varepsilon \cdot a_i \mid a_i \in A^m\} = \{a_i \mid a_i \in A^m\} = A^m = A^0 \cdot A^m$

Prova: como $A^0 = \{\varepsilon\}$, se $A^m = \{a_1, a_2, \ldots\}$, temos que $\{\varepsilon\} \cdot \{a_1, a_2, \ldots\} = \{\varepsilon \cdot a_1, \varepsilon \cdot a_2, \ldots\}$, pela concatenação de conjuntos. Pelo elemento neutro das palavras, finalmente obtemos $\{\varepsilon \cdot a_1, \varepsilon \cdot a_2, \ldots\} = \{a_1, a_2, \ldots\} = A^m$, $a_i \in A^m$, $1 \leq i < \infty$ ■

Prove que $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$, por indução em $n$.

Prova: Passo indutivo: $k \in \mathbb{N}$, $k = n \therefore A^k \cdot A^m = A^{k+m} \Rightarrow n = k+1 \therefore A^{k+1} \cdot A^m = A^{k+m+1}$

Pelo produto cartesiano, $A^{k+1} = A^k \cdot A \Rightarrow A^{k+1+m} = (A^k \cdot A^m) \cdot A = A \cdot A^{k+m}$, e novamente, $A \cdot A^{k+m} = A^{k+m+1}$.

Portanto, temos $A \cdot A^{k+m} = A^{k+m+1}$, e tendo $n = k+1$ pelo passo indutivo, temos $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$ ■

No caso indutivo, assumimos que $A^n \cdot A^m$ e queremos provar que $A^{(n+1)} \cdot A^m = A^{(n+1)+m}$ $\Rightarrow$ Def $A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} \text{ se } n = 0 \\ A \cdot A^{n-1}, \text{ se } n > 0 \end{cases}$

$A^{1+n} \cdot A^m = (A \cdot A^n) \cdot A^m$ (por def de $A^{n+1}$)

$= A \cdot (A^n \cdot A^m)$ pois a concatenação é associativa

$= A \cdot A^{n+m}$ pela HI

$= A^{n+m+1}$ pela def de $A^n$ ■

# Aula 2

## Quocientes de linguagens

• À esquerda $A^{-1} \cdot B = \{w \mid \exists a \in A \text{ tal que } a \cdot w \in B\}$

• À direita $A \cdot B^{-1} = \{w \mid \exists b \in B \text{ tal que } w \cdot b \in A\}$

Exemplos:

| | |
|---|---|
| $\{a\}^{-1} \cdot \{aa, ab, bcd, bb\}$ | Intuição: "Possíveis restos depois de tirar um 'a' do começo" |
| $\{a, b\}$ não tem bcd nem $\varepsilon$ | |

## Expressões Regulares

Uma notação para construir linguagens.

Uma E.R é definida indutivamente:

- $\phi$ é uma ER

- $\varepsilon$ é uma ER

- $a$ é uma ER se $a \in \Sigma$

- $A \cdot B$ é uma ER se A e B são ERs

- $A \cup B$ é uma ER se A e B são ERs

- $A^*$ é uma ER

Exemplos:

• $(a \cup b) \cdot c = (\{a\} \cup \{b\}) \cdot \{c\} = \{a, b\} \cdot \{c\} = \{ac, bc\}$

• $(a \cup b)^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, \dots\}$ = Todas as palavras no alfabeto $\{a, b\}$

$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots \Rightarrow A^*$ é o menor ponto fixo da equação $X = AX \cup \{\varepsilon\}$

$(ab)^* = \{\varepsilon, ab, abab, ababab, \dots\}$

$A \cdot A^* = \{ab, abab, \dots\}$

$A \cdot A^* \cup \{\varepsilon\} = A^*$

Definição

$L(\emptyset) = \{\ \}$

$L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$

$L(a) = \{a\}$

$L(A \cdot B) = L(A) \cdot L(B)$

$L(A \cup B) = L(A) \cup L(B)$

$L(A^*) = L(A)^*$

Explicação do ponto fixo

$$\left.\begin{array}{l} X = abX + \varepsilon \\ X_1 = \{\varepsilon\} \\ X_2 = \{\varepsilon, ab, (ab)^2\} \\ X_3 = \{\varepsilon, ab, (ab)^2, (ab)^3\} \end{array}\right\} (ab)^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Rightarrow \text{Ponto fixo...}$$

Crie expressões regulares para: (Alfabeto: $\{a, b\}$)

a) palavras terminadas em "b" $\Rightarrow \Sigma^* \cdot b$

b) Palavras que contém subpalavra "aa" $\Rightarrow \Sigma^* \cdot a^2 \cdot \Sigma^*$

c) duas letras quaisquer seguidas de três ou mais "b" $\Rightarrow \Sigma^2 \cdot b^3 \cdot b^*$

d) Palavras só de "a" t.q. número de "a" $\equiv 2 \bmod 3$ $\{a^2, a^5, a^8, \dots\} \Rightarrow a^2 \cdot (a^3)^*$

## Aula 7

Exercício:

Escreva expressões regulares

- Número de telefone $'+' \cdot [0-9]^2 \cdot '(' \cdot [0-9]^2 \cdot ')' \cdot [0-9]^5 \cdot '-' \cdot [0-9]^4$ $(('(' \cdot [0,9]^2 \cdot ')') \cup [0,9]^2) \cdot [0-9]^8 \cdot ([0-9] \cup \varepsilon)$

- E-mail $[A-Z\ a-z\ 0-9]^* \cdot '@' \cdot [A-Z\ a-z]^*$

- Senha que contém pelo menos uma letra maiúscula $\Sigma^* \cdot [A-Z] \cdot \Sigma^*$

- Senha com 8 a mais caracteres $\Sigma^8 \cdot \Sigma^*$

- Linhas de código Go que tem mais 2 variáveis atribuidas pelo loop range

for x,y = range xs NÃO $\Sigma^* \cdot [\{,\} \cdot \Sigma^*]^2 \cdot \Sigma^* \{=\} \cdot \Sigma^* \cdot \{range\} \cdot \Sigma^*$

for x,y,z = range xs SIM

## Notação Extra

$[A-Z]$, $[A-Z\ a-z]$, $[\wedge A-Z]$, $\square^*$

Prove que

$L(A) = L(A \cup A)$ ∴ Por (4), $L(A \cup A) = L(A) \cup L(A)$, e pela idempotência de conjuntos, $L(A) \cup L(A) = L(A)$ //

$L(A \cup B) = L(B \cup A)$ ∴ Por (4), $L(A \cup B) = L(A) \cup L(B)$, que pela comutatividade de conjuntos, $L(A) \cup L(B) = L(B) \cup L(A)$, que por (4), $L(B) \cup L(A) =$

$L(B \cup A)$ //

$L(A \cdot (B \cup C)) = L(A \cdot B \cup A \cdot C)$ ∴ Por (5), $L(A \cdot (B \cup C)) = L(A) \cdot L(B \cup C)$, que pelo item a, $L(A \cdot (B \cup C)) = L(A) \cdot [L(B) \cup L(C)]$. Pela distri-

butividade de conjuntos, $L(A) \cdot [L(B) \cup L(C)] = [L(A) \cdot L(B) \cup L(A) \cdot L(C)]$. Por (5), $[L(A) \cdot L(B) \cup L(A) \cdot L(C)] = L(A \cdot B) \cup L(A \cdot C)$, e final-

-mente, por (4), $L(A \cdot B) \cup L(A \cdot C) = L(A \cdot B \cup A \cdot C)$ //

# Aula 4 – Sistemas Lineares de Expressões Regulares e Lema de Arden

## Sistemas Lineares de Expressões Regulares

$X = aY \cup bbZ$

$Y = (a \cup c)Z \cup c$

$Z = a^*$

→ Quem é X?

$Z = a^*$

$Y = (a \cup c)a^* \cup c = (aa^* \cup ca^*) \cup c = aa^* \cup ca^* \cup c = aa^* \cup ca^*$

$X = a \cdot (aa^* \cup ca^*) \cup b^2a^* = (a^2a^* \cup aca^*) \cup b^2 a^* = a^2a^* \cup aca^* \cup b^2 a^* = (a^2 \cup ac \cup b^2)\, a^*$ //

$X = A \cdot A$

$A = B \cdot B$

$B = C \cdot C$

$C = a$

- Quem é X?

$C = a$

$B = a \cdot a = a^2$

$A = a^2 \cdot a^2 = a^4$

$X = a^4 \cdot a^4 = a^8$ //

Fáceis de resolver!

Mas, sendo:

a = abre aspas

b = conteúdo

c = fecha

e tendo:

$X = aR$

$R = c \cup bR$

obtemos: $X = a(c \cup bR)$, só substituindo não dá certo

denovo: $X = a[c \cup b(c \cup bR)] = ac \cup abc \cup b^2R$ => O número de variáveis não diminui!

## Lema de Arden

Se $\varepsilon \notin A$ então a única solução de $X = AX \cup B$ é $X = A^*B$

observação: se $\varepsilon \in A$ ou seja $A = \varepsilon \cup A'$

$X = X \cup A'X \cup B$

Vamos mostrar que $A^*B \subseteq X$ e $X \subseteq A^*B$

### Intuição

Se eu substituir $X = A^*B$ obtemos

$$AX \cup B = AA^*B \cup B = (AA^* \cup \varepsilon)B = A^*B$$

IDA: Vou mostrar que

$A^N B \subseteq X$, para todo $N$

Prova por indução:

- caso base: $N=0$

Qualquer $X$ contém $A^0 B$ pois $X = AX \cup B \supseteq B$ //

- Caso indutivo:

Temos $X = AX \cup B$ e $A^{N-1}B \subseteq X$

queremos mostrar $A^N B \subseteq X$

$A^{N-1}B \subseteq X$ concatenando dos dois lados

$A \cdot A^{N-1} B \subseteq AX$ $\quad \alpha \subseteq \alpha \cup B$

$A^N B \subseteq AX \cup B = X$ $\square$

VOLTA: $X \subseteq A^* B$, se $\varepsilon \notin A$

Seja $w \in X$, com $|w| = N$.

Vamos mostrar que $w \in \bigcup_{i=0}^{N} A^i B$

Se abrirmos a equação $N$ vezes

$X = AX \cup B = A^2X \cup AB \cup B = A^3X \cup A^2B \cup AB \cup B = A^4X \cup \underbrace{A^3B \cup A^2B \cup AB \cup B}_{(\bigcup_{i=0}^{3} A^i B)}$

$\therefore X = A^{N+1}X \cup \left(\bigcup_{i=0}^{N} A^i B\right)$

Como $\varepsilon \notin A$, todas as palavras de $A^{N+1}X$ tem comprimento $\geq N+1$.

Logo, $w \notin A^{N+1}$, pois $|w| = N$.

Portanto $w \in \left(\bigcup_{i=0}^{N} A^i B\right) \subseteq A^* B$

Vamos resolver

$X = cY$

$Y = aY \cup b$

Por ordem

$Y = a^* b$

Agora podemos substituir

$X = ca^* b$

Aplicação:

Vamos fazer uma linguagem / expressão regular que descreve uma partida de vôlei que começa empatada 24 x 24, onde

$a$ = ponto da Argentina

$b$ = ponto do Brasil

Quais palavras são possíveis sendo que o jogo acaba quando um dos ganha por vantagem de dois pontos, sendo:

$X$ = palavras quando o jogo está empatado

$A$ = palavras quando a Argentina tem vantagem

$B$ = palavras quando o Brasil tem vantagem

Temos o sistema

$X = aA \cup bB$

$A = a \cup bX$

$B = b \cup aX$

Substituindo: $X = a(a \cup bX) \cup b(b \cup aX) = aa \cup abX \cup bb \cup baX = aa \cup bb \cup abX \cup baX$

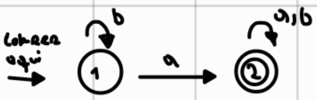
$X = a^2 \cup b^2 \cup (ab \cup ba)X = (ab \cup ba)X \cup (a^2 \cup b^2)$

$X = (ab \cup ba)^*(a^2 \cup b^2)$

# Aula 5 - Autômatos Finitos Determinísticos

As expressões regulares são um modelo algébrico para descrever linguagens.

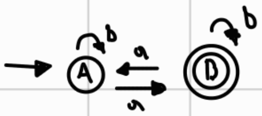
Uma outra abordagem é algorítmica, com máquinas de estado.




Interpretação:

1: a partir daqui, aceitamos palavras com pelo menos 1 a

2: a partir daqui aceitamos qualquer palavra




Ele aceita?

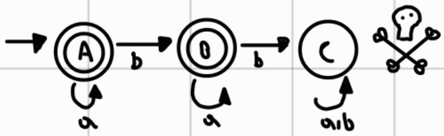
- $\varepsilon$ Não
- a Sim
- ab Sim
- abb Sim
- abab Não

A Palavras com número ímpar de "a". $A = aD \cup bA$ (i)

D Palavras com número par de "a" $D = aA \cup bD \cup \varepsilon$ (ii)

Aplicando lema de Arden em (ii)

$D = b^*(aA \cup \varepsilon) = b^*aA \cup b^* \Rightarrow A = ab^*(aA \cup \varepsilon) \cup bA = (ab^*a \cup b)A \cup ab^* \therefore A = (ab^* \cup b)^* ab^*$




- $\varepsilon$ Sim
- ab Sim
- abaab Não
- bbb Não

A: palavrar até um "b"

B: palavras com zero "b"

C: não aceita ninguém

$A = aA \cup bB \cup \varepsilon$ (i)

$B = aB \cup bC \cup \varepsilon = aB \cup \varepsilon$ (ii)

$C = (a \cup b)C \cup \varnothing = (a \cup b)^* \cdot \varnothing = \varnothing$ (iii)

Aplicando lema de Arden em B

$B = a^*\varepsilon = a^*$

Substituindo em (i)

$A = aA \cup (ba^* \cup \varepsilon)$

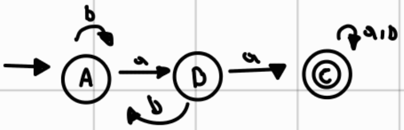
Por Arden

$A = a^*(ba^* \cup \varepsilon) = a^*ba^* \cup a^*$

Exercício:

$\Sigma = \{a, b\}$

① Autômato que reconhece palavras que contém "aa"




$A = bA \cup aD = bA \cup a(bA \cup a(a\cup b)^*) = bA \cup abA \cup a^2(a\cup b)^*$

$D = bA \cup aC \therefore D = bA \cup a(a\cup b)^*$

$(b \cup ab)A \cup a^2(a\cup b)^*$

$C = (a\cup b)^*$

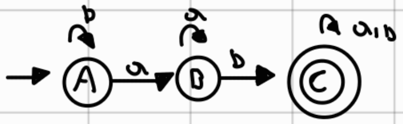
$X = AX \cup D$

$(b\cup ab)^* a^2 (a\cup b)^*$

$X = A^*D$

$(b(\varepsilon \cup a))^* a^2 (a\cup b)^*$

② Autômato que reconhece palavras que contém "ab"

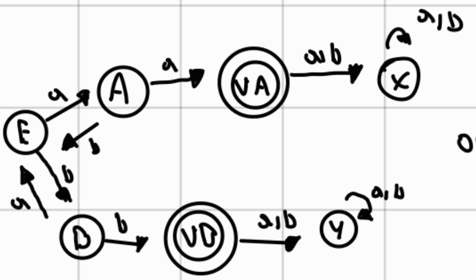



$A = aD \cup bA = a a^* b(a\cup b)^* \cup bA = b^* a a^* b (a\cup b)^*$

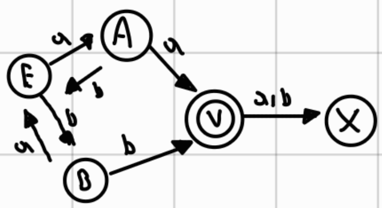
$D = bC \cup aD = b(a\cup b)^* \cup aD = a^* b(a\cup b)^*$

$C = (a\cup b)C \cup \varepsilon = (a\cup b)^* \cup \varepsilon = (a\cup b)^*$

③ Autômato do jogo de vôlei




ou



# Aula 6 - Derivadas de Brzozowski:

## Exemplo 1:

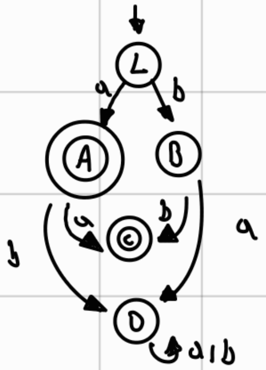
$L = \{a, aa, bb\}$

$A = \{\varepsilon, a\}$

$B = \{b\}$

$C = \{\varepsilon\}$

$D = \{\emptyset\}$

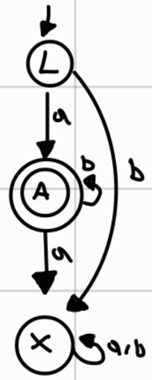



## Exemplo 2:

$L = ab^* = \{a, ab, abb, \dots\}$

$A = b^* = \{\varepsilon, b, bb, bbb, \dots\}$

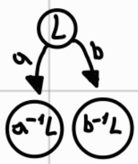
$X = \emptyset$




## Regra geral:

$a^{-1}X = \{w \mid aw \in X\}$

$b^{-1}X = \{w \mid bw \in X\}$



# Derivadas de Expressões Regulares

$a^{-1}\varnothing=\varnothing$

$a^{-1}\varepsilon=\varnothing$

$a^{-1}a=1$

$a^{-1}b=\varnothing$

$a^{-1}(R\cup S)=a^{-1}R\cup a^{-1}S$

$a^{-1}(R\cdot S)=\begin{cases}(a^{-1}R)S, \text{ se } \neg null(R)\\ (a^{-1}R)\cdot S\cup a^{-1}S, \text{ se } null(R)\end{cases}$

$a^{-1}(R)^*=(a^{-1}R)\cdot R^*$

* $null(R)=\varepsilon\in R$

$null(\varnothing)=$ não

$null(\varepsilon)=$ sim

$null(a)=$ não

$null(R\cup S)=null(R)\vee null(S)$

$null(R\cdot S)=null(R)\wedge null(S)$

$null(R^*)=$ sim

Exemplo:

$L=(a\cup b)^*aa(a\cup b)^*$

$a^{-1}L=a^{-1}[(a\cup b)^*aa(a\cup b)^*]=[a^{-1}\cdot(a\cup b)^*]\cdot aa(a\cup b)^*\cup a^{-1}[aa(a\cup b)^*]=[a^{-1}(a\cup b)\cdot(a\cup b)^*]\cdot aa(a\cup b)^*$

$\cup\, a^{-1}[aa(a\cup b)^*]=(a\cup b)^*\cdot aa\cdot(a\cup b)^*\cup a\cdot(a\cup b)^*=L\cup a\cdot(a\cup b)^*=A$ //

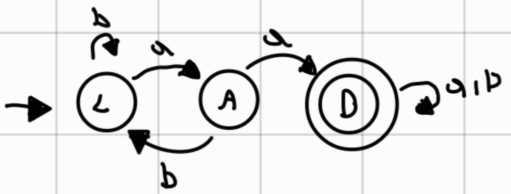
$b^{-1}L=b^{-1}[(a\cup b)^*aa(a\cup b)^*]=[b^{-1}\cdot(a\cup b)^*]\cdot aa(a\cup b)^*\cup b^{-1}[aa(a\cup b)^*]=[b^{-1}\cdot(a\cup b)\cdot(a\cup b)^*]\cdot aa(a\cup b)^*$

$\cup\, b^{-1}[aa(a\cup b)^*]=(a\cup b)^*\cdot aa\cdot(a\cup b)^*=L$ //

$a^{-1}A=a^{-1}[L\cup a\cdot(a\cup b)^*]=A\cup a^{-1}[a\cdot(a\cup b)^*]=A\cup(a\cup b)^*=(a\cup b)^*=D$ //

$b^{-1}A=b^{-1}[L\cup a\cdot(a\cup b)^*]=L\cup b^{-1}[a\cdot(a\cup b)^*]=L\cup\varnothing=L$ //

Autômato:



Exercício:

$L = (a \cup b)^* ab (a \cup b)^*$

$a^{-1}L = a^{-1}[(a \cup b)^* ab (a \cup b)^*] = [a^{-1}(a \cup b)^*] \cdot ab (a \cup b)^* \cup a^{-1} \cdot [ab (a \cup b)^*] = (a \cup b)^* \cdot ab \cdot (a \cup b)^* \cup b(a \cup b)^* = L \cup b(a \cup b)^*$

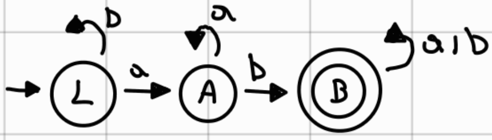
$= A$

$b^{-1}L = b^{-1}[(a \cup b)^* ab (a \cup b)^*] = [b^{-1}(a \cup b)^*] \cdot ab (a \cup b)^* \cup b^{-1} \cdot [ab (a \cup b)^*] = (a \cup b)^* \cdot ab \cdot (a \cup b)^* \cup \varnothing = L$

$a^{-1}A = a^{-1}L \cup a^{-1}[b(a \cup b)^*] = A \cup \varnothing = A$

$b^{-1}A = b^{-1}L \cup b^{-1}[b(a \cup b)^*] = L \cup (a \cup b)^* = (a \cup b)^* = B$

Autômato:



# Aula 6 - Autômatos não Determinísticos

## Minimização de Autômatos Finitos Determinísticos

1) No algoritmo das derivadas, devemos prestar atenção

$R = R \cup R$

$R \cup S = S \cup R$

Exemplo:

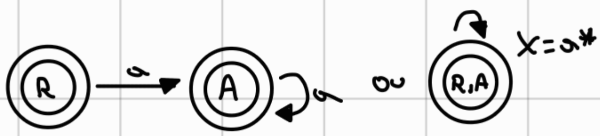
$R = (a \cup \varepsilon) a^*$

$A = a^{-1}((a \cup \varepsilon) a^*)$

$= a^{-1}(a \cup \varepsilon) \cdot a^* \cup a^{-1} a^*$

$= a^* \cup a^*$

$= a^*$




Vamos mostrar que os estados R e A são estados equivalentes e podem ser colapsados num estado só

Dois estados p, q são distinguíveis se existe uma palavra w tal que

$w \in L(p)$ e $w \notin L(q)$

ou

$w \notin L(p)$ e $w \in L(q)$

Seja $p \approx_n q$ uma relação que diz se p é indistinguível de q por palavras de tamanho menor ou igual a n.

$p \approx_n q = \begin{cases} \text{se } n=0: \text{ p e q são ambos finais ou são ambos não-finais} \\ \text{se } n \geq 1: \text{ então } p' \approx_{n-1} q' \end{cases}$

Exemplo: RA

| $\approx_0$ | R | A |
|---|---|---|
| R | ✓ | ✓ |
| A | ✓ | ✓ |

Caso base

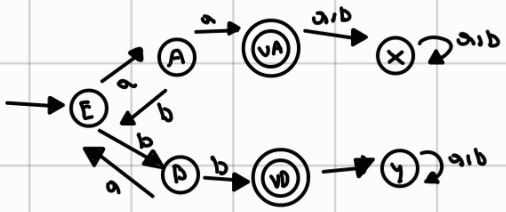
Passo ind

| $\approx_1$ | R | A |
|---|---|---|
| R | ✓ | ✓ |
| A | ✓ | ✓ |

Passo ind

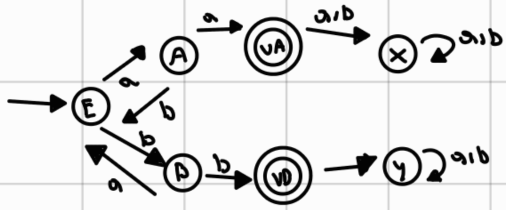
| $\approx_2$ | R | A |
|---|---|---|
| R | ✓ | ✓ |
| A | ✓ | ✓ |

Exemplo: vale i




| $\approx_0$ | E | A | D | VA | VD | X | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | ✓ | ✓ | ✓ | O | O | ✓ | ✓ |
| A | ✓ | ✓ | ✓ | O | O | ✓ | ✓ |
| B | ✓ | ✓ | ✓ | O | O | ✓ | ✓ |
| VA | O | O | O | ✓ | ✓ | O | O |
| VB | O | O | O | ✓ | ✓ | O | O |
| X | ✓ | ✓ | ✓ | O | O | ✓ | ✓ |
| Y | ✓ | ✓ | ✓ | O | O | ✓ | ✓ |

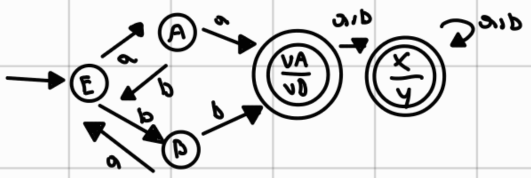
| $\approx_1$ | E | A | B | VA | VB | X | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | ✓ | O | O | O | O | ✓ | ✓ |
| A | O | ✓ | O | O | O | O | O |
| B | O | O | ✓ | O | O | O | O |
| VA | O | O | O | ✓ | ✓ | O | O |
| VB | O | O | O | ✓ | ✓ | O | O |
| X | ✓ | O | O | O | O | ✓ | ✓ |
| Y | ✓ | O | O | O | O | ✓ | ✓ |



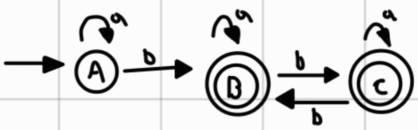

| $\approx_2$ | E | A | B | VA | VB | X | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | ✓ | O | O | O | O | O | O |
| A | O | ✓ | O | O | O | O | O |
| B | O | O | ✓ | O | O | O | O |
| VA | O | O | O | ✓ | ✓ | O | O |
| VB | O | O | O | ✓ | ✓ | O | O |
| X | O | O | O | O | O | ✓ | ✓ |
| Y | O | O | O | O | O | ✓ | ✓ |

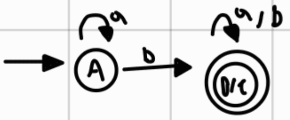
| $\approx_2$ | E | A | D | VA | VD | X | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | ✓ | O | O | O | O | O | O |
| A | O | ✓ | O | O | O | O | O |
| B | O | O | ✓ | O | O | O | O |
| VA | O | O | O | ✓ | ✓ | O | O |
| VB | O | O | O | ✓ | ✓ | O | O |
| X | O | O | O | O | O | ✓ | ✓ |
| Y | O | O | O | O | O | ✓ | ✓ |

Concluímos que $VA \approx VD$ e $X \approx Y$, logo temos o autômato minimizado:



Exercício:





| $\approx_0$ | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | ✓ | O | O |
| B | O | ✓ | ✓ |
| C | O | ✓ | ✓ |

| $\approx_1$ | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | ✓ | O | O |
| B | O | ✓ | ✓ |
| C | O | ✓ | ✓ |

# Aula 7 - Derivadas Parciais (Antimirov)

## Derivadas Parciais (Antimirov)

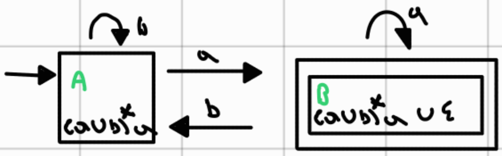
Vamos construir um autômato determinístico p/ $A = (a \cup b)^* a$

$A = (a \cup b)^* a$

E agora construir o autômato determinístico

$A = (a \cup b)^* a$

$a^{-1}A = (a \cup b)^* a \cup \varepsilon = B$




$b^{-1}A = (a \cup b)^* a = A$

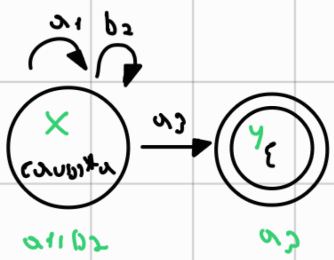
$a^{-1}B = (a \cup b)^* a \cup \varepsilon = B$

$b^{-1}B = (a \cup b)^* a = A$

Repare que algumas expressões ali se repetem, como $(a \cup b)^* a$

Vamos olhar p/ cada letrinha separadamente

$X = (a_1 \cup b_2)^* . a_3$




Resto após ler $a_1 = (a \cup b)^* a = X$

Resto após ler $b_2 = (a \cup b)^* a = X$

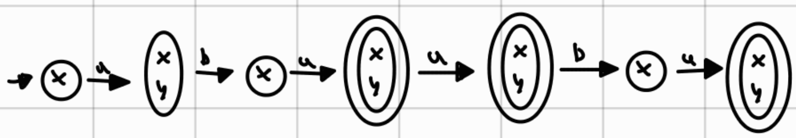
Resto após ler $a_3 = \varepsilon = Y$

Um autômato não determinístico aceita a palavra se existir um caminho que lê todas as letras e chega em um estado final aa

$x \xrightarrow{a} x \xrightarrow{a} y$ ok

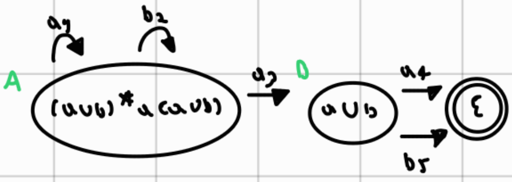
$x \xrightarrow{a} x \xrightarrow{a} x$ NÃO

$x \xrightarrow{a} y$ MORREU

abaaba 

Exercício

$A = (a\cup b)^* a (a \cup b)$




$A = (a\cup b)^* a (a\cup b)$

$a^{-1}A = \underbrace{(a\cup b)^* a (a\cup b)}_{A}$ ou $\underbrace{(a\cup b)}_{B}$

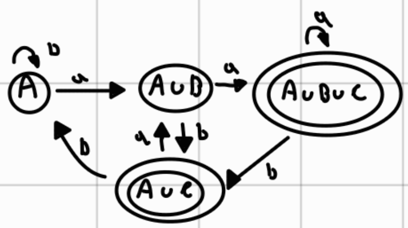
$b^{-1}A = \underbrace{(a\cup b)^* a (a\cup b)}_{A}$ ou $\emptyset$

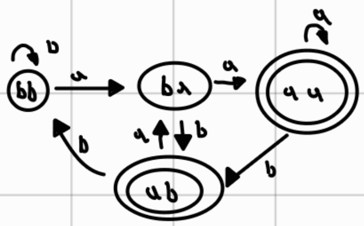
$B = a \cup b$ $\qquad$ $C = \varepsilon$

$a^{-1}B = \varepsilon_C$ $\qquad$ $a^{-1}C = \emptyset$

$b^{-1}B = \varepsilon_C$ $\qquad$ $b^{-1}C = \emptyset$

Para converter um AFND em um AFD podemos construir um novo autômato em que cada estado representa um subconjunto de estados




Uma intuição é:

Acabei de ler:

| | |
|---|---|
| A | bb |
| A∪B | ba |
| A∪C | ab |
| A∪B∪C | aa |

Exercício:

Construa autômatos não determinísticos e determinísticos para

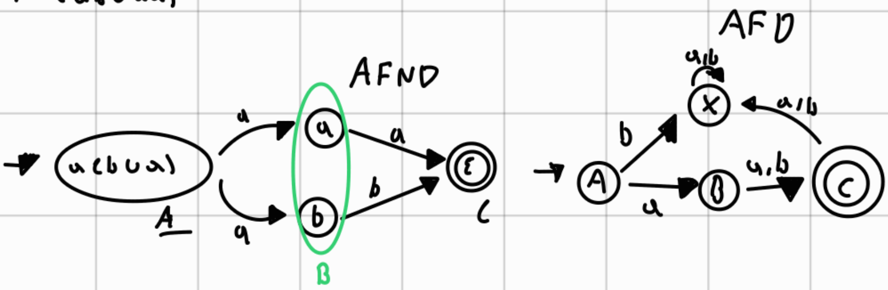
1) ab ∪ aa

2) (aa ∪ b)*

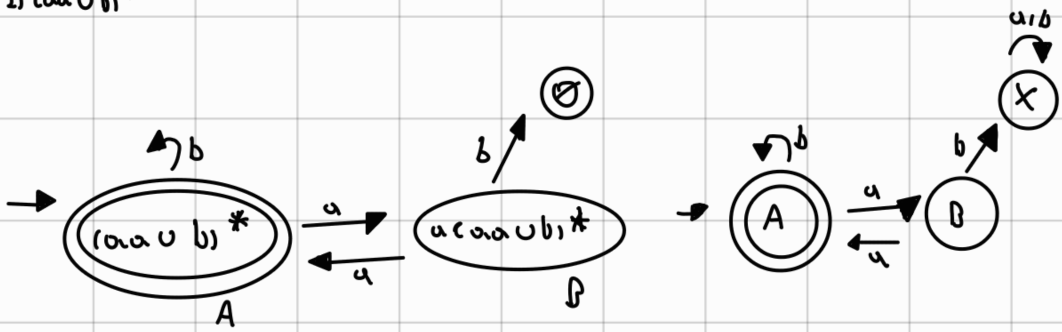
3) (aa ∪ b)* a

1) ab ∪ aa = A

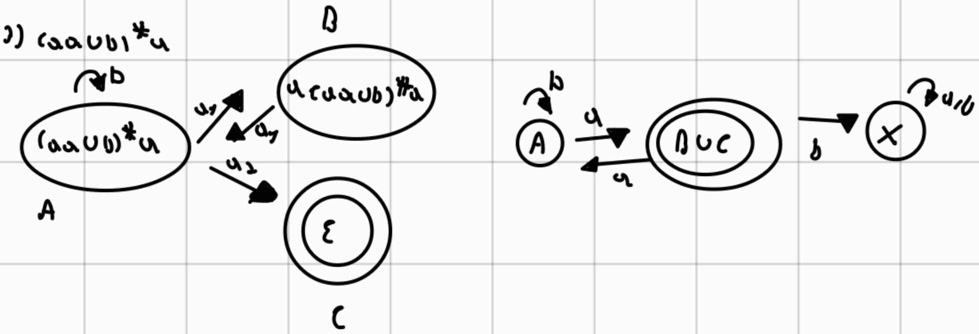
A = (ab ∪ aa)




2) (aa ∪ b)*




3) (aa ∪ b)* a



## Observação

O número de estados do autômato determinístico gerado pelas derivadas é menor ou igual ao número de letras da expressão regular

Ex:. $(aa \cup bb)^*$ em no máximo 4 estados

Prova por indução no tamanho da expressão regular

Caso $R = \emptyset$

$\to (\emptyset)$ tem zero letras e o autômato tem o estado inicial mais zero estados

Caso $R = \varepsilon$:

semelhante ao primeiro

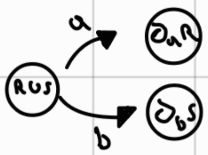
$\to (\varepsilon)$

Caso $R = a$

$\to (a) \xrightarrow{a} (\varepsilon)$

estado inicial mais um estado com a letrinha

Caso $R \cup S$:




→ Falta o resto

## Teorema

Se a expressão regular tem n letrinhas existe um AFND com n+1 estados que a reconhece

## Corolário

Existe um AFD com N+1 estados

**Importante:** O número de estados é finito

Será que podemos provar que $L=\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ não é regular

Vamos particionar as palavras de $\Sigma^*$ de acordo com o estado do autômato que elas levam.

Esse conjunto de classes de equivalência é o QUOCIENTE de $\Sigma^*$ pela relação de equivalência

$$x \approx y \text{ se } \forall z,\ xz \in L \longleftrightarrow yz \in L$$

$$x \not\approx y \text{ se } \exists z,\ (xz \in L) \not\equiv (yz \in L)$$

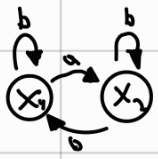
Por exemplo:

$L =$ conjunto das palavras em $\{a,b\}^*$ com nº par de "a":

Classes de equivalência

$x_1 =$ nº par de "a"

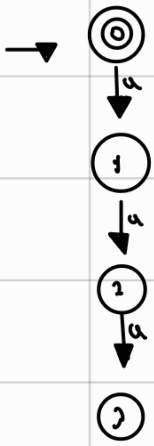
$x_2 =$ nº ímpar de "a"




Vamos olhar p/ essa sequência de palavras:

- $\varepsilon$
- $a$
- $aa$
- $a^n$

$a^N$




Exemplos:

$\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb$

# Aula 8- Linguagens Regulares

## Linguagens Regulares

- Uma linguagem é um conjunto de palavras

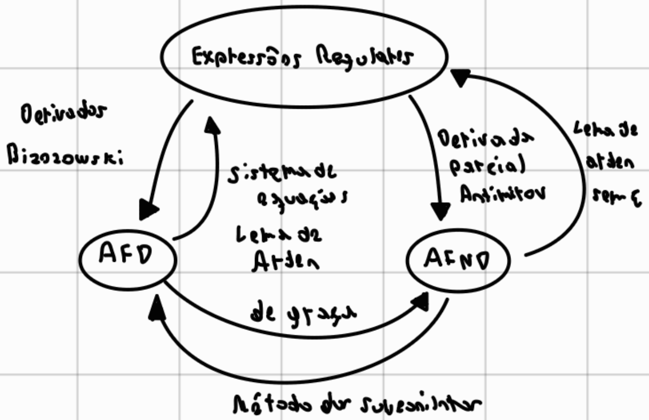
- Linguagens regulares, podem ser construídas através das operações

- União

- Concatenação

- Esttrela de kluene

Também podemos representar uma linguagem através de autômatos.

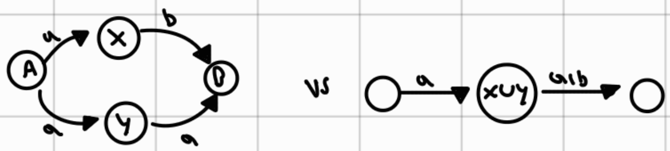



Autômatos determinísticos podem ser menores

$\partial_x(R \cup S) = \partial_x R$ ou $\partial_x S$

$x^{-1}(R \cup S) = x^{-1}R \cup x^{-1}S$

ex:




$A = aX \cup aY$

$X = bB$

$Y = aD$

$D = \varepsilon$

$\Rightarrow$

$A = aX \cup aY$

$X = b$

$Y = a$

$\Rightarrow$

$A = aa \cup ab$

## Propriedades de Fechamento

- União: ✓

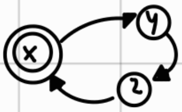
- Estrela: ✓

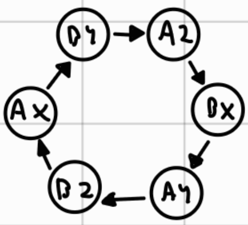
- Concatenação: ✓

- Complemento: difícil fazer com expressões mas no autômato é só trocar os estados finais e não-finais DETERMINÍSTICO

- Interseção: R = 

$x$ = comprimento múltiplo de 2
$y$ = comprimento múltiplo de 3

S = 

$R \cap S$ = 

Para mostrar que não é regular precisamos mostrar que precisaria de infinitos estados.

Como fazer: Apresentar um conjunto infinito $I$ de palavras que precisam levar a estados diferentes.

Isso é:

$\forall x, y \in I$, se $x \neq y$, então existe $z$ tal que apenas um entre $xz$ e $yz$ pertence à linguagem.

1, 4, 9

Exemplo $L = \{a^n \mid n$ é quadrado perfeito$\}$

Dadas duas palavras $x = a^{i^2}$, $y = a^{j^2}$, com $i < j$ sem perda de generalidade

Seja $z = a^{2i+1}$

$xz = a^{i^2+2i+1} = a^{(i+1)^2} \in L$

$yz = a^{j^2+2i+1}$, como $j^2 < j^2+2i+1 < (j+1)^2$, concluímos $yz \notin L$

Logo, como $I$ é infinito e todas as suas palavras levam a estados diferentes.

Portanto, $L$ não é regular.