FIAP

Differentiated Problem Solving

Aula 1

Prof. Jones Egydio

profjones.egydio@fiap.com.br

2025

Objetivos

- Apresentação da disciplina;
- Apresentação pessoal;
- Bibliografia da disciplina;
- Organização do curso;
- Avaliações;
- Demonstrar duas aplicações de cálculo diferencial e integral com uma abordagem analítica e computacional;
- Conclusão;
- Perguntas.

Quem sou eu

Formação Acadêmica

- **USP – Universidade de São Paulo (2023 – em andamento).**

Pós-graduação Stricto Sensu – Doutorado em Engenharia Elétrica.

  - Área de pesquisa: Engenharia de Sistemas e Inteligência Artificial.

- **UFABC – Universidade Federal do ABC (2014).**

Pós-graduação Stricto Sensu – Mestrado em Engenharia Elétrica.

  - Dissertação: Análise de Interferências Eletromagnéticas em Veículos Automotores utilizando Métodos Numéricos.

- **PUCRS – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (2019).**

Pós-graduação Lato Sensu – Filosofia e Autoconhecimento.

- **USCS – Universidade de São Caetano do Sul (2011).**

Pós-graduação Lato Sensu – Docência no Ensino Superior.

  - Pesquisa: Uso de Recursos Tecnológicos como Ferramenta de Aprendizagem em Disciplinas de Matemática no Curso de Engenharia.

- **IMT – Instituto Mauá de Tecnologia (2002 – 2007).**
  - Graduação em Engenharia Eletrônica.

- **Centro Universitário Fundação Santo André (1998 – 2001).**
  - Graduação em Bacharelado em Matemática.

Experiência profissional

Itaú – MLOps Engineer/Data Sciestist (fev./2024).

FIAP e Mackenzie – Professor (fev./2024).

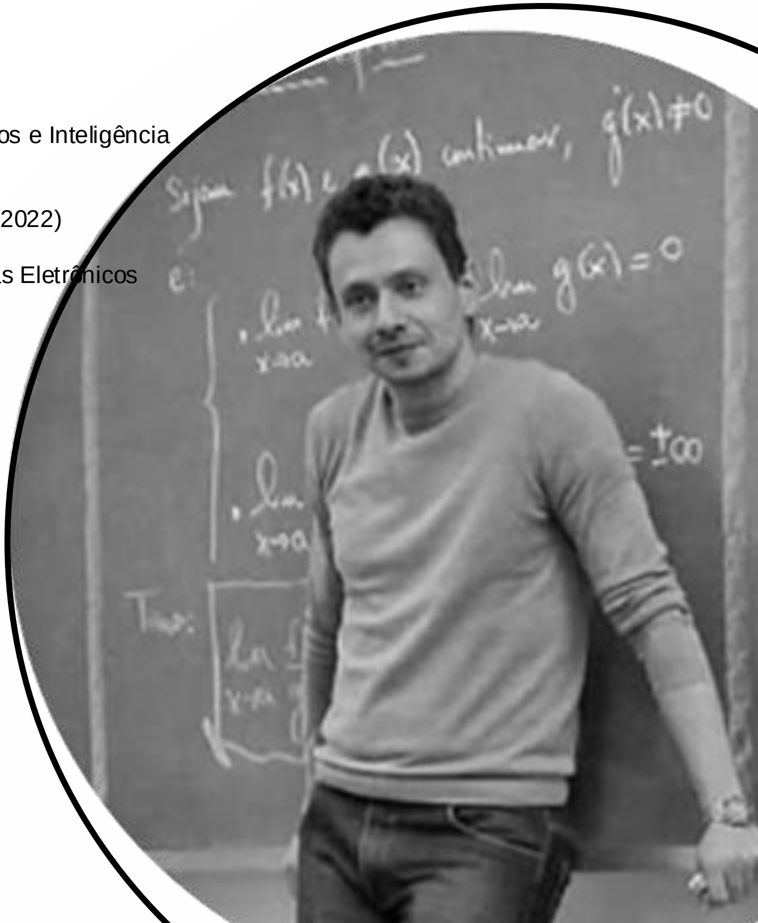
IMT – Instituto Mauá de Tecnologia (fev./2008 – dez/2023).

- Professor assistente – Departamento Fundamental
- Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ciência de Dados e Inteligência Artificial (desde 2022)
- Coordenador do Programa de Minor em Ciência de Dados (desde 2022)
- Professor e pesquisador do Laboratório NSEE (Núcleo de Sistemas Eletrônicos Embarcados) (desde 2022)
- Orientação de alunos em Trabalhos de Conclusão de Curso, participação em projetos envolvendo a FAPESP, Faculdade de Saúde Pública da USP e Fundação Oncocentro do Estado de São Paulo;
- Departamento Fundamental (desde 2008)
  - Preparação e ministração de aulas para os cursos de Engenharia da Computação, Sistemas da Informação e Ciência da Computação do Instituto Mauá de Tecnologia.
  - Preparação e ministração de aulas para o curso de Cálculo Diferencial e Integral, Estatística, Matemática Computacional (Cálculo Numérico) e Vetores, Curvas e Superfícies (Geometria Analítica) e Álgebra Linear do Instituto Mauá de Tecnologia;

GM do Brasil (jan./2008 – set./2019).
- Engenheiro de desenvolvimento de produto
- Engenheiro de simulação elétrica (desde nov./2010);

LinkedIn

Lattes



Quem é você?

Fale um pouco de você:

1. Quem é você?
2. Qual sua idade? (opcional)
3. Por que escolheu este curso?
4. Por que escolheu a FIAP?
5. Trabalha? Atua na área?
6. **O que espera desta disciplina?**

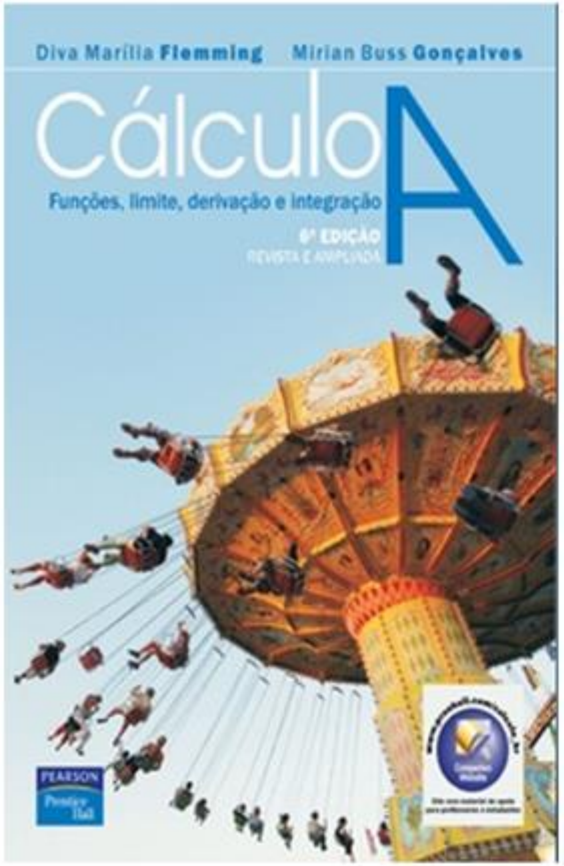
Por que matemática?

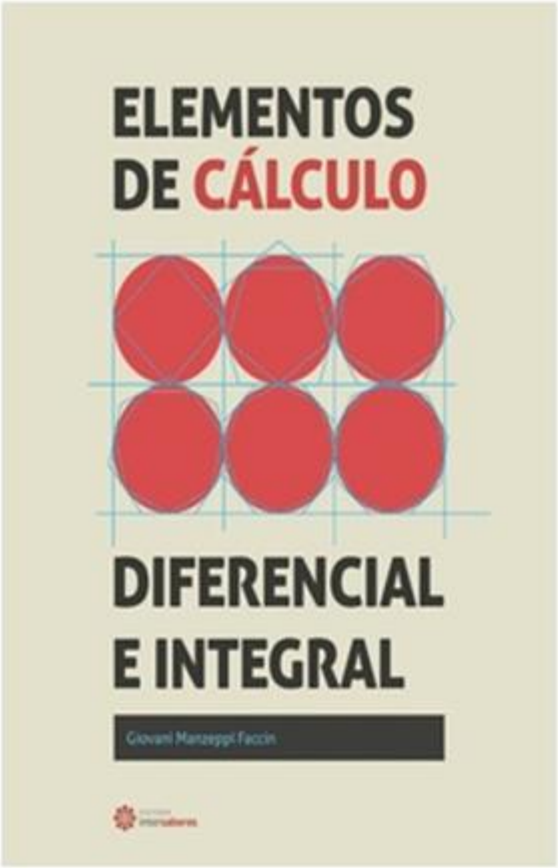
- Fundação Teórica
- Modelagem e Simulação
- Análise de Dados
- Algoritmos e Otimização
- Inovação e Pesquisa
- Inteligência Computacional
- Comunicação e Padrões Universais

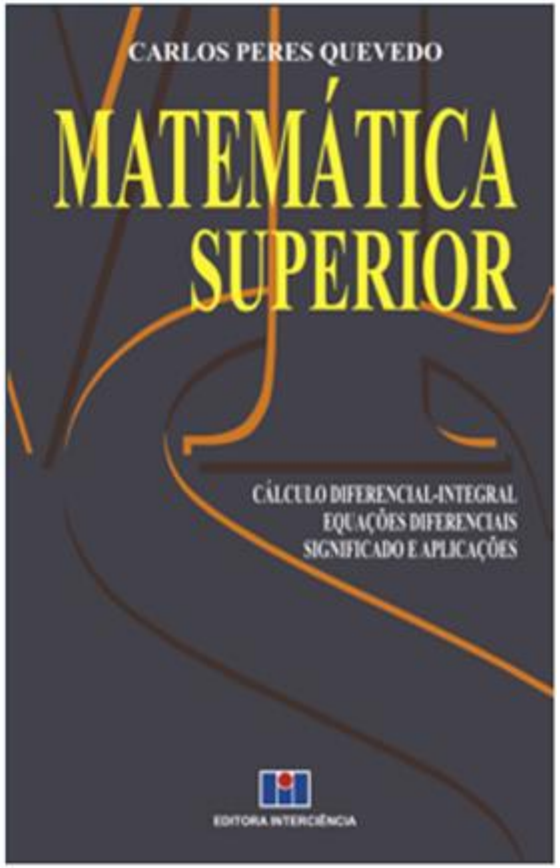
21/02/2024

Profissões ligadas à matemática equivalem a 4,6% do PIB

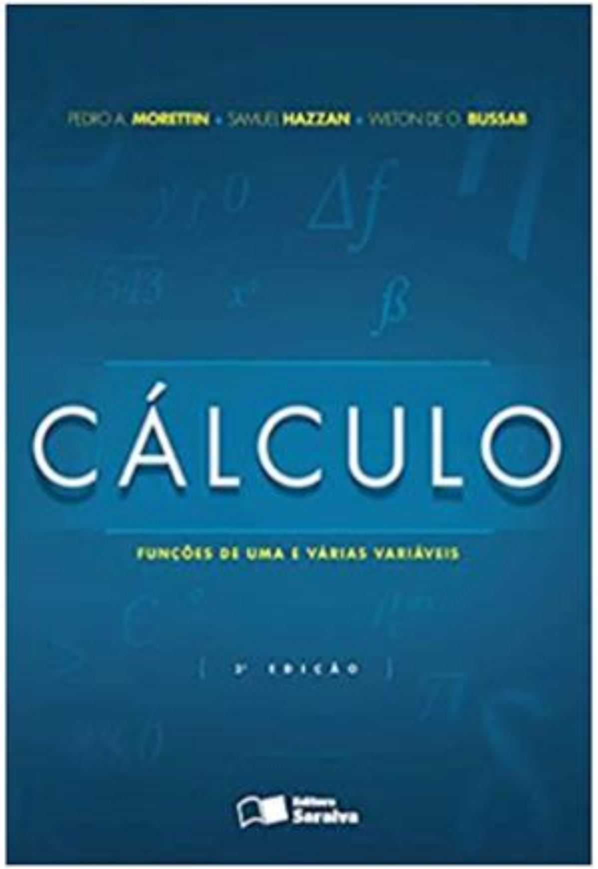
Bibliografia básica do curso

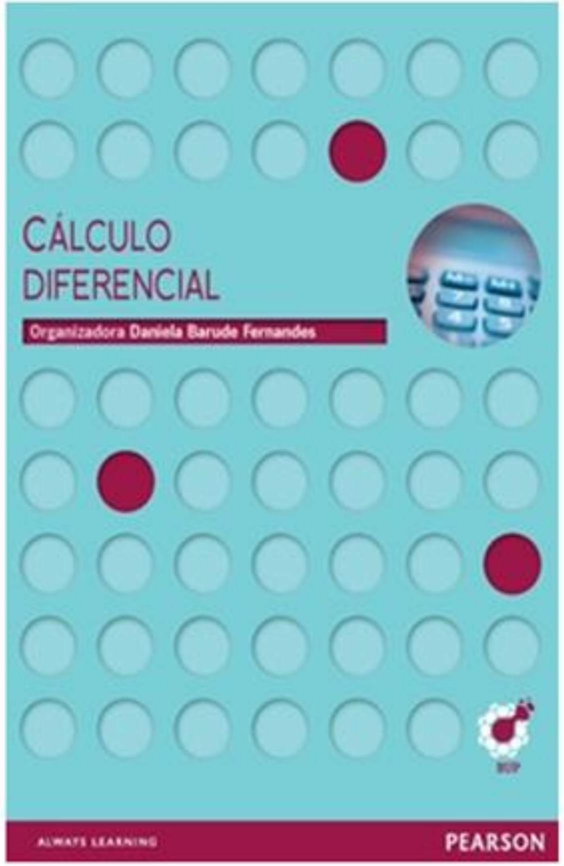




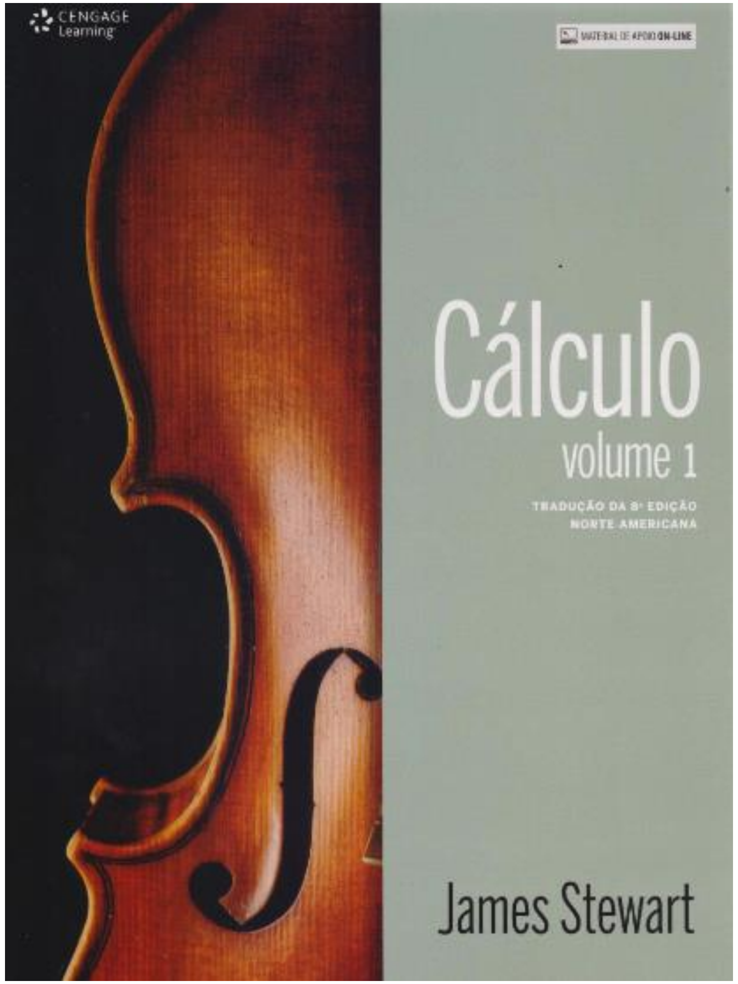


Bibliografia do curso – complementar





Bibliografia do curso – complementar



Organização do curso

Conteúdo programático do curso

PRIMEIRO SEMESTRE
Conjuntos, expressões numéricas, expressões algébricas, equações e funções polinomiais, equações e funções exponenciais, equações e funções logarítmicas, conceitos de trigonometria, funções trigonométricas, funções racionais, composição de funções e aplicações de equações e funções em situações problemas.

SEGUNDO SEMESTRE
Limites (conceitos e cálculos), derivadas (conceitos e regras de derivação), derivadas sucessivas, derivadas parciais, aplicações das derivadas, integral indefinida, integração por substituição, integração por partes, integral definida e aplicações de integral.

Avaliação

As **notas semestrais** na FIAP são compostas:

- 40% Project Checkpoint Challenge&Feedback (**2 Challenges** + **3 Checkpoints**)
- 60% Global Solution (solução de tarefas de Cases reais)

MS1 = (PCC&F x 0.4 + GS x 0.6)

A **média anual é ponderada**, ou seja, os semestres possuem pesos diferentes:

MA = (MS1 x 0.4 + MS2 x 0.6)

Avaliação

CRITÉRIOS
DE APROVAÇÃO

Média Anual	Situação
0 a 3.9	Reprovado
4.0 a 5.9	Exame
6.0 a 10	Aprovado

CASO O ALUNO FIQUE DE EXAME:

Nota para aprovação = (12 – Média Anual)

Calendário

05 MAIO

01	Dia Mundial do Trabalho
02	Aulas suspensas
26	Início do período de avaliação semestral (Global Solutions)

06 JUNHO

03 A 13	Período de solicitação de avaliações substitutivas regulares e de dependência (cursos presenciais)
06	Fim do período de avaliação semestral (Global Solutions)
09 A 13	Período de avaliação semestral de disciplinas de dependência
16 A 18	Período de avaliações substitutivas regulares e de dependência
19	Corpus Christi (aulas suspensas)
20	Aulas suspensas
23 A 27	Vistas de provas
30	Final das Fases/divulgação dos resultados das avaliações semestrais

Em resumo

Global Solution 1
Final do semestre

Sprint 2
entregas

Checkpoint 3
Entregas durante o semestre

Avaliação

Calendário (sujeito a alteração) 1° semestre:

- CP1: TBD
- CP2: TBD
- CP3: TBD

Problema #1

Uma loja tem vendido 200 aparelhos de vídeo game por semana a R$ 350,00 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada R$ 10,00 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a **função demanda** e a **função receita**. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para **maximizar** sua receita?

Problema de Otimização

Compreendendo o problema

Suponha que $C(x)$ seja o custo total de que uma empresa incorre na produção de x unidades de um certo produto. A função $C(x)$ é denominada **função de custo**. Se o número de itens produzidos aumenta de x_1 para x_2, o custo adicional será $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, e a taxa média de variação do custo será:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

O limite dessa grandeza quando $\Delta x \to 0$, ou seja, a taxa instantânea de variação do custo em relação ao número de itens produzidos, é denominado **custo marginal** pelos economistas:

$$Custo\ marginal = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

Compreendendo o problema

Fazendo $\Delta x = 1$ e n muito grande (de modo que Δx seja pequeno comparado com n), temos:

$$C'(x) \approx C(n+1) - C(n)$$

Assim, o custo marginal de produção de n unidades é aproximadamente igual ao custo de produção de mais uma unidade $[\mathrm{a}(n+1) - \acute{e}sima\ unidade]$.

Em geral, é apropriado representar uma **função custo** por um **polinômio**:

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Onde a representa os custos gerais indiretos (aluguel, aquecimento, manutenção), e os outros termos representam o custo das matérias-primas, da mão de obra e assim por diante. O custo das matérias-primas pode ser proporcional a x, mas o custo da mão de obra poderia depender parcialmente das potências mais altas de x, em decorrência dos custos de horas extras e ineficiências envolvidas em operações de larga escala.

Compreendendo o problema

Seja $p(x)$ o preço por unidade que a companhia pode cobrar se ela vender x unidades. Então, $p(x)$ é chamada **função demanda** (ou **função preço**) e esperaríamos que ela fosse uma função decrescente de x. Se x unidades forem vendidas e o preço por unidade for $p(x)$, então a **receita total** será:

$$R(x) = xp(x)$$

E $R(x)$ é chamada **função receita**. A derivada $R'(x)$ da função receita é chamada **função receita marginal** e é a taxa de variação da receita com relação ao número de unidades vendidas.

Se x unidades forem vendidas, então o lucro total será:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

E $L(x)$ é chamada **função lucro**. A **função lucro marginal** é $L'(x)$, a derivada da função lucro.

Resolvendo o problema

Uma loja tem vendido 200 aparelhos de vídeo game por semana a R$ 350,00 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada R$ 10,00 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a **função demanda** e a **função receita**. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para **maximizar** sua receita?

Abordagem analítica

Se x for no número de aparelhos de vídeo game vendidos por semana, então o aumento semanal nas vendas será $x - 200$. Para cada aumento de 20 unidades vendidas, o preço cai em R$ 10,00. Portanto, para cada unidade adicional vendida, o decréscimo no preço será $\frac{1}{20} \times 10$ e a função demanda será:

$$p(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x$$

Resolvendo o problema

Uma loja tem vendido 200 aparelhos de vídeo game por semana a R$ 350,00 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada R$ 10,00 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a **função demanda** e a **função receita**. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para **maximizar** sua receita?

A função receita é:

$$R(x) = xp(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$$

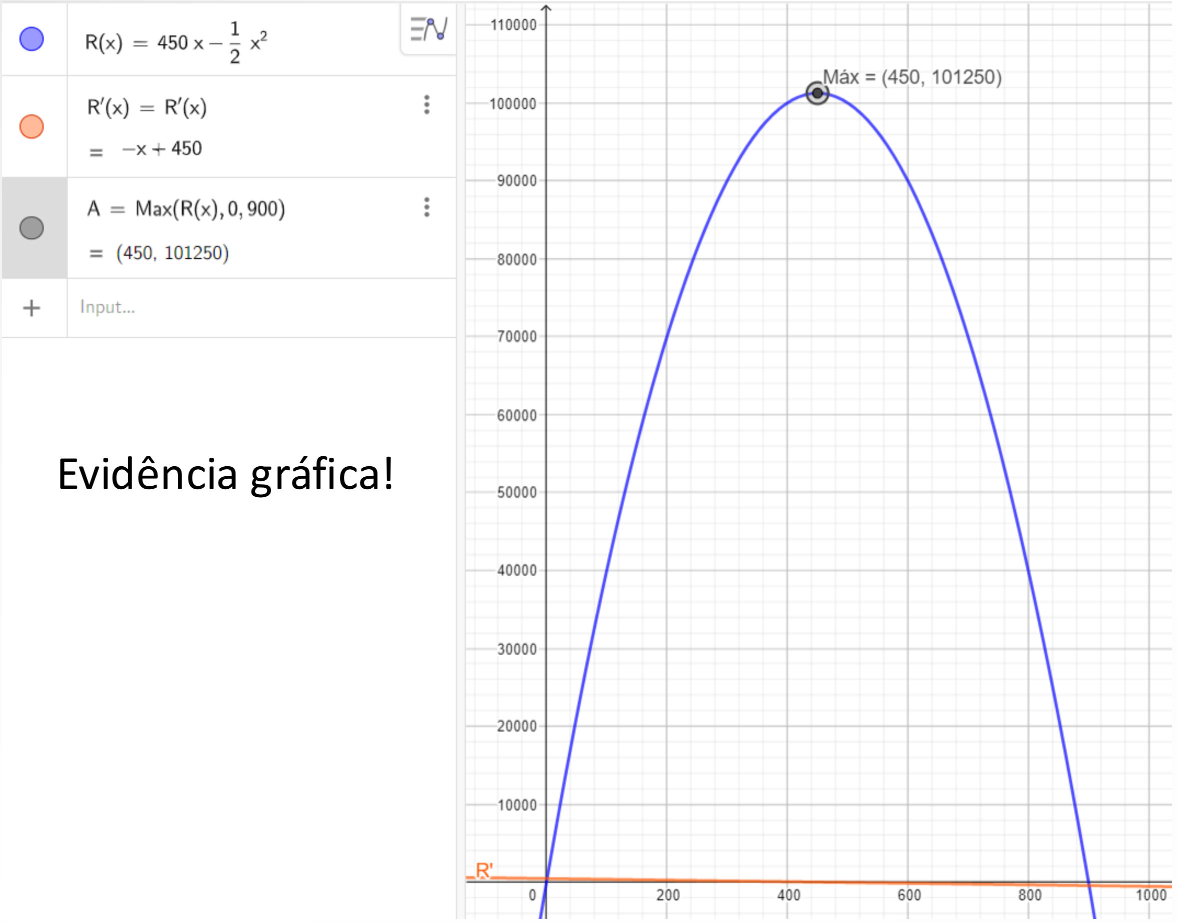
Como $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ quando $x = 450$. Este valor de x dá um máximo absoluto pelo Teste da Primeira Derivada ou apenas estudando o sinal da primeira derivada. Assim, o preço correspondente é:

$$p(450) = 450 - \frac{1}{2}(450) = 225$$

E o desconto é $350 - 225 = 125$. Portanto, para maximizar a receita, a loja deve oferecer um desconto de $\text{R\$ } 125{,}00$

Resolvendo o problema

Uma loja tem vendido 200 aparelhos de vídeo game por semana a R$ 350,00 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada R$ 100,00 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a **função demanda** e a **função receita**. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para **maximizar** sua receita?



Resolvendo o problema

Uma loja tem vendido 200 aparelhos de vídeo game por semana a R$ 350,00 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada R$ 10,00 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a **função demanda** e a **função receita**. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para **maximizar** sua receita?

Abordagem computacional

Usaremos Python para resolver o problema.

Colaboratory

Problema #2

Seja $f(x) = 0{,}006x(10 - x)$ para $0 \leq \ x \leq 10$ e $f(x) = 0$ para outros valores de x.

(a) Verifique se $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade;

(b) Encontre $P(4 \leq X \leq 8)$.

Cálculo de Probabilidade

Cálculo de Probabilidade

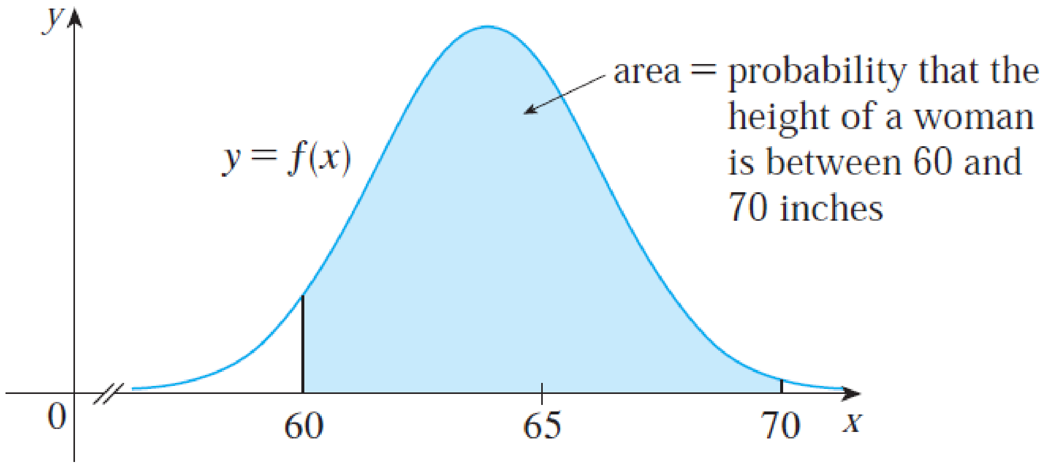
O cálculo tem um papel na análise de um comportamento aleatório. Suponha que consideremos o nível de colesterol de uma pessoa escolhida aleatoriamente em um grupo de determinada idade, ou a altura de uma mulher adulta escolhida aleatoriamente. Essas quantidades são chamadas de **variáveis aleatórias contínuas**, porque seus valores variam em um intervalo de números reais, embora possam ser medidos ou registrados apenas com o inteiro mais próximo. Por exemplo, poderíamos determinar a probabilidade de uma pilha durar entre 100 e 200 horas. Se X representar a durabilidade daquele tipo de bateria, denotamos a probabilidade como:

$$P(100 \leq X \leq 200)$$

Cálculo de Probabilidade

Cada variável aleatória contínua X tem uma função densidade de probabilidade f. Isso significa que a probabilidade de X estar entre a e b é encontrada pela integração de f de a até b:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



Fonte: Calculus, James Stewart

Cálculo de Probabilidade

Em geral, a **função densidade de probabilidade** f de uma variável aleatória X satisfaz $f(x) \geq 0$ para todo x. Como as probabilidades são medidas em uma escala de 0 até 1, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Resolvendo o problema

Seja $f(x) = 0{,}006x(10 - x)$ para $0 \leq\ x \leq 10$ e $f(x) = 0$ para outros valores de x.

(a) Verifique se $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{10} 0{,}006x(10 - x)dx = 0{,}006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = 1$$

Portanto, $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.

b) Encontre $P(4 \leq X \leq 8)$.

$$P(4 \leq X \leq 8) = \int_{4}^{8} f(x)dx = 0{,}006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_4^{8} = 0{,}544$$

Colaboratory

Outros exemplos: Gradiente Descendente

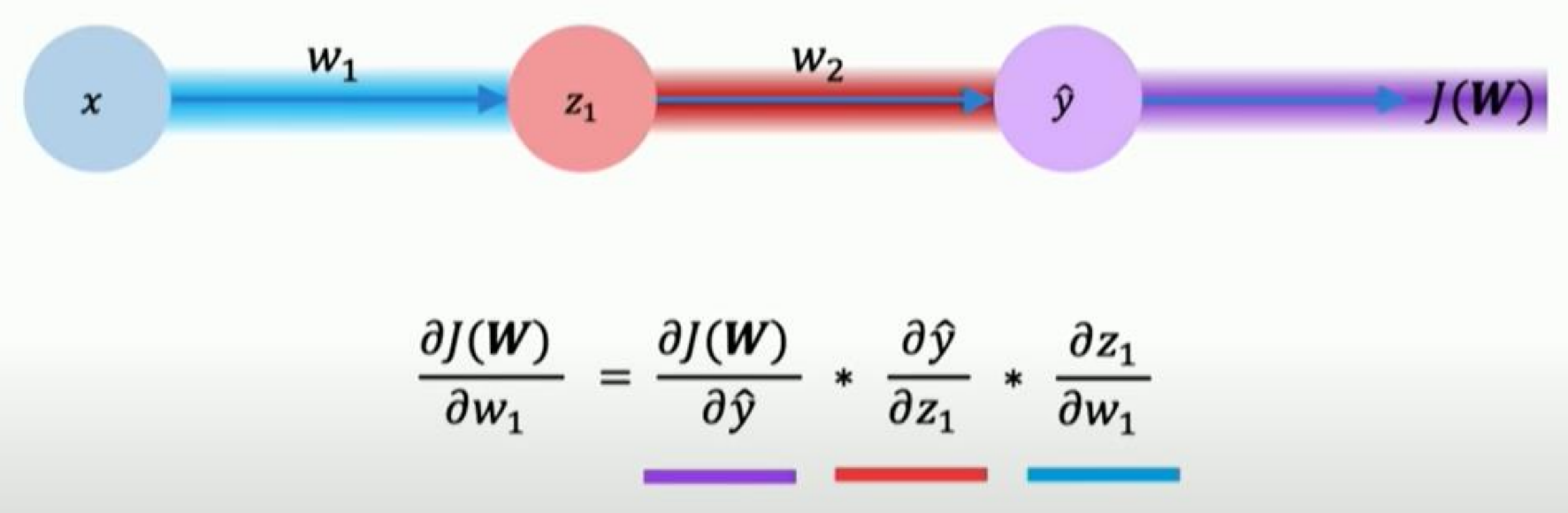
É um algoritmo de otimização usado para encontrar o valor mínimo de uma função. Frequentemente é usado em aprendizado de máquina e inteligência artificial para minimizar funções de erro ou perda, ajustando iterativamente os parâmetros do modelo.

Algoritmo:

1. Inicializar os pesos da rede randomicamente $\sim\mathcal{N}(0, \sigma^2)$;
2. Interar até a convergência:
   1. Calcular o gradiente, $\frac{\partial J(W)}{\partial W}$
   2. Atualizar os pesos, $W \leftarrow W - \eta \frac{\partial J(W)}{\partial W}$
3. Retornar

Gradiente Descendente e *backpropagation*

- Aplicação em um *perceptron* com uma entrada, um neurônio e uma saída:



Fonte: MIT Introduction to Deep Learning

Gradiente Descendente e dificuldades no cálculo

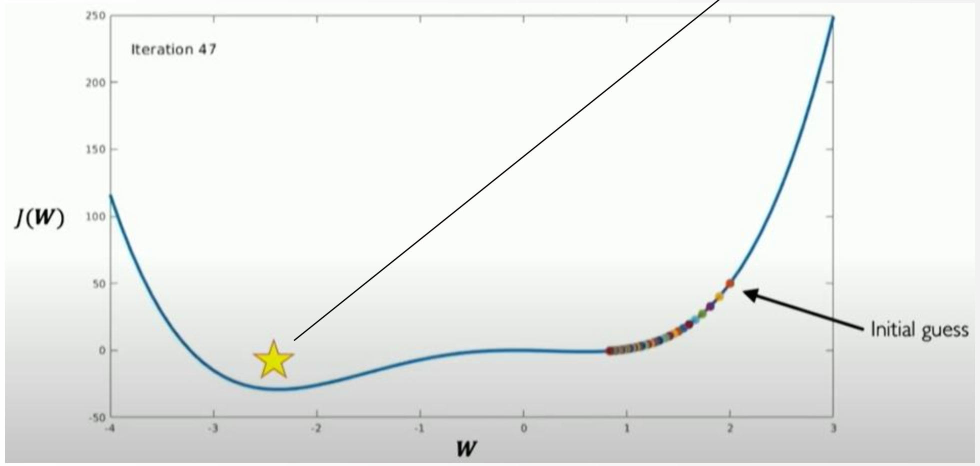
- Otimização pelo Gradiente Descendente:

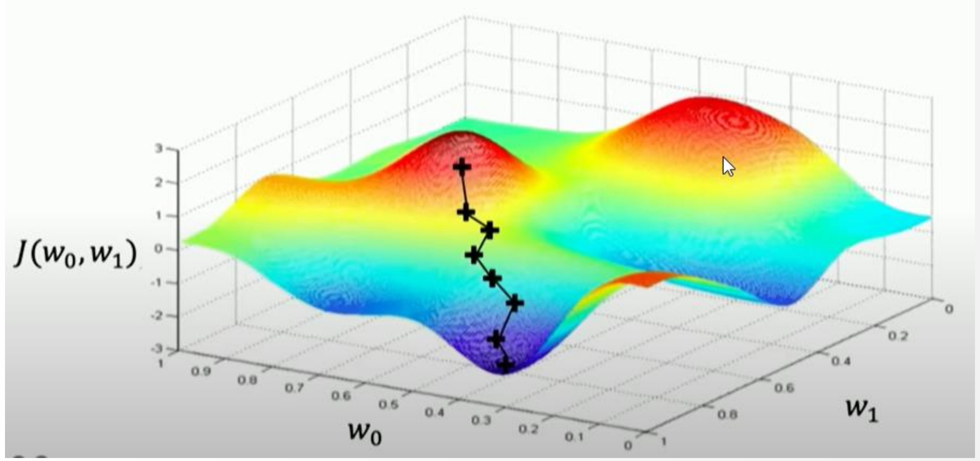
$$W \leftarrow W - \eta \frac{\partial J(W)}{\partial W}$$

Taxa de aprendizagem

Fonte: MIT Introduction to Deep Learning

Dificuldade ou demora na convergência





Conclusões

- Embora seja um problema simples, a metodologia de cálculo e resolução empregadas no problema de otimização podem ser utilizadas em outras aplicações;
- É possível utilizar recursos computacionais para se obter e reproduzir resultados analíticos. No entanto, quando analisamos aplicações reais de engenharia, o objetivo sempre será a solução de um problema e a resposta deve ser numérica. Assim, métodos computacionais são largamente utilizados nos ambientes de desenvolvimento;
- Existem diversos métodos para se trabalhar com otimização, como programação linear e não-linear, Algoritmos Genéticos, Otimização Convexa etc.
- A integração é uma ferramenta essencial para calcularmos probabilidades, assim, um fundamento matemático para os algoritmos de Machine Learning e Inteligência Artificial;
- O algoritmo de Gradiente Descendente é essencialmente uma derivada utilizando uma regra da cadeia.

Referências bibliográficas

- STEWART, J., Calculus 7E Early Transcendentals, CENGAGE Learning, NY, 2012.
- MIT – Intruduction to Deep Learning, disponível em: http://introtodeeplearning.com/, acesso em 24/5/2023;
- GOMES, I., Visão Geral de uma Rede Neural, disponível em: https://medium.com/neuronio-br/vis%C3%A3o-geral-de-redes-neurais-ee4b882d32af, acesso em 24/5/2023;
- HAYKIN, S., Redes Neurais – Princípios e Prática, 2ª Edição. Porto Alegre: Bookman, 2007;
- CABRAL, E. L. L., Notas de Aula – Pós Graduação em Ciência de Dados e Inteligência Artificial, Redes Neurais Artificiais, 2023.
- ASSUNÇÃO, R., Fonte: ASSUNÇÃO, R., Notas de Aula – Deep Learning – UFMG, disponível em: https://homepages.dcc.ufmg.br/~assuncao/AAP/, Acesso em 24/05/2023.

Perguntas?

Obrigado!