



Università degli studi di Milano-Bicocca

Facoltà di Fisica

---

# Spettrometro

Relazione di laboratorio

---

**Gruppo T1 22**

Lando Livio  
Pievaioli Davide  
Sandrelli Matteo

June 2025

# 1 Introduzione

L'obiettivo principale di questa esperienza di laboratorio è la verifica dei principi fondamentali della spettrometria ottica. In particolare, si intende:

- Caratterizzare un prisma a dispersione, misurandone l'indice di rifrazione  $n(\lambda)$  in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda$ .
- Caratterizzare un reticolo di diffrazione, misurandone il passo  $d$ .
- Identificare la composizione di gas ignoti analizzando lo spettro della loro emissione luminosa, sia mediante l'utilizzo del prisma che del reticolo.

## 1.1 Strumentazione

Per la realizzazione dell'esperienza è stato utilizzato uno spettrometro ottico completo di accessori. Gli elementi principali della strumentazione includono:

- Spettrometro: strumento dotato di un collimatore, una piattaforma rotante per il posizionamento dell'elemento disperdente (prisma o reticolo), e un telescopio mobile per l'osservazione dello spettro. La lettura degli angoli viene effettuata mediante un nonio goniometrico.
- Sorgenti luminose: diverse lampade a scarica di gas (Mercurio (Hg), Sodio (Na)) per la calibrazione e l'analisi di spettri noti, e tubi contenenti gas ignoti da identificare.
- Prisma ottico: elemento disperdente in vetro (o altro materiale trasparente) con facce piane non parallele, utilizzato per la scomposizione della luce tramite rifrazione.
- Reticolo di diffrazione: lastra con una serie di fenditure o solchi paralleli ed equidistanti, utilizzata per la scomposizione della luce tramite interferenza e diffrazione.

## 1.2 Analisi preliminare degli errori e delle principali fonti di incertezza

La quantificazione affidabile dei parametri fisici di un esperimento dipende in modo critico da una rigorosa analisi delle incertezze di misura. Nel contesto di questo esperimento, la determinazione dell'angolo al vertice del prisma ( $\alpha$ ) e degli angoli di minima deviazione ( $\delta_{\min}$ ) è soggetta a diverse fonti di errore, che possono essere classificate in tre categorie fondamentali.

### Fonti di incertezza:

- **Errore strumentale:** Limitato dalla risoluzione del nonio dello spettrometro PASCO SP-9416, pari a  $30'' \approx 0.0083^\circ$  per lettura.
- **Errore casuale:** Legato all'allineamento soggettivo delle righe, all'individuazione del punto di inversione per la minima deviazione, a instabilità meccaniche e affaticamento visivo. Ridotto tramite ripetizioni e media statistica.

- **Errore sistematico:** Può derivare da scala non azzerata, disallineamento tra asse di rotazione e fascio del collimatore, o difetti di parallelismo del prisma. Mitigato con misure angolari simmetriche e calibrazione preliminare.

### 1.2.1 Analisi dell'Incertezza per l'Angolo al Vertice $\alpha$

Per stimare con accuratezza l'incertezza su  $\alpha = \theta/2$ , è stata condotta un'analisi su  $N = 10$  misure di  $\theta$ , ciascuna con incertezza  $\sigma_i$  ottenuta combinando in quadratura l'errore strumentale e una stima soggettiva dell'errore casuale dell'operatore ( $\sim 0.3\text{--}0.4^\circ$ ), in funzione della chiarezza del traguardo.

Il set di dati raccolti è riportato sotto

Misura #	$\theta$ [gradi]
1	$119.5 \pm 0.3$
2	$120.0 \pm 0.3$
3	$120.0 \pm 0.4$
4	$116.7 \pm 0.5$
5	$132.5 \pm 0.4$
6	$122.9 \pm 0.4$
7	$119.3 \pm 0.3$
8	$120.9 \pm 0.3$
9	$130.7 \pm 0.3$
10	$119.8 \pm 0.4$

Table 1: Misure individuali dell'angolo  $\theta$  con incertezza associata.

Il valore ottimale di  $\theta$  è calcolato come media pesata, con pesi  $w_i = 1/\sigma_i^2$ , che privilegiano le misure più affidabili. Si ottiene  $\bar{\theta} = 118.934^\circ$ , con errore sulla media  $\sigma_{\bar{\theta}, \text{ingenuo}} = 0.080^\circ$ .

**Verifica di Coerenza e Correzione dell'Errore** Per valutare la coerenza tra dispersione e incertezze, si calcola il Chi-Quadro ridotto:

$$\chi_{\text{rid}}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \frac{(\theta_i - \bar{\theta})^2}{\sigma_i^2}$$

Dal dataset si ottiene:

$$\chi_{\text{rid}}^2 = 276.3$$

Il valore elevato segnala una dispersione molto superiore a quanto previsto, indice di sottostima delle incertezze o presenza di errori aggiuntivi. L'errore corretto sulla media viene quindi calcolato come:

$$\sigma_{\bar{\theta}, \text{corr}} = \sigma_{\bar{\theta}, \text{ingenuo}} \times \sqrt{\chi_{\text{rid}}^2} = 0.080^\circ \times \sqrt{276.31} = 1.3^\circ$$

La stima finale dell'angolo al vertice è:

$$\alpha = 59.4 \pm 0.6 \text{ gradi}$$

Poiché  $\alpha_{\text{atteso}} = 60^\circ$  rientra nell'intervallo  $[58.8^\circ, 60.1^\circ]$ , la misura è compatibile con il valore teorico.

**Conclusione sulla Metodologia:** La combinazione di media pesata e test del  $\chi^2_{\text{rid}}$  fornisce una stima solida e controllata dell'incertezza, migliorando l'affidabilità rispetto a metodi più semplici. Questo approccio sarà adottato per l'analisi di tutte le misure angolari, incluse quelle relative a  $\delta_{\text{min}}$ , dove si attende un'incertezza comparabile o maggiore per via della maggiore difficoltà nel traguardo del punto di inversione.

### 1.2.2 Approccio 2: Errore Standard della Media (Metodo Semplificato)

Come confronto, si applica anche un approccio semplificato che trascura le incertezze individuali  $\sigma_i$  e assume uguale affidabilità per tutte le misure, stimando l'errore solo dalla dispersione del campione.

1. Media aritmetica:  $\bar{\theta} = 122.3^\circ$
2. Deviazione standard del campione:  $s = 5.1^\circ$
3. Errore standard della media:  $\sigma_{\bar{\theta}} = 1.6^\circ$

Il valore dell'angolo risulta quindi:

$$\theta = 122.3^\circ \pm 1.6^\circ \text{ gradi}$$

Questo metodo, pur più semplice, non sfrutta le informazioni sulle incertezze specifiche di ciascuna misura e può risultare meno sensibile a valori anomali. Tuttavia, fornisce una stima coerente con la dispersione osservata ed è utile come controllo indipendente del metodo pesato.

**Discussione e Scelta del Metodo Definitivo** Il primo metodo, basato su media pesata e correzione tramite  $\chi^2_{\text{rid}}$ , è preferibile per l'analisi finale in quanto più rigoroso e informativamente completo. Utilizza le incertezze individuali  $\sigma_i$  per ponderare le misure, rendendo il risultato meno sensibile ai valori estremi, come dimostra la differenza tra  $\bar{\theta}_{\text{pesata}} = 118.9^\circ$  e  $\bar{\theta}_{\text{aritm.}} = 122.3^\circ$ . Fondamentale è anche il test  $\chi^2_{\text{rid}} = 276.3$ , che ha rivelato la sottostima delle incertezze e permesso una correzione oggettiva dell'errore, rendendo il metodo auto-consistente. Il metodo semplificato, pur utile come controllo, non offre strumenti diagnostici analoghi.

Le incertezze finali risultano confrontabili ( $1.3^\circ$  vs.  $1.6^\circ$ ), confermando che la dispersione domina su ogni altra fonte di errore. Si adotta quindi il risultato del metodo pesato, in quanto più solido e validato internamente.

**Inceteezze per gli Angoli di Minima Deviazione** Per la determinazione degli angoli di minima deviazione,  $\delta_{\text{min}}$ , verrà adottato il medesimo approccio rigoroso qui descritto, basato sulla media pesata e la correzione tramite Chi-Quadro. Di conseguenza, l'incertezza finale su ciascun  $\delta_{\text{min}}$  è attesa essere dello stesso ordine di grandezza di quella trovata per l'angolo al vertice. Tuttavia, è plausibile che risulti leggermente superiore, data la difficoltà intrinseca nel localizzare con esattezza il punto di inversione del moto della riga spettrale nel campo del telescopio, operazione che introduce un'ulteriore fonte di errore casuale nel giudizio dell'operatore.

### 1.3 Analisi Preliminare di Errori Sistematici e Bias Angolare

Una delle tecniche più efficaci per mitigare l’impatto di errori sistematici nell’allineamento di uno spettrometro è la misura simmetrica degli angoli a destra e a sinistra rispetto alla direzione del fascio incidente. Prima di procedere con le misure definitive con il reticolo di diffrazione, è stata condotta un’analisi preliminare per investigare la presenza di un eventuale bias angolare e per validare la tecnica di correzione.

**Osservazione di Asimmetria nei Dati Grezzi** Un set iniziale di misure, effettuate per quattro righe spettrali, ha rivelato una chiara e consistente asimmetria tra gli angoli misurati a destra ( $\theta_{dx}$ ) e a sinistra ( $\theta_{sx}$ ). I dati sono riportati in Tabella 2.

Table 2: Analisi dei dati angolari grezzi e stima dell’offset di zero.

Riga	$\theta_{sx}$ [°]	$\theta_{dx}$ [°]	$\theta_{corr} = (\theta_{dx} + \theta_{sx})/2$ [°]	Offset $\delta_0 = (\theta_{dx} - \theta_{sx})/2$ [°]
1	35.5	37.5	36.5	1.0
2	37.0	39.0	38.0	1.0
3	41.5	44.5	43.0	1.5
4	43.5	46.5	45.0	1.5

Come si evince dalla tabella, l’angolo misurato a destra è sistematicamente maggiore di quello a sinistra. La differenza tra i due, che stima il doppio dell’errore di zero ( $\delta_0$ ), è costantemente positiva e significativa, suggerendo la presenza di un bias sistematico nell’ordine di  $1.0 - 1.5^\circ$ . Questa asimmetria non è attribuibile a fluttuazioni casuali, ma a una causa fisica persistente. La causa più probabile di un tale bias, nel caso di un reticolo, è un’incidenza non perfettamente normale del fascio luminoso. In un’incidenza non normale, la simmetria degli angoli diffratti a destra e sinistra viene rotta.

**Validazione del Metodo di Correzione tramite Simulazione** Per validare la robustezza della tecnica di correzione, è stata condotta una simulazione numerica. È stato creato un set di dati artificiale partendo da angoli ”veri” noti (plausibili per una lampada a Mercurio), ai quali sono stati aggiunti due tipi di errore:

1. Un **errore sistematico** (offset di zero) costante,  $\delta_0 = 1.3^\circ$ , aggiunto alle misure a destra e sottratto a quelle a sinistra.
2. Un **errore casuale** con deviazione standard  $\sigma_{casuale} = 0.25^\circ$ , aggiunto a ogni singola misura per simulare le fluttuazioni sperimentali.

Su questo set di dati ”sporchi” e asimmetrici è stata applicata la medesima procedura di correzione. I risultati della simulazione sono riassunti in Tabella 3 e visualizzati in Figura 1.

L’analisi dei dati simulati ha permesso di stimare un valore medio per l’offset di zero pari a  $\bar{\delta}_0 = 1.48 \pm 0.27^\circ$ . Questo valore è pienamente compatibile con il valore di  $1.3^\circ$  inserito nella simulazione, confermando che la procedura di calcolo della media aritmetica tra le misure a destra e a sinistra è un metodo efficace per cancellare un bias additivo costante. Inoltre, i valori corretti ( $\theta_{corr}$ ) recuperano con eccellente approssimazione i valori veri ( $\theta_{vero}$ ), come mostrato graficamente.

Table 3: Risultati dell'applicazione del metodo di correzione al dataset simulato.

Colore	$\theta_{sx, sim} [^\circ]$	$\theta_{dx, sim} [^\circ]$	$\theta_{corr} [^\circ]$	$\theta_{vero} [^\circ]$	$\delta_{0, stimato} [^\circ]$
Violetto	37.04	40.06	38.55	38.50	1.51
Blu/Indaco	39.84	42.09	40.97	41.00	1.12
Verde	41.85	45.40	43.63	43.80	1.78
Giallo	44.57	47.58	46.08	45.90	1.50

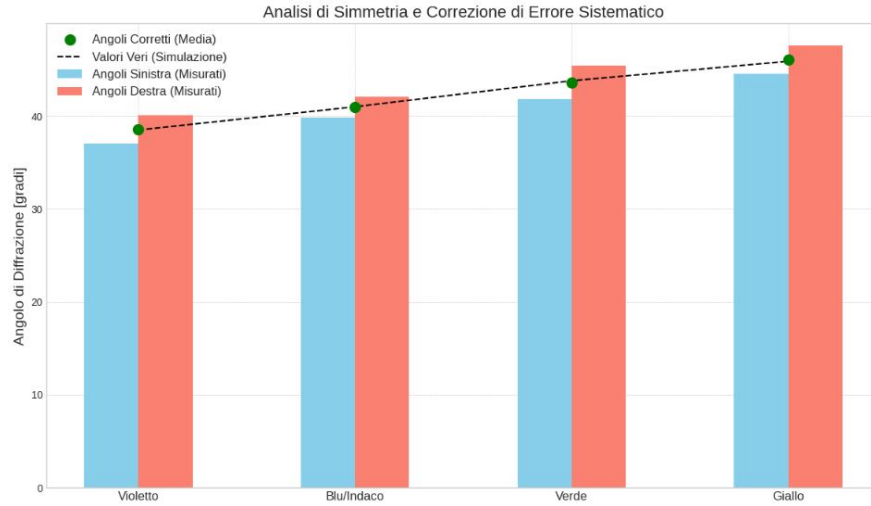


Figure 1: Visualizzazione grafica della simulazione. Le barre mostrano le misure simulate asimmetriche a destra e sinistra. I punti verdi rappresentano i valori corretti tramite la media, che si allineano quasi perfettamente con i valori "veri" di partenza (linea tratteggiata nera)

**Conclusioni e Implicazioni** Questa analisi preliminare ha evidenziato in modo inequivocabile l'impatto significativo che un errore di allineamento può avere sull'accuratezza delle misure. Il successo della simulazione nel recuperare i valori veri ci dà piena fiducia nella validità della tecnica di misura simmetrica. Di conseguenza, per tutte le successive misure effettuate con il reticolo di diffrazione, è stata posta la massima attenzione nell'assicurare un'incidenza il più possibile normale del fascio luminoso, al fine di minimizzare a priori l'entità di questo bias sistematico e garantire la simmetria del sistema.

## 2 Prisma

La luce policromatica, attraversando un mezzo disperdente come un prisma, viene scomposta nelle sue componenti monocromatiche a causa della dipendenza dell'indice di rifrazione  $n$  del materiale dalla lunghezza d'onda  $\lambda$  della luce. Questa dipendenza è descritta empiricamente, per molti materiali trasparenti e lontano dalle regioni di assorbimento, dalla Legge di Cauchy:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots \quad (1)$$

dove  $A, B, C, \dots$  sono costanti specifiche del materiale (costanti di Cauchy). Per molte applicazioni, ci si limita ai primi due termini.

L'angolo di minima deviazione  $\delta_{min}$  per un prisma è l'angolo minimo tra il raggio incidente e il raggio emergente. Esso è legato all'indice di rifrazione  $n$  e all'angolo

al vertice del prisma  $\alpha$  dalla relazione:

$$n(\lambda) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \delta_{min}(\lambda)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (2)$$

Misurando  $\alpha$  e  $\delta_{min}$  per diverse lunghezze d'onda note è possibile determinare  $n(\lambda)$  e, successivamente, stimare i coefficienti  $A$  e  $B$  della legge di Cauchy. Invertendo la formula (1), si può stimare la lunghezza d'onda di una riga spettrale incognita una volta noto il suo indice di rifrazione:

$$\lambda(n) = \sqrt{\frac{B}{n - A}} \quad (3)$$

## 2.1 Stima dei parametri $A$ e $B$

Utilizzando una lampada a spettro noto (Mercurio Hg), abbiamo misurato gli angoli di minima deviazione  $\delta_{min}$  per diverse righe spettrali visibili. Per ogni riga, conoscendo la sua lunghezza d'onda tabulata  $\lambda_{NIST}$ , abbiamo calcolato l'indice di rifrazione  $n(\lambda)$  usando l'equazione (2) e il valore di  $\bar{\alpha}$  precedentemente determinato.

Table 4: Misure per la caratterizzazione del prisma con lampada a Hg.

Colore Osservato	$\lambda_{NIST}$ (nm)	$\delta_{min}$ (°)	$n_{calc}$
Arancio Forte	579.0	$50.80 \pm 0.08$	$1.5064 \pm 0.0006$
Verde	546.0	$51.30 \pm 0.12$	$1.5098 \pm 0.0009$
Verde Acqua	491.6	$52.40 \pm 0.10$	$1.5176 \pm 0.0008$
Blu Intenso	435.8	$54.00 \pm 0.14$	$1.5292 \pm 0.0011$
Viola Debole	407.7	$55.50 \pm 0.10$	$1.5395 \pm 0.0008$
Viola Forte	404.6	$55.70 \pm 0.08$	$1.5401 \pm 0.0006$

Di seguito riportiamo uno spettro che rappresenta approssimativamente quanto osservato durante l'esperimento, ricostruito utilizzando le lunghezze d'onda del mercurio tratte dalle tabelle NIST:

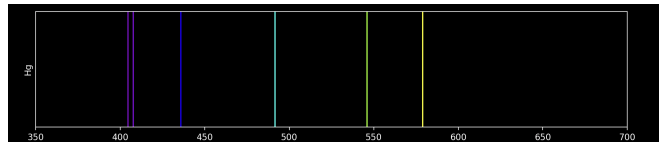


Figure 2: Spettro Hg con  $\lambda_{NIST}$

Abbiamo quindi utilizzato i dati per un fit lineare basato sulla forma semplificata della legge di Cauchy  $n(\lambda) = A + B/\lambda^2$ , per stimare i coefficienti  $A$  e  $B$  specifici del prisma (Figura 3).

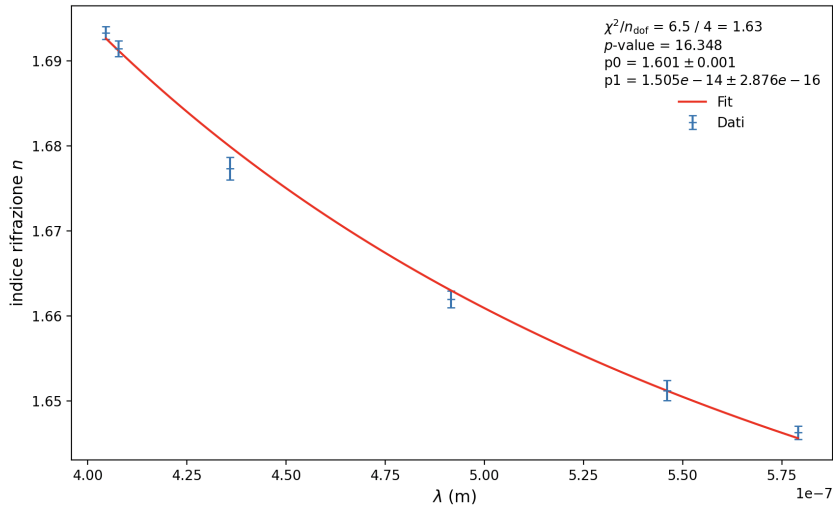


Figure 3: Fit lineare con legge di Cauchy

Il fit ha fornito i seguenti valori per i parametri di Cauchy:

- $A = (1.6007 \pm 0.001)$
- $B = (1.504 \pm 0.029) \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$

## 2.2 Identificazione del gas ignoto

Per la lampada contenente un gas ignoto, abbiamo misurato gli angoli di minima deviazione  $\delta_{\min}$  corrispondenti alle principali righe spettrali visibili. Anche in questo caso, utilizzando l'equazione (2) abbiamo calcolato l'indice di rifrazione  $n$  per ciascuna riga. Successivamente, utilizzando i coefficienti  $A$  e  $B$  della legge di Cauchy determinati in 2.1 e l'equazione (3), abbiamo stimato la lunghezza d'onda  $\lambda_{\text{ignoto}}$  di ciascuna riga.

Table 5: Misure per il Gas Ignoto [Prisma]

$\delta_{\min} (^{\circ})$	$n_{\text{calc}}$	$\lambda_{\text{ignoto}} \text{ (nm)}$
50,10	1,639 $\pm 0,001$	629,2 $\pm 15,1$
50,40	1,641 $\pm 0,001$	604,5 $\pm 13,9$
51,00	1,648 $\pm 0,001$	565,0 $\pm 11,6$
51,40	1,652 $\pm 0,001$	540,7 $\pm 10,4$
52,30	1,661 $\pm 0,001$	500,8 $\pm 8,6$
53,80	1,675 $\pm 0,001$	448,8 $\pm 6,7$
54,80	1,684 $\pm 0,001$	422,8 $\pm 5,9$

In Figura 4 mostriamo lo spettro del gas ignoto, ricostruito a partire dalle lunghezze d'onda  $\lambda_{\text{ignoto}}$  da noi calcolate.

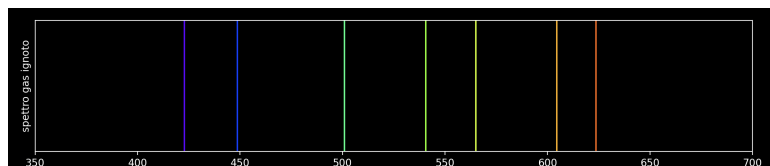


Figure 4: Spettro del gas ignoto



A questo punto abbiamo confrontato le lunghezze d'onda sperimentali  $\lambda_{ignoto}$  con i valori tabulati NIST per gli spettri di emissione di alcuni gas noti ( Hg, Ne e Kr). L'identificazione si basa sulla migliore corrispondenza tra lo spettro osservato e uno spettro di riferimento.

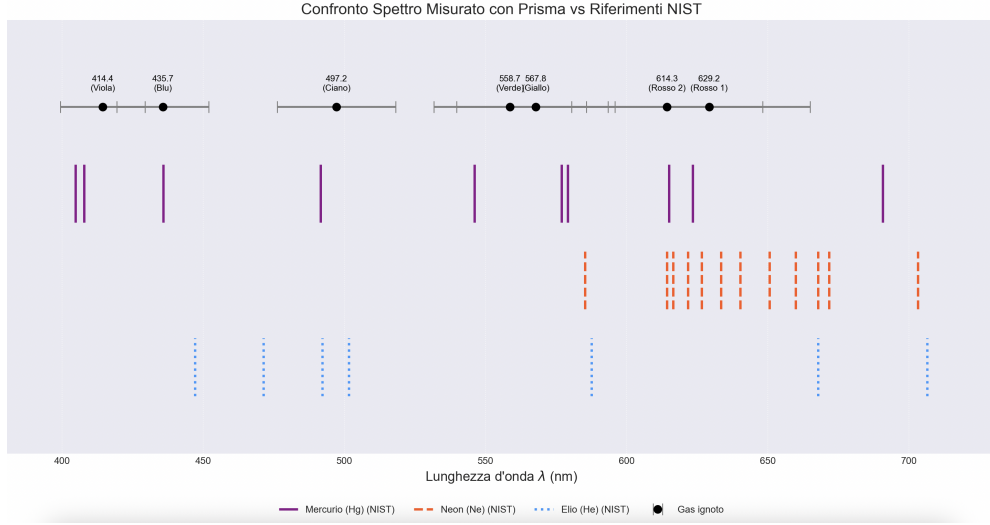


Figure 5: Confronto degli spettri per identificare il gas ignoto

Dal grafico si può ipotizzare che il gas ignoto sia mercurio. Per quantificare la compatibilità, abbiamo eseguito un test del  $\chi^2$ , confrontando le sette lunghezze d'onda misurate con le corrispondenti righe note del mercurio, selezionando per ciascuna la linea NIST più vicina. Il test ha restituito un  $p$ -value = 0.985, indicando un'eccellente compatibilità tra i nostri dati e lo spettro del mercurio. Questo risultato supporta fortemente l'identificazione del gas ignoto come mercurio, poiché le eventuali discrepanze rientrano pienamente nelle incertezze sperimentali.

## 2.3 Conclusioni

- **Fit dei parametri di Cauchy:** abbiamo stimato con successo i parametri  $A$  e  $B$  utilizzando sei righe spettrali del mercurio, note per precisione e intensità. Questo ha permesso una caratterizzazione affidabile del prisma in funzione della lunghezza d'onda, con un fit compatibile entro le incertezze sperimentali.
- **Adeguatezza del modello:** il modello di Cauchy a due termini  $n(\lambda) = A + B/\lambda^2$  descrive correttamente la dispersione nel range 400 nm to 580 nm, senza necessità di termini aggiuntivi.
- **Identificazione del gas ignoto:** tramite l'inversione della legge di Cauchy abbiamo ottenuto le  $\lambda$  associate al gas ignoto. Il confronto con gli spettri NIST e il test del  $\chi^2$  (con  $p$ -value = 0,985) confermano una forte compatibilità con il mercurio, suggerendo con alta affidabilità che il gas ignoto sia proprio Hg.

### 3 Reticolo di diffrazione

Un reticolo di diffrazione è costituito da una serie di fenditure parallele ed equidistanti, separate da una distanza  $d$  detta *passo del reticolo*. Quando un fascio di luce policromatica incide sul reticolo, ogni fenditura agisce come una sorgente di onde secondarie (secondo il principio di Huygens-Fresnel). Queste onde interferiscono tra loro, producendo massimi di intensità luminosa a specifici angoli  $\theta_m$  per ciascuna lunghezza d'onda.

La condizione per l'interferenza costruttiva, che determina la posizione angolare dei massimi principali, è data dalla relazione fondamentale del reticolo:

$$d \sin(\theta_m) = m\lambda \quad (4)$$

dove:

- $d$  è il passo del reticolo (distanza tra due fenditure adiacenti),
- $\theta_m$  è l'angolo di diffrazione del massimo di ordine  $m$  rispetto alla direzione del massimo centrale ( $m = 0$ ),
- $m$  è l'ordine del massimo (intero positivo o negativo),
- $\lambda$  è la lunghezza d'onda della luce incidente.

Il massimo centrale ( $m = 0$ ) corrisponde alla direzione non deviata e si verifica per tutte le lunghezze d'onda a  $\theta = 0^\circ$ . Per  $m \neq 0$ , la posizione angolare  $\theta_m$  dipende da  $\lambda$ , permettendo di separare le componenti spettrali della luce e quindi di analizzarne la composizione.

#### 3.1 Caratterizzazione sperimentale del reticolo

In laboratorio, abbiamo caratterizzato sperimentalmente tre reticoli con densità di 300, 600 e 1200 linee/mm. La procedura consiste nel misurare la posizione angolare  $\theta$  di un massimo di interferenza corrispondente a una riga spettrale di lunghezza d'onda nota  $\lambda$ , e nell'utilizzare la relazione (4) per ricavare il valore del passo  $d$ :

$$d = \frac{n\lambda}{\sin \theta} \quad (5)$$

Questo metodo permette non solo di verificare la coerenza tra il passo nominale e quello misurato, ma anche di studiare la dispersione angolare e la risoluzione spettrale del reticolo in funzione dell'ordine di diffrazione osservato.

##### 3.1.1 Analisi dati

**Primo reticolo: 600 linee/mm** Passo atteso:

$$d_{\text{atteso}} = \frac{1}{600} = 1.667 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Assumendo un'incertezza sull'angolo di  $\pm 2.5^\circ$ , si ottiene:

$$d_{\text{misurato}} = (1.630 \pm 0.183) \times 10^{-6} \text{ m}$$

**Secondo reticolo: 300 linee/mm** Passo atteso:

$$d_{atteso} = \frac{1}{300} = 3.333 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Sono stati misurati i seguenti angoli per ordini successivi del doppietto del sodio e calcolati i passi con  $\sigma_\theta = 2.5^\circ$ :

$$\begin{aligned} n = 1 : \quad \theta = 10^\circ &\Rightarrow d = (3.395 \pm 0.840) \times 10^{-6} \text{ m} \\ n = 2 : \quad \theta = 21^\circ &\Rightarrow d = (3.290 \pm 0.374) \times 10^{-6} \text{ m} \\ n = 3 : \quad \theta = 33^\circ &\Rightarrow d = (3.248 \pm 0.218) \times 10^{-6} \text{ m} \\ n = 4 : \quad \theta = 46.8^\circ &\Rightarrow d = (3.235 \pm 0.133) \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned}$$

**Terzo reticolo: 1200 linee/mm** Passo atteso:

$$d_{atteso} = \frac{1}{1200} = 8.333 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Misura a  $\theta = 45^\circ$  ( $n = 1$ ) con  $\sigma_\theta = 2.5^\circ$ :

$$d = (8.338 \pm 0.036) \times 10^{-7} \text{ m}$$

**Test statistico** Il test t viene calcolato con:

$$t = \frac{d_{misurato} - d_{atteso}}{\sigma_d}$$

- **Reticolo 600 linee/mm:**

$$\begin{aligned} d_{atteso} &= 1.667 \times 10^{-6} \text{ m} \\ d_{misurato} &= (1.630 \pm 0.183) \times 10^{-6} \text{ m} \\ t &= \frac{1.630 - 1.667}{0.183} \approx -0.202 \end{aligned}$$

- **Reticolo 300 linee/mm:**

$$\begin{aligned} d_{atteso} &= 3.333 \times 10^{-6} \text{ m} \\ - d &= (3.395 \pm 0.840) \times 10^{-6} \text{ m} \Rightarrow t \approx 0.074 \\ - d &= (3.290 \pm 0.374) \times 10^{-6} \text{ m} \Rightarrow t \approx -0.115 \\ - d &= (3.248 \pm 0.218) \times 10^{-6} \text{ m} \Rightarrow t \approx -0.390 \\ - d &= (3.235 \pm 0.133) \times 10^{-6} \text{ m} \Rightarrow t \approx -0.737 \end{aligned}$$

- **Reticolo 1200 linee/mm:**

$$\begin{aligned} d_{atteso} &= 8.333 \times 10^{-7} \text{ m} \\ d &= (8.338 \pm 0.036) \times 10^{-7} \text{ m} \Rightarrow t \approx 0.139 \end{aligned}$$

In tutti i casi i valori di  $t$  risultano inferiori a 1 in modulo, indicando che non vi sono differenze statisticamente significative tra i passi misurati e quelli attesi, compatibilmente con le incertezze.

## 3.2 Identificazione del gas ignoto

Abbiamo analizzato lo spettro prodotto da un gas ignoto, misurando le posizioni angolari dei massimi e determinando le lunghezze d'onda associate con:

$$\lambda = \frac{d \sin \theta}{n}$$

I valori ottenuti (con passo  $d = 3.333 \mu\text{m}$ ) sono:

- Viola: 435.1 nm
- Verde: 492.7 nm
- Arancio: 578.8 nm
- Rosso: 664.6 nm

**Confronto con spettri noti** Confrontando le righe con database NIST per Neon ed Hg, si osservano più corrispondenze con il mercurio, come si vede nell'immagine sottostante:

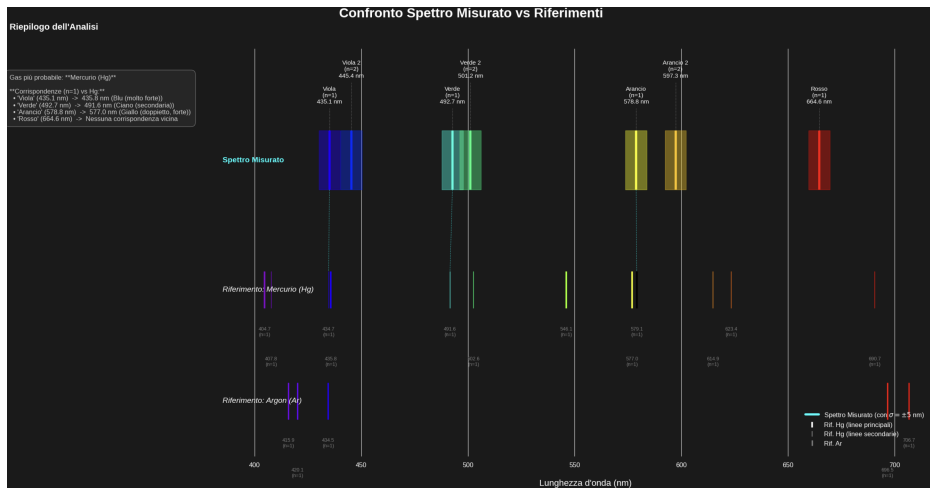


Figure 6: Spettro del gas ignoto osservato sperimentalmente: le lunghezze d'onda misurate sono rappresentate come righe verticali colorate. Il confronto con le righe spettrali note del mercurio e dell'argon consente di identificare il gas presente nella lampada.

## Analisi degli ordini superiori e sovrapposizione

Abbiamo calcolato gli angoli a cui dovrebbero apparire le righe UV/Viola del mercurio agli ordini  $n = 2$  e  $n = 3$ . Si è trovata una corrispondenza per la linea osservata a  $8.5^\circ$  (verde): essa coincide con la riga UV-C a 253.7 nm al secondo ordine. Altre corrispondenze:

- Viola 2 ( $\theta = 15.5^\circ$ ): corrisponde a 435.8 nm al secondo ordine
- Arancio 2 ( $\theta = 21.0^\circ$ ): corrisponde a 404.7 nm al terzo ordine

### Analisi statistica (z-score)

- Viola:  $\Delta\lambda = -0.71 \text{ nm} \Rightarrow z = 0.44$
- Verde:  $\Delta\lambda = +1.10 \text{ nm} \Rightarrow z = 0.58$
- Arancio:  $\Delta\lambda = -0.27 \text{ nm} \Rightarrow z = 0.48$
- Rosso:  $\Delta\lambda = -26.14 \text{ nm} \Rightarrow z = -1.50$

In tutti i casi, tranne quello del rosso, le deviazioni risultano statisticamente non significative (entro  $2\sigma$ ), compatibili con le incertezze stimate.

**Osservazione sulla riga rossa** La discrepanza osservata per la riga rossa potrebbe essere dovuta al fatto che la riga del mercurio a 690.7 nm è molto più debole rispetto alle altre nel visibile, ed è spesso difficile da distinguere chiaramente nello spettro. È possibile che la riga osservata sperimentalmente a 664.6 nm non corrisponda realmente a quella del mercurio, ma sia dovuta a una sovrapposizione con un'altra riga (es. residui di gas presenti nel tubo), o a un errore nella determinazione dell'ordine  $n$ . Un altro possibile fattore è la scarsa sensibilità dello strumento (occhio o sensore) nell'intervallo del rosso profondo, che può portare a una sottostima dell'angolo oppure a una confusione con righe vicine più intense. Pertanto, l'incompatibilità osservata è plausibile e riconducibile a limiti strumentali e percettivi.

### 3.3 Conclusioni

Le misure effettuate con i tre reticoli a 300, 600 e 1200 linee/mm hanno fornito risultati in buon accordo con i passi teorici attesi. Le discrepanze osservate sono pienamente compatibili con le incertezze sperimentali, principalmente dovute alla lettura angolare, stimata con un'incertezza di circa  $\pm 2.5^\circ$ . Il confronto tra più ordini di diffrazione per una stessa riga ha mostrato un'efficace riduzione dell'errore, confermando che l'uso di ordini superiori consente una stima più precisa del passo  $d$  del reticolo.

L'identificazione del gas ignoto, eseguita a partire dalla misura delle lunghezze d'onda delle righe spettrali, ha portato a una chiara attribuzione al mercurio. In particolare, le lunghezze d'onda osservate coincidono entro l'incertezza con quelle del mercurio riportate nei database spettrali. Inoltre, l'analisi delle possibili sovrapposizioni dovute agli ordini superiori ha permesso di spiegare la presenza di righe "anomale" o fuori dallo spettro visibile, confermando così la validità dell'interpretazione.

Un ulteriore elemento di analisi ha riguardato la valutazione statistica della significatività degli scarti tra le righe misurate e quelle di riferimento. In nessun caso è stata osservata una deviazione statisticamente significativa (tutti gli z-score inferiori a 2), rafforzando l'affidabilità delle misure e l'identificazione proposta.

### Osservazioni finali e considerazioni metodologiche

- Le misure angolari mostrano una buona riproducibilità, suggerendo che l'errore dominante sia di tipo casuale ma sotto controllo. Sarebbe tuttavia opportuno ripetere le misure in condizioni differenti per stimare meglio l'incertezza complessiva.

- In alcuni casi si è osservata una leggera differenza tra l'angolo misurato a destra e a sinistra rispetto alla posizione centrale del reticolo. Questo potrebbe indicare la presenza di un errore sistematico dovuto a malallineamenti o difetti dell'apparato. Una strategia utile è quella di considerare la media dei due angoli per ridurre l'effetto sistematico e ottenere una stima più affidabile di  $\lambda$ .
- Per la stima del passo del reticolo con il doppietto del sodio, risulta più preciso misurare la separazione angolare tra le due righe e ricavare  $d$  dall'ordine noto e dalla differenza delle  $\lambda$ , piuttosto che considerare una singola riga.
- L'analisi delle righe appartenenti a ordini superiori ha fornito un utile strumento diagnostico, permettendo di distinguere tra righe reali e sovrapposizioni armoniche, che potrebbero altrimenti portare a interpretazioni errate dello spettro.
- Infine, l'integrazione dei dati sperimentali con fonti affidabili (es. database NIST) e l'uso di strumenti statistici per la validazione delle misure rappresentano un valore aggiunto che aumenta la robustezza dell'intero processo di identificazione.

Nel complesso, l'esperimento ha permesso di comprendere in modo diretto e quantitativo il funzionamento di un reticolo di diffrazione, mettendo in luce la sua capacità di separare e identificare con precisione le componenti monocromatiche di una sorgente luminosa complessa.