Método Dual Simplex

Vejamos uma maneira de resolver o dual sem de fato dizer isso. Esse método, devido a C. E. Lemke, é denominado o MÉTODO DUAL SIMPLEX. Vamos descrevê-lo como uma imagem espelhada do método simplex.

Já observamos que, resolvendo um PPL pelo método simplex, obtemos uma solução do seu dual como subproduto.

e vice-versa, resolvendo o dual também resolvemos o primal.

temos visto que:

A i-ésima variável dual nada mais é que (-) o custo reduzido da i-ésima variável de folga do primal.

A j-ésima variável de folga do dual é igual a (-)o custo reduzido da j-ésima variável estrutural do primal

Isto quer dizer que resolvido o problema primal, obtemos a solução do dual sem esforço computacional ,porque basta apenas olhar para os custos reduzidos das variáveis do primal e vice versa.

Essa observação é útil para resolver problemas como veremos a seguir:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{maximize} & -4x_1 & - & 8x_2 & - & 9x_3 & & \\
\text{Sujeito a} & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 1 \\
& 3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
& -5x_1 & & & - & 2x_3 & \leq & -8 \\
& & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Como esse problema não tem a origem como sendo uma solução viável, a abordagem de rotina exige o **método de duas fases.**

No entanto, podemos **evitar** o método de duas fases assim que percebemos que **o seu dual tem solução viável**.

O DUAL :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrr}
\text{minimize} & y_1 & + & 3y_2 & - & 8y_3 & & \\
\text{Sujeito a} & 2y_1 & + & 3y_2 & - & 5y_3 & \geq & -4 \\
& -y_1 & - & 4y_2 & & & \geq & -8 \\
& -y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 & \geq & -9 \\
& & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Poderíamos simplesmente resolver o DUAL e prontamente obter a solução primal ótima, no tableau final.

Veremos que o método dual simplex nada mais é que um método simplex disfarçado trabalhando no dual.

Definições:

Para começar, precisamos de alguma nova terminologia. Até agora, chamamos tableau ou dicionário de "viável" quando descrevem soluções viáveis; a partir de agora, chamaremos de primal viável

Por outro lado, chamaremos o tableau ou dicionário de dual viável se em sua expressão para a função objetivo, cada variável tiver seu coeficiente não positivo.

- método simplex gera uma sequência de tableaux (dicionários) primal viáveis e, assim que encontrar um que também seja dual viável, o método termina. (de acordo?)

Por outro lado, o método dual simplex gera uma sequência de tableaux dual viáveis; assim que encontrar um que também seja primal viável, o método termina.

Relembrando o SIMPLEX:

Em cada iteração do método simplex

Primeiro escolhemos a variável de entrada e depois determinamos a variável de saída.

- Para a variável de entrada, podemos escolher qualquer variável não-básica com um coeficiente positivo na função objetivo (dicionário); Como regra, escolhemos a variável com o maior coeficiente positivo.
- Em seguida, determinamos a variável de saída de modo a preservar a viabilidade primal.

Método dual simplex

Em cada iteração do método dual simplex,

escolhemos primeiro a variável de saída e depois determinamos a variável de entrada.

Para a variável de saída, podemos escolher qualquer variável básica cujo valor atual seja negativo; como regra, escolheremos a variável com o maior valor absoluto.

Então vamos determinar a variável de entrada, de modo a preservar a viabilidade dual em nossa próxima tabela

Método Dual Simplex é utilizado APENAS quando temos uma base inicial para o problema Primal, que NÃO é viável mas satisfaz as condições de otimalidade.

Ou seja,

o problema é primal inviável mas dual viável.

-

Quando essa abordagem é bastante útil?

- Em Problemas aplicados de modelagem, que são problemas de programação linear, é frequentemente necessário adicionar mais restrições.
- Essas restrições são geralmente acrescidas para dar mais precisão ao modelo para representar a situação real.Mas a adição de uma ou mais restrições, pode tornar a solução existente inviável.

- Neste caso o Método Dual Simplex, pode ser usado para restaurar a viabilidade sem a necessidade de resolver o novo problema inteiramente.

- Essa situação de atualizações no PPL através de alteração nas restrições ou mesmo o acréscimo de novas variáveis, veremos detalhadamente na análise de sensibilidade

Resumindo

Método Simplex – Método Dual Simplex

O **método simplex** começa com **uma base viável para o primal** e percorre sempre soluções viáveis correspondentes aos pontos extremos da região viável até atingir o critério do ótimo **(solução primal viável e dual viável)**.

O **método dual simplex** começa com **uma solução viável para o dual** e percorre sempre soluções viáveis adjacentes para o dual mas não viáveis para o primal terminando quando atinge uma **solução viável para o primal que é a ótima**.

Cada iteração deste algoritmo **reduz o número de inviabilidades do primal, mantendo a viabilidade do dual**.

Simplex

Seja o Primal

Primal

$$
\begin{aligned}
&\max z = 5x_1 + 2x_2\\
&\textit{sujeito a}\\
&\qquad x_1 \qquad\quad \le 3\\
&\qquad\qquad\quad x_2 \le 4\\
&\qquad x_1 + 2x_2 \le 9\\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
&\min w = 3y_1 + 4y_2 + 9y_3\\
&\textit{sujeito a}\\
&\qquad y_1 \qquad\quad + y_3 \ge 5\\
&\qquad\qquad y_2 + 2y_3 \ge 2\\
&\qquad y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Simplex

Seja o Primal

(P)

$$
\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 2x_2 \\
\textit{sujeito a} & \\
x_1 &\le 3 \\
x_2 &\le 4 \\
x_1 + 2x_2 &\le 9 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Acrescentando variáveis de folga

$$
\begin{aligned}
&\max z = 5x_1 + 2x_2 \\
&\textit{sujeito a} \\
&x_1 + x_3 = 3 \\
&x_2 + x_4 = 4 \\
&x_1 + 2x_2 + x_5 = 9 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

Dual

(D)

$$
\begin{aligned}
&\min w = 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 \\
&\textit{sujeito a} \\
&y_1 + y_3 \ge 5 \\
&y_2 + 2y_3 \ge 2 \\
&y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min w = 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 \\
&\textit{sujeito a} \\
&y_1 + y_3 - y_4 = 5 \\
&y_2 + 2y_3 - y_5 = 2 \\
&y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

- Dicionário inicial Primal

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 3 - x_1 \\
x_4 &= 4 \qquad\quad - x_2 \\
x_5 &= 9 - x_1 - 2x_2 \\
z &= 0 + 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5
\end{aligned}
$$

Do dicionário acima podemos concluir

$$
\begin{aligned}
&primal(viável) \\
&não\ básicas \\
&x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \\
&básicas \\
&x_3 = 3(folga) \\
&x_4 = 4(folga) \\
&x_5 = 9(folga) \\
&z = 5x_1 + 2x_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Dual \quad (inviável) \\
&básicas \\
&y_4 = -5 \\
&y_5 = -2 \\
&não\ \ básicas \\
&y_1 = 0 \\
&y_2 = 0 \\
&y_3 = 0 \\
&w = 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 = 0
\end{aligned}
$$

$$x_1 = 3 \qquad - x_3$$
$$x_4 = 4 - x_2$$
$$x_5 = 6 - 2x_2 + x_3$$
$$z = 15 + 0x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

Dicionário 2:

x_1 variável que entra na base x_3 deixa a base

Do dicionário acima pode-se concluir

$primal(viável)$

$não\ básicas$

$x_2 = 0 \quad x_3 = 0(folga)$

$básicas$

$x_1 = 3$

$x_4 = 4(folga)$

$x_5 = 6(folga)$

$z = 5x_1 + 2x_2 = 15$

$Dual \quad (inviável)$

$básicas$

$y_1 = 5$

$y_5 = -2(folga)$

$não\ \ básicas$

$y_4 = 0(folga)$

$y_2 = 0$

$y_3 = 0$

$w = 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 = 15$

Dicionário 3

$$x_1 = 3 - x_3$$

$$x_4 = 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5$$

$$x_2 = 3 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5$$

$$z = 21 - 0x_1 - 0x_2 - 4x_3 - 0x_4 - 1x_5$$

- Dicionário 3

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3 - x_3 \\
x_4 &= 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\
x_2 &= 3 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 \\
z &= 21 - 0x_1 - 0x_2 - 4x_3 - 0x_4 - 1x_5
\end{aligned}
$$

Do dicionário acima pode-se concluir

Primal (viável)

não básicas

$x_3^* = 0 \quad x_5^* = 0(folga)$

básicas

$x_1^* = 3$

$x_4^* = 1(folga)$

$x_2^* = 3(folga)$

$z^* = 5x_1^* + 2x_2^* = 21$

Dual viável

não básicas

$y_2^* = 0, y_4^* = 0(folga) \quad y_5^* = 0(folga)$

básicas

$y_1^* = 4$

$y_3^* = 1$

$w^* = 3y_1^* + 4y_2^* + 9y_3^* = 21$

viabilidade do Problema Dual . Isto é facilmente identificado porque o Método procura tornar ≤ 0 todos os coeficientes na função objetivo. Este objetivo alcançado, o primal estará otimizado e o dual viável.

O Método Dual Simplex lida com soluções básicas inviáveis, buscando a viabilidade do problema primal.

O Dicionário primal ,com x_r(rε B)básica e x_s(sεN)não básica

$$x_r = \bar{b}_r - \sum_{s \in N} \bar{a}_{rs} x_s \qquad (r \in B)$$

$$z = \bar{d} + \sum_{s \in N} \bar{c}_s x_s$$

$$y_s = -c_s + \sum_{r \in B} \bar{a}_{rs} y_r (s \in N)$$

$$-w = -\bar{d} - \sum_{r \in B} \bar{b}_r y_r$$

$$y_s = -c_s + \sum_{r \in B} \bar{a}_{rs} y_r (s \in N)$$

$$-w = -\bar{d} - \sum_{r \in B} \bar{b}_r y_r$$

Dual viável se o correspondente dicionário dual é viável

Solução viável se $\overline{b}_r \geq 0$ para todo r ε B .

Iteração dual simplex

- Iniciando com uma solução dual viável

$\overline{b}_r$

- Escolha iεB, com $\overline{b}_i < 0$

(x_i deixará a base)

•Entrada na Base(manter solução dual viável jεN tal que

$$\overline{a}_{ij} < 0 \quad e \quad \overline{c}_j / \overline{a}_{ij} \leq \overline{c}_s / \overline{a}_{is}, \text{ para todo } \quad s \in N \quad \text{com } \overline{a}_{is} < 0$$

(x_j entrará na base)

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO UFRJ

exemplo

- Considere o PPL

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = -4x_1 - 12x_2 - 18x_3 \\
\textit{sujeito} \quad & a \\
& x_1 \qquad + 3x_3 \geq 3 \\
& \qquad 2x_2 + 2x_3 \geq 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_4 &= -3 + x_1 \qquad + 3x_3 \\
x_5 &= -5 \qquad + 2x_2 + 2x_3 \\
z &= -4x_1 - 12x_2 - 18x_3
\end{aligned}
$$

A SBV inicial

$x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = -3, x_5 - 5, \qquad z = 0,$

não viável porque os valores são negativos.

a variável que deixa a BASE: x_5(a mais negativa)

e

A variável que entra na BASE : x_2 (12/2<18/2)

- A correspondente solução básica

iteração 1

$$\boxed{\begin{aligned} x_4 &= -3 + x + 3x_3 \\ x_2 &= \frac{5}{2} \qquad -1x_3 \quad +\frac{1}{2}x_5 \\ z &= -30 - 4x_1 - 6x_3 - 6x_5 \end{aligned}}$$

A correspondente solução básica

$x_1=x_3=x_5=0$, $x_2=5/2$, $x_4=-3$, com $z=-30$

Não é viável

A próxima variável a deixar a base é x_4

Entrada na base: $x_3(6/3<4/1)$

iteração 2

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 &= 1 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ z &= -36 - 2x_1 - 2x_4 - 6x_5 \end{aligned}}$$

A correspondente solução básica

$x_1=x_4=x_5=0$, $x_2=3/2$, $x_3=1$, com $z=-36$

a qual é viável, logo ÓTIMA

A SOLUCÃO ÓTIMA DO DUAL:

$y_1^*=2$, $y_2^*=6$, $y_3^*=2$, $y_4^*=y_5^*=0$

.

ALGORITMO DUAL SIMPLEX

PASSO 1-Escolher uma linha tal que $b_r < 0$ (variável a deixar a base); Se todos os $b_r = B^{-1}b \geq 0$, então PARE. Estamos no ótimo

PASSO 2-Escolher o pivô a_{rs} tal que $$\frac{\bar{c}_s}{-\bar{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{rj}} : \bar{a}_{rj} < 0\right\}$$

Esta escolha tem o objetivo de manter todos os custos do primal não negativos ou seja manter o problema dual viável.

Se todos os $a_{rj} \geq 0$ o problema não tem solução

PASSO 3-Efetuar o pivoteamento e voltar a 1.

Método Dual Simplex

O Método Dual Simplex é utilizado apenas quando temos uma base inicial que não é factível, mas que satisfaz as condições de otimalidade:

$$z_j - c_j \leq 0 \quad \forall j$$

ou seja, o problema é primal infactível, mas é dual factível.

Algoritmo: Dual Simplex

Passo 0: Ache uma base tal que $z_j - c_j \leq 0$, $\forall j$.

Passo 1: Se $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$, então pare. Estamos no ótimo.

Caso contrário, selecione uma linha *r* com $\bar{b}_r < 0$.
(pode ser tal que $\bar{b}_r = \min\{\bar{b}_i\}$)

Passo 2: Se $y_{rj} \geq 0$, $\forall j$, pare; o dual é ilimitado e, portanto, o primal é infactível.

Caso contrário, selecione a columa *k* tal que

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0\right\}$$

Passo 3: Pivoteie em y_{rk} e volte para o Passo 1.

- Exercício

No exemplo dado, aplique o Método Simplex no Dual e compare os resultados