# Aprofundamento de funções

Abordagem das funções por vários pontos de vista complementares: descrição como conceito matemático, estudo analítico e representação gráfica. Consolidação da importante noção de função real de uma variável real.

Profa. Loisi Carla Monteiro Pereira

## Propósito

Compreender a relevância do conceito de função para a interpretação e a resolução de problemas diversos, inclusive fenômenos naturais, sociais e de outras áreas.

## Objetivos

- Reconhecer graficamente o domínio, a imagem e o contradomínio de funções.
- Identificar graficamente os tipos de funções: injetora, sobrejetora e bijetora.
- Definir funções crescentes e decrescentes.
- Definir funções periódicas.

## Introdução

Para fazermos modelos matemáticos de nossa realidade, associamos quantidades numéricas aos acontecimentos, fatos e objetos que desejamos estudar ou analisar.

É comum obtermos relações expressas em termos de fórmulas ou expressões matemáticas, porém, muitas vezes, as expressões obtidas nem sempre dão origem a um número real para todos os possíveis valores da variável independente.

Nosso estudo se restringirá ao estudo das funções reais de variável real, ou seja, tanto o domínio quanto o contradomínio são subconjuntos de R ou até mesmo todo o R. Mostraremos também como as funções se comportam em determinados intervalos da reta real e algumas de suas aplicações.

Além disso, se olharmos para a natureza, vamos descobrir muitos fenômenos que acontecem de forma repetitiva em intervalos de tempos regulares, obedecendo, portanto, a padrões cíclicos, como as estações do ano e os batimentos cardíacos, por exemplo. Fenômenos como esses são modelados usando uma classe importante de funções: as periódicas. Dentre a classe das funções periódicas, destacaremos as chamadas funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

Para começar, confira o vídeo, a seguir, para vermos o quanto é importante aprofundarmos sobre as funções.

### Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

# Definições básicas das funções

Confira o vídeo, a seguir, em que iremos relembrar as definições básicas relativas às funções.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

# Função

O domínio da função f é o maior subconjunto de R onde a expressão (ou fórmula) que define a função assume valores reais, ou seja:

$$D(f) = \{x \in R \mid f(x) \in R\}$$

Veja nas imagens três representações gráficas de funções cuja lei de formação é $f(x) = x^2$ e os seus domínios.

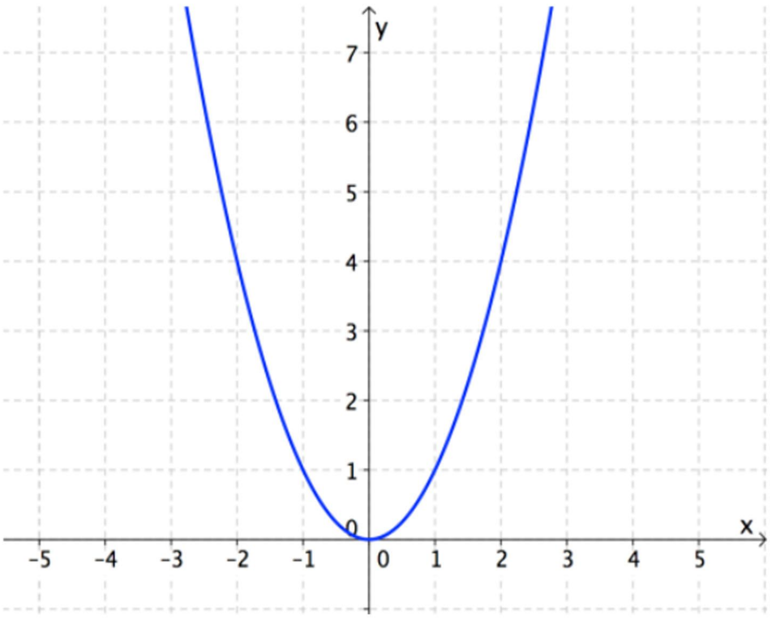



Gráfico: D1 = R

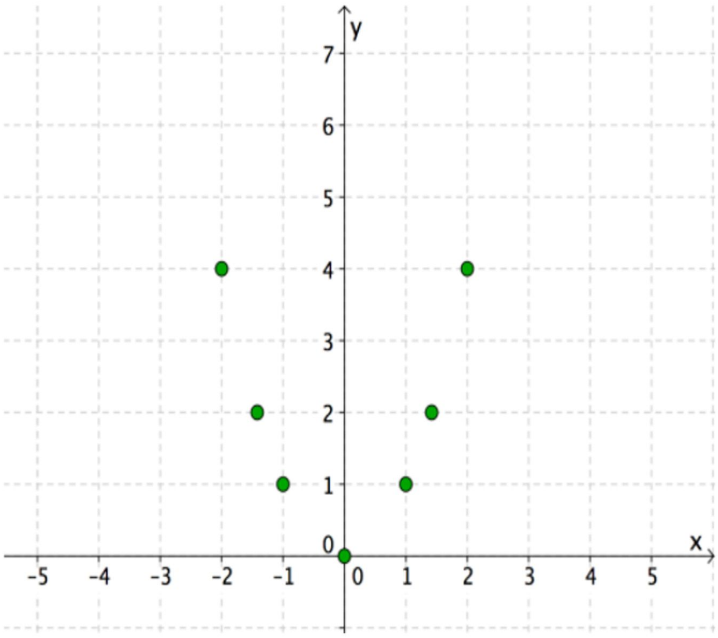



Gráfico: D2 = {−2;−√2;−1;0;1;√2;2}

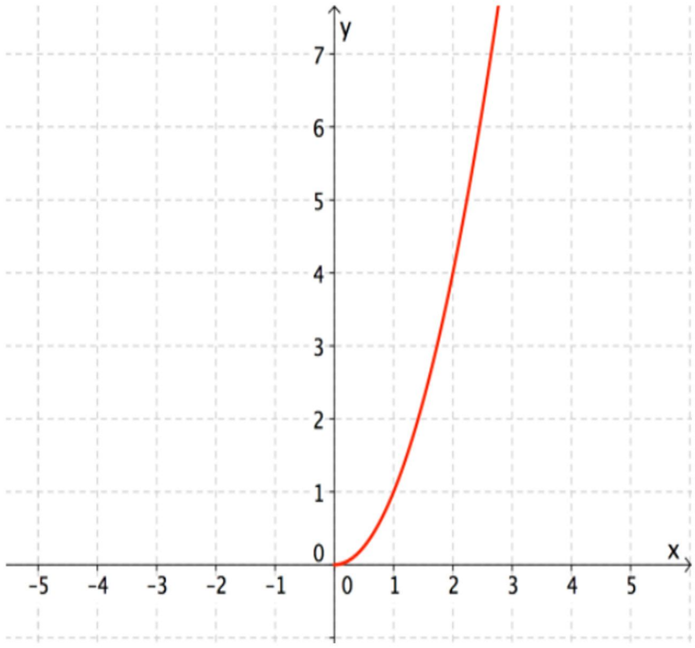



Gráfico: D3 = [0;+∞[

Quando uma função está definida por uma fórmula matemática, a fórmula em si pode impor restrições sobre os valores reais para os quais podemos calculá-la.

## Exemplo 1

Qual é o domínio da função f(x) = 1 ÷ x? Veja o gráfico a seguir:

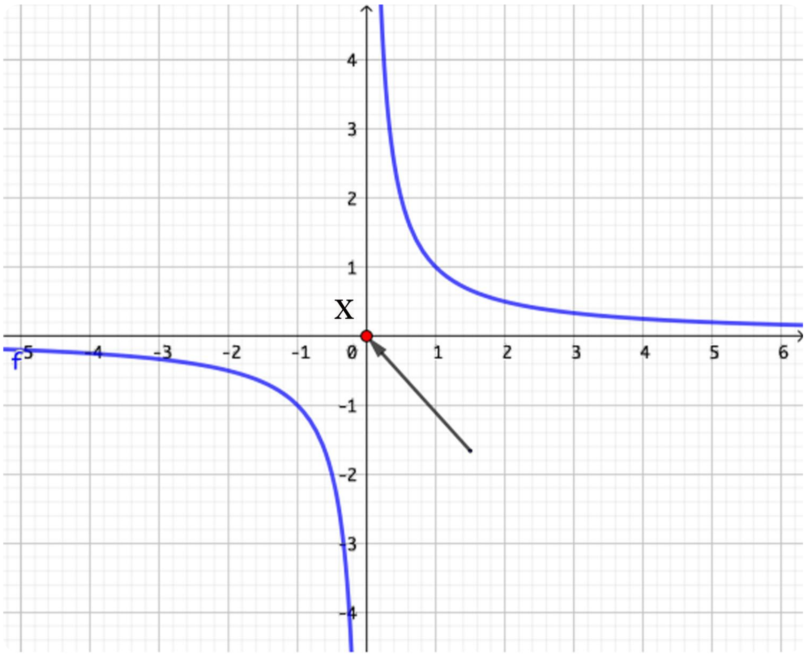



Gráfico: Função f(x) = 1 ÷ x

Repare que x = 0 não está no domínio dessa função, pois a divisão por 0 (zero) não está definida. Logo, D(f) = $R^*$. O asterisco indica que estamos tratando dos reais positivos excluindo o zero.

## Exemplo 2

Qual é o maior subconjunto de X ⊂ R, tal que a fórmula g(x) = √x define uma função f: X → R? Observe o gráfico a seguir:

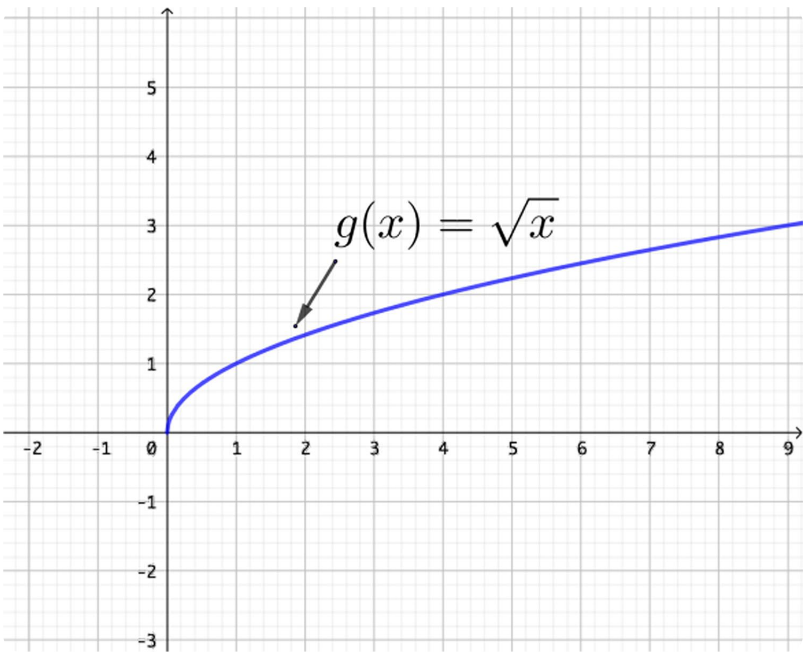



Gráfico: A fórmula g(x) = √x

Como só podemos calcular a raiz quadrada de valores não negativos, temos: D(g) = [0; +∞[.

## Exemplo 3

Vamos ver na prática como determinar o domínio de uma função? Pensando em construir uma piscina retangular em sua casa, João recorreu à Revista Casa e Jardim, da Globo, onde encontrou um modelo de piscina que contracena com a represa no projeto assinado pela arquiteta Eliana Marques Lisboa.

Sabendo que o terreno onde será construída a piscina deve ser cercado com 240m de cerca, faça o que se pede:

- Expresse a área do terreno em metros quadrados em função do comprimento do terreno;
- Determine o domínio da função resultante. Lembre-se de que a expressão que determina a área de uma figura retangular é dada pelo produto entre o comprimento e a largura.

## Resolução da prática 3

Confira o vídeo, a seguir, da resolução da prática 3.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

## Exemplo 4

Sabendo que o comprimento do terreno de João é de $100m$ , utilize a expressão obtida $A = x \times (120-$ x) para determinar a área do terreno onde será construída a piscina.

Resolução da questão

Conforme visto no exemplo 3 , a área do terreno é dada pela expressão $A = x \times (120 - x)$ , onde $x$ é o número de metros de comprimento do terreno.

Logo, temos:
$< br > A(100) = 100 \times (120 - 100) = 2000m^2 < br >$

Isso significa que a imagem de 100 pela função $A$ é 2000 .

Os gráficos das funções podem fornecer **informações visuais** importantes sobre uma função. O gráfico de uma função pode ser definido como:

$$\text{Graf}(f) = \{(x; f(x)) \mid x \in D(f)\}$$

Portanto, a ordenada y de um ponto do gráfico da função f é o valor de f na abscissa x correspondente.

O gráfico de f também nos permite visualizar o domínio e a imagem, além de muitas outras informações.

# Leitura gráfica e domínio de imagem

## Domínio da função

O domínio da função $f$ é o maior subconjunto de $R$, onde a expressão (ou fórmula) que define a função assume valores reais, ou seja:

> Como saber se um número real a pertence ao domínio de uma função $f$ ?

O número real a pertence ao domínio de uma função $f$ se a reta vertical $x = a$ corta o gráfico de $f$ em um ponto. Como $f$ é uma função, este ponto é necessariamente único, conforme visto no seguinte gráfico:

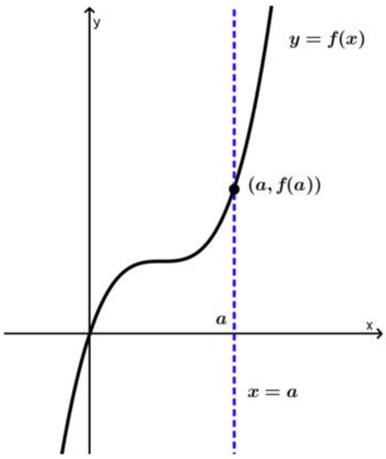



Gráfico: Número real a e a função \(f\)

## Exemplo 1

Considere os seguintes dados de taxa de crescimento 2010-2060 do Brasil e de Tocantins:

Gráfico: Dados de taxa de crescimento 2010-2060 do Brasil e de Tocantins

Verifique que, no ano de 2030, temos uma única taxa de crescimento, tanto no Brasil quanto em Tocantins.

> Como saber se um número real $b$ pertence à imagem de uma função $f$ ?

O número real b pertence à imagem de uma função $f$ se a reta horizontal $y = b$ cortar o gráfico de $f$ em pelo menos um ponto.

Como saber se um número real a pertence à imagem de uma função $f$ ? Confira!

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

### Exemplo 2

Verifique que o valor 0,82 pertence tanto à imagem da função que representa a taxa de crescimento no Tocantins quanto à função que representa a taxa de crescimento no Brasil, em 2018 e 2029, respectivamente. Veja o gráfico da taxa de crescimento 2010-2060 do Brasil e de Tocantins, a seguir:

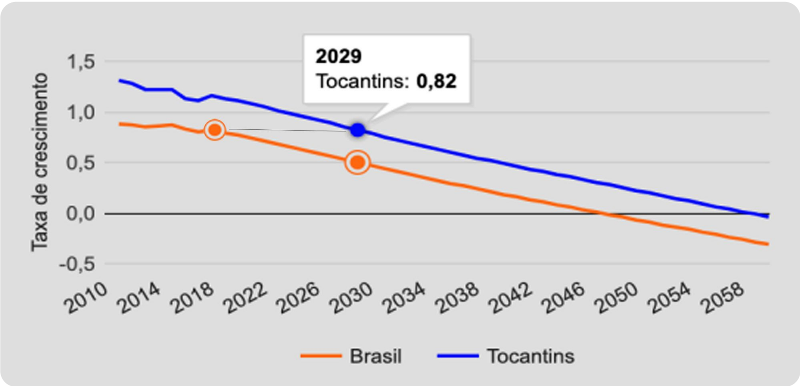



Gráfico: Taxa de crescimento 2010-2060 do Brasil e de Tocantins

## Domínio

Neste vídeo, confira a definição do domínio da função.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

### Exemplo 1

Dado o gráfico de uma função, uma forma de encontrar o domínio da função é projetar o gráfico no eixo $O_x$ .

Observe o gráfico da função $f$ :

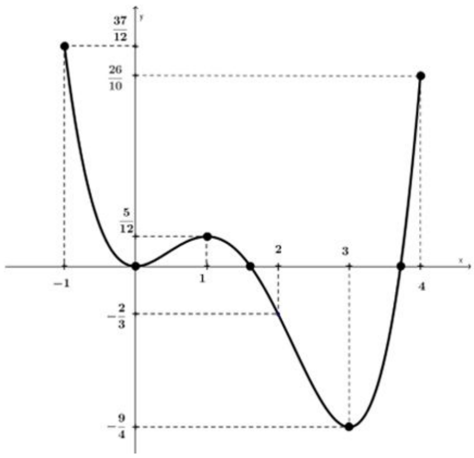



Gráfico: Função \(f\)

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no Eixo $O_x$ ? Confira no gráfico a seguir:

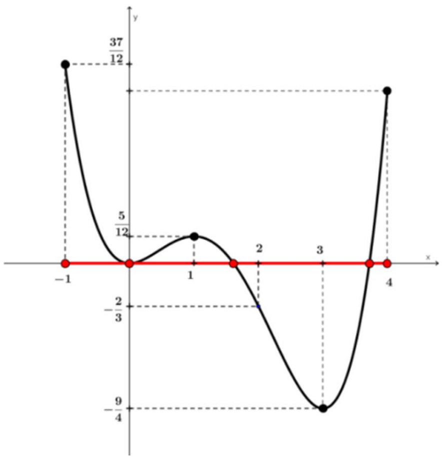



Gráfico: A função no eixo \(O_x\)

Vemos que o domínio da função $f$ é o intervalo no eixo das abscissas indicado em vermelho. Seu domínio é o intervalo fechado: $D(f) = [-1, 4]$

## Exemplo 2

Observe o gráfico da função g:

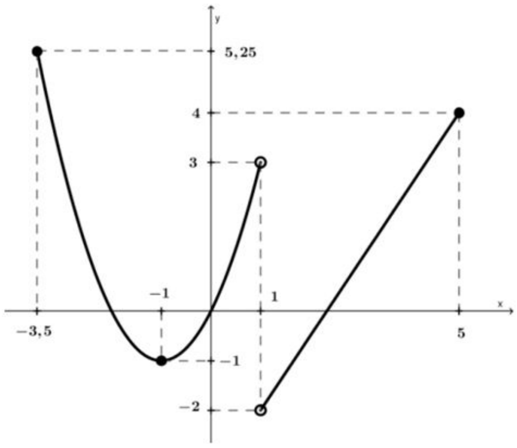



Gráfico: Função g

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no eixo $O_x$ ? Confira a seguir:

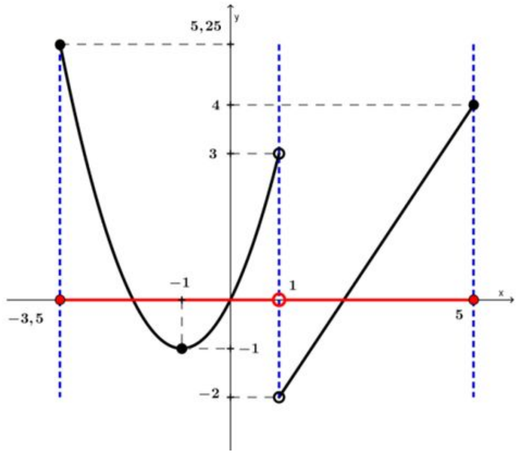



Gráfico: A função g projetada no eixo Ox

Vemos que o domínio da função g é o conjunto no eixo das abscissas indicado em vermelho. Seu domínio é a união de intervalos disjuntos (intervalos cuja interseção é vazia):

$$D(g) = \left[-\frac{7}{2}, 1\right) \cup (1, 5)$$

## Domínio da função

Confira o vídeo, a seguir, de mais um exemplo de domínio da função.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

# Imagem

## Exemplo 1

Dado o gráfico de uma função, uma forma de encontrar a imagem da função é projetar o seu gráfico no Eixo $O_y$ .

Observe o gráfico da função $f$

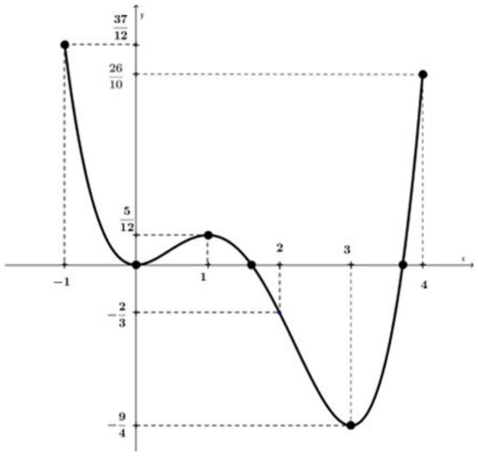



Gráfico: Função \(f\)

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no eixo $O_y$? Veja a seguir:

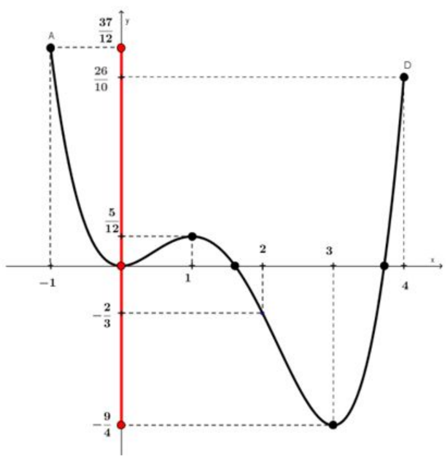



Gráfico: A função no eixo Oy

Vemos que a imagem da função $f$ é o intervalo fechado indicado em vermelho no Eixo $O_y$ . Sua imagem é o intervalo fechado.

$$\left[-\frac{9}{4}; \frac{37}{12}\right], \mathrm{Im}(f) = \left[-\frac{9}{4}; \frac{37}{12}\right]$$

## Exemplo 2

Observe o gráfico da função g :

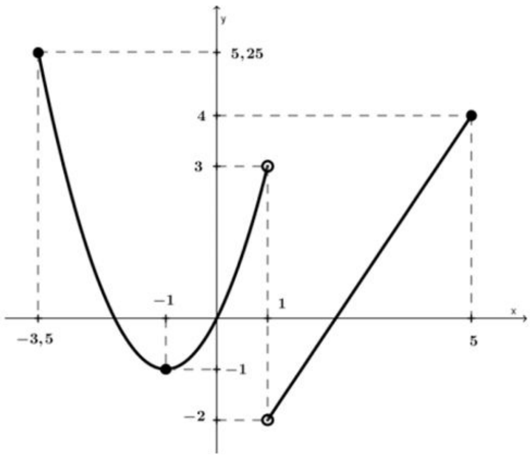



Gráfico: A função g

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no Eixo $O_y$? Confira a seguir:

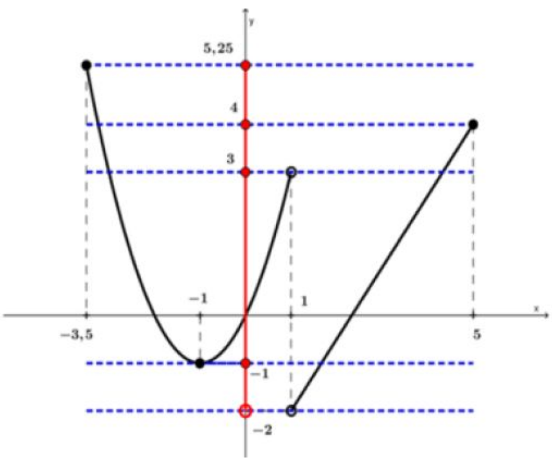



Gráfico: A função g projetada no Eixo Oy

Vemos que a imagem da função $g$ é o intervalo indicado em vermelho no Eixo $O_y$ . Sua imagem é o intervalo ( $-2; 5, 25]$ .

$$Im(g) = (-2; 5, 25]$$

## Exemplo 3

Considere o gráfico da função h:

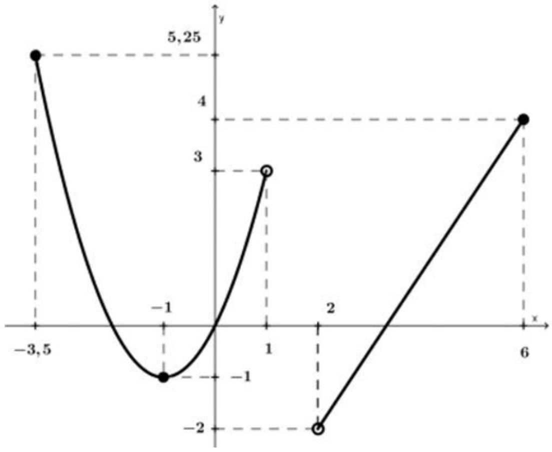



Gráfico: Função h

Se projetarmos o gráfico da função no eixo $O_y$, vemos que a imagem da função h é o intervalo indicado em vermelho no eixo $O_y$, conforme mostrado a seguir:

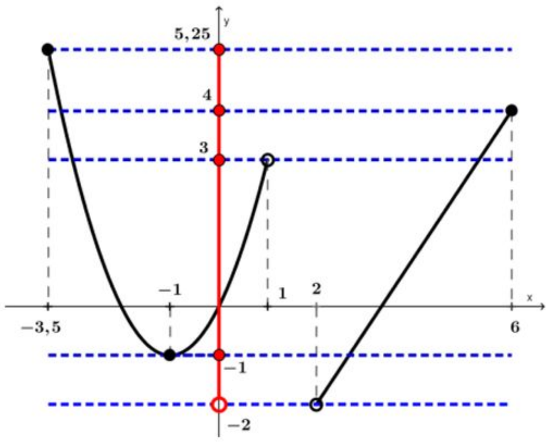



Gráfico: A função no eixo Oy

Sua imagem é o intervalo $(-2; 5,25)$ .

$Im(h) = (-2; 5,25]$

Em resumo, é possível determinar a imagem de um conjunto de pontos:

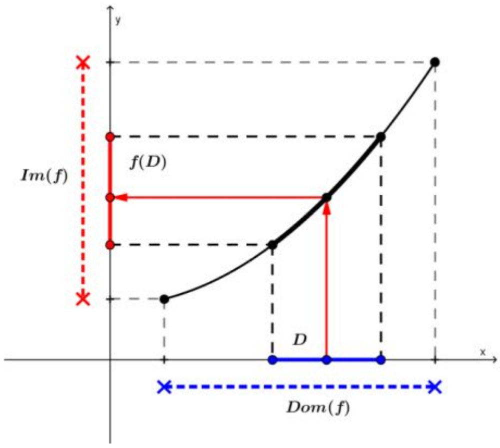



Gráfico: Imagem de um conjunto de pontos

Se $D$ é um subconjunto do domínio da função $f$ (pintado de azul no gráfico), então, a imagem deste subconjunto é dada por $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$.

## Exemplo 4

Confira o vídeo, a seguir, de mais um exemplo de imagem da função.

### Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

## Exemplo 5

Observe o gráfico da função f e o intervalo $[-\,^2/_3;\, ^5/_{12}]$ destacado em verde no eixo $O_y$, que é um subconjunto da imagem de f.

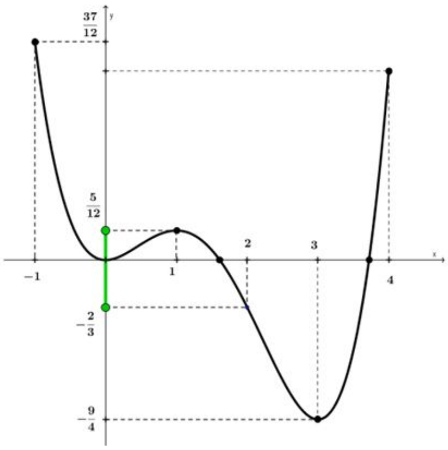



Gráfico: Função f

Ao traçar as retas $y = {}^5/_{12}$ e $y = -\,^2/_3$ de forma horizontal, partindo no eixo $O_y$ temos:

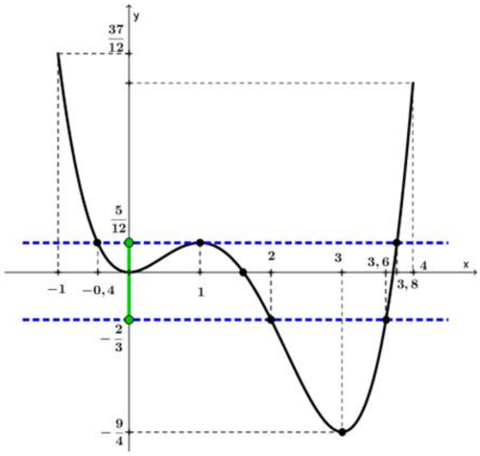


Gráfico: as retas \(y=5 / 12\) e \(y=-2 / 3\)

Se pegarmos a parte do gráfico restrita à região entre as retas y = $-{}^{2}/_{3}$ e y = ${}^{5}/_{12}$ temos:

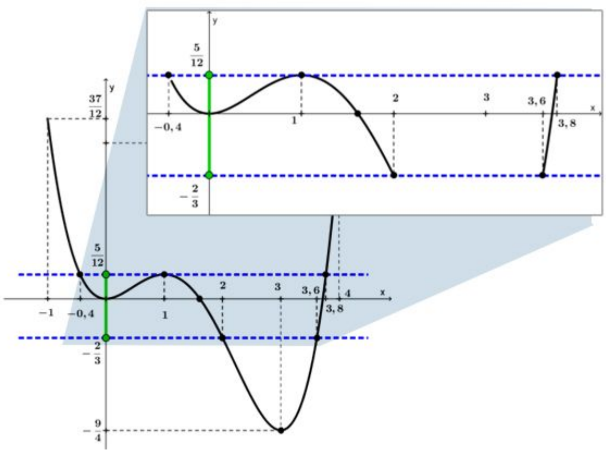


Gráfico: A região entre as retas y = − 2 / 3 e y = 5 / 12

Agora, para descobrirmos a parte do domínio correspondente ao intervalo $[-{}^{2}/_{3};\ {}^{5}/_{12}]$ da imagem, basta projetarmos no eixo $O_x$. A parte do eixo $O_x$ que nos interessa está destacada em vermelho: [−0,4 ; 2] ∪ [3,6 ; 3,8]:

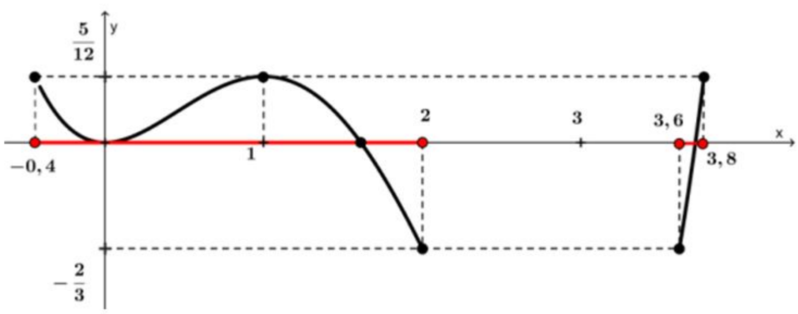


Gráfico: Parte do domínio correspondente ao intervalo [− 2 / 3 ; 5 / 12 ]

# Verificando o aprendizado

Questão 1

(PETROBRAS - 2008) Considere que f é uma função definida do conjunto D em R por: ƒ(x) = $x^2 - 4x + 8$. Sendo Im a imagem de f, é correto afirmar que, se:

A

$D = [-2, 0]$ , então $\text{Im}(f) = R^+$

B

$D = [2, +\infty[$ , então $\text{Im}(f) = [0; 4]$

C

$D = [2, +\infty[$ , então $\text{Im}(f) = R^+$

D

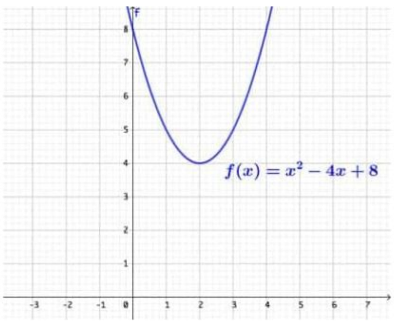
$D = [0; 2]$ , então $\text{Im}(f) = [4; 8]$

E

$D = [-2, 0]$ , então $\text{Im}(f) = [4, 8]$

A alternativa D está correta.

O gráfico da função ƒ é dado por:




Vamos analisar cada restrição do domínio da função f.

Note que, se $D = [-2, 0]$, temos que Im(ƒ) = [8, 20].

Se D = [2, +∞[, temos que Im(ƒ) = [4, +∞).

Se D = [0; 2], temos que In(ƒ) = [4 ; 8].

Questão 2

Considere a função $f(x) = 120x \div (300-x)$. Podemos afirmar que o domínio da função f é:

A

Todo número real x.

B

Todo número real x, exceto os números positivos.

C

Todo número real x, exceto x = 300.

D

Todo número real x, exceto os números negativos.

E

Todo número real x, exceto x = 0.

A alternativa C está correta.

A função não está definida para x = 300, pois este número anula o denominador.

# Funções injetoras

Neste vídeo, confira as funções injetoras.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

## Definição

Uma função f é dita injetora (ou injetiva) se, para quaisquer dois números $a_1$, $a_2$ ∈ Dom (f), tais que $a_1 \neq a_2$, os números $f(a_1)$ e $f(a_2)$ na imagem de f são também distintos.

## Injeção, sobrejeção e bijeção

Confira o vídeo, a seguir, de um exemplo de injeção, sobrejeção e bijeção.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

## Exemplo 1

A função $f(x)=x^2-1$, definida para todos os números reais, é injetiva? Observe que: $f(-2)=(-2)^2-l=3=2^2-l=f(2)$. Em outros termos, -2 e 2 têm a mesma imagem. Logo a representação gráfica fica da seguinte forma:

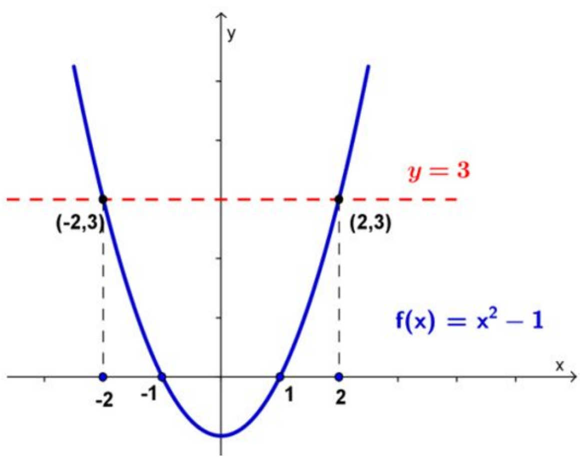



Gráfico: A função \(f\) e reta horizontal \(y=3\).

A partir da representação gráfica da função f(x) = x² − 1, é possível observar que há retas horizontais que intersectam seu gráfico mais de uma vez.

Saiba mais

Teste da reta horizontal Uma função é injetiva se, e somente se, toda reta horizontal intersecta seu gráfico em, no máximo, um ponto.

Observe que, pelo teste da reta horizontal, a função do exemplo citado não é injetiva.

## Exemplo 2

A função $g(x) = x^3$ é injetiva, conforme consta no gráfico a seguir:

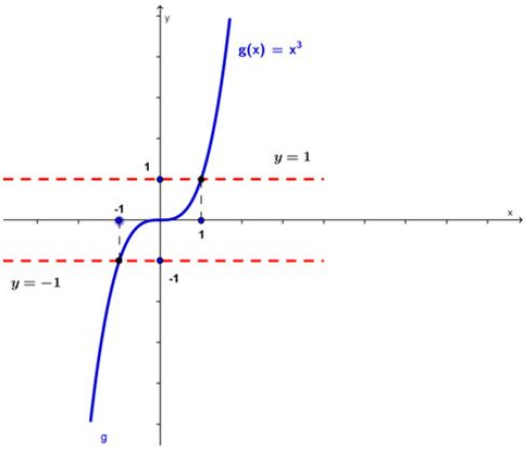



Gráfico: a função $g(x) = x^3$

**Qualquer** reta horizontal intersecta o gráfico em apenas um ponto. Logo, pelo teste da reta horizontal, a função **g** é injetiva.

A seguir, veja a definição das funções sobrejetoras e bijetoras:

### Sobrejetoras

Se **A, B** ⊂ R, uma função **f: A → B** é chamada sobrejetora ou sobrejetiva, quando f(A) = B.
Repare que, quando restringimos o contradomínio de uma função para sua imagem, ou seja, f: Dom(f) → f(Dom(f)), estamos garantindo que não há qualquer elemento do contradomínio que não seja imagem de algum elemento do domínio. Assim, essa é uma forma de garantir que a função seja sobrejetiva.

### Bijetoras

Uma função f, que é simultaneamente injetora e sobrejetora, é chamada de bijetora ou bijetiva.
Assim, a função f: Dom → f(Dom(f)) (que já é sobrejetora) será bijetora se, e somente se, for injetora.

### Funções sobrejetoras

Neste vídeo, confira as funções sobrejetoras.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

### Funções bijetoras

Neste vídeo, confira as funções bijetoras.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

## Relação geométrica entre os gráficos de uma função e sua inversa

O objetivo é mostrar graficamente a relação existente entre o gráfico de uma função bijetora e sua inversa.

Saiba mais

Lembre-se de que uma função ter inversa é equivalente a ela ser bijetiva.

Sintetizamos algumas informações sobre uma função f e sua inversa $f^{-1}$, a seguir:

$$
\begin{gathered}
f: A \rightarrow B \text{ e } f^{-1}: B \rightarrow A \\
\text{se } f \text{ 'leva' } a \text{ em } b \text{ então } f^{-1} \text{ 'traz' } b \text{ 'de volta' em } a \\
f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a \\
\operatorname{Dom}(f)=\operatorname{Im}\left(f^{-1}\right) e \operatorname{Dom}\left(f^{-1}\right)=\operatorname{Im}(f)
\end{gathered}
$$

É preciso notar que:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

Mas, o que essa equivalência significa geometricamente? Que o ponto (a , b) estar no gráfico da função f é equivalente ao ponto (a, b) estar no gráfico da função $f^{-1}$:

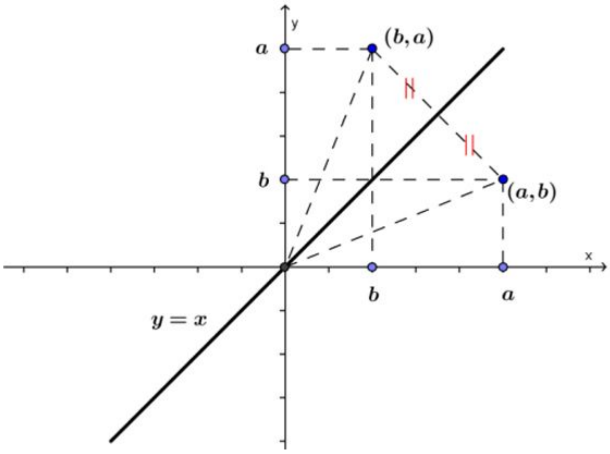



Gráfico: Simetria dos pontos (a, b) e (b, a) em relação à reta y = x

No gráfico, percebemos que os pontos (a, b) e (b, a) são simétricos em relação à reta y = x. Mas, isso é verdade para todos os pontos das funções f e $f^{-1}$.

O gráfico de $f^{-1}$ é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta y = x, conforme a seguir:

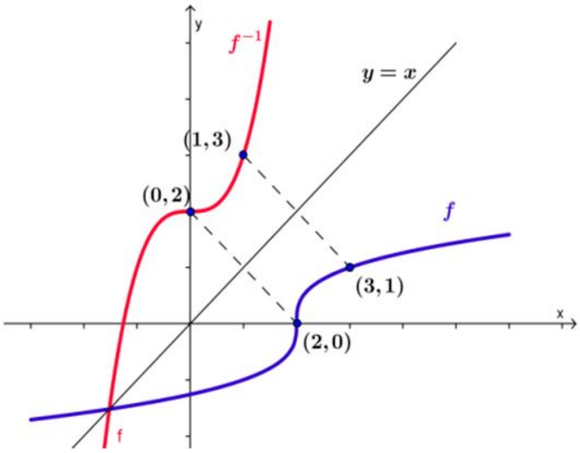
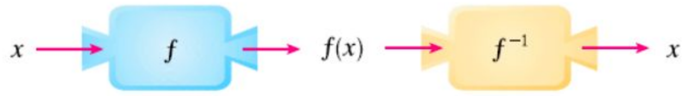



Gráfico: Simetria entre os gráficos de f e f −1

Se f e g forem funções inversas entre si, temos:

$$x = f^{-1}(f(x)) \quad y = f\left(f^{-1}(y)\right)$$

A lei da esquerda nos diz que, se começarmos em x, aplicando f, e, em seguida, $f^{-1}$, obteremos de volta x. Veja a seguinte imagem:




Resultado x

Da mesma forma, a lei da direita nos diz que, se começarmos em y, aplicando $f^{-1}$, e, em seguida, f, obteremos de volta y.

### Exemplo 1

Confira o vídeo, a seguir, de um exemplo de relação geométrica entre os gráficos de uma função e sua inversa.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

## Verificando o aprendizado

Questão 1

Considere a função bijetora $f: [1,+\infty) \to (-\infty, 3]$ definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ e seja (a, b) o ponto de interseção de f com sua inversa $f^{-1}$. O valor numérico da expressão a + b é:

A

2

B

4

C

6

D

8

E

9

A alternativa B está correta.

Repare que neste domínio a função é estritamente decrescente. Vamos buscar os pontos onde ƒ encontra a sua inversa encontrando os pontos em que ƒ intercepta a função y = x (função identidade). Logo:

Como o domínio de ƒ é o intervalo [1, +∞), o único valor de x que nos interessa é x = 2 e, para este valor, ƒ(2) = 2. Assim, o ponto buscado é (a, b) = (2, 2) e então a + b = 4.

## Questão 2

Considere a função $f:[-1,2] \rightarrow R$, dada por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ se } -1 \leq x \leq 0 \\ (x+1) \div 2, \text{ se } 0<x \leq 1 \\ -x+2, \text{ se } 1<x \leq 2 \end{cases}$$

Nestas condições, é correto afirmar que:

A

ƒ é sobrejetora.

B

ƒ é injetora.

C

ƒ é bijetora.

D

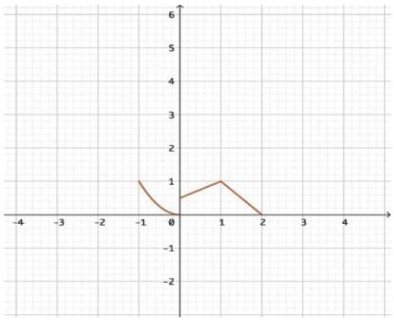
$\operatorname{Im}(f)=[0,1]$

E

$D(f)=R$.

A alternativa D está correta.

Observe o gráfico da função f :




Utilizando o teste da horizontal, vemos que a função não é injetora e, consequentemente, não é bijetora. Em contrapartida, $\mathrm{Im}(f) = [0, 1] \neq R$. Logo, a função $f$ não é sobrejetora.

# Exemplo de função crescente e decrescente

Confira o vídeo, a seguir, de um exemplo de função crescente e função decrescente.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

# Função crescente e decrescente

Neste vídeo, confira a definição de função crescente e decrescente (parte 1).

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

## Função crescente e decrescente parte 2

Neste vídeo, confira a definição de função crescente e decrescente (parte 2).

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

## Definição

Uma função f: R → R é considerada crescente quando os valores das imagens, f(x), aumentam à medida que os valores de x aumentam, ou seja, para $x_2 > x_1$, temos: $f(x_2) > f(x_1)$.

Em termos gráficos, temos:

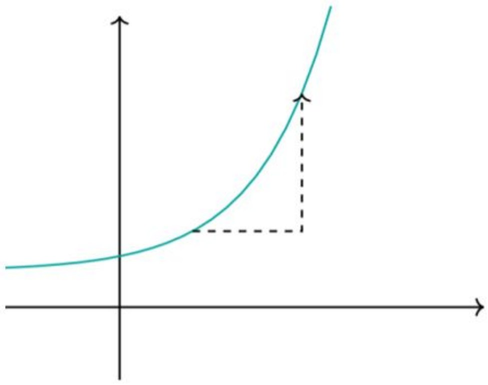


Gráfico: Função f: R → R crescente

Uma função f: R → R é considerada decrescente quando os valores das imagens, f(x), diminuem à medida em que os valores de **x** aumentam, ou seja, para $x_2 > x_1$, temos: $f(x_2) < f(x_1)$.

Em termos gráficos, temos:

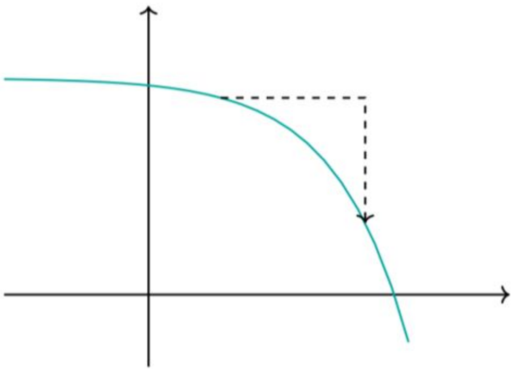


Gráfico: A função f: R → R decrescente

## Exemplo 1

O gráfico, a seguir, mostra a chuva acumulada mensal no município de Campos (RJ), em 2020, e a chuva acumulada mensal, de acordo com as normas climatológicas entre 61-90:

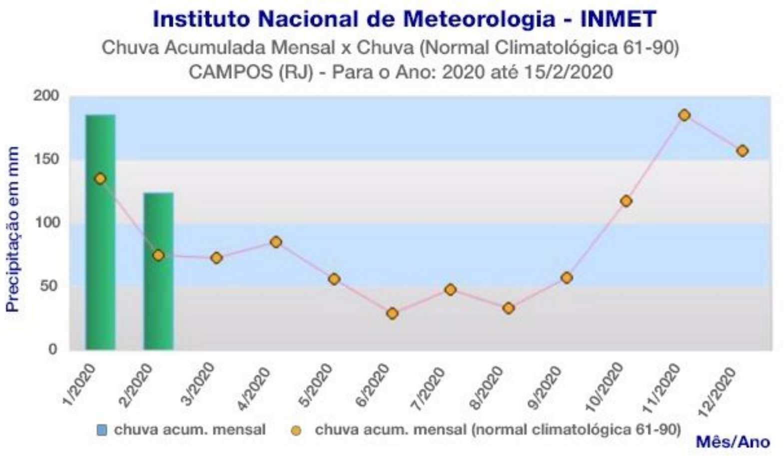



Gráfico: Dados de chuva acumulada mensal

Note que ocorreu um decréscimo da quantidade de chuva acumulada do mês de janeiro ao mês de fevereiro. Além disso, de acordo com a Normal Climatológica, no mês de outubro, a previsão é de um aumento significativo das chuvas acumuladas.

## Exemplo 2

Veja a projeção do crescimento da taxa bruta de mortalidade e natalidade do Brasil, do início de 2010 a 2058:

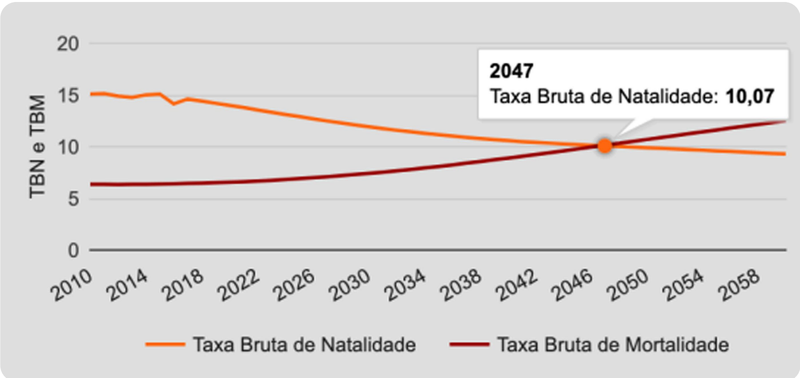



Gráfico: Dados do crescimento da taxa bruta de mortalidade e natalidade do Brasil

Observe que a taxa bruta de natalidade decresce, enquanto ocorre um crescimento na taxa bruta de mortalidade.

## Exemplo 3

Considere a função $f(x) = x^3$:

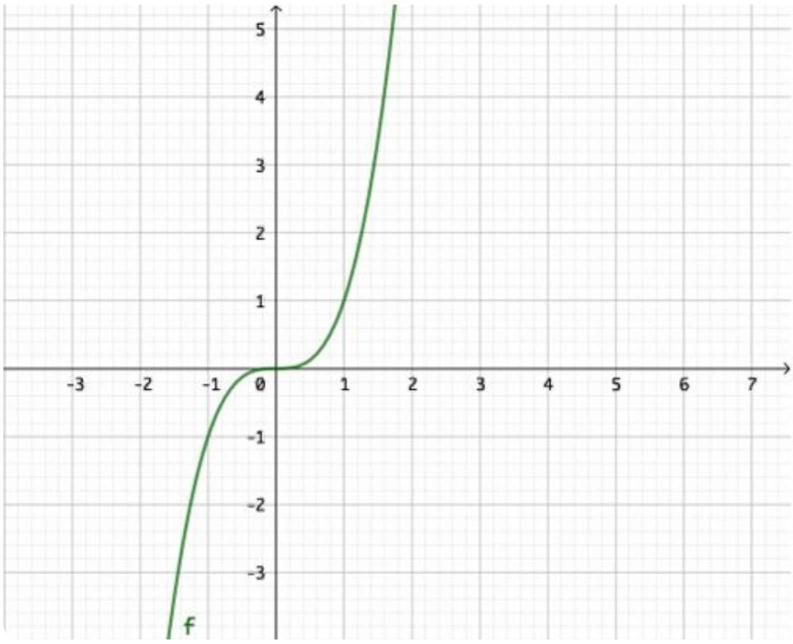


Gráfico: Função $f(x) = x^3$

Note que essa função é crescente em toda a reta real. De fato, dados $x_2 < x_1$, temos que

$$f\left(x_1\right)=x_1^3<x_2^3=f\left(x_2\right)$$

## Exemplo 4

Considere a função:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x>1 \quad -x^2, x<0 \\ 0, 0 \leq x \leq 1\end{cases}$$

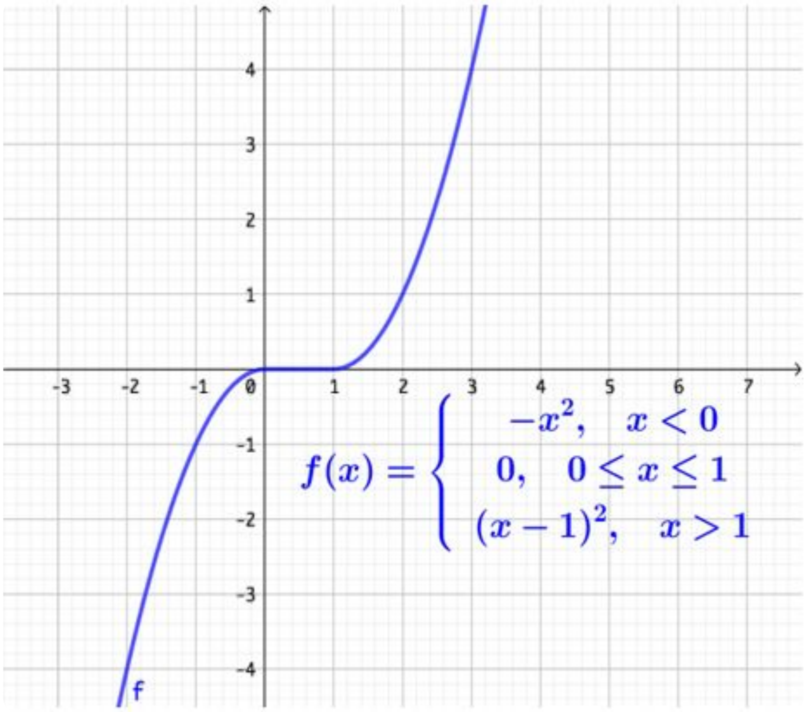


Gráfico: a função \(f(x)= \begin{cases}(x-1)^2, x>1 & -x^2, x<0 \\ 0,0 \leq x \leq 1\end{cases}\)

Observe que a função apresentada **não** é estritamente crescente em toda reta real, já que ela é constante no intervalo [0, 1].

As funções estritamente crescentes têm um papel especial em Cálculo I.

## Exemplo 5

Vamos praticar! Analise o seguinte gráfico da função:

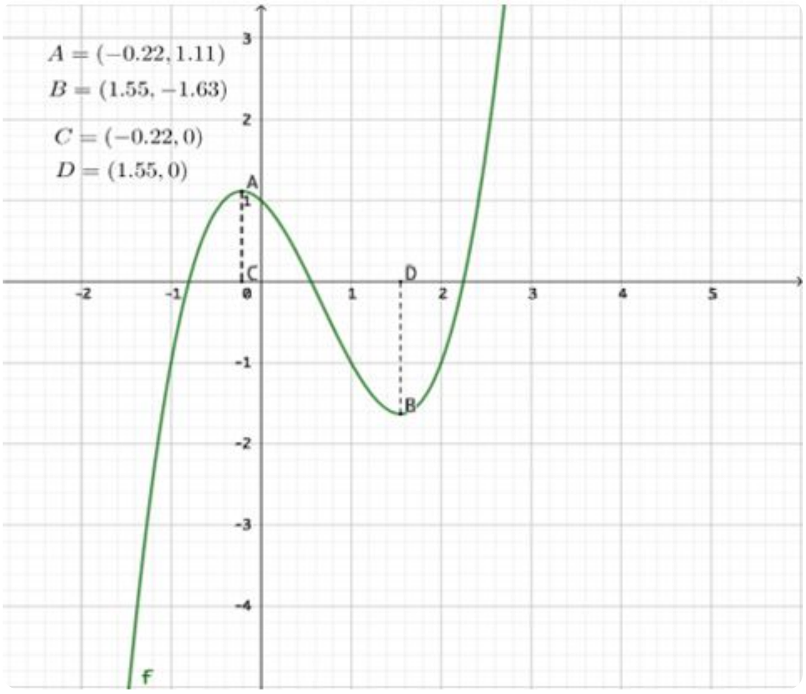


Gráfico: Função

Agora, determine os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente.

Resolução da questão

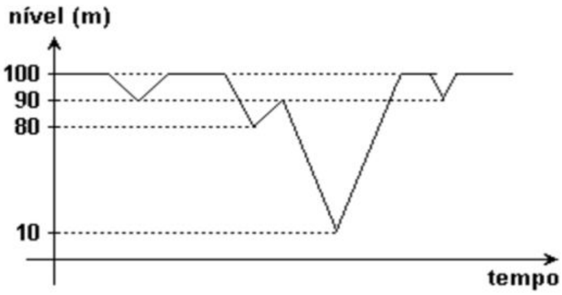
Observando o gráfico, vemos que a função é crescente em:

$-\infty, -0.22) \cup (1.55, +\infty)$ e decrescente em $(-0.22, 1.55)$.

# Verificando o aprendizado

## Questão 1

(Adaptada de: UFPE - 2017) No gráfico a seguir, temos o nível da água armazenada em uma barragem ao longo de três anos:



De acordo com o gráfico, podemos afirmar que:

A

O nível de *70m* foi atingido uma única vez.

B

O nível da água armazenada cresce em todo tempo.

C

O nível da água armazenada é estritamente decrescente.

D

O nível de *40m* foi atingido 2 vezes nesse período.

E

O nível de *20m* não foi atingido nenhuma vez nesse período.

A alternativa D está correta.

Traçando uma reta horizontal paralela ao eixo x (tempo), vemos que o nível de *40m* foi atingido 2 vezes no período de 3 anos. Isso já mostra que a função, cujo gráfico tem a representação da figura, não é injetora. Além disso, como existem oscilações no nível da água armazenada, em alguns instantes ela cresce e em outros decresce. Assim, a função em questão não é crescente nem decrescente.

Questão 2

Uma função $f : R_+ \to R_+$ é crescente e satisfaz a seguinte condição: $f(3x) = 3f(x)$, para todo $x \in$ $R_+$ .

Se $f(9) = 27$, qual o valor de $f(1)$ ?

A

1

B

2

C

3

D

4

E

5

A alternativa C está correta.

Note que:

Logo, temos:

# Exemplo de função periódica

Confira o vídeo, a seguir, de um exemplo de função periódica.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

# Função periódica

Neste vídeo, confira a definição de funções periódicas.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

## Definição

Uma função é considerada periódica quando existe um número real T > 0, tal que f(x + T), para todo x no domínio da função.

O menor dos valores de T > 0, para os quais a propriedade é verificada, é chamado de período da f.

Se uma função **f** é periódica de período **T**, então, f também é periódica de período **nT**, onde **n** ∈ N, já que:

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = \ldots = f(x+nT)$$

## Exemplo 1

Considere a função f do gráfico mostrado na imagem a seguir, que corresponde ao **eletrocardiograma** de uma pessoa saudável:

Eletrocardiograma

Exame que tem o objetivo de detectar se existe alguma falha na condução elétrica pelo coração.

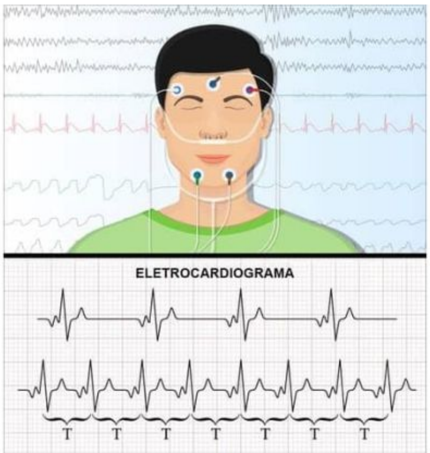


Gráfico: Função f

Observe que o padrão de repetição ocorre em intervalos de comprimento **T**, e não em intervalos de comprimento menor. Assim, a função f é uma função periódica de período **T**.

## Exemplo 2

Considere a função:

$$f: N \to Z, \text{ tal que } f(x) = (-1)x$$

A tabela, a seguir, mostra o valor da função f para os valores de x de 0 a 5.

| $x$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $(-1)^0 = 1$ | $(-1)^1 = -1$ | $(-1)^2 = 1$ | $(-1)^3 = -1$ | $(-1)^4 = 1$ | $(-1)^5 = -1$ |

Tabela: Valor da função *f* para os valores de *x* de *0* a *5*

Adaptado de Loisi Carla Monteiro Pereira

Se x é um número par, f(x) = 1. Se x é um número ímpar, f(x) = −1.

> Esta é uma função periódica de período 2. Por quê?

Ora, quando x varia duas unidades, o valor da função se repete, ou seja:

$$f(x) = f(x + 2) = f(x + 4) = f( x + 6) = . . .$$

Dessa forma, podemos afirmar que o período dessa função é 2.

### Exemplo 3

## Funções seno, cosseno e tangente

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Considere a função f(t) = sen(t) e P um ponto no ciclo trigonométrico.

Imagine que o ponto P se movimenta no ciclo no sentido anti-horário, a partir da posição (1, 0) e dá uma volta completa, ângulo t varia de 0 até 2π(pi).

Pensando no ciclo, é possível perceber, na seguinte tabela, que:

| Quando o ângulo *t* cresce de | O valor *f(t) = sen(t)* |
|---|---|
| *0* a *π(pi) ÷ 2* | Cresce de *0* a *1* |
| *π(pi) ÷ 2* a *π(pi)* | Descresce de *1* a *0* |
| *π(pi)* a *3π(pi) ÷ 2* | Descresce de *0* a *−1* |
| *3π(pi) ÷ 2* a *2π(pi)* | Cresce de *−1* a *0* |

Tabela: A função *f(t) = sen(t)* e o ângulo *t*

Adaptado de Loisi Carla Monteiro Pereira

## Representação gráfica do exemplo 3

Confira o vídeo, a seguir, de um representação gráfica do que foi descrito no exemplo 3.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

### Exemplo 4

O fluxo de ar através da traqueia é uma função periódica do tempo x e ocorre em ambos os sentidos dos pulmões (inspiração e expiração).


O fluxo pode ser representado pela função:

f(x) = A sen(z x)

Onde constatamos que:

- A = fluxo máximo durante a expiração e inspiração;
- z = período respiratório;
- z = 2π(pi) ÷ T → T = o tempo que o indivíduo leva para fazer um ciclo completo.

A função f é, certamente, uma aproximação, pois T varia de indivíduo para indivíduo. Mas estudos experimentais mostram que é uma "boa" aproximação da realidade. Observe o seguinte gráfico:


Gráfico: A = 1 , T = 1 / 4 , A = 2 , T = 1 / 3

## Verificando o aprendizado

Questão 1

Sendo ƒ: R → R uma função periódica de período 2, podemos afirmar que:

A

A função g(x) = ƒ(2x) é periódica de período 4.

B

A função $g(x) = f(2x)$ é periódica de período 1.

C

A função $h(x) = f(^x/_2)$ é periódica de período 1.

D

A função $h(x) = f(x + q)$, onde q é uma constante positiva, não é periódica.

E

A função $h(x) = f(^x/_2)$ não é periódica.

A alternativa B está correta.

Note que a função $g(x) = f(2x)$ é periódica de período 1, pois:

$g(x + 1) = f(2(x + 1)) = f(2x + 2) = f(2x) = g(x)$

A função $h(x) = f(^x/_2)$ é periódica de período 4.

A função $h(x) = f(x + q)$ é periódica de período 4.

Questão 2

Considere que a função $f : [4, +\infty[\to [-3, 7]$ seja periódica com período 6 e seja estritamente crescente no intervalo $[4, 10]$. Logo, podemos afirmar que:

A

$f(10) = f(25)$ e $f(4) < f(8)$

B

$f(12) = f(24)$ e $f(15) < f(16)$

C

$f(15) = f(21)$ e $f(21) < f(22)$

D

$f(18) = f(24)$ e $f(28) < f(27)$

E

$f(20) = f(11)$ e $f(24) < f(25)$

A alternativa D está correta.

Veja que $f(24) = f(18 + 6) = f(18)$, pois f é periódica de período 6.

Além disso, $f(28) = f(4) = -3$, pois f é sobrejetora e estritamente crescente em $[4, 10)$,

e também $f(27) = f(9) > f(4)$. Assim, $f(28) < f(27)$.

# Considerações finais

No estudo das funções reais de variável real, você pôde observar que a descrição de problemas de nosso cotidiano é realizada com o auxílio das funções.

O entendimento das funções reais de variável real requer aprender, de maneira mais aprofundada, a determinar o domínio e a imagem de alguns tipos de funções algébricas, bem como reconhecer geometricamente quando a função é injetora, sobrejetora e bijetora.

É muito importante que você faça todos os exercícios propostos e estude bem os exemplos apresentados para compreender melhor o conteúdo.

Podcast

Ouça um resumo sobre os principais assuntos abordados no tema.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para ouvir o áudio.

## Explore +

Pesquise e consulte:

- O aplicativo on-line GeoGebra;
- O Portal OBMEP do Saber.

Busque e analise os seguintes resultados do uso do aplicativo GeoGebra:

BORGES, A. **Desenho da função seno.** GeoGebra. (s.d.).

CORREIA, P. **Duração do dia.** GeoGebra, (s.d.).

No primeiro, você encontra a construção do gráfico da função seno, e no segundo, um exercício interessante que mostra o número de horas de sol ao longo do ano em diferentes locais do planeta.

## Referências


BRASIL. **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.** Projeção da população do Brasil e das Unidades da Federação. Brasília: IBGE, 2008.

DELGADO GÓMEZ, J. J. **Pré-cálculo.** Rio de Janeiro: CEDERJ, 2002. v. 4.

FOMIN, D. A. **Círculos matemáticos.** Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar I.** São Paulo: Atual, 2013. v. 1.

LIMA, E.; CARVALHO, P. E. W.; MORCAGO, C. **A Matemática do Ensino Médio.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1.

LIVRO ABERTO. **Funções.** (s.d.).

LUCENA, M. **Guerra às sacolinhas.** Galileu, n. 225, 2010.

MAESTRI, R. **Algumas boas notícias com algumas não tanto do Covid-19.** Jornal GGN, mar. 2020.

STEWART, J. **Cálculo. 5.** ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. v. 1.

VISÃO SAÚDE. **Covid-19:** que países conseguiram contrariar a curva do Coronavírus? Publicação em: 20 mar. 2020.