



Università degli studi di Milano-Bicocca

Facoltà di Fisica

Circuiti 3

Relazione di laboratorio

Gruppo T1 22

Lando Livio
Pievaioli Davide
Sandrelli Matteo

April 2025

1 Introduzione

L'obiettivo principale di questo lavoro di laboratorio è l'analisi e la comprensione del comportamento in frequenza di circuiti elementari quali RC, RL e RLC. Attraverso l'utilizzo di un generatore di segnale, che consente di iniettare sinusoidi di ampiezza nota, e di un oscilloscopio per monitorare le uscite in termini di ampiezza e fase, si è studiata la risposta dei circuiti al variare della frequenza. In particolare, sono state eseguite misurazioni che hanno permesso di evidenziare come, a seconda della configurazione scelta e del punto di misura (ad esempio, la caduta di tensione sui singoli componenti), il circuito possa manifestare caratteristiche di filtro passa basso, passa alto o passa banda.

1.1 Strumenti a disposizione

Gli strumenti impiegati in questa esperienza sono:

- breadboard per il montaggio dei circuiti,
- resistenze, condensatori e induttori,
- multimetro palmare,
- generatore di tensione in grado di produrre un segnale a forma variabile (in particolare un'onda sinusoidale),
- oscilloscopio per la visualizzazione e il campionamento della forma d'onda nel tempo,
- cursori dell'oscilloscopio per misurare le caratteristiche del segnale.

1.2 Stima delle incertezze

1.2.1 Incertezza sulla misura di tensione

Abbiamo notato che i valori di tensione letti dall'oscilloscopio variavano di:

$$\sigma = 5\% \cdot V$$

Assumendo tale sigma distribuita uniformemente, abbiamo calcolato la sigma gaussiana:

$$\sigma_{\Delta V} = \frac{2 \times 0.05 \times V}{\sqrt{12}}$$

1.2.2 Incertezza sulla misura delle fasi

Notando oscillazioni dei valori di sfasamento angolare, abbiamo assunto un'incertezza del:

$$\sigma = 5\% \cdot \theta$$

Ne abbiamo quindi calcolato la sigma gaussiana:

$$\sigma_{\Delta \theta} = \frac{2 \times 0.05 \times \theta}{\sqrt{12}}$$

1.2.3 Incertezza sulla misura di resistenza

Range	Risoluzione	Accuratezza
$\leq 600 \Omega$	0.1 Ω	$\pm 0.9\% + 2$ digit
$\leq 6 \text{ k}\Omega$	0.002 $\text{k}\Omega$	$\pm 0.9\% + 1$ digit
$\leq 60 \text{ k}\Omega$	0.01 $\text{k}\Omega$	$\pm 0.9\% + 1$ digit
$\leq 600 \text{ k}\Omega$	0.1 $\text{k}\Omega$	$\pm 0.9\% + 1$ digit

Table 1: Specifiche del multimetro palmare per la misura di resistenze.

Per stimare l'incertezza sulla misura della resistenza R , abbiamo considerato l'accuratezza fornita dallo strumento come un intervallo di incertezza uniforme. Da questa, abbiamo calcolato l'incertezza standard (gaussiana equivalente) secondo la relazione:

$$\sigma_R = \frac{b - a}{\sqrt{12}}$$

dove a e b rappresentano i limiti inferiore e superiore dell'intervallo determinato applicando l'accuratezza nominale allo specifico valore di R . Alla stima così ottenuta, è stata poi sommata la risoluzione dello strumento, che rappresenta il minimo passo rilevabile:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_R + \text{risoluzione}$$

Questa procedura è stata applicata a ciascun intervallo di misura in base al valore di R considerato.

2 Circuito RC

Lo scopo di questa sezione è caratterizzare la dipendenza dalla frequenza di un circuito RC quando sollecitato da un segnale armonico. Si investigherà come le ampiezze e le fasi delle tensioni sui singoli componenti evolvono al variare della frequenza, al fine di determinarne le proprietà filtranti.

In regime sinusoidale (analisi armonica), l'impedenza di un condensatore è data da:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

dove j è l'unità immaginaria, ω è la pulsazione ($\omega = 2\pi f$) e C la capacità.

2.1 Funzioni di trasferimento

2.1.1 Funzione di trasferimento H_R (circuito RC)

Consideriamo un circuito RC in serie, alimentato da una tensione sinusoidale V_g . La tensione ai capi della resistenza R è:

$$V_R = I_{\text{tot}} \cdot R = \frac{V_g}{Z_{\text{tot}}} \cdot R = V_g \cdot \frac{R}{R + Z_C}$$

Sostituendo l'impedenza del condensatore $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$, otteniamo:

$$H_R(\omega) = \frac{V_R}{V_g} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Da cui si ricavano:

- **Modulo:**

$$|H_R(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (1)$$

- **Argomento** (fase):

$$\arg H_R(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \quad (2)$$

2.1.2 Funzione di trasferimento H_C

La tensione ai capi del condensatore si ricava come:

$$V_C = I_{\text{tot}} \cdot Z_C = V_g \cdot \frac{Z_C}{R + Z_C}$$

Sostituendo $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$:

$$H_C(\omega) = \frac{V_C}{V_g} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Da cui si ricavano:

- **Modulo:**

$$|H_C(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (3)$$

- **Argomento** (fase): Si calcola come differenza tra la fase del numeratore (che è reale e positivo, quindi fase nulla) e quella del denominatore:

$$\arg H_C(\omega) = -\arctan(\omega RC) \quad (4)$$

2.2 Analisi dati

Per prima cosa abbiamo misurato con il multimetro palmare il valore della capacità C e della resistenza R , che abbiamo usato durante tutta l'esperienza.

$$C_m = (96 \pm 5)nF$$

$$R = (993 \pm 6)\Omega$$

L'incertezza sulla capacità C_m è stata determinata considerando il 5% del valore letto, mentre per la resistenza R abbiamo utilizzato la specifica del costruttore dello strumento. Il valore misurato di R è stato considerato come parametro noto e fisso nei fit successivi.

Per caratterizzare sperimentalmente la funzione di trasferimento $H_R(\omega) = V_R/V_g$, abbiamo misurato la tensione V_R ai capi della resistenza R al variare della frequenza f (e quindi della pulsazione $\omega = 2\pi f$) del segnale di ingresso V_g .

Perciò abbiamo rappresentato il rapporto

$$\frac{V_R}{V_g}$$

in funzione della pulsazione ω in scala lineare e logaritmica, effettuando un fit con la funzione di trasferimento del circuito relativa alla componente R.

In particolare, nelle figure 1, 2 vi è il fit del modulo di H_R , descritto dalla formula 1, effettuato per ottenere una stima della capacità, considerando invece R come un parametro noto.

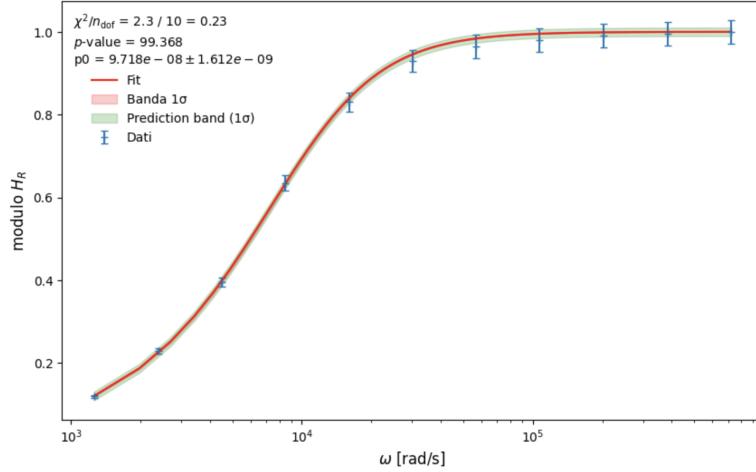


Figure 1: Fit del modulo $|H_R(\omega)|$ vs ω in scala logaritmica.

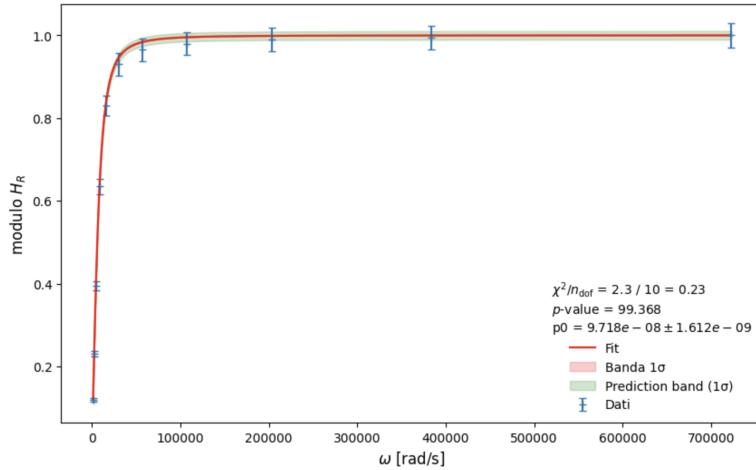


Figure 2: Fit del modulo $|H_R(\omega)|$ vs ω in scala lineare.

Al fine di verificare la correttezza dell’interpolazione, abbiamo effettuato un *t – test* tra il parametro stimato e la misura della capacità effettuata con il multimetro. Riportiamo l’esito in una tabella riassuntiva 2.

Per quanto riguarda la fase della funzione di trasferimento, abbiamo misurato lo sfasamento angolare tra le tensioni ai capi della componente del circuito interessata, convertendola poi in radianti.

Nelle figure 3, 4 vi è il fit della fase di H_R , descritta dalla formula 2, da cui abbiamo ottenuto una seconda stima della capacità. La Figura 5 mostra i residui normalizzati per il fit della fase, utili a valutarne la qualità.

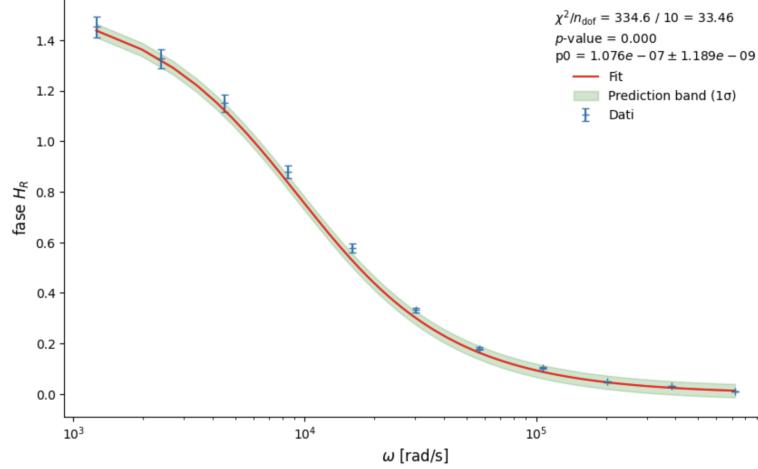


Figure 3: Fit della fase $\arg H_R(\omega)$ vs ω in scala logaritmica.

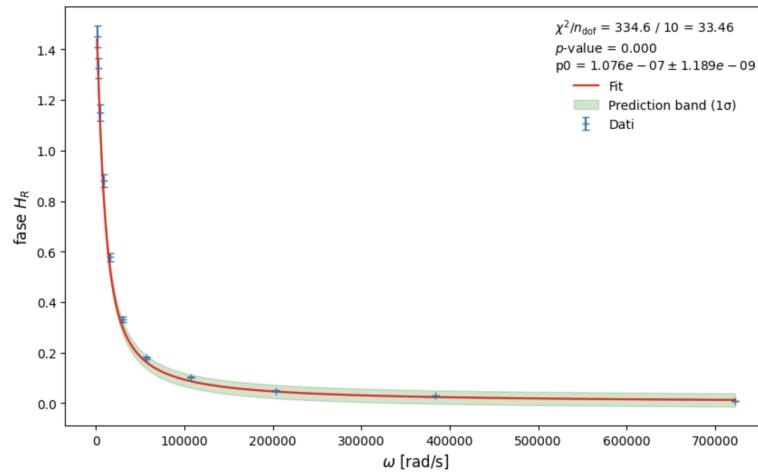


Figure 4: Fit della fase $\arg H_R(\omega)$ vs ω in scala lineare.

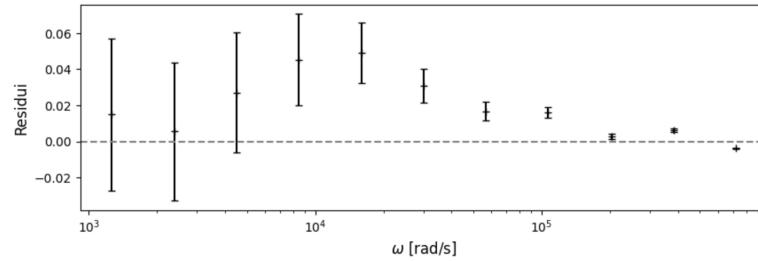


Figure 5: Residui normalizzati del fit della fase $\arg H_R(\omega)$.

Successivamente, abbiamo condotto un’analisi analoga per la funzione di trasferimento $H_C(\omega) = V_C/V_g$, misurando la tensione V_C ai capi del condensatore.

Le Figure 6 (scala logaritmica) e 7 (scala lineare) mostrano i dati sperimentali per il modulo $|H_C(\omega)| = V_C/V_g$ e il relativo fit basato sull’Equazione 3. La Figura 8

mostra i residui del fit del modulo. Da questo fit si ottengono ulteriori stime del valore di C .

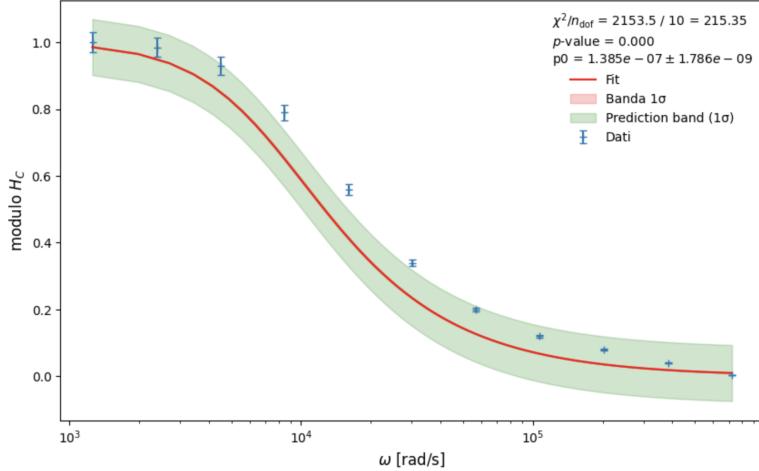


Figure 6: Fit del modulo $|H_C(\omega)|$ vs ω in scala logaritmica.

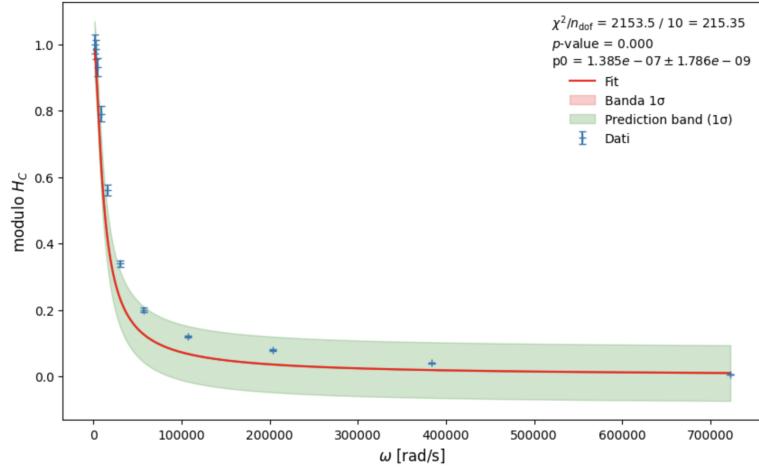


Figure 7: Fit del modulo $|H_C(\omega)|$ vs ω in scala lineare.

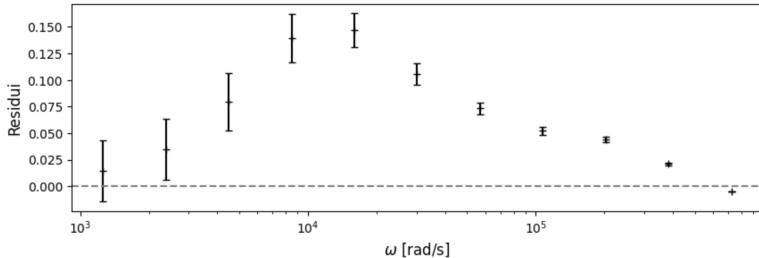


Figure 8: Residui normalizzati del fit del modulo $|H_C(\omega)|$.

Infine, le Figure 9 (scala logaritmica) e 10 (scala lineare) presentano i dati sperimentali per la fase $\arg H_C(\omega)$ e il fit corrispondente, basato sull'Equazione 4. I residui del fit della fase sono mostrati in Figura 11. Questo fit fornisce l'ultima stima della capacità C .

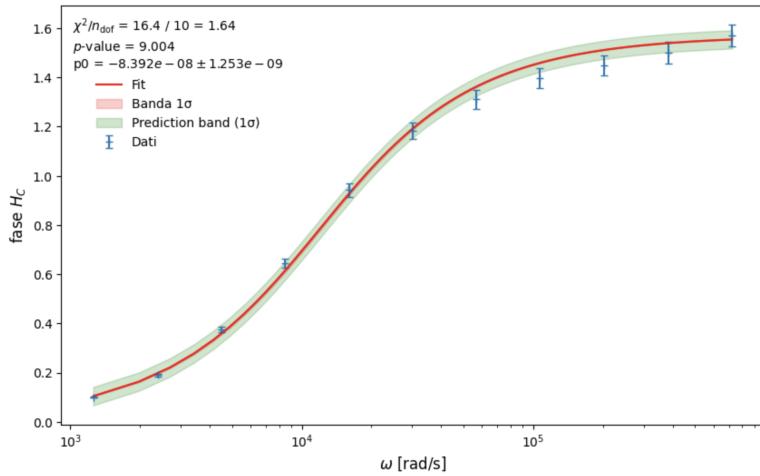


Figure 9: Fit della fase $\arg H_C(\omega)$ vs ω in scala logaritmica

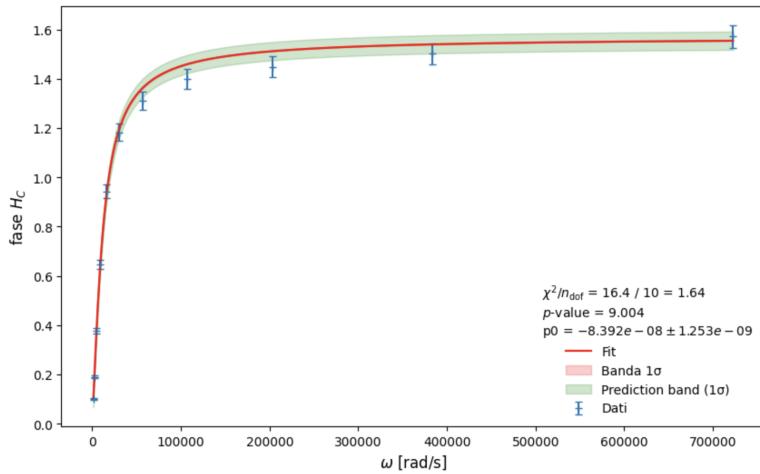


Figure 10: Fit della fase $\arg H_C(\omega)$ vs ω in scala lineare.

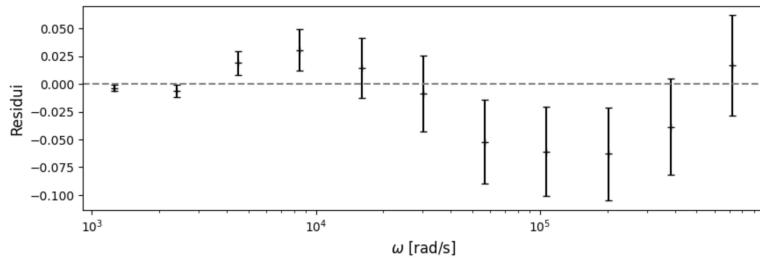


Figure 11: Residui normalizzati del fit della fase $\arg H_C(\omega)$.

I valori della capacità C ottenuti dai quattro fit descritti (modulo e fase per H_R e H_C) sono riassunti nella Tabella 2. La tabella include anche i risultati del test di compatibilità (t-test, espresso come p-value percentuale) tra ciascuna stima ottenuta dal fit e il valore C_m misurato direttamente con il multimetro, permettendo di valutare la consistenza dei risultati.

Fit	C [F]	σ_C [F]	t-test vs C_m [%]
Modulo H_R	9.72×10^{-8}	1.6×10^{-9}	72.1
Fase H_R	1.076×10^{-7}	1.2×10^{-9}	0.3
Modulo H_C	1.385×10^{-7}	1.8×10^{-9}	1.5×10^{-5}
Fase H_C	8.39×10^{-8}	1.3×10^{-9}	4.6×10^{-12}

Table 2: Risultati del fit per la capacità C dai diversi metodi nel circuito RC e confronto con il valore misurato $C_m = 96 \pm 5nF$.

Frequenza di taglio: La frequenza di taglio per il circuito RC, definita come il punto in cui il modulo di H_R (la funzione di trasferimento sulla resistenza, che in questo caso si comporta da filtro passa-alto) inizia a crescere sensibilmente uscendo dalla zona di forte attenuazione, può essere calcolata come $f_c = 1/(2\pi\tau)$, dove $\tau = RC$ è la costante di tempo del circuito. Utilizzando il valore di capacità C_{fit} ottenuto dal fit di $|H_R(\omega)|$ (come descritto in precedenza e mostrato in Figura 1) e il valore misurato della resistenza $R = 993 \Omega$, si ottiene la frequenza di taglio teorica:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC_{\text{fit}}} = \frac{1}{2\pi \cdot (993 \Omega) \cdot (9.718 \times 10^{-8} \text{ F})} \approx 1649 \text{ Hz}$$

Questo valore è coerente con l'andamento del modulo di $|H_R|$ rispetto alla frequenza, visualizzato in Figura 12. In tale grafico si osserva infatti che il modulo, dopo una crescita iniziale, inizia a stabilizzarsi (mostrando il caratteristico "ginocchio" della risposta in frequenza di un filtro passa-alto) proprio attorno a questa frequenza, indicando la transizione verso la banda passante del filtro.

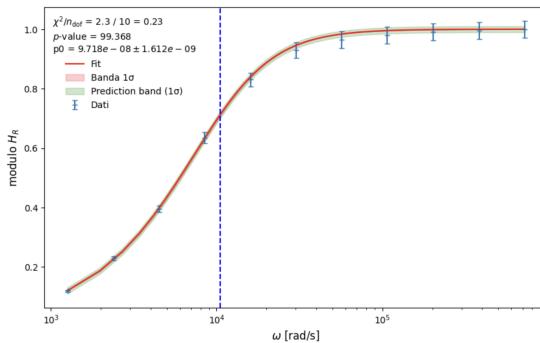


Figure 12: Pulsazione di taglio Circuito RC

2.3 Osservazioni

- **Proprietà di filtro del circuito RC**

Dall'analisi delle funzioni di trasferimento del circuito RC definite in precedenza e dall'osservazione dei relativi grafici della risposta in frequenza, si conferma il suo comportamento filtrante dipendente dalla configurazione:

- Quando l'uscita è prelevata ai capi del resistore, il circuito agisce come un **filtro passa-alto**, come mostrato nel grafico in Figura 1. In questo caso, il modulo $|H_R(\omega)|$ è nullo per $\omega \rightarrow 0$ e cresce tendendo al suo valore massimo per $\omega \rightarrow \infty$, attenuando quindi le basse frequenze.

- Quando l'uscita è prelevata ai capi del condensatore, il circuito si comporta come un **filtro passa-basso**. Questo è visivamente confermato dal grafico in Figura 7, dove si osserva che il modulo della funzione di trasferimento $|H_C(\omega)|$ tende al suo valore massimo per $\omega \rightarrow 0$ e decresce tendendo a zero per $\omega \rightarrow \infty$, attenuando così le alte frequenze.

• Discussione sulla qualità dei fit delle capacità

I risultati del t-test riportati in Tabella 2 mostrano una scarsa compatibilità tra alcune stime della capacità C ottenute dai fit e il valore misurato C_m . In particolare, i fit relativi a H_C (sia in modulo che in fase) presentano p-value estremamente bassi (fino a $10^{-12}\%$), indicando una forte incompatibilità statistica.

Queste discrepanze sono confermate dai grafici dei residui (Figure 8 e 11), dove si osservano andamenti sistematici che suggeriscono una cattiva qualità del fit. Anche i valori elevati di χ^2 ridotto nei corrispondenti fit rafforzano l'ipotesi che il modello non descriva pienamente il comportamento del circuito reale.

Le cause possibili includono effetti sistematici non considerati, come la resistenza interna del generatore di funzione o impedenze parassite, che possono influenzare significativamente le misure alle alte frequenze. In questi casi, l'incertezza restituita dal fit risulta sottostimata, portando a valori di t-test sfavorevoli anche in presenza di stime numericamente plausibili.

• Effetto della resistenza interna del generatore (R_g)

Il generatore di funzioni utilizzato presenta una resistenza interna $R_g = 50\Omega$, posta in serie tra la sorgente ideale V_{gen} e i morsetti di uscita. La tensione effettivamente applicata al circuito RC, V_A , non coincide quindi con V_g , ma è ridotta dal partitore formato da R_g e l'impedenza $Z_{load} = R + Z_C$ del circuito stesso:

$$V_A = V_g \cdot \frac{Z_{load}}{R_g + Z_{load}}$$

Poiché Z_{load} dipende dalla frequenza, anche V_A varia con ω , introducendo una distorsione nel comportamento osservato rispetto al caso ideale.

Nel calcolo dei moduli sperimentali delle funzioni di trasferimento ($|H_R|$ e $|H_C|$), abbiamo assunto implicitamente che V_g sia applicato direttamente al circuito. Per descrivere correttamente questi dati è quindi necessario utilizzare un modello teorico che includa R_g , ovvero una funzione di trasferimento del tipo $H'(\omega) = V_{out}/V_g$, in cui l'impedenza vista dal generatore è data da $Z_{tot} = R_g + R + Z_C$.

Nel caso della fase, la situazione è differente: l'oscilloscopio misura la differenza di fase tra il segnale in uscita (V_{out}) e quello realmente applicato al circuito, V_A . La fase sperimentale è dunque relativa al rapporto V_{out}/V_A , e l'effetto di R_g si elide matematicamente. Per i fit delle fasi è quindi corretto usare il modello teorico semplificato della funzione di trasferimento, riferita al solo circuito RC alimentato da V_A .

Ricaviamo ora le funzioni di trasferimento del circuito RC includendo la resistenza interna del generatore R_g , e utilizziamo i relativi moduli per effettuare un fit sui dati sperimentali:

- **Modulo $|H'_R|$:** Per calcolare la funzione di trasferimento H'_R , consideriamo l’impedenza totale vista dal generatore:

$$Z_{tot} = R_g + R + Z_C = R_g + R + \frac{1}{j\omega C}$$

La corrente totale che scorre nel circuito è:

$$I_{tot} = \frac{V_g}{Z_{tot}} = \frac{V_g}{R_g + R + \frac{1}{j\omega C}}$$

La tensione ai capi della resistenza R è quindi:

$$V_R = I_{tot} \cdot R = \frac{V_g \cdot R}{R_g + R + \frac{1}{j\omega C}}$$

La funzione di trasferimento H'_R rispetto a V_{gen} è:

$$H'_R(\omega) = \frac{V_R}{V_g} = \frac{R}{R_g + R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega C(R_g + R)}$$

Definendo la resistenza totale $R_{tot} = R + R_g$, si ottiene:

$$H'_R(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega CR_{tot}}$$

Il modulo di questa funzione, utilizzato per il fit dei dati sperimentali normalizzati rispetto a V_g , è:

$$|H'_R(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega CR_{tot})^2}} \quad (5)$$

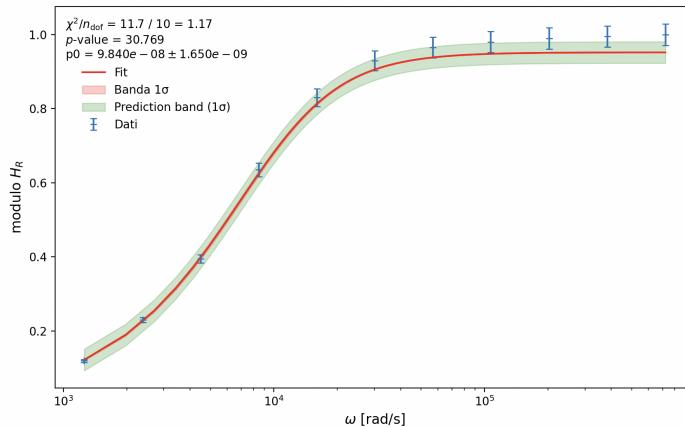


Figure 13: Fit del modulo $|H'_R(\omega)|$ con R_g incluso.

Abbiamo quindi eseguito un t-test per confrontare la stima di C ottenuta includendo R_g nel modello (fit di $|H'_R(\omega)|$, Eq. 5) con quella ottenuta dal modello semplificato (fit di $|H_R(\omega)|$, Eq. 1). Il p-value risultante del t-test è pari al 47.5%, indicando che le due stime di capacità sono statisticamente compatibili. Ciò suggerisce che, per la misura effettuata ai capi del resistore R , l’effetto della resistenza interna del generatore R_g sulla determinazione di C è trascurabile entro le incertezze sperimentali.

- **Modulo $|H'_C|$:** Utilizzando la corrente totale I_{tot} calcolata precedentemente:

$$I_{tot} = \frac{V_g}{R_g + R + \frac{1}{j\omega C}}$$

La tensione ai capi del condensatore C è:

$$V_C = I_{tot} \cdot Z_C = \frac{V_g}{R_g + R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{1}{j\omega C}$$

La funzione di trasferimento H'_C rispetto a V_g è:

$$H'_C(\omega) = \frac{V_C}{V_g} = \frac{1/(j\omega C)}{R_g + R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega C(R_g + R)}$$

Definendo $R_{tot} = R + R_g$:

$$H'_C(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega C R_{tot}}$$

Il modulo di questa funzione, utilizzato per il fit dei dati sperimentali $|V_C/V_g|$, è:

$$|H'_C(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega C R_{tot})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R_{tot}^2}} \quad (6)$$

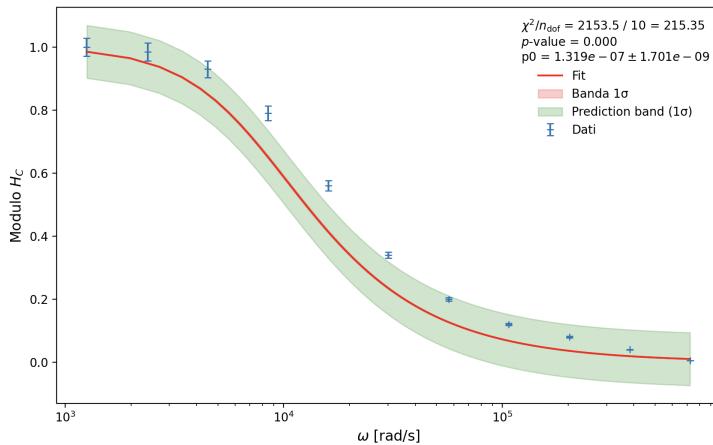


Figure 14: Fit del modulo $|H'_C(\omega)|$ con R_g incluso.

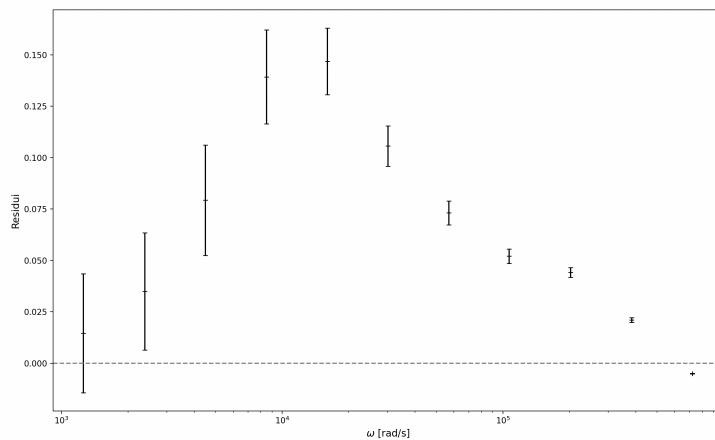


Figure 15: Residui del fit con $H'_C(\omega)$.

DI nuovo abbiamo effettuato ul t-test tra la stima di C ottenuta includendo R_g (fit di $|H'_C(\omega)|$, Eq. 6) e quella ottenuta dal modello semplificato (fit di $|H_C(\omega)|$, Eq. 3), che ha prodotto un p-value pari al 2.26%. Tuttavia, è importante osservare i residui di questo nuovo fit (Fig. 15): questi mostrano ancora andamenti sistematici e il χ^2 ridotto associato a questo fit rimane significativamente maggiore di 1 (similmente a quanto osservato per il fit senza R_g), ciò indica che anche il modello più complesso con R_g non cattura completamente la fisica del sistema o che persistono problemi legati alle incertezze o ad altri errori sistematici.

3 Circuito RL

In questa sezione si studierà il comportamento di un circuito serie formato da un resistore (R) e un induttore (L). Similmente al caso RC, l'obiettivo è esplorare la risposta del circuito a segnali sinusoidali a diverse frequenze. Verranno esaminate le variazioni di ampiezza e fase delle tensioni ai capi del resistore e dell'induttore per identificare e quantificare le caratteristiche di filtraggio del sistema RL.

In regime sinusoidale (analisi armonica), l'impedenza di un'induttanza è data da:

$$Z_L = j\omega L$$

dove ω è la pulsazione ($\omega = 2\pi f$) e L l'induttanza.

3.1 Funzioni di trasferimento

3.1.1 Funzione di trasferimento H_R (circuito RL)

In questo caso, la tensione ai capi della resistenza R è:

$$V_R = I_{\text{tot}} \cdot R = \frac{V_g}{Z_{\text{tot}}} \cdot R = V_g \cdot \frac{R}{R + Z_L}$$

Da cui si ottiene la funzione di trasferimento:

$$H_R(\omega) = \frac{V_R}{V_g} = \frac{R}{R + R_L + j\omega L}$$

Da cui si ricavano:

- **Modulo:**

$$|H_R(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L)^2}}$$

- **Argomento** (fase):

$$\arg H_R(\omega) = -\arctan \left(\frac{\omega L}{R + R_L} \right)$$

3.1.2 Funzione di trasferimento H_L

La tensione ai capi dell'induttore (inclusa la sua resistenza parassita R_L) è:

$$V_L = I_{tot} \cdot Z_L = V_g \cdot \frac{R_L + j\omega L}{R + R_L + j\omega L}$$

Da cui si ottiene la funzione di trasferimento:

$$H_L(\omega) = \frac{V_L}{V_g} = \frac{R_L + j\omega L}{R + R_L + j\omega L}$$

Da cui si ricavano:

- **Modulo:**

$$|H_L(\omega)| = \frac{\sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L)^2}}$$

- **Argomento** (fase): La fase si calcola come la differenza tra l'argomento del numeratore e del denominatore:

$$\arg H_L(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R_L}\right) - \arctan\left(\frac{\omega L}{R + R_L}\right)$$

- **Caso particolare (se R_L trascurabile):**

$$\arg H_L(\omega) \approx \arctan(\omega L) - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

3.2 Analisi dati

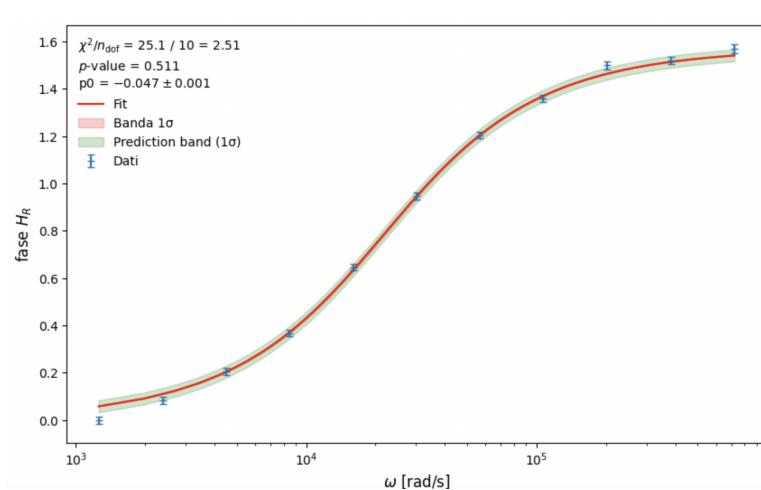
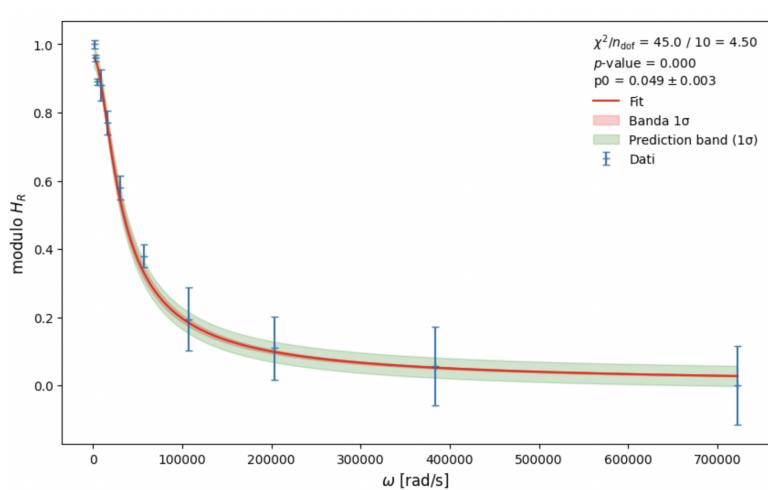
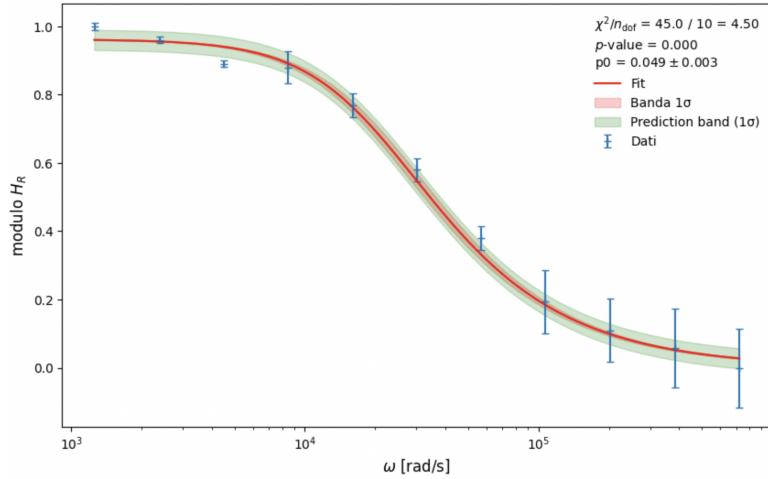
Per prima cosa abbiamo misurato con il multimetro palmare il valore della resistenza R e la resistenza parassita dell'induttanza R_L :

$$R = (993 \pm 6)\Omega$$

$$R_L = (39.0 \pm 0.3)\Omega$$

Anche l'incertezza su R_L è stata stimata utilizzando la specifica del costruttore. Il valore di V_g è stato mantenuto costante a 4 V.

Come nel caso del circuito RC, abbiamo misurato la tensione ai capi della resistenza V_R e dell'induttanza V_L al variare della frequenza f e quindi di ω . Per il modulo di H_R , i dati e i fit sono mostrati nelle figure 16 e 17 (scala logaritmica e lineare, rispettivamente), mentre per l'argomento nelle figure 18 e 19. Da questi fit si ottengono le stime di L riportate in Tabella 3.



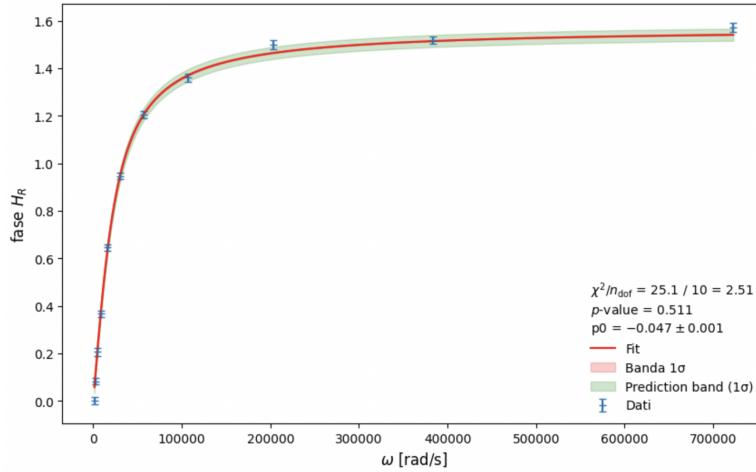


Figure 19: Fit della fase $\arg H_R(\omega)$ vs ω in scala lineare

Abbiamo poi ripetuto l’analisi per il modulo e la fase di H_L . I grafici relativi al modulo sono mostrati in Figura 20 e 21, mentre quelli per la fase in Figura 22 e 23.

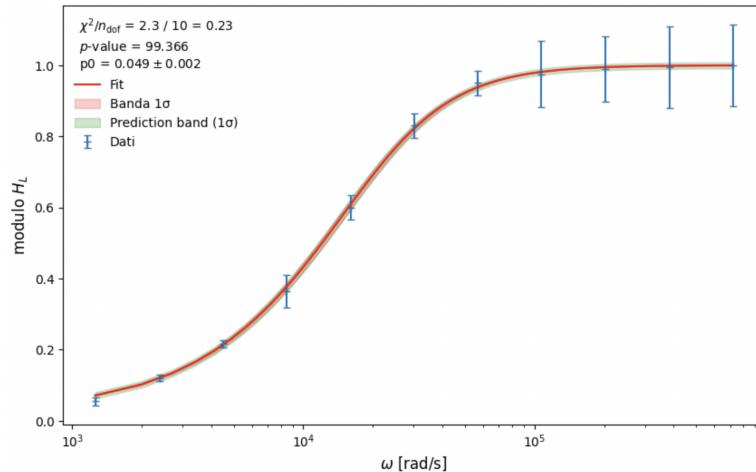


Figure 20: Fit del modulo $|H_L(\omega)|$ vs ω in scala logaritmica.

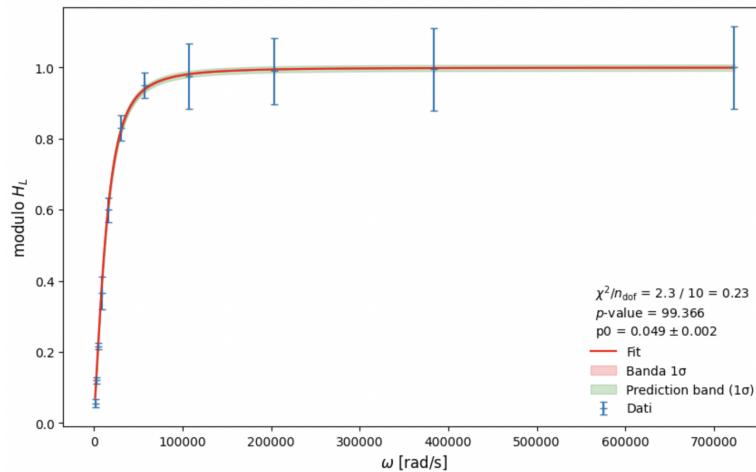


Figure 21: Fit del modulo $|H_L(\omega)|$ vs ω in scala logaritmica.

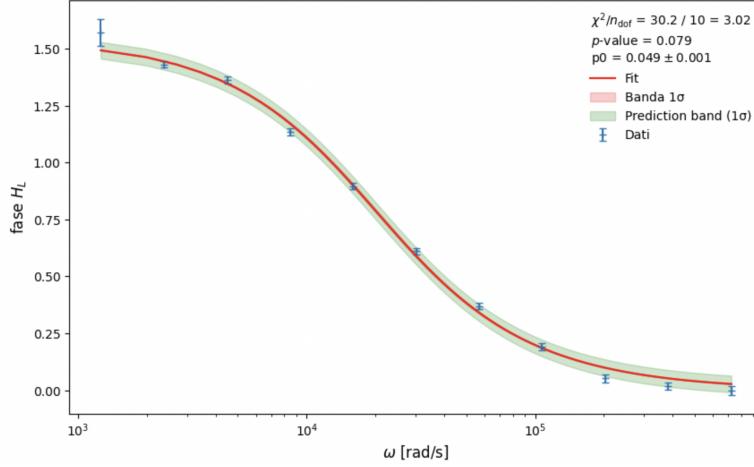


Figure 22: Fit della fase $\arg H_L(\omega)$ vs ω in scala logaritmica

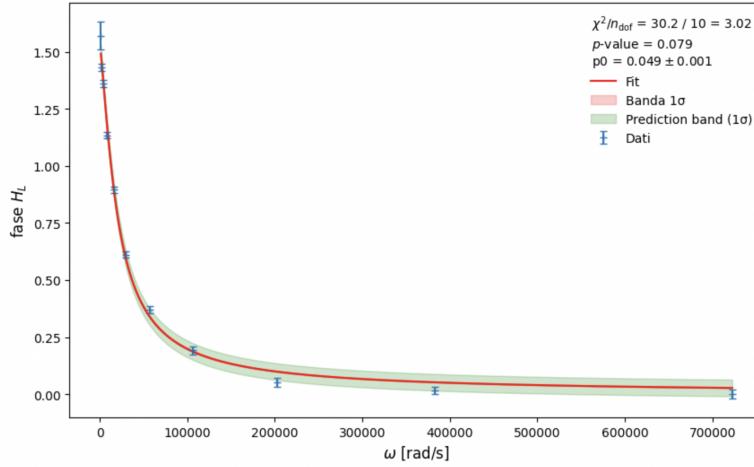


Figure 23: Fit della fase $\arg H_L(\omega)$ vs ω in scala logaritmica

Fit	L [H]	σ_L [H]
Modulo H_R	4.95×10^{-2}	2.9×10^{-3}
Fase H_R	4.741×10^{-2}	7.7×10^{-4}
Modulo H_L	4.93×10^{-2}	2.90×10^{-6}
Fase H_L	4.91×10^{-2}	6.51×10^{-7}

Table 3: Risultati del fit per l'induttanza L dai diversi metodi nel circuito RL.

Effettuando la media pesata tra i valori di L ottenuti dal fit del modulo e della fase di H_R si ottiene $L_{\text{media},HR} = 0.048 \pm 0.0007$ H. Analogamente, la media pesata dei valori di L da H_L risulta $L_{\text{media},HL} = 0.0492 \pm 0.0007$ H. Un t-test tra queste due medie restituisce un p-value del 15%, indicando che i due risultati tra i due fit delle due funzioni di trasferimento sono compatibili.

Frequenza di taglio: La frequenza di taglio per il circuito RL, definita come il punto in cui il modulo di H_R inizia a diminuire sensibilmente, può essere stimata come $f_c = 1/(2\pi\tau)$, dove $\tau = L/R$ è la costante di tempo del circuito. Utilizzando il valore di L ottenuto dal fit di $|H_R|$, si ottiene $f_c = 3225$ Hz. Questo valore è

coerente con l'andamento del modulo di H_R mostrato in Figura 24, dove si osserva che il modulo comincia a scendere drasticamente attorno a quella frequenza.

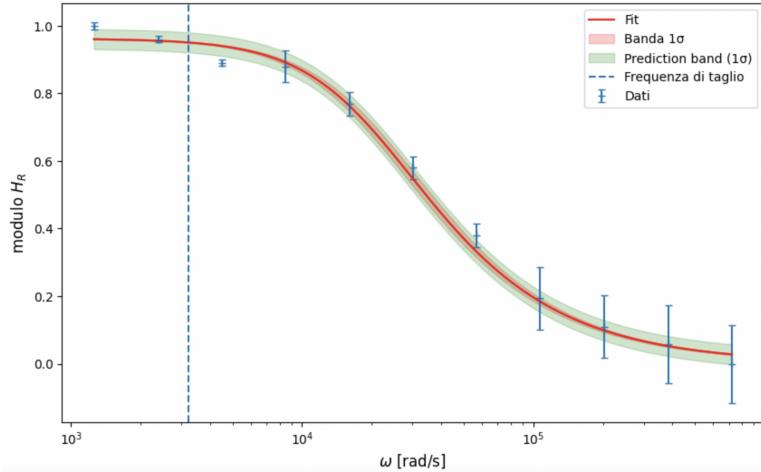


Figure 24: Frequenza di taglio della funzione di trasferimento su R

3.3 Osservazioni

- **Proprietà di filtro del circuito RL**

Dall'analisi delle funzioni di trasferimento del circuito RL definite in precedenza e dall'osservazione dei relativi grafici della risposta in frequenza, si conferma il suo comportamento filtrante dipendente dalla configurazione:

- Quando l'uscita è prelevata ai capi dell'induttore, il circuito agisce come un **filtro passa-alto**, come mostrato nel grafico in Figura 21. In questo caso, il modulo $|H_L(\omega)|$ è nullo per $\omega \rightarrow 0$ e cresce tendendo al suo valore massimo per $\omega \rightarrow \infty$, attenuando quindi le basse frequenze.
- Quando l'uscita è prelevata ai capi del resistore, il circuito si comporta come un **filtro passa-basso**. Questo è visivamente confermato dal grafico in Figura 16, dove si osserva che il modulo della funzione di trasferimento $|H_R(\omega)|$ tende al suo valore massimo per $\omega \rightarrow 0$ e decresce tendendo a zero per $\omega \rightarrow \infty$, attenuando così le alte frequenze.

- **Resistenza parassita dell'induttanza**

Nel caso del circuito RL, l'analisi della fase della funzione di trasferimento $H_L(\omega)$ è stata effettuata inizialmente trascurando la resistenza parassita dell'induttore R_L , assumendo quindi che l'induttore fosse ideale. Questo approccio ha permesso di ottenere un fit soddisfacente con un solo parametro libero (l'induttanza L), fornendo una buona descrizione dell'andamento dei dati sperimentali.

Tuttavia, per valutare l'impatto della resistenza parassita R_L , si è tentato un secondo approccio includendola nella funzione di trasferimento. In questo caso sono state esplorate tre diverse configurazioni:

- lasciando L come parametro libero e fissando R e R_L ;
- lasciando R_L come parametro libero e fissando L e R ;
- lasciando entrambi R e R_L come parametri liberi.

Questi tentativi hanno mostrato una maggiore instabilità nel fit: in particolare, nel caso in cui R_L era l'unico parametro libero, il fit ha restituito un valore di circa 2.00Ω , ovvero un valore molto piccolo, compatibile con l'ipotesi di trascurabilità della resistenza parassita. Inoltre, i residui e la forma della curva indicano che il modello con R_L introdotto non descrive correttamente l'andamento dei dati, suggerendo possibili errori sperimentali o limiti nella precisione della misura della fase a basse frequenze.

Di seguito si riporta il grafico del fit effettuato lasciando R_L come unico parametro libero, a supporto di queste considerazioni.

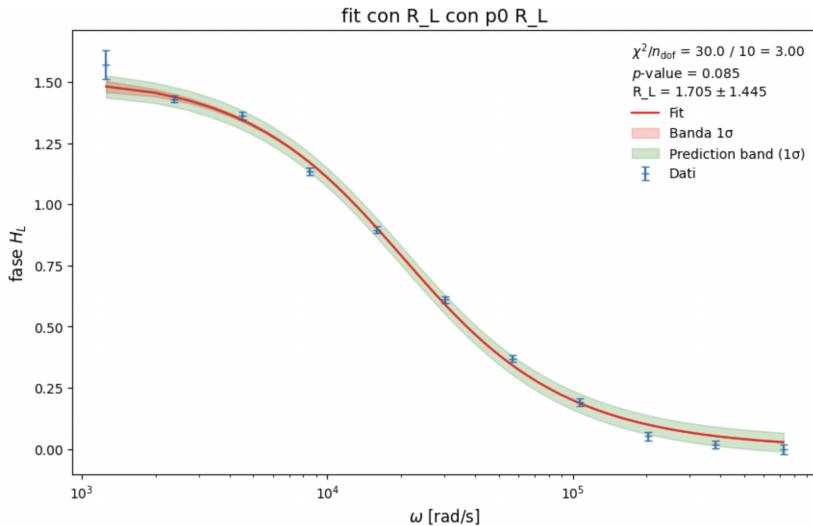


Figure 25: Fit della fase $\arg H_L(\omega)$ considerando la resistenza parassita R_L come parametro libero. Il valore ottenuto per R_L risulta molto piccolo (1.70Ω), compatibile con l'ipotesi di induttore ideale.

4 Circuito RLC

Questa sezione estende l'analisi precedente ai circuiti RLC in serie, dove la presenza simultanea di un resistore R , un induttore L e un condensatore C introduce dinamiche più complesse. L'obiettivo principale è investigare il comportamento in frequenza di questo sistema, con particolare attenzione al fenomeno della risonanza, che emerge dall'interazione tra gli elementi reattivi L e C . Si procederà alla caratterizzazione sperimentale della risposta armonica, esaminando come le ampiezze e le fasi delle tensioni ai capi di R (V_R) e di L e C in serie (V_{LC}) variano rispetto alla tensione di ingresso (V_{in}) al variare della frequenza. Questa analisi permetterà di determinare le specifiche funzioni di trasferimento (V_R/V_{in} , V_{LC}/V_{in}) e di comprendere le diverse caratteristiche di filtraggio (es. passa-banda, elimina-banda) che il circuito esibisce a seconda del punto in cui viene prelevata la tensione di uscita.

4.1 Funzioni di trasferimento

4.1.1 Funzione di trasferimento H_R (circuito RLC)

In un circuito RLC in serie, con una resistenza parassita R_L sull'induttore, la tensione ai capi della resistenza R è:

$$V_R = V_g \cdot \frac{R}{R + R_L + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

La funzione di trasferimento risulta:

$$H_R(\omega) = \frac{V_R}{V_g} = \frac{R}{R + R_L + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Da cui si ricavano:

- **Modulo:**

$$|H_R(\omega)| = \frac{\omega CR}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 (R + R_L)^2}} \quad (7)$$

- **Argomento** (fase):

$$\arg H_R(\omega) = \arctan \left(\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega C (R + R_L)} \right) \quad (8)$$

4.1.2 Funzione di trasferimento H_{CL}

Consideriamo ora la tensione ai capi del blocco costituito da induttore e condensatore in serie, con impedenza complessiva:

$$Z_{CL} = R_L + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Applicando il partitore di tensione:

$$H_{CL}(\omega) = \frac{V_{CL}}{V_g} = \frac{Z_{CL}}{R + Z_{CL}} = \frac{R_L + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R + R_L + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Da cui si ricavano:

- **Modulo:**

$$|H_{CL}(\omega)| = \left| \frac{Z_{CL}}{R + Z_{CL}} \right| = \frac{\sqrt{R_L^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (9)$$

- **Argomento** (fase):

$$\arg H_{CL}(\omega) = \arg(Z_{CL}) - \arg(R + Z_{CL}) = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_L} \right) - \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R + R_L} \right) \quad (10)$$

4.2 Analisi dati

Lo scopo di questa parte dell'esperimento è di verificare le leggi che governano i circuiti RLC in serie tramite lo studio delle funzioni di trasferimento H_R e H_{CL} , in particolare tramite lo studio della fase e modulo, campionando ampiezze e fasi al variare della frequenza. Successivamente ricavare una stima della capacità C e induttanza L (resistenze note).

4.2.1 funzione di trasferimento H_R

Consideriamo la funzione di trasferimento H_R studiandone modulo e fase:

Modulo $|H_R(\omega)|$:

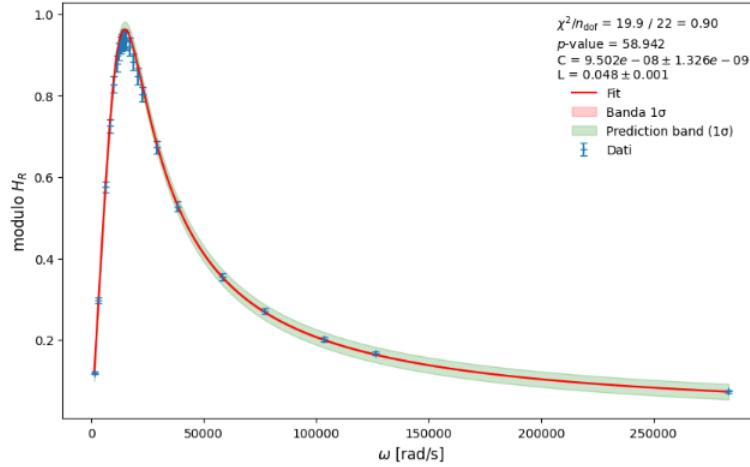


Figure 26: Fit del modulo $|H_R(\omega)|$ vs ω in scala lineare

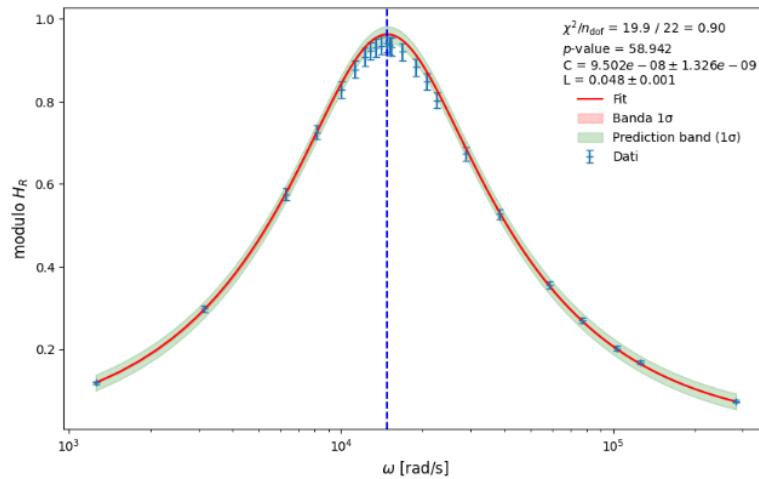


Figure 27: Fit del modulo $|H_R(\omega)|$ vs ω in scala logaritmica

Dal χ^2_{red} e P_{value} del fit si evince che il modello si adatta in modo soddisfacente ai dati sperimentali. Questa considerazione è ulteriormente supportata dal confronto tra C_{fit} e L_{fit} con C_{expected} e L_{expected} :

- Compatibilità C del 75%
- Compatibilità L del 72%

Approfondimento sul modulo $|H_R(\omega)|$:

Notiamo che l'andamento del modulo presenta un picco. Per definizione, il modulo della funzione di trasferimento $0 < H_R < 1$ indica quanto il segnale da V_{in} a V_{out} venga attenuato dal circuito. Ciò che si osserva è una forma a campana, che

indica come al limite per $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow +\infty$ il segnale venga totalmente annullato, mentre al limite per $\omega \rightarrow \omega_0$ il segnale sia imperturbato.

Chiamiamo allora il picco $\omega_0 = 14826.41$ [rad/s].

Tramite la relazione $\omega = 2\pi f$ troviamo $f_{risonanza} = 2359.69$ Hz 'frequenza di risonanza', per la quale il modulo è massimo.

Tramite la relazione 7 si trova che il modulo è massimo per la frequenza:

$$f_{\text{soglia RLC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Utilizzando le stime del fit precedente di L e C e i rispettivi errori, abbiamo calcolato il valore e l'errore associato della frequenza. Svolgendo un test di compatibilità abbiamo ottenuto un accordo del 99.9% che conferma l'affidabilità del valore di frequenza di soglia.

Possiamo allora definire un intorno di ω_0 arbitrario attorno al quale il segnale sia abbastanza grande da non rappresentare una significativa perdita.

Questo è possibile tramite lo studio della potenza. Si cerca infatti dove la potenza si dimezza rispetto alla potenza massima:

$$\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = 0.5$$

Ma la potenza è $P = \frac{V^2}{R}$, quindi in termini di potenziale si ha:

$$\frac{V_{\text{out}}^2}{V_{\text{in}}^2} = 0.5$$

Cioè:

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

che rappresenta circa il 30% della perdita in ampiezza (in arancio figura 28).

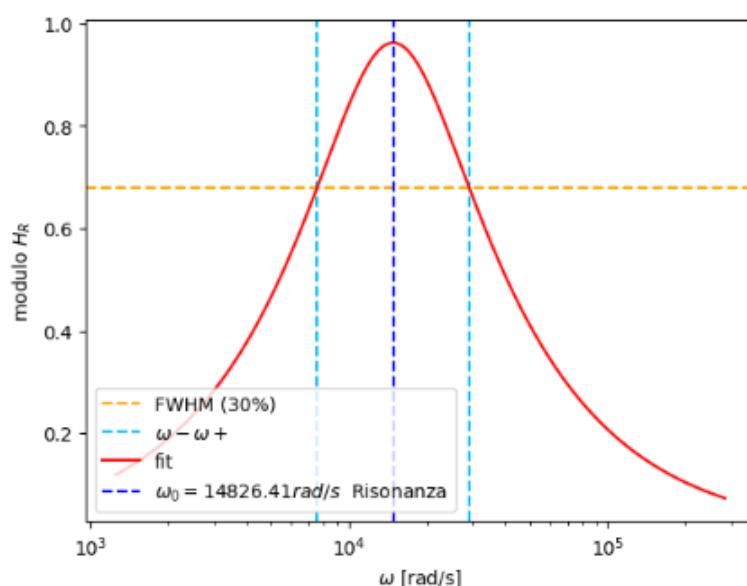


Figure 28: FWHM modulo

Possiamo allora trovare numericamente l'intersezione tra la retta arancio e il fit: $\omega_- = 7552$ [rad/s], $\omega_+ = 29107$ [rad/s], che rappresenta l'intervallo di pulsazioni attorno alla pulsazione di risonanza ω_0 , nel quale l'attenuazione del segnale è entro il 30%.

A seguito di questi risultati si evince che i circuiti RLC in serie siano dei circuiti selettori di frequenza, e che questa dipenda dalle componenti del circuito.

Viene infatti definita una grandezza: il fattore di qualità $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, che indica quanto sia stretta la campana.

Conoscendo che $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e $\Delta\omega = \frac{R}{L} = 2\gamma$ dove $\gamma = \frac{R}{2L}$ possiamo scrivere Q come $Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$ e quindi svolgere un ulteriore test di compatibilità, positivo.

Il valore di Q trovato è $Q = 0.68$; definiamo anche il fattore di smorzamento $\xi = \frac{1}{2Q} = 0.7$.

$\xi < 1$ indica che il circuito è sottosmorzato, e $Q \approx 1$ che seppur sottormorzato, le oscillazioni sensibili sono poche, come previsto.

Fase $\arg H_R(\omega)$:

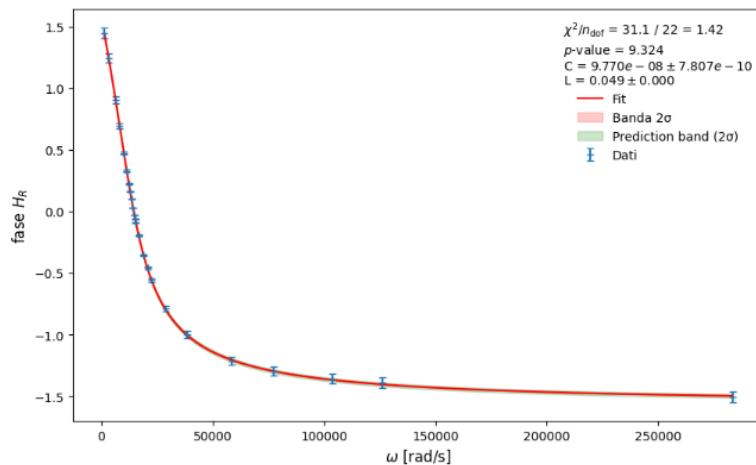


Figure 29: Fit della fase $\arg H_R(\omega)$ vs ω in scala lineare

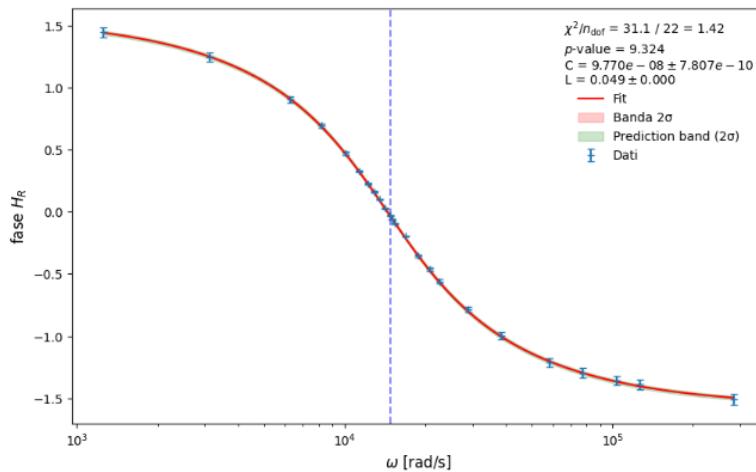


Figure 30: Fit della fase $\arg H_R(\omega)$ vs ω in scala logaritmica

Dal χ^2_{red} e P_{value} del fit si evince che il modello si adatta in modo soddisfacente ai dati sperimentali. Questa considerazione è ulteriormente supportata dal con-

fronto tra C_{fit} e L_{fit} con $C_{expected}$ e $L_{expected}$:

- Compatibilità C del 56%
- Compatibilità L del 8%

La fase, come previsto dalla formula 8, ha la forma di un arctangente ed è nulla per $\omega \approx \omega_0$.

4.2.2 Funzione di trasferimento H_{CL}

Modulo $|H_{CL}(\omega)|$:

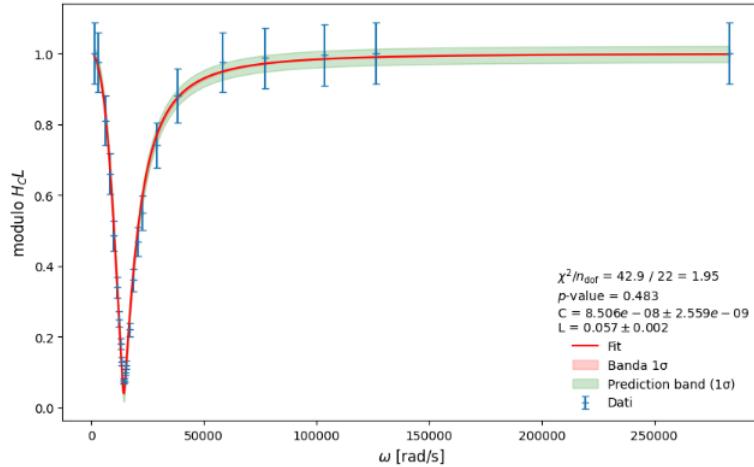


Figure 31: Fit del modulo $|H_{CL}(\omega)|$ vs ω in scala lineare

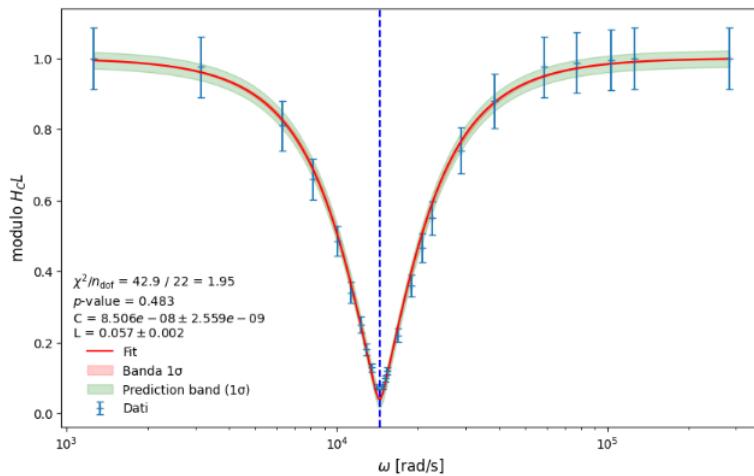


Figure 32: Fit del modulo $|H_{CL}(\omega)|$ vs ω in scala logaritmica

L'andamento del modulo $|H_{CL}(\omega)|$, opposto a $|H_R(\omega)|$, presenta un buco ad $\omega \approx \omega_0$ e tende ad 1 a $\omega \rightarrow 0, \infty$.

Dal χ^2_{red} e P_{value} del fit si evince che il modello si adatta in modo perlopiù soddisfacente ai dati sperimentali.

Fase $\arg H_{CL}(\omega)$:

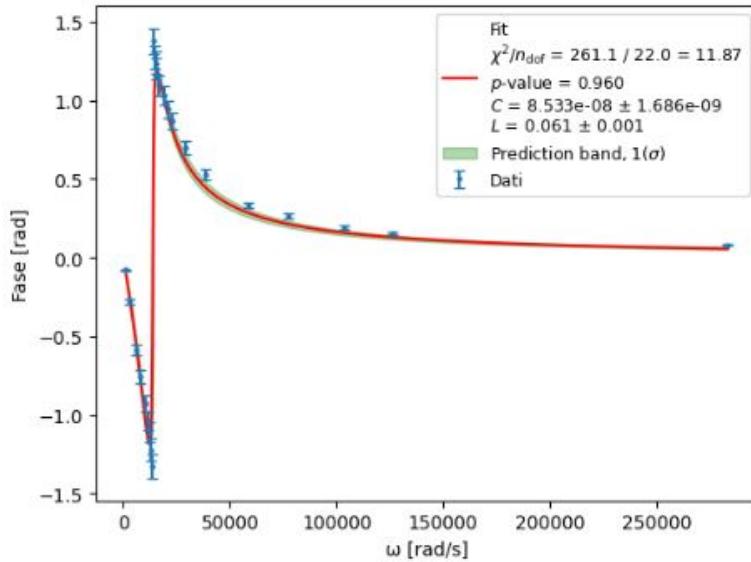


Figure 33: Fit della fase $\arg H_{CL}(\omega)$ vs ω in scala lineare

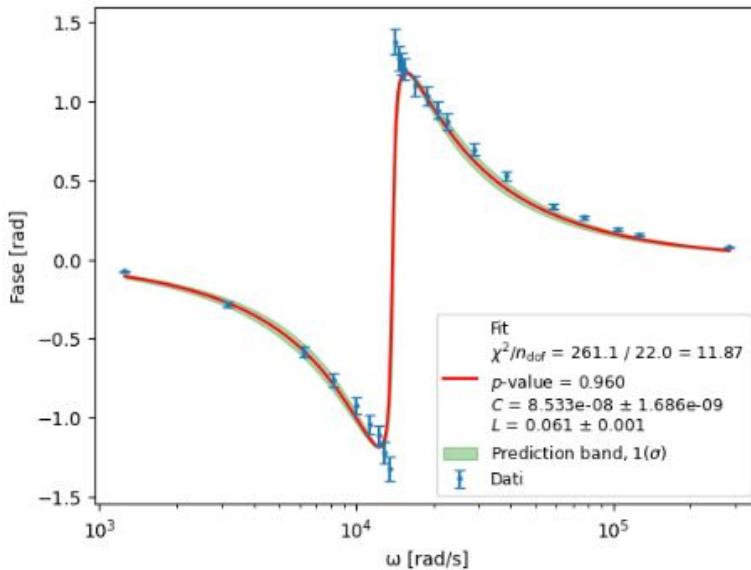


Figure 34: Fit della fase $\arg H_{CL}(\omega)$ vs ω in scala logaritmica

Il valore del p-value ottenuto dal fit è 0.001, il chi-quadro ridotto (χ^2_{red}) = 11.87, i valori sono indicatori di un adattamento scarso, il modello non descrive adeguatamente i dati, poiché ci sono deviazioni sistematiche tra i dati osservati e quelli previsti dal modello.

Per quanto riguarda i parametri ottenuti dal fit, la capacità C e l'induttanza L , questi non sono in accordo con i valori teorici attesi, lo svolgimento del t-test rivela questa incompatibilità:

- Compatibilità C del 0.3%

- Compatibilità L del 1.6%

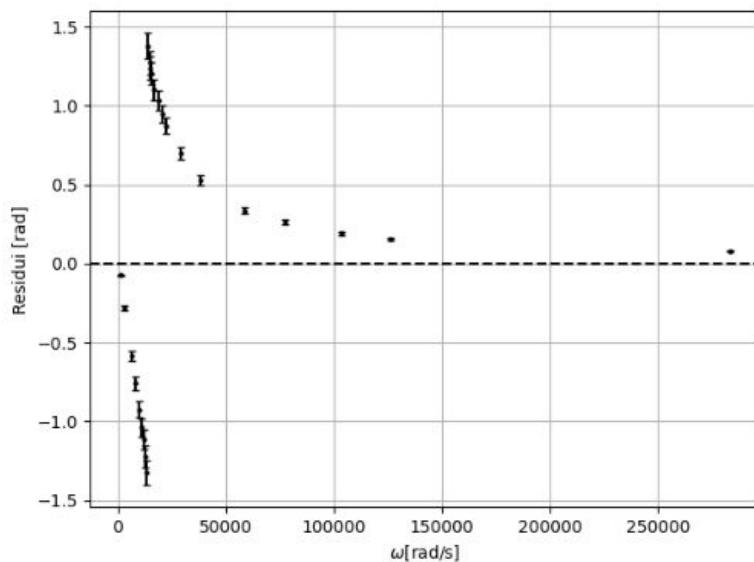


Figure 35: Residui fase

L’analisi dei residui conferma la scarsa riuscita del fit. I residui non sono gaussiani, suggerendo che il modello non descrive adeguatamente gli errori. Inoltre, seguono un pattern che riflette la legge del fit, indicando che il modello potrebbe essere incompleto o troppo semplice. In un buon fit, i residui dovrebbero essere casuali, senza correlazioni strutturali.

4.3 Osservazioni

- Per quanto riguarda la funzione di trasferimento H_R sia la fase che il modulo di V_{in} rimangono pressochè imperturbati dal circuito per valori di frequenza che approssimano il valore di risonanza.
- Nel circuito RLC, il comportamento armonico deriva dallo scambio di energia tra l’induttore, che immagazzina energia nel campo magnetico, e il condensatore, che immagazzina energia nel campo elettrico. Alla frequenza di risonanza ω_0 , le impedenze di L e C si annullano, permettendo all’energia di fluire liberamente tra i due componenti senza dissipazione. Tuttavia, la resistenza dissipava energia (soprattutto sotto forma di calore), impedendo un’oscillazione perfetta e causando smorzamento. Le funzioni di trasferimento $|H_{CL}(\omega)|$ e $|H_R(\omega)|$ interagiscono: a risonanza, la tensione ai capi di L e C è massima, mentre quella ai capi della resistenza è minima. Fuori dalla risonanza, l’energia tra L e C diminuisce e la resistenza dissipava più energia, riducendo le oscillazioni.
- I risultati ottenuti confermano la validità del modello teorico del circuito RLC in serie e la corretta caratterizzazione delle sue proprietà di selettività in frequenza.

5 Appendice

Frequenza [Hz]	V_R [mV]	φ_{HR} [°]
200	47.6	-83.2
380	92	-76
715	158	-65.9
1350	254	-50.4
2550	332	-33.1
4800	372	-19
9050	386	-10.3
17000	392	-5.92
32300	396	-2.79
61000	398	-1.76
115000	400	-0.52

Table 4: Misurazioni in tensione e fase su R (circuito RC).

Frequenza [Hz]	V_C [V]	φ_{HC} [°]
200	4	5.76
380	3.94	10.9
715	3.72	21.6
1350	3.16	37
2550	2.24	54
4800	1.36	67.8
9050	0.80	75.1
17000	0.48	80.1
32300	0.32	83
61000	0.16	86
115000	0.02	90

Table 5: Misurazioni in tensione e fase su C (circuito RC).

Frequenza [Hz]	V_R [V]	φ_{HR} [°]
200	4	0
380	3.84	4.75
715	3.56	11.8
1350	3.52	21
2550	3.08	37
4800	2.32	54.2
9050	1.52	69
17000	0.776	77.9
32300	0.44	85.9
61000	0.228	87
115000	0	90

Table 6: Misurazioni in tensione e fase su R (circuito RL).

Frequenza [Hz]	V_L [V]	φ_{HL} [°]
200	0.220	90
380	0.480	82
715	0.864	78
1350	1.46	65
2550	2.40	51.3
4800	3.32	35
9050	3.80	21.2
17000	3.90	11
32300	3.96	3
61000	3.98	1
115000	4	0

Table 7: Misurazioni in tensione e fase su L (circuito RL).

Frequenza [Hz]	V_R [V]	φ_{HR} [°]
200	0.476	82.9
500	1.19	71.3
1000	2.30	51.8
1300	2.88	39.8
1600	3.28	27.1
1800	3.48	18.8
1950	3.58	13.0
2050	3.64	9.24
2150	3.68	5.81
2250	3.70	1.62
2350	3.72	-1.69
2400	3.721	-3.46
2450	3.72	-5.29
2690	3.64	-11.2
3000	3.50	-20.3
3300	3.36	-26.3
3600	3.18	-32.0
4600	2.68	-45.1
6100	2.10	-57.1
9300	1.42	-69.5
12300	1.08	-74.3
16500	0.808	-77.8
20100	0.672	-79.6
45100	0.294	-86.3

Table 8: Dati di frequenza, tensione e fase su R (circuito RLC).

Frequenza [Hz]	V_{CL} [V]	$\varphi_{H_{CL}}$ [°]
200	4.00	-4.32
500	3.90	-16.2
1000	3.24	-33.5
1300	2.64	-43.5
1600	1.94	-53.0
1800	1.36	-59.6
1950	1.00	-63.8
2050	0.720	-70.0
2150	0.520	-76.0
2250	0.300	79.0
2350	0.305	73.0
2400	0.397	71.0
2450	0.480	69.0
2690	0.880	63.0
3000	1.44	59.2
3300	1.87	54.1
3600	2.20	49.9
4600	2.96	40.0
6100	3.52	30.3
9300	3.90	19.2
12300	3.95	15.2
16500	3.98	11.0
20100	4.00	8.95
45100	4.00	4.55

Table 9: Dati di frequenza, tensione e fase su C ed L (circuito RLC).