



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
PRO-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL
EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

GEOVANA PIRES ARAUJO LIMA

**MODELANDO A DIFUSIVIDADE TÉRMICA DA AMÊNDOA DO
CUPUAÇU**

**ILHÉUS-BA
2018**

GEOVANA PIRES ARAUJO LIMA

**MODELANDO A DIFUSIVIDADE TÉRMICA DA
AMÊNDOA DO CUPUAÇU**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia
da Universidade Estadual de Santa Cruz, como parte
das exigências para obtenção do título de Mestre em
Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Henrique Sales

ILHÉUS-BA
2018

Dedico este trabalho, assim como tudo que tenho na vida a Ana Rita Pires Araujo, Carlos Maurício Cruz Dias Lima, Aline Pires Araujo Lima, Daniel Pires Araujo Lima, Ana Rosane Pires Araujo e principalmente a Albertina Pires Araujo, em memória.

L732

Lima, Geovana Pires Araujo

Modelando a difusividade térmica da amêndoia
do cupuaçu / Geovana Pires Araujo Lima. – Ilhéus,
BA: UESC, 2018.

124f. : il. anexo

Orientador: Jorge Henrique Sales.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual
de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Computacional em Ciência e Tecnolo-
gia.

Inclui referências e apêndices.

1. Difusividade térmica.
 2. Cupuaçu.
 3. Modela-
gem computacional.
 4. Simulação (Computadores).
- I
Título.

CDD 536.2014

GEOVANA PIRES ARAUJO LIMA

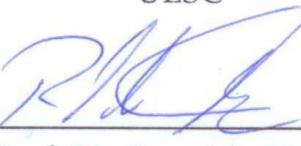
**MODELANDO A DIFUSIVIDADE TÉRMICA DA
AMÊNDOA DO CUPUAÇU**

Ilhéus-BA, 04/07/2018

Comissão Examinadora

Jorge Henrique Sales
Prof. Dr. Jorge Henrique Sales
UESC
(Orientador)


Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus
UESC


Prof. Dr. Ronaldo Thibes
UESB

Agradecimentos

- Agradeço à minha família, meus amigos e todos que estão presente em vida. A minha mãe, Ana Rita, por tudo que sempre fez por mim, e por meus irmãos, por ser o exemplo de mulher guerreira, integra e paciente. Meu pai, Carlos Maurício, o meu grande mestre, me ensinou desde a surfar até ser uma pessoa honesta e com valores acima de tudo, meus irmãos, Aline e Daniel, meus melhores amigos, vocês são meu porto seguro, e os amores da minha vida.
- Aos meus grandes amigos da graduação, Luiz Vinícius Soglia, Yasmim Mendes, Carina Ramos e Oliver Barreto por toda ajuda, ensinamentos e companheirismo. À minha colega de pesquisa, Elisa Cunha, pelo apoio nas análises experimentais.
- Agradeço ao professor doutor Jorge Sales pela a orientação e todas contribuições no desenvolvimento desta dissertação.
- Ao Centro de Inovação do Cacau- CIC pelo apoio e infraestrutura, em especial ao Cristiano Villela, Samuel Saito, e Adriana Reis.
- O Laboratório de Materiais e Meio Ambiente- LAMMA, Laboratório de biotransformação e biocatalise orgânica- LABIOCAT pela da infraestrutura e colaboração, em especial a professora Elizama Aguilar e ao professor Thiago Francisco.
- Aos professores, Gilson Queiroz de Jesus e Elizama Aguilar, pelas contribuições no exame de qualificação e a todos os docentes, colegas e funcionários do programa de pós Graduação em Modelagem Computacional, que foram fundamentais para a concretização desta etapa.
- Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia, FAPESB, pelo apoio financeiro.

“Nenhum obstáculo será tão grande se sua vontade de vencer for maior.”

MODELANDO A DIFUSIVIDADE TÉRMICA DA AMÊNDOA DO CUPUAÇU

Resumo

Conhecer as propriedades térmicas de materiais biológicos é de suma importância, pois possibilita prognosticar a taxa de secagem, velocidade da propagação e a distribuição do calor. A ausência de pesquisas sobre estas propriedades é ainda um entrave ao desenvolvimento de equipamentos tecnológicos para o beneficiamento de produtos biológicos como amêndoas, sendo o objeto de estudo deste trabalho a amêndoa do cupuaçu, que possui propriedades muito próximas da amêndoa do cacau, porém é praticamente descartada no processo de beneficiamento. Desta forma, o objetivo desta pesquisa foi modelar o comportamento térmico da amêndoa do cupuaçu por meio de quatro modelos geométricos e determinar o calor específico, massa específica, condutividade térmica, difusividade e curva de resfriamento da amêndoa do cupuaçu, que não são conhecidos na literatura. A metodologia da pesquisa consistiu na resolução analítica da Equação de Fick para o calor, em coordenadas prismática, cilíndricas, esféricas e elipsoidais, e a simulação computacional do problema. Os modelos com diferentes coordenadas foram comparados com os dados obtidos experimentalmente afim de verificar qual modelo representa melhor a curva de resfriamento da amêndoa. A massa específica e calor específico, foram determinados experimentalmente, apresentando os valores respectivamente de $964,44 \text{ kgm}^{-3} \pm 0,02$ e $3,69 \text{ kJkg}^{-1}\text{K}^{-1} \pm 0,5$. Com ajuda da equação da difusão de Fourier para coordenadas cilíndricas foi obtida a difusividade térmica do cupuaçu que equivale a $3,78 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. A partir destes dados foi calculada a condutividade térmica do cupuaçu, igual a $0,135 \text{ kWm}^{-1}\text{K}^{-1}$. Comparando os valores das propriedades termofísicas do cupuaçu, com as do cacau, verificou-se que são semelhantes, pois as amêndoas pertencem a mesma família e possuem propriedades físico-químicas e umidade substancialmente próximas. A partir da determinação das propriedades termofísicas o software COMSOL® foi alimentado, o material equivalente a amêndoa do cupuaçu foi criado e as geometrias foram simuladas, os resultados obtidos mostram que os modelos estudados descrevem de maneira satisfatória a curva de resfriamento da amêndoa do cupuaçu, sendo o elipsoidal o que apresenta o comportamento mais próximo do experimental, com uma aproximação de 96 % em relação aos dados observados, porém apresenta grande complexidade no método de solução analítico.

Palavras-chave: difusividade. cupuaçu. modelagem. simulação.

Abstract

Knowing the thermal properties of biological materials is of utmost importance, since it allows to anticipate the rate of drying speed of propagation of heat and the distribution of heat. The lack of research on these properties is still an obstacle to the development of technological equipment for processing organic products as almonds, the kernel of cupuaçu was the object of this work, although it's similar properties to cocoa, it's virtually discarded in the processing. In this way, the main goal of this research is to model the thermal behavior of the kernels of the cupuaçu through four geometric models and determine the specific heat, specific mass, thermal conductivity, diffusivity and cooling curve of the kernels of the cupuaçu, which is not known in the literature. The research methodology consists in the resolution of the Fick equation analytics for the heat, in a prismatic coordinates, cylindrical, spherical and ellipsoidal, and computational simulation of the problem. The models with different coordinates are compared with the data obtained experimentally in order to check which model best represents the cooling curve of almonds. The specific mass and specific heat, were determined experimentally, showing the values respectively $964,44 \text{ kgm}^{-3} \pm 0,02$ and $3,69 \text{ kJkg}^{-1}\text{K}^{-1} \pm 0,5$. With the help of the equation of diffusion of Fourier Transform to cylindrical coordinates, is obtained the thermal diffusivity of the cupuaçu that equals $3,78 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. From these data is calculated the thermal conductivity of the cupuaçu, equal to $0,135 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. Comparing the values of the thermophysical properties of the cupuaçu, with the cocoa, it appears that they are very similar, because the almonds belong to the same family and have physicochemical properties and moisture substantially close. From the determination of thermophysical properties, the software COMSOL® was powered up, the equivalent material to the kernel of the cupuaçu was created and the geometries were simulated, the results show that the studied models describe satisfactorily the cooling curve of the kernels of the cupuaçu, ellipsoidal being the one that presents the behavior closest to the experimental, with an approximation of 96 % in relation to the observed data, but also shows great complexity in the method of analytical solution.

Keywords: diffusivity . cupuaçu. model. simulation.

Lista de figuras

Figura 1 – O fruto do cupuaçu	3
Figura 2 – Componente do fruto do cupuaçu	4
Figura 3 – Sementes do cupuaçu	4
Figura 4 – Propriedades químicas na amêndoа do cupuaçu e cacau	6
Figura 5 – Proporção entre as propriedades presentes na amêndoа do cupuaçu e cacau	6
Figura 6 – Relação entre as propriedades físico-químicas entre a amêndoа do cacau e do cupuaçu	7
Figura 7 – Fluxograma das etapas do pré e processamento do cacau e cupuaçu	9
Figura 8 – Sequência aplicada para a resolução do problema	17
Figura 9 – Representação da pastilha	22
Figura 10 – Gráfico do comportamento térmico da pastilha em função da largura e tempo	23
Figura 11 – Gráfico da difusividade térmica em função das dimensões da pastilha	24
Figura 12 – Modelo prismático para a amêndoа do cupuaçu	25
Figura 13 – Condições iniciais e de fronteira	27
Figura 14 – Representação do modelo prismático	28
Figura 15 – Malha fina tetraédrica	29
Figura 16 – Simulação de resfriamento do modelo prismático durante 60 min . .	30
Figura 17 – Resfriamento do modelo prismático	31
Figura 18 – Modelo cilíndrico para a amêndoа do cupuaçu	32
Figura 19 – Representação do modelo cilíndrico	33
Figura 20 – Malha fina tetraédrica	34
Figura 21 – Resfriamento do modelo cilíndrico em função do tempo, 60 min s de simulação	35
Figura 22 – Resfriamento do modelo cilíndrico em função do tempo	36
Figura 23 – Comparação entre o comportamento térmico dos modelos prismático e cilíndrico	36
Figura 24 – Modelo esférico para a amêndoа do cupuaçu	37
Figura 25 – Representação do modelo esférico	39
Figura 26 – Malha fina tetraédrica	40
Figura 27 – Resfriamento do modelo esférico durante 60 min de simulação . .	41
Figura 28 – Resfriamento do modelo esférico em função do tempo	42
Figura 29 – Comparação entre o comportamento térmico dos modelos prismático, cilíndrico e esférico	42
Figura 30 – Modelo elipsoidal para a amêndoа do cupuaçu	43

Figura 31 – Característica de um esferoide prolato sólido	44
Figura 32 – Representação da amêndoia de cupuaçu.	55
Figura 33 – Malha fina tetraédrica	56
Figura 34 – Simulação do resfriamento do modelo elipsoidal, durante 60 min . .	57
Figura 35 – Comportamento térmico da amêndoia do cupuaçu no modelo elipsoidal	58
Figura 36 – Comparação entre o comportamento térmico dos modelos prismático, cilíndrico, esférico e elipsoidal	58
Figura 37 – Elementos utilizados no experimento	59
Figura 38 – Comportamento real do resfriamento da amêndoia do cupuaçu . . .	60
Figura 39 – Comparação dos modelos geométricos	62
Figura 40 – Desvio relativo dos modelos em função do comportamento experi- mental	62
Figura 41 – Convergência dos modelos em função do tempo e temperatura . . .	63
Figura 42 – Determinação do volume por deslocamento de líquido	76
Figura 43 – Calorímetro	77
Figura 44 – Triturador de grãos	78
Figura 45 – Amêndoas do cupuaçu trituradas	78
Figura 46 – Molde para construção das pastilhas	78
Figura 47 – Prensa pneumáticas	79
Figura 48 – Pastilha de cupuaçu	79
Figura 49 – Escolha do modelo: Model wizard	80
Figura 50 – Escolha da dimensão: 3D	81
Figura 51 – Escolha da física: Heat transfer module	81
Figura 52 – Tipo de estudo: Time dependent	82
Figura 53 – Parâmetros da simulação	82

Lista de tabelas

Tabela 1 – Operador laplaciano em diversas geometrias	15
Tabela 2 – Itens e especificações do ferramental utilizado	16
Tabela 3 – Dados experimentais	19
Tabela 4 – Dados experimentais	21
Tabela 5 – Dados experimentais do calorímetro	21
Tabela 6 – Dados da pastilha de cupuaçu	22
Tabela 7 – Valores das variáveis para resolução da equação em coordenadas cilíndricas	22
Tabela 8 – Dimensões da amêndoа do cupuaçu	26
Tabela 9 – Número e tipos de elementos para discretização do modelo prismático	29
Tabela 10 – Número e tipos de elementos para discretização do modelo cilíndrico	34
Tabela 11 – Número e tipos de elementos para discretização do modelo esférico .	40
Tabela 12 – Resultado gerado pelo software Mathematica®	51
Tabela 13 – Resultado gerado pelo software Mathematica®	51
Tabela 14 – Resultado gerado pelo software Mathematica®	54
Tabela 15 – Resultado gerado pelo software Mathematica®	54
Tabela 16 – Resultado gerado pelo software Mathematica®	54
Tabela 17 – Resultado gerado pelo software Mathematica®	54
Tabela 18 – número e tipos de elementos para discretização do modelo elipsoidal	56
Tabela 19 – Dados experimentais do resfriamento da amêndoа do cupuaçu . .	60
Tabela 20 – Operador laplaciano em diversas geometrias	61
Tabela 21 – Propriedades termofísicas da amêndoа do cupuaçu e do cacau . .	64
Tabela 22 – Propriedades termofísicas da amêndoа do cacau	107

Lista de abreviaturas e siglas

UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz
DCET	Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
PPGMC	Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia
CPATU	Centro de Pesquisa Agro Florestal da Amazônia Oriental
EMBRAPA	Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
RMF	Resíduo mineral fixo
ASP	Açúcar solúveis totais
pH	Potencial hidrogeniônico

Lista de símbolos

α	Difusividade térmica, $m^2 s^{-1}$
k	Condutividade térmica, $W m^{-1} K^{-1}$
ρ	Massa específica, $Kg m^{-3}$
c	Calor específico, $J kg^{-1} K^{-1}$
R	Coeficiente de correlação
R^2	Coeficiente de determinação
D	Coeficiente de difusão
∇T	Gradiente de temperatura, $K m^{-1}$
∇^2	Operador laplaciano
T_0	Temperatura inicial, $^{\circ}C$
α_{0n}	Raízes de Bessel
J_1	Função de Bessel de ordem 1
c_a	Calor específico da água, $J kg^{-1} K^{-1}$
T_e	Temperatura de equilíbrio, K.
r	raio, m
h	Altura, m
t	Tempo, s
x	Posição, m

Sumário

1 – Introdução	1
2 – Revisão de Literatura	3
2.1 O cupuaçu	3
2.2 Relação do cupuaçu e cacau	5
3 – Materiais e Métodos	11
3.1 Resolução analítica	11
3.2 Simulação computacional	15
4 – Propriedades Termofísicas da Amêndoа do Cupuaçu	19
4.1 Determinação da massa específica	19
4.2 Determinação do calor específico	20
4.3 Determinação da difusividade térmica	21
4.4 Determinação da condutividade térmica da amêndoа do cupuaçu	24
5 – Modelagem da Amêndoа do Cupuaçu	25
5.1 Modelo prismático	25
5.1.1 Solução analítica	25
5.1.2 Modelagem computacional	28
5.1.2.1 Construção da geometria	28
5.1.2.2 Criação do material	28
5.1.2.3 Criação da malha de cálculo	28
5.1.2.4 Simulação	29
5.2 Modelo cilíndrico	31
5.2.1 Solução analítica	31
5.2.2 Modelagem computacional	33
5.2.2.1 Construção da geometria	33
5.2.2.2 Criação da malha de cálculo	33
5.2.2.3 Simulação	34
5.3 Modelo esférico	37
5.3.1 Solução analítica	37
5.3.2 Modelagem computacional	39
5.3.2.1 Construção da geometria	39
5.3.2.2 Criação da malha de cálculo	39
5.3.2.3 Simulação	40
5.4 Modelo elipsoidal	43

5.4.1	Solução analítica	43
5.4.2	Modelagem computacional	55
5.4.2.1	Construção da geometria	55
5.4.2.2	Criação da malha de cálculo	55
5.4.2.3	Simulação	56
6 – Comparação dos Modelos e Validação da Hipótese	59
6.0.1	Determinação experimental da curva de resfriamento da amêndoа	59
6.1	Comparação entre os modelos geométricos	61
6.1.1	Validação da hipótese	64
7 – Conclusão	65
Referências	66
Apêndices	70
APÊNDICE A – Propriedades termofísicas	71
A.0.1	Condutividade térmica	72
A.0.2	Calor específico	73
A.0.3	Massa específica	74
A.0.4	Difusividade	75
APÊNDICE B – Determinação experimental	76
B.0.1	Determinação da massa específica do cupuaçu	76
B.0.2	Determinação do calor específico do cupuaçu	77
B.0.3	Determinação da difusividade térmica do cupuaçu	77
B.0.4	Determinação da condutividade térmica da amêndoа do cupuaçu	79
APÊNDICE C – Simulação Computacional	80
APÊNDICE D – Sistema retangular de coordenadas	83
D.1	Encontrando $X(x)$	83
D.1.1	Quando $c = -k_x$	83
D.1.2	Quando $c = k_x$	84
D.2	Encontrando $Y(y)$	84
D.2.1	Quando $c = -k_y$	84
D.2.2	Quando $c = k_y$	84
D.3	Encontrando $Z(z)$	85
D.3.1	Quando $c = -k_z$	85

D.3.2 Quando $c = k_z$	85
D.4 Problema de valores no contorno	85
D.4.1 Solução	86
APÊNDICE E – Sistema cilíndrico de coordenadas	88
E.1 Encontrando $Z(z)$	88
E.1.1 Quando $c = -\varepsilon^2$	88
E.1.2 Quando $c = \varepsilon^2$	89
E.2 Encontrando $\Phi(\phi)$	89
E.3 Encontrando $R(r)$	89
E.4 Problema de valores no contorno	90
E.4.1 Solução	90
APÊNDICE F – Sistema esférico de coordenadas	94
F.1 Encontrando $\Phi(\phi)$	94
F.2 Encontrando $R(r)$	94
F.3 Encontrando $\Theta(\theta)$	95
F.4 Problema de valores no contorno	96
F.4.1 Solução	96
APÊNDICE G – Coordenadas esferoidais oblongas (Prolato elíptico)	100
G.0.1 Ortogonalidade	100
G.0.2 Fatores de escala	104
G.0.3 Operador laplaciano	105
Anexos	106
ANEXO A – Propriedades termofísicas da amêndoia do cacau	107

1 Introdução

O cupuaçu é um fruto nativo, que se destaca pelo seu aroma singular e sabor inigualável. O cupuaçu é composto por 45,20% de casca, 37,30% de polpa, 15 % de semente e 2,5% de placenta (SOUZA et al., 1999), entretanto, praticamente só a polpa é aproveitada, sendo usada na fabricação de polpas, cosméticos, doces entre outros (YANG et al., 2003). A amêndoas do cupuaçu é praticamente descartada no processo de beneficiamento, porém ela apresenta excelentes características nutritivas e propriedades muito próximas as da amêndoas do cacau, podendo ser usado na fabricação de produtos como chocolates e derivados (COHEN; JACKIX, 2005).

O “chocolate” de cupuaçu (cupulate) começou a ser pesquisado pelo CPATU (Centro de Pesquisa Agro florestal da Amazônia Oriental) da Embrapa, em 1986, o processamento é o mesmo para a fabricação do chocolate com o cacau e apresenta algumas vantagens como menor custo e a fermentação do cupuaçu é favorecida pelos resíduos orgânicos da polpa que ficam colados na semente (NAZARÉ et al., 1990). Entretanto, a literatura não apresenta resultados de pesquisas quanto às propriedades termofísicas da amêndoas do cupuaçu (LIMA; SALES, 2017).

Conhecer as propriedades térmicas de materiais biológicos é fundamental para a engenharia, com isso é possível prognosticar a taxa de secagem, velocidade da propagação do calor e a distribuição de calor em materiais biológicos de composição e formas variadas (SASSERON, 1984). Além disso as propriedades térmicas são essenciais nos processos de secagem, aeração e resfriamento dos grãos, o conhecimento destas, possibilita o desenvolvimento de produtos tecnológicos que agregue maior valor à secagem e armazenamento dos grãos, pois permite que o beneficiamento ocorra de maneira adequada levando em consideração as características peculiares de cada tipo de produto agrícola.

As exigências do mercado fazem com que os produtores busquem maneiras de maximizar a qualidade de seus produtos. Os grãos de cacau e cupuaçu necessitam de uma série de etapas no processo de beneficiamento, em especial as etapas de fermentação e secagem são cruciais para a qualidade do produto final, uma das formas de melhorar estes processos é conhecendo as propriedades térmicas destes grãos, entretanto a ausência de pesquisas sobre as propriedades físicas é ainda um entrave ao bom desenvolvimento da tecnologia de secagem de produtos biológicos de modo geral (SASSERON, 1984).

Portanto, considerando a importância do conhecimento das propriedades termofísicas para o melhoramento do processo de beneficiamento das amêndoas, o presente

estudo soluciona o problema da determinação da difusividade em regime transiente da amêndoaa do cupuaçu, desta forma, é apresentado as propriedades termofísicas como calor específico, condutividade térmica, difusividade térmica, massa específica e a curva de resfriamento da amêndoaa do cupuaçu. O resultado é comparado com o apresentado na literatura, por ([SASSERON, 1984](#)), para o cacau, que por hipótese, é assumido que as propriedades termofísicas do cupuaçu sejam próximas a do cacau, por pertencerem a mesma família e terem propriedades fisicoquímicas similares. São utilizados quatro modelos geométricos para descrever o comportamento de resfriamento da amêndoaa do cupuaçu, os modelos são resolvidos analiticamente a partir das mesmas condições iniciais e de contorno, e cada modelo é simulado a fim de identificar qual se aproxima mais do comportamento experimental. A motivação de realizar o estudo é contribuir, por meio da determinação do comportamento térmico das amêndoas do cupuaçu e suas propriedades termofísicas, com o desenvolvimento de equipamentos tecnológicos para o beneficiamento das amêndoas de cupuaçu.

Para o melhor entendimento dos resultados da pesquisa, esta dissertação está estrutura da seguinte forma: o capítulo [2](#) apresenta as características do cupuaçu, a relação das propriedades químico-físicas entre as amêndoas do cupuaçu e as amêndoas do cacau e as etapas do pré-processamento e processamento do cacau e cupuaçu. Esta análise é importante para correlacionar as propriedades do cacau e cupuaçu e a difusividade das amêndoas. No capítulo [3](#) é elucidada a metodologia empregada, que consistiu na resolução analítica da Equação de Fick para o calor e a simulação computacional da curva de resfriamento da amêndoaa do cupuaçu. O capítulo [4](#) apresenta as propriedades termofísicas da amêndoaa do cupuaçu. O capítulo [5](#) mostra a resolução analítica e a modelagem computacional da amêndoaa do cupuaçu por meio de quadro diferentes tipos geométricos, prismático, cilindro, esférico e elipsoidal. O capítulo [6](#) apresenta a curva de resfriamento da amêndoaa do cupuaçu, com isso é determinado qual modelo representa melhor o comportamento da amêndoaa do cupuaçu, em relação à curva experimental, além disso, para validar a hipótese de que o comportamento térmico da amêndoaa do cupuaçu é similar ao comportamento térmico da amêndoaa do cacau, as propriedades termofísicas das amêndoas serão comparadas, avaliando a proximidade entre estas. E o capítulo [7](#) sintetiza o conteúdo exposto, inferindo as principais considerações.

2 Revisão de Literatura

Neste capítulo serão apresentadas as características do cupuaçu, a relação das propriedades químico-físicas entre as amêndoas do cupuaçu e cacau e suas etapas de pré e processamento. Partindo da hipótese que o comportamento térmico da amêndoas do cacau é similar ao do cupuaçu, se faz necessário o conhecimento destas propriedades para que se possa correlacionar ambas amêndoas.

2.1 O cupuaçu

O cupuaçu (*T. grandiflorum Schum*), é um fruto tipicamente da região amazônica, que pertence a família Sterculiaceae. Esta fruta possui um aroma singular, e excelente sabor, desta forma, vem ganhando espaço no mercado nacional e internacional ([VRIESMANN et al., 2009](#)).

O principal produtor do cupuaçu é o estado do Pará, porém este fruto está presente em toda a bacia amazônica, Espírito Santo, São Paulo e Bahia. Também é encontrado na Colômbia, Venezuela, Equador e Costa Rica ([VIANA, 2010](#)). Em torno de 1930 o cupuaçu foi introduzido na região sul baiana, nesta encontrou condições favoráveis para sua produção, sendo superior a produtividade alcançada na região de origem, a amazônica ([FILHO; RAMOS, 2006](#)). A Figura 1 ilustra o fruto do cupuaçu, que é do tipo drupáceo, possui forma alongada e extremidades redondas. Os frutos variam de 12 a 25 cm, têm peso médio de 1,5 kg, casca com 6 a 7 mm de espessura ([VRIESMANN; PETKOWICZ, 2009](#)).

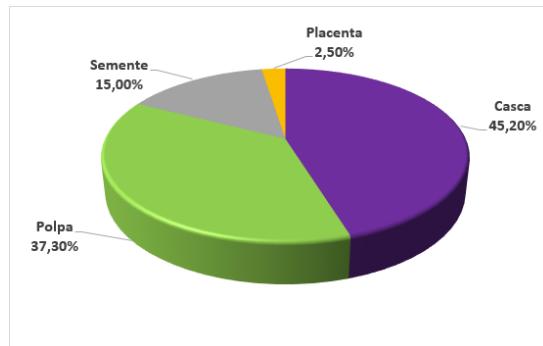
Figura 1 – O fruto do cupuaçu



Fonte: [EMBRAPA \(2016\)](#)

Os componentes do cupuaçu consistem em 45,20% de casca, 37,30% de polpa, 15% de semente e 2,5% de placenta ([SOUZA et al., 1999](#)). A Figura 2 ilustra as porcentagens médias do fruto do cupuaçu.

Figura 2 – Componente do fruto do cupuaçu



Fonte: [SOUZA et al. \(1999\)](#)

A parte de maior aproveitamento do fruto é polpa, que é consumida na forma de sucos, polpa, doces, utilizado como insumo na fabricação de cremes, licores entre outras formas ([YANG et al., 2003](#)). Apesar de representarem uma parte significativa do fruto e possuírem alto valor nutritivo, as sementes são praticamente desprezadas no beneficiamento do cupuaçu, estas apresentam propriedades muito semelhantes às sementes do cacau e podem ser utilizados para a fabricação de produtos análogos ao chocolate ([COHEN; JACKIX, 2005](#)).

O foco deste trabalho são as amêndoas do cupuaçu, que consistem nas sementes fermentadas e secas, objetivando determinar suas propriedades termofísicas, analisar a curva de resfriamento da amêndoas representada em diferentes modelos geométricos. As amêndoas apresentam formas e dimensões variadas, ilustrada na Figura 3 em que suas dimensões têm médias de 2,5 a 2,6 cm de diâmetro por 2,0 a 2,3 cm de largura e 0,9 a 1,1 cm de espessura ([SAID, 2011](#)).

Figura 3 – Sementes do cupuaçu



Fonte: [SOUZA e L. \(1999\)](#)

Existe uma ampla variedade de espécies de cupuaçu ([VRIESMANN; PETKOWICZ, 2009](#)), e podem ser classificadas de acordo as características morfológicas, como formato do fruto ou da ausência e presença de sementes, da seguinte forma ([VIANA, 2010](#)):

- a) **Cupuaçu redondo** – Comum na Amazônia, apresenta as extremidades arredondadas, peso de aproximadamente 1,5 kg, e a sua casca tem de 6 mm a 7 mm de espessura;
- b) **Cupuaçu casca fina** – Apresenta forma cilíndrica com laterais parcialmente angulada, com extremidades arredondadas, e sua casca tem de 4 mm a 5 mm de espessura;
- c) **Cupuaçu mamorana** – Possui casca grossa com espessura de 7 mm a 9 mm e formato anguloso nas laterais, seu peso pode chegar até 4 kg;
- d) **Cupuaçu de colares** – Tem formato largo na região próxima ao pedúnculo, com estreitamento na região inferior, tem sementes de tamanho médio, sem angulação nas laterais;
- e) **Cupuaçu mamau** – A principal característica desta espécie é que não apresenta semente. Possui formato arredondado, o seu peso médio é de aproximadamente 2,5 kg, sua casca tem uma espessura que varia de 6 mm a 7 mm.

Da mesma forma que os frutos possuem uma grande variedade, as sementes também apresentam formatos diferentes, variando de espécie para espécie e até no mesmo fruto, há sementes mais arredondadas, outras mais achatadas, por exemplo. As amêndoas utilizadas neste estudo foram extraídas do cupuaçu redondo. A amêndoa do cupuaçu apresenta grande similaridade com a amêndoa do cacau, desta forma, por hipótese é assumido que o seu comportamento térmico também seja semelhante. A próxima seção apresenta a análise entre estas duas amêndoas.

2.2 Relação do cupuaçu e cacau

Há uma significativa semelhança entre as sementes de cupuaçu e de cacau, as espécies pertencem ao mesmo gênero, *Theobroma*, e botanicamente o cupuaçu é classificado como (*T. grandiflorum Schum*) e o do cacau como *Theobroma cacao* ([VIANA, 2010](#)). Esta proximidade pode ser confirmada pela composição e pelas propriedades bioquímicas de suas sementes ([MEDEIROS; LANNES, 2010](#)). **BARRETO et al. (2011)** quantifica os resíduos minerais fixo- RMF, manteiga, açúcar solúveis totais- ASP, amido, proteína, Teobromina, pH e acidez titulável em ácido cítrico- AT presentes nas sementes do cupuaçu e do cacau. Apresentada na Figura 7.

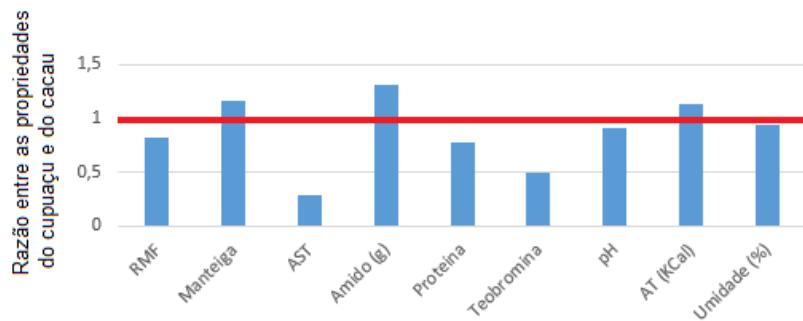
Figura 4 – Propriedades químicas na amêndoas do cupuaçu e cacau

	RMF (g)	Manteiga (g)	AST (g)	Amido (g)	Proteína (g)	Teobromina (g)	pH	AT (Kcal)	Umidade (%)
Cacau	3,3	54,3	5,2	7,2	16,9	1,2	5,3	12,6	8
Cupuaçu	2,7	63,1	1,5	9,4	13,2	0,6	4,8	14,2	7,5

Fonte: ([BARRETTO et al., 2011](#))

Relacionando estas propriedades, pode-se obter a proporção entre estas, que é ilustrada na Figura 5.

Figura 5 – Proporção entre as propriedades presentes na amêndoas do cupuaçu e cacau

Fonte: Adaptado de [BARRETTO et al. \(2011\)](#)

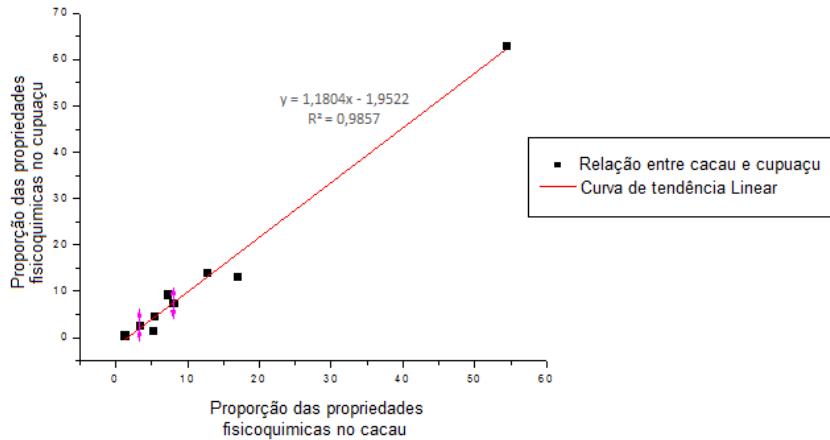
Analizando a Figura 5 pode-se verificar que a proporção entre resíduos minerais fixo- RMF, manteiga, açúcar solúveis totais- ASP, amido, proteína, Teobromina, pH e acidez titulável em ácido cítrico- AT presentes nas amêndoas são próximos do valor 1, destacado em vermelho, revelando a semelhança entre elas.

A Figura 5 mostra também que a umidade da amêndoas do cacau e a amêndoas do cupuaçu são muito próximas, apresentando uma proporção superior a 0,9. Segundo ([BORGES et al., 2005](#)) a difusividade depende diretamente do teor de umidade, sendo um fator de significativa importância para determinação da difusividade do grão ([PARK et al., 1999](#)).

Com o objetivo de mensurar a relação existente entre as propriedades físicas-químicas das amêndoas do cacau e do cupuaçu, foi realizado um ajuste por mínimos quadrados, por meio de regressão linear, que consiste em uma análise estatística que permite estabelecer uma relação que represente o fenômeno estudado. A Figura 6 apresenta o ajuste da curva gerada pela a relação das propriedades que constituem a amêndoas de cacau e de cupuaçu.

Com o ajuste apresentado na Figura 6, por meio de regressão linear, pode-

Figura 6 – Relação entre as propriedades físico-químicas entre a amêndoaa do cacau e do cupuaçu



Fonte: Autoria própria

se obter a equação da curva de tendência, que consiste em $y=1,1804X-1,9522$. Para verificar se a equação descreve de maneira satisfatória o fenômeno estudado é necessário calcular o coeficiente de determinação, conhecido como R^2 , que indica a qualidade do ajuste, podendo variar de 0 a 1, em que quanto mais próximo do 1, melhor é o ajuste. O coeficiente de determinação desta regressão foi o $R^2 = 0,9857$, indicando que o ajuste é adequado para o fenômeno. Calculando a raiz quadrada do coeficiente de determinação, é obtido o coeficiente de correlação que, é uma medida do grau de associação entre as variáveis analisadas, mede a intensidade e a direção da relação linear, por isso pode assumir valores entre -1 e 1, quanto mais próximo -1 maior a correlação negativa, quanto mais próximo de 1 maior a correlação positiva, e quanto mais próximo do 0 menor é a correlação. O coeficiente de correlação calculado foi de $R=0,9928$, indicando que a associação entre as propriedades físico-químicas da amêndoaa do cacau e do cupuaçu são fortemente próximas. Com isso estima-se que o comportamento da amêndoaa do cupuaçu seja similar ao da amêndoaa do cacau, que já é conhecido. Outro fato importante que revela a proximidade das amêndoas se refere ao seu processamento, que compartilha as mesmas etapas, e podem ser divididas em duas fases, pré-processamento e processamento (COHEN et al., 2003).

A fase de pré-processamento compreende:

-Colheitas dos frutos: Em que é necessário atingir a adequada maturação, em que as sementes apresentam as quantidades apropriadas de açucres para o processo fermentativo;

-Quebra dos frutos: Os frutos são quebrados com auxílio de um instrumento

cortante, após a quebra as sementes são removidas.

-Fermentação: Tem início na polpa mucilaginosa, possui pH baixo e rica em açucares, ambiente favorável ao desenvolvimento de microrganismos. Neste processo ocorre a remoção da mucilagem das sementes, morte do embrião e as reações bioquímicas, esta etapa tem duração entre cinco a sete dias, variando em função de temperatura e umidade relativa do ar. A fermentação é fundamental na formação dos precursores do sabor e aroma do chocolate ([SANTOS, 2013](#)).

-Secagem: Após a fermentação, as sementes ainda apresentam um alto teor de umidade, cerca de 60 %, que no processo de secagem deve ser reduzido de 7 % a 8 % de umidade. O objetivo da secagem é a redução do teor de umidade, diminuição da acidez, continuação das reações bioquímicas iniciadas na etapa anterior, cruciais para o desenvolvimento do aroma, cor e sabor característico do chocolate ([LIMA; SALES, 2015](#)). Após as etapas de pré-processamento, é iniciado o processamento das amêndoas do cacau e cupuaçu, para a fabricação do chocolate e derivados.

Compreende as etapas:

-Limpeza: As amêndoas são higienizadas objetivando a remoção das impurezas, que é fundamental para a segurança dos processos subsequentes e aumento da qualidade do produto final.

-Torração: É um tratamento térmico que por meio da reação de Maillard, que ocorre entre os aminoácidos e açucares redutores, o objetivo deste processo é desenvolver o sabor e o aroma característico do chocolate ([SPOLADORE et al., 1983](#)). Os parâmetros da torração são: tempo, que é determinado em função das características de sabor buscado, e temperatura, geralmente de 150 °C. Os métodos de torração podem ocorrer com as amêndoas inteiras, com os NIBs ou pode-se torrar o líquor ([COHEN et al., 2003](#)).

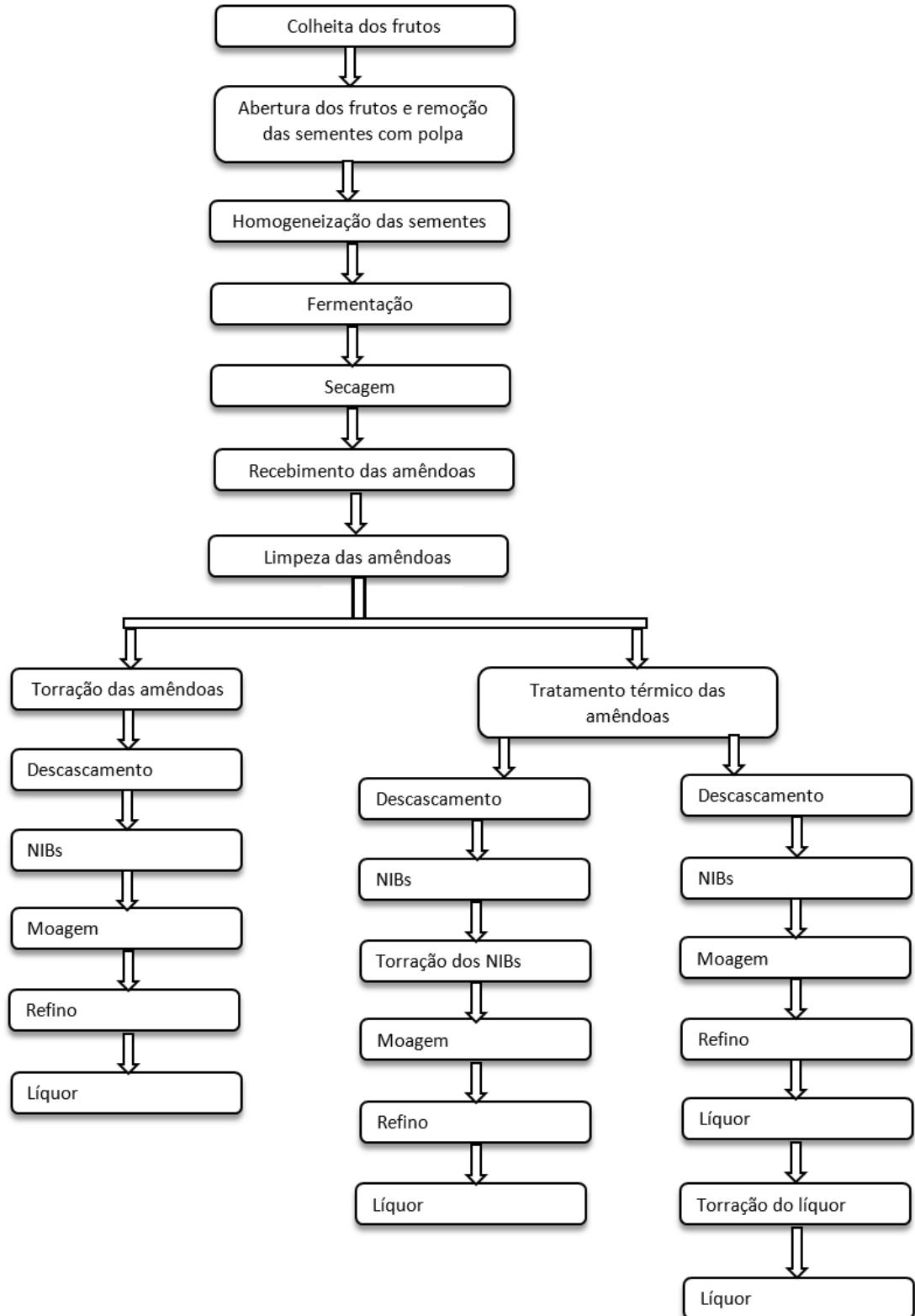
-Descascamento: A retirada da casca das amêndoas de cacau e cupuaçu ocorre com o auxílio de moinhos que as tritura, resultando em cascas e NIBs.

-Moagem: Tem como objetivo a diminuição do tamanho dos NIBs. Durante este processo acontece a liberação de parte da gordura absorvida nas paredes das células, o que forma o líquor.

-Refino: O principal objetivo do refino é a redução do tamanho das partículas do líquor. Em refinadores cilíndricos, o tamanho das partículas do líquor podem ser reduzidas para 25 μ ou menos. Nesta etapa se determina a qualidade do chocolate ([COHEN et al., 2003](#)). A Figura 7 apresenta o fluxograma das etapas para a produção do líquor a partir das sementes de cupuaçu e cacau.

A Figura 7 mostra que o pré-processamento e o processamento do cacau é igual

Figura 7 – Fluxograma das etapas do pré e processamento do cacau e cupuaçu



Fonte: Adaptado de (COHEN et al., 2003)

ao do cupuaçu. E no final da etapa de secagem ambas as amêndoas apresentam de 7 a 8% de umidade. A umidade por sua vez possui direta relação com a difusividade. Logo espera-se que a difusividade seja próxima por se tratar de amêndoas da mesma família fortemente correlacionadas, como apresentado na Figura 6. Entender as propriedades termofísicas dos grãos é fundamental para o melhoramento do beneficiamento do seu processo, possibilitando desenvolver equipamentos que agreguem valor ao produto final, levando em consideração as peculiaridades da amêndoa.

A próxima seção apresenta os materiais e métodos empregados no desenvolvimento do presente estudo.

3 Materiais e Métodos

A metodologia empregada no presente trabalho consistiu na resolução analítica da Equação de Fick para o calor e a simulação computacional da curva de resfriamento da amêndoia do cupuaçu.

As Leis de Fick consistem em equações de transporte de massa por difusão, levam este nome pois foram primeiramente propostas por Adolf Eugen Fick, que por meio de experimentos em propagação de moléculas de gás através de membranas porosas determinou tais leis ([ELENO, 2016](#)). A lei de Fick é válida para uma larga quantidade de fenômenos de transporte de massa em vários tipos de materiais. As condições básicas são: as partículas possuem graus de liberdade translacionais, e a movimentação corre de maneira aleatória, isso quer dizer que as partículas podem transitar pelo material e de maneira livre, não havendo uma sequência predeterminada para a sua propagação. Desta forma, a lei de Fick descreve a difusão em meio no qual não há equilíbrio térmico ou químico. Expressa o fluxo de massa por unidade de área, proporcional ao gradiente de concentração de água. Em determinadas situações é conveniente expressar a concentração de determinada substância em termos da massa componente difusão por unidade de volume do sólido (gcm^{-3}) e (kgm^{-3}) ([ELENO, 2016](#)).

3.1 Resolução analítica

O método é analítico para solucionar a equação de Fick ([LUIKOV, 1975](#)) da difusão de massa D em coordenada cartesiana, cilíndrica, esférica e elipsoidal para amêndoia do cupuaçu. No caso tridimensional em coordenadas cartesianas é dada pela equação:

$$\frac{\partial M(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(D \frac{\partial M(x, y, z, t)}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(D \frac{\partial M(x, y, z, t)}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(D \frac{\partial M(x, y, z, t)}{\partial z}) \quad (1)$$

onde M é a massa ou o número de átomos, que está se difundindo através e perpendicularmente numa área reta A em um tempo t . A primeira lei de Fick equivale matematicamente a Lei de Fourier para condução de calor. Expressa difusão em estado estacionário ao longo da direção (x), a equação (2) consiste na primeira Lei de Fick:

$$J = -D \frac{\partial C}{\partial x} \quad (2)$$

onde:

$$J = \text{Fluxo, } molm^{-2}s^{-1}$$

D = coeficiente de difusão, $m^2 s^{-1}$

$\frac{\partial C}{\partial x}$ = gradiente de concentração.

Analizando a equação (2) percebe-se que o fluxo de difusão é proporcional ao gradiente de concentração, e o coeficiente de difusão D é uma constante de proporcionalidade expressa em metros quadrados por segundo. O sinal negativo apresentado na equação revela que a direção da difusão possui sentido oposto ao do gradiente de concentração.

Diferentemente da Primeira Lei de Fick que descreve a difusão no estado estacionário, a Segunda Lei de Fick expressa a difusão no estado transiente, portanto o fluxo de difusão e o gradiente de concentração em um dado ponto dentro do sólido variam com o tempo, implicando na concentração ou esgotamento do elemento que passa pelo processo de difusão. A Segunda Lei de Fick pode ser expressa pela equação (3):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = (D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}) \quad (3)$$

sendo,

C = concentração que depende do tempo (t) e localização (x);

t = Tempo, s;

x = Posição, m;

D = Coeficiente de difusão, $m^2 s^{-1}$

Quando se especifica as condições de contorno munidas de sentido físico, é obtido as soluções para a segunda lei de Fick tanto em função da posição quanto do tempo. O coeficiente de difusão D é, na maior parte das vezes, tratado como uma constante, ou dependente do teor de umidade e temperatura. No caso particular da transferência de calor, a lei de Fick resulta na lei de Fourier, que revela que o fluxo de calor da região local, \vec{q} , equivale a multiplicação da condutividade térmica, k , e do gradiente de temperatura da região local, com sinal negativo, $-\nabla T$. A equação (4) apresenta o caso especial da lei de Fick para a transferência de calor.

$$\vec{q} = -k \nabla T \quad (4)$$

sendo,

\vec{q} = fluxo de calor local, $W m^{-2}$

k = condutividade térmica do material, $W m^{-1} k^{-1}$

∇T = gradiente de temperatura, $K m^{-1}$

A equação correspondente a esta para condução de calor é a lei de Fourier, que é obtida substituindo $M(x, y, z, t)$ por Ψ (temperatura) e D por (difusão térmica),

assumindo-se que as propriedades térmicas, como calor específico e densidade de massa, sejam constantes.

A equação usada para a resolução deste problema é a de Fourier que é uma equação diferencial parcial que descreve a variação de temperatura em um volume constante, onde só há troca de calor por meio de condução e o regime é não estacionário (temperatura varia com o tempo). Essa equação é dada por:

$$\frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \Psi(r, t) \quad (5)$$

em que,

α = difusividade

$\Psi(r, t)$ = temperatura

A posição de um ponto dentro da amêndoia é r que depende do sistema de coordenada escolhida e o tempo de medida é t . O operador ∇^2 está associado ao ponto do espaço, portanto, também depende do sistema de coordenada (geometria) escolhida para descrever a difusividade na amêndoia do cupuaçu.

A primeira técnica usada na solução da equação (5) é a separação de variáveis ([SALES; LIMA, 2018](#)) entre a variável espacial r e temporal t :

$$\Psi(r, t) = \psi(r)T(t) \quad (6)$$

Em que $\psi(r)$ é função só do espaço e $T(t)$ função apenas do tempo. Substituindo [6](#) em [5](#), tem se:

$$\frac{1}{\alpha T} \frac{dT}{dt} = \frac{\nabla^2 \psi(r)}{\psi(r)} \quad (7)$$

Assim, é separado da temperatura $\Psi(r, t)$ a parte espacial $\psi(r)$ da temporal $T(t)$. Dessa forma, o modelo geométrico se concentra na parte espacial isolado da temporal. Como o primeiro membro é função somente de t e no segundo uma função de pontos espaciais, então a igualdade só ocorrerá se for constante real ou complexa, cuja escolha dependerá das condições de contorno do problema. No caso deste trabalho a constante é complexa, por causa das funções espaciais serem periódicas, então:

$$\frac{1}{\alpha T} \frac{dT}{dt} = \frac{\nabla^2 \psi(r)}{\psi(r)} = -\lambda^2 \quad (8)$$

A solução temporal da equação [\(7\)](#) vem da equação diferencial de primeira ordem, ou seja:

$$\frac{1}{\alpha T} \frac{dT}{dt} = -\lambda^2 \quad (9)$$

A constante λ^2 depende das condições de contorno do sistema (amêndoas) para a solução da equação (9). A solução é dada por:

$$\frac{1}{\alpha T} \frac{dT}{dt} = -\lambda^2 \rightarrow \frac{dT}{dt} = -\alpha \lambda^2 dt \rightarrow \int \frac{dT}{dt} = -\alpha \lambda^2 \int dt \rightarrow \ln[T(t)] = -\alpha \lambda^2 t + C_0 \rightarrow T(t) = Ge^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (10)$$

onde G é uma constante que depende das condições iniciais do sistema. A parte espacial da equação (7) é,

$$\frac{\nabla^2 \psi(r)}{\psi(r)} = -\lambda^2 \quad (11)$$

Em muitos problemas físicos, as condições de contorno são tais que os valores de uma função (ou de sua derivada) são especificados em curvas ou superfícies (esferas, cilindros, etc). A escolha de um particular sistema de coordenadas deve ser motivada pela forma geométrica do corpo em estudo e resulta numa melhor adequação e validade dos resultados obtidos. No caso da amêndoas do cupuaçu foram investigadas para sua geometria em coordenadas prismática (cartesiana), cilíndrico, esférico e elipsoidal.

Tendo em vista a complexidade da solução do problema proposto, e visando simplificar o método, algumas considerações foram adotadas: a) O sólido é homogêneo e com propriedades físicas constantes; b) O campo do teor da umidade é assimétrico em torno do eixo z ao longo do processo; c) A secagem ocorre em condições de equilíbrio na superfície, com teor de umidade constante, igual ao teor de umidade de equilíbrio; d) O encolhimento do material é desprezível durante o processo de secagem; e) O campo do teor de umidade é uniforme no inicio da secagem; f) O único mecanismo de transporte de umidade no interior do sólido é o de difusão em fase líquida; g) O coeficiente de difusão é constante; h) Temperatura na superfície da amêndoas é constante a 0 °C.

Além disso, é importante considerar que para cada sistema de coordenada geométrica o operador laplaciano $\nabla^2 \Psi$, apresentado na equação (11), tem uma forma diferente, a Tabela 1 ilustra o operador laplaciano de cada modelo:

Tabela 1 – Operador laplaciano em diversas geometrias

Geometria	Operador ∇^2
Retangular	$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$
Cilíndrica	$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$
Esférico	$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$
Elipsoide	$\nabla^2\varphi = \frac{1}{L^2(u^2 - v^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[(u^2 - 1)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[(v^2 - 1)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right]\right\}$

Fonte: Autoria própria

Os elementos (u, v) estão detalhados no Apêndice G. Nos modelos dados neste trabalho, a condição inicial, $t=0$, implica em uma temperatura inicial de T_0 no interior da amêndoia. As condições de fronteira para amêndoia do cupuaçu são de temperatura zero graus Celsius na superfície da mesma e no tempo igual a zero a temperatura é igual a temperatura inicial. Nos capítulos posteriores serão apresentadas em detalhes a resolução analítica de cada modelo.

3.2 Simulação computacional

O software utilizado para a realização da simulação foi o COMSOL®Multiphysics®5.1, os gráficos foram gerados no Origin®Pro 8. O computador no qual as execuções ocorreram foi o Notebook Sony Vaio PCG 71911X. As especificações do Notebook e do ferramental utilizado são apresentados na Tabela 2.

O software utilizado no presente estudo foi o COMSOL®Multiphysics®, que consiste em um software de modelagem e simulação de problemas baseado em físicas utilizando métodos numéricos avançados. O COMSOL®Multiphysics®, considera fenômenos acoplados ou multifísicos. Possui mais de 30 produtos complementares, além disso possibilita a expansão da plataforma de simulação com interfaces físicas dedicadas e ferramentas para aplicações elétricas, mecânicas, de escoamento e químicas

Tabela 2 – Itens e especificações do ferramental utilizado

Item	Especificação
Processador	Intel (R) Core (TM) i3-2310M CPU@ 2.10 GHz 2.10 GHz
Memória (RAM)	4,00 GB
Sistema Operacional	Windows 7 de 64 Bits
Software CAE	COMSOL Multiphysics 5.1
Software gráfico	OriginPro 8
Software	Mathematica

Fonte: Autoria própria

([COMSOL, 2017](#)).

No presente estudo, o modo de simulação escolhido foi o “*model wizard*”, consiste em um modelo inteligente, que facilita na construção do modelo. A dimensão do espaço trabalhado foi em três dimensões. A física utilizada para a resolução do problema foi a transferência de calor “*Heat transfer module*”, este módulo permite analisar efeitos de aquecimento e resfriamento em diferentes sistemas. Oferece também ferramentas de simulação para estudar mecanismos de transferência de calor - condução, convecção e radiação – geralmente associado com outras físicas. Desta forma, o *Heat Transfer Module* possibilita o estudo de situações onde há geração, absorção ou transferência de calor ou energia, tendo larga aplicação nas indústrias e meios científicos. O tipo de estudo no problema foi o “*Time Dependent*”, ou seja, que depende do tempo, não é estacionário, pois o calor dentro da amêndoia varia com o tempo. A Figura 8 apresenta a síntese dos passos citados para a preparação do ambiente de simulação.

Após a preparação do ambiente de simulação, é construída a geometria, para cada modelo é criada uma geometria diferente para a representação da amêndoia. Para a representação do prisma foi usado a opção de bloco, do cilindro, a opção de geometria cilíndrica, da esfera a opção de geometria esférica e para o elipsoide foi escolhida a opção de geometria elipsoidal.

O COMSOL® possui uma ampla biblioteca de materiais, contendo dados de mais de 2.500 materiais, incluindo elementos, minerais, ligas metálicas, isolantes térmicos, semicondutores e materiais piezelétricos, cada material tem propriedades representadas por funções, para até 24 propriedades ([COMSOL, 2017](#)). Entretanto não consta na

Figura 8 – Sequência aplicada para a resolução do problema



Fonte: Autoria própria

biblioteca do COMSOL® o material que constitui o cupuaçu, desta forma para que a simulação descrevesse o modelo de maneira mais realista possível, foi criado um novo material com as propriedades do cupuaçu.

Após a criação da geometria e do material, foi criada a malha de cálculo. A malha criada para a simulação do modelo, consistiu em uma malha tetraédrica, do tipo fina com construção automática. As ferramentas de criação de malha automáticas e semiautomáticas estão disponíveis no COMSOL Multiphysics®, incluindo criação de malha tetraédrica livre e criação de malha varrida. O algoritmo padrão é a criação de malha tetraédrica automática para físicas definidas em sólidos e uma combinação de criação de malha tetraédrica e de camadas limite para fluidos. Pode-se também engendrar uma malha personalizada, definindo a sequência de malhas, esta permite uma combinação de diferentes elementos tetraédricos, prismáticos ou hexaédricos e pode ser parametricamente orientada. O COMSOL® suporta também elementos de pirâmides, em malhas importados com formato NASTRAN, esta pode ser sucessivamente particionada nos níveis de domínio, contorno e aresta em relação as coordenadas, por meio de operações extras (COMSOL, 2017).

Existem diferentes tipos e tamanhos de malha, quanto mais refinada mais precisa é a simulação e consequentemente maior o esforço computacional. As malhas de cálculo

são essenciais para a realização da simulação, pois a partir destas, as equações diferenciais parciais são solucionadas por meio do método dos elementos finitos, método matemático que se baseia na subdivisão em partes infinitesimais do meio contínuo em elementos que mantém as propriedades de quem os originou. Desta forma os elementos gerados com a discretização são descritos por meio de equações diferenciais e solucionados por modelos matemáticos, fornecendo assim os resultados da simulação ([LOTT et al., 2006 apud MCGUINNESS et al., 1992](#)).

Com a malha gerada, o próximo passo é realizar a simulação. A simulação avaliou o comportamento de resfriamento da amêndoas do cupuaçu, dissipando calor para o ambiente, a temperatura ambiental considerada na simulação foi de 25°C.

Os resultados da simulação realizada no COMSOL®, foram plotados no software Origin®Pro 8, que oferece melhor design gráfico, permitindo avaliar o melhor o comportamento térmico das amêndoas.

4 Propriedades Termofísicas da Amêndoas do Cupuaçu

Neste capítulo serão apresentadas as propriedades termofísicas da amêndoas do cupuaçu. Estas propriedades são intrínsecas dos materiais e determinam seu comportamento térmico.

4.1 Determinação da massa específica

A massa específica consiste na razão entre massa e volume, que pode ser observada na equação (59) apresentada no Apêndice A. A massa específica foi obtida por meio do cálculo da média de 10 amêndoas, que foram pesadas com uma balança de 0,00001 g de precisão, obtendo a massa das amêndoas, e para a determinação do volume foi utilizado o método de deslocamento de líquido, o procedimento é ilustrado na Figura 42, vide Apêndice B. A Tabela 3 apresenta os dados obtidos experimentalmente.

Tabela 3 – Dados experimentais

Amostra	Massa (g)	Volume (cm ³)	Massa específica (gcm ⁻³)
1	2,7196	2,8	0,97129
2	2,856	2,94	0,97143
3	2,9775	3,1	0,96048
4	2,6778	2,9	0,92338
5	3,4395	3,5	0,98271
6	3,5872	3,6	0,99644
7	2,3294	2,4	0,97058
8	2,4977	2,6	0,96065
9	3,1079	3,3	0,94179
10	2,8004	2,9	0,96566
Média	2,90	3,00	0,96444
Desvio padrão	0,39	0,38	0,02034

Fonte: Autoria própria

Experimentalmente a massa específica do cupuaçu, com 9,61% de umidade é $0,96444 \text{ gcm}^{-3}$, que no Sistema Internacional de Unidades, a massa específica do cupuaçu é $964,44 \text{ kgm}^{-3}$. Vale salientar que a massa específica é uma propriedade física classificada como intensiva porque não se altera com a variação do tamanho, forma do corpo ou quantidade.

4.2 Determinação do calor específico

A determinação do calor específico ocorreu por meio do método das misturas diretas, que consiste em colocar uma determinada massa de água, em equilíbrio com a temperatura do ambiente, dentro de um calorímetro com capacidade calorífica conhecida, a amêndoа, com uma temperatura diferente da água, é inserida dentro do calorímetro, medindo-se a temperatura de equilíbrio. O calor específico é calculado pela equação (12) (SASSERON, 1984):

$$c_a m_a (T_a - T_e) + C(T_a - T_e) = c_m m_m (T_e - T_m) \quad (12)$$

em que,

c_a = calor específico da água, $kJkg^{-1}K^{-1}$

c_m = calor específico do material, $kJkg^{-1}K^{-1}$

C = capacidade calorífica do calorímetro, kJK^{-1} m_a = massa da água, kg

m_m = massa do material, kg

T_a = temperatura da água, K

T_m = temperatura do material, K

T_e = temperatura de equilíbrio, K.

Primeiramente é necessário calcular a capacidade calorífica do calorímetro para assim determinar o calor específico do material, resolvendo a equação (12). A capacidade calorífica pode ser calculada utilizando a equação 13

$$C(T_a - T_f) + c_a m_{a1} (T_a - T_f) = c_a m_{a2} (T_q - T_a) \quad (13)$$

em que,

C = capacidade calorífica do calorímetro, kJK^{-1}

c_a = calor específico da água, $kJkg^{-1}K^{-1}$

m_{a1} = massa da água fria, kg

m_{a2} = massa da água quente, kg

T_a = temperatura da água, K

T_f = temperatura da água fria, K

T_q = temperatura da água quente, K.

A Tabela 4 apresenta os valores obtidos experimentalmente das variáveis para determinar a capacidade calorífica do calorímetro.

Tabela 4 – Dados experimentais

c_a	4187 J kg ⁻¹ K ⁻¹
m_f	0,05 kg
m_q	0,1 kg
m_m	0,15 kg
T_e	318,15 K
T_f	298,05 K
T_q	323,15 K

Fonte: Autoria própria

Substituindo os valores apresentados na Tabela 4, na equação (13), pode-se determinar a capacidade calorífica, portanto, a capacidade calorífica equivale a $105,20\text{ }JK^{-1}$. Desta forma, conhecendo a capacidade calorífica do calorímetro, será possível determinar o calor específico do cupuaçu, usando a equação (12). Para aumentar a precisão do método, foram realizadas 3 medidas, que são apresentadas na Tabela 5

Tabela 5 – Dados experimentais do calorímetro

	Medida 1	Medida 2	Medida 3
m_m	15,604 g	15,366g	15,237g
T_a	318,15K	317,65K	318,35K
T_m	297,15K	297,15K	297,15K
T_e	316,65K	316,35K	316,65K
c_m	$3,71\text{ kJ kg}^{-1}K^{-1}$	$3,18\text{ kJ kg}^{-1}K^{-1}$	$4,19\text{ kJ kg}^{-1}K^{-1}$
Média do calor específico do cupuaçu: $3,69\text{ kJ kg}^{-1}K^{-1}$			
Desvio padrão: 0,505			

Fonte: Autoria própria

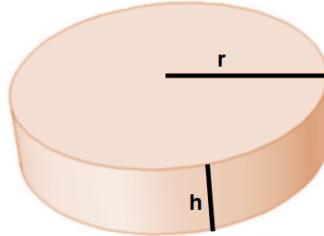
Por meio da equação (12) é calculado o calor específico para cada medida apresentada na Tabela 5. Fazendo a média dos valores obtidos experimentalmente, tem-se que o calor específico do cupuaçu com 9,61% de umidade equivale a $3,69\text{ kJ kg}^{-1}K^{-1}$.

4.3 Determinação da difusividade térmica

Para a determinação da difusividade térmica do cupuaçu, foi construída uma pastilha formada do material do cupuaçu triturado, Figura 48, ilustrado no Apêndice B, compactado por meio de uma prensa pneumática, Figura 47, Apêndice B. A pastilha apresenta um formato cilíndrico, como ilustra a Figura 9

A Tabela 6 mostra as dimensões e massa da pastilha utilizada. Para mensurar o raio e altura foi utilizado um paquímetro digital, e para obter a massa da pastilha foi utilizada uma balança de precisão semi-micro AUW220D.

Figura 9 – Representação da pastilha



Fonte: Autoria própria

Tabela 6 – Dados da pastilha de cupuaçu

	Cupuaçu	Erro
Raio (r)	20,50 mm	±0,01 mm
Altura (h)	10,00 mm	±0,01 mm
Massa (m)	12,73267g	±0,00001g

Fonte: Autoria própria

De posse dos dados da pastilha, é possível modelar a difusividade do cupuaçu, por meio da equação do calor em regime transiente, em coordenadas cilíndricas, equação (139). Em que o fator α_{01} são as raízes de Bessel e J_1 é a função de Bessel de primeira espécie de ordem 1. A variável t é o tempo, r raio total da pastilha, h altura da pastilha, r e z um ponto interno qualquer na pastilha cilíndrica.

Expandindo em primeira ordem a somatória da equação (139) é obtida a equação para a difusividade, equação (14).

$$\alpha = \frac{1}{[(\frac{\alpha_{01}}{r})^2 + (\frac{\pi}{h})^2]t} \ln \left[\frac{8J_1(\frac{\alpha_{01}\rho}{r}) \sin(\frac{\pi z}{h})}{\pi\alpha_{01}J_1(\alpha_{01})} \right] \left[\frac{T_0}{T_f} \right] \quad (14)$$

Da equação (14) a difusividade térmica depende da posição (ρ, z) interna na pastilha contendo amostra de cupuaçu e do tempo. Usando os dados das dimensões da pastilha, Tabela 6, das raízes de Bessel e da função de Bessel, constrói-se a Tabela 7.

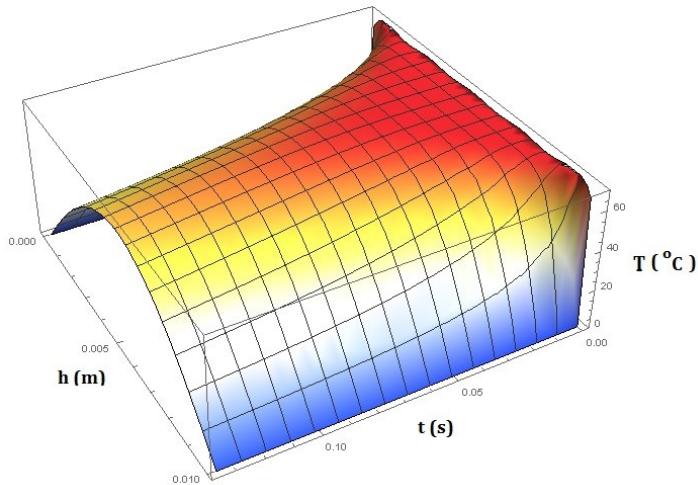
Tabela 7 – Valores das variáveis para resolução da equação em coordenadas cilíndricas

r	$20,50 \times 10^{-3} m$
h	$10 \times 10^{-3} m$
α_{01}	2,40
$J_1(\alpha_{01})$	0,52
$J_1(\frac{\alpha_{01}\rho}{r})$	0,55
T_0	70 °C
T_f	29 °C

Fonte: Autoria própria

A difusividade é dependente da posição e do tempo, como visto na equação (14), por isso é necessário usar um valor que seja o mais fixo possível quanto esses valores espaço-tempo. Na Figura 10 é mostrado a temperatura variando com o tempo e a largura da partilha h .

Figura 10 – Gráfico do comportamento térmico da pastilha em função da largura e tempo



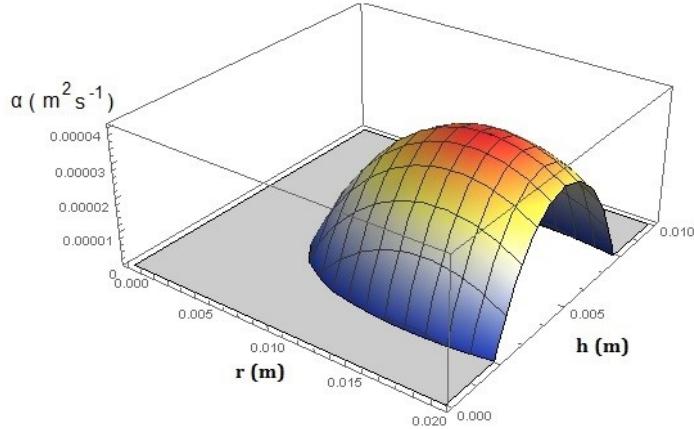
Fonte: Autoria própria

A plotagem do comportamento térmico da pastilha foi obtida a partir da equação de Fourier em coordenadas cilíndricas, conforme a equação (139)

$$\Psi(r, z, t) = \frac{8T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_{0n}(2m+1)J_1(\alpha_{0n})} J_1\left(\frac{\alpha_{0n}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} r\right) \sin\left(\frac{2m+1}{c} t\right) e^{-\alpha\left[\frac{\alpha_{0n}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} + \frac{2m+1}{c}\right]t}$$

O comportamento térmico ilustrado na Figura 10 sugere que o tempo de resfriamento é curto. Portanto, para uma variação de 1°C implica em um tempo de $t=0,1354$ segundos. Na Figura 11 mostra que os valores mais estáveis para a difusividade em relação a localização especial, estão entre $0,015 < r < 0,019$, desta forma, escolheu-se $r=0,019$ para o raio da pastilha e para a largura, $h=0,005$ m. Assim, tem-se para a função de Bessel $J_1\left(\frac{\alpha_{01}\rho}{r}\right) = 0,55$.

Figura 11 – Gráfico da difusividade térmica em função das dimensões da pastilha



Fonte: Autoria própria

Com esses dados, resulta para a difusividade térmica do cupuaçu:

$$\alpha_{cupua} = 3,78 \times 10^{-5} m^2 s^{-1}$$

4.4 Determinação da condutividade térmica da amêndoa do cupuaçu

A condutividade térmica é a propriedade que define a capacidade que um corpo tem de transferir o calor (CALLISTER; RETHWISCH, 2013). Pode-se determinar a condutividade térmica por meio da 54, ilustrada no Apêndice A. A condutividade térmica dos materiais biológicos varia em função do produto, da temperatura e umidade. Nos grãos, a condutividade térmica tem relação direta e linear com a o teor de umidade. (SASSERON, 1984).

Após a determinação experimental das propriedades termofísicas, ilustradas das seções anteriores, é possível calcular a condutividade térmica do cupuaçu. Das equações (14) e a equação (54), apresentada no Apêndice A, junto com os valores obtidos para a massa específica, ρ , e o calor específico, c , obtém-se a equação (15).

$$K = \frac{\rho c}{[(\frac{\alpha_{01}}{r})^2 + (\frac{\pi}{h})^2]t} \left[\frac{T_0}{T_f} \right] \ln \left[\frac{8J_1(\frac{\alpha_{01}\rho}{r}) \sin(\frac{\pi z}{h})}{\pi \alpha_{01} J_1(\alpha_{01})} \right] \quad (15)$$

Desta forma, resolvendo a equação (15), tem-se que a condutividade térmica da amêndoa do cupuaçu equivale:

$$K_{cupua} = 0,135 kW m^{-1} K^{-1}$$

5 Modelagem da Amêndoа do Cupuaçu

Neste capítulo é apresentada a resolução analítica e a modelagem computacional da amêndoа do cupuaçu por meio de quadro diferentes tipos geométricos, prismático, cilindro, esférico e elipsoidal. O sistema apresenta temperatura inicial de 70°C, e é avaliado a dissipação do calor para o ambiente que apresenta temperatura inicial de 25 °C.

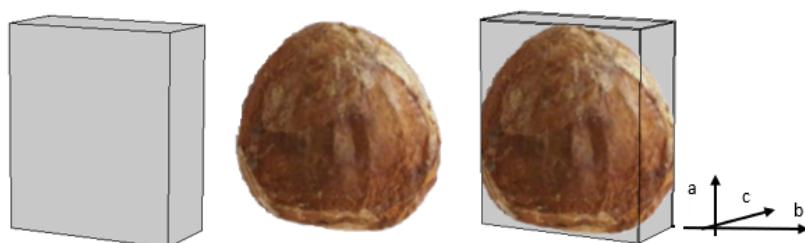
5.1 Modelo prismático

A presente seção ilustra a resolução analítica e modelagem computacional do modelo prismático.

5.1.1 Solução analítica

O modelo prismático é constituído por três eixos perpendiculares entre si, estes eixos são representados pelas letras X , Y e Z . Possuem a mesma escala numérica e mesmo ponto de origem (LEITE, 1996). Nesta seção a amêndoа do cupuaçu será representada por meio de coordenadas cartesianas, modelo prismático, que é representado na Figura 12.

Figura 12 – Modelo prismático para a amêndoа do cupuaçu



Fonte: Autoria própria

A Tabela 8 ilustra uma aproximação das dimensões da amêndoа do cupuaçu, que foram consideradas para a resolução das equações e simulação deste problema.

Tabela 8 – Dimensões da amêndoas do cupuaçu

(x,y,z)	Dimensões da amêndoas do cupuaçu
a	26 mm
b	22 mm
c	10 mm

Fonte: Autoria própria

No sistema de coordenadas retangulares (x,y,z), a técnica de separação de variáveis para equação (11) é:

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (16)$$

A equação (7), pode ser escrita no sistema de coordenadas retangulares como:

$$\frac{\nabla^2\psi(x, y, z)}{\psi(x, y, z)} = -\lambda^2 \quad (17)$$

Sendo que para cada sistema de coordenada geométrica o operador laplaciano $\nabla^2\psi$ tem uma forma diferente, que é ilustrado na Tabela 1, para o caso investigado, coordenadas retangulares, o operador laplaciano correspondente é:

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Substituindo na equação (17) com o respectivo operador laplaciano, tem se,

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \lambda^2 = 0 \rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \lambda^2 = 0 \quad (18)$$

A partir da equação (18), é possível determinar cada uma das funções (X,Y,Z). Que corresponde a:

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \\ Y(y) &= C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y) \\ Z(z) &= E \cos(k_z z) + F \sin(k_z z) \end{aligned} \quad (19)$$

com vínculo dado por:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \lambda^2 \quad (20)$$

Os resultados das equações 19 são substituídos em 16 e 6, e ainda pelo teorema da combinação linear como resultado mais geral, chega se:

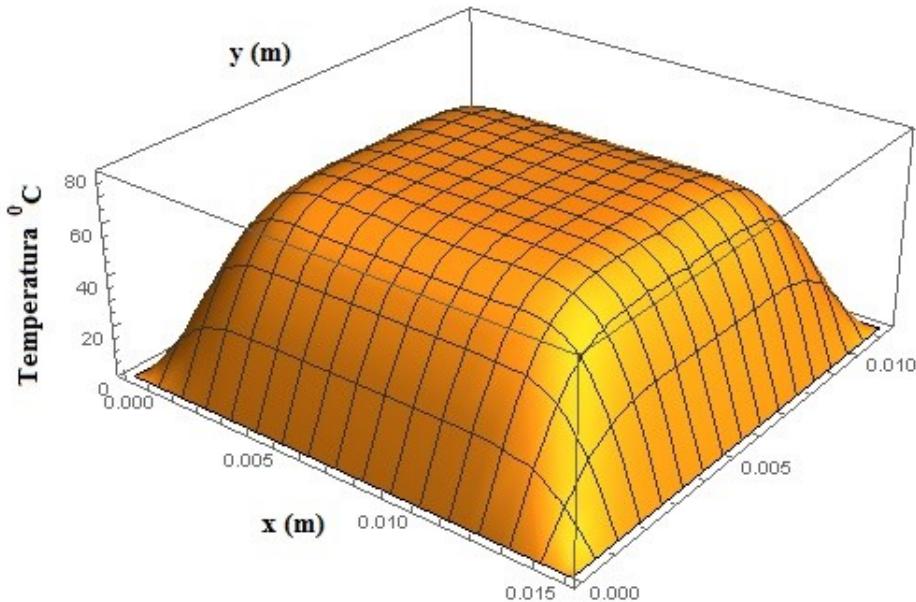
$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &= [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) + C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y) + \\ &\quad E \cos(k_z z) + F \sin(k_z z)] G e^{-\alpha \lambda^2 t} \end{aligned} \quad (21)$$

A resolução da equação (21) é detalhada no Apêndice D. As condições de fronteira e inicial foram:

$$\begin{aligned}\Psi(0, y, z, t) &= \Psi(a, y, z, t) = 0 ; \Psi(x, 0, z, t) = \Psi(x, b, z, t) = 0; \\ \Psi(x, y, 0, t) &= \Psi(x, y, c, t) = 0 \text{ e } \Psi(z, y, z, 0) = T_0\end{aligned}$$

que indicam temperatura zero nas faces do prisma retangular, 12, e no instante $t=0$ uma temperatura inicial T_0 . Estas condições foram testadas no software Mathematica®, e o resultado é apresentado na Figura 13.

Figura 13 – Condições iniciais e de fronteira



Fonte: Autoria própria

A Figura 13 mostra que nos extremos do modelo a temperatura é igual a zero, o teste é fundamental para verificar se as condições estão sendo levadas em consideração pelo software na resolução do problema. No sistema retangular, nas condições iniciais e de fronteira dada, resulta na temperatura:

$$\begin{aligned}\psi(x, y, z, t) &= \frac{64T_0}{\pi^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2m+1)(2p+1)} \sin\left(\frac{2n+1}{a}\pi x\right) \\ &\quad \left(\sin \frac{2m+1}{b}\pi y\right)\left(\sin \frac{2p+1}{c}\pi z\right) e^{-\alpha\pi^2[(\frac{2n+1}{a})^2 + (\frac{2m+1}{b})^2 + (\frac{2p+1}{c})^2]t} \quad (22)\end{aligned}$$

Sendo a, b e c as dimensões da amêndoа investigada, apresentada na Tabela 8, (x, y, z) os pontos internos e $T_0=70^\circ\text{C}$ é a temperatura inicial dentro da amêndoа.

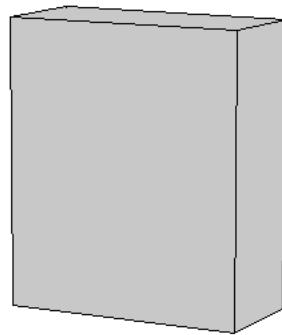
5.1.2 Modelagem computacional

Esta seção apresenta a modelagem computacional do modelo prismático para a amêndoа do cupuaçu.

5.1.2.1 Construção da geometria

A presente seção mostra a representação da amêndoа do cupuaçu por meio do modelo prismático. Para a construção da geometria prismática, foi utilizada a ferramenta disponível no COMSOL® “geometria” usando a opção “bloco”. Com largura de 26 mm, espessura de 22 mm e altura de 10 mm. A Figura 14 ilustra o prismático para a representação da amêndoа do cupuaçu.

Figura 14 – Representação do modelo prismático



Fonte: Autoria própria

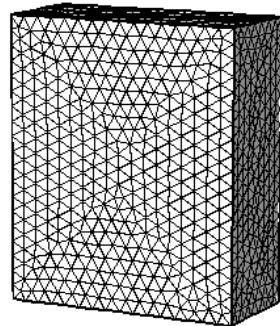
5.1.2.2 Criação do material

O COMSOL® não possui em sua biblioteca o material equivalente ao que compõe o cupuaçu, por isso foi necessário criar um novo material com as seguintes propriedades térmicas: calor específico $3,69 KJkg^{-1}K^{-1}$, massa específica $964,44 Kgm^{-3}$ e condutividade térmica $0,135 KWm^{-1}K^{-1}$. O material criado foi o mesmo para todas as geometrias.

5.1.2.3 Criação da malha de cálculo

O domínio foi discretizado usando uma malha tetraédrica, tipo fina. A malha de cálculo subdivide o modelo em infinitesimas partes, permitindo que as equações diferenciais parciais sejam solucionadas por meio dos elementos finitos. Quanto mais refinada é a malha mais precisos são os cálculos, porém maior é o esforço computacional, como um prisma é uma geometria simples, foi utilizada a malha fina para obter cálculos com boa precisão. A Figura 15 apresenta a malha criada para a geometria prismática.

Figura 15 – Malha fina tetraédrica



Fonte: Autoria própria

A Tabela 9 apresenta as características da malha gerada ilustrada na Figura 15.

Tabela 9 – Número e tipos de elementos para discretização do modelo prismático

Tipos de elementos	Número de elementos
Tetraédrico	31.778
Triangular	2.682
Aresta	168
Vértice	8

Fonte: Autoria própria

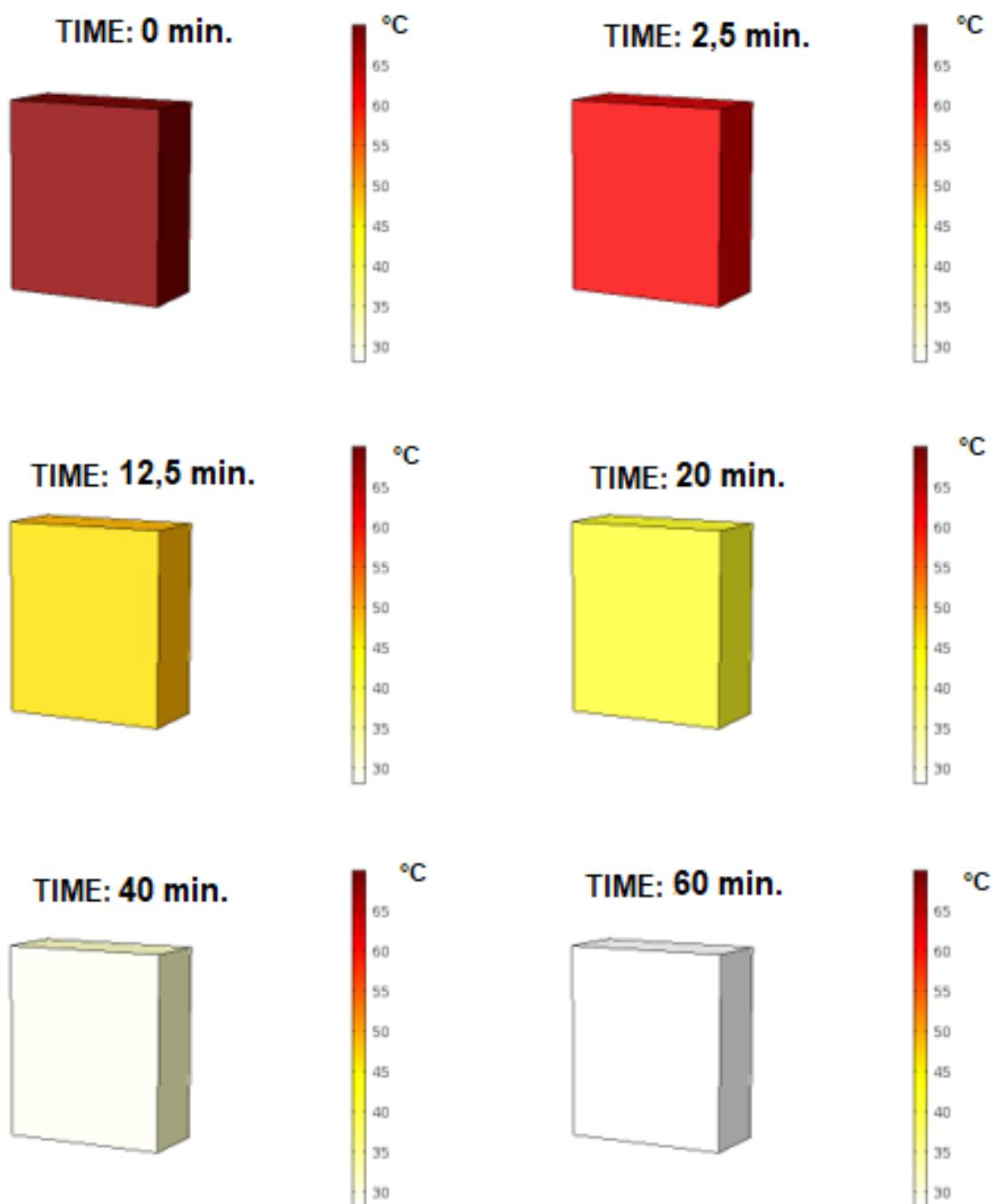
5.1.2.4 Simulação

Criada a malhada de cálculo, é possível simular o sistema. A simulação consistiu na avaliação no comportamento de resfriamento da amêndoа do cupuaçu, com temperatura inicial de 70°C, amêndoа sofreu uma redução da temperatura devido a dissipação do calor para o ambiente, com temperatura ambiental de 25°C.

A Figura 16 apresenta o comportamento de resfriamento do modelo prismático para os tempos de simulação de 0 min, 2,5 min, 12,5 min, 20 min, 40 min, 60 min. Em que se observa que o calor vai sendo dissipado pelo ambiente, fazendo com que a temperatura, do volume total, do modelo prismático, que inicialmente apresentava temperatura de 70°C, tenha o calor dissipado para o ambiente com temperatura externa de 25°C. Desta forma, verifica-se o comportamento em função do tempo tende ao equilíbrio térmico. Satisfazendo a primeira e segunda lei da termodinâmica. O comportamento de redução da temperatura é ilustrado na Figura 17.

A Figura 17 revela que há uma redução na temperatura do modelo prismático em função do tempo, devido a dissipação do calor contido no seu interior para o ambiente, com temperatura de 25 °C. A redução na temperatura é vertiginosa nos primeiros

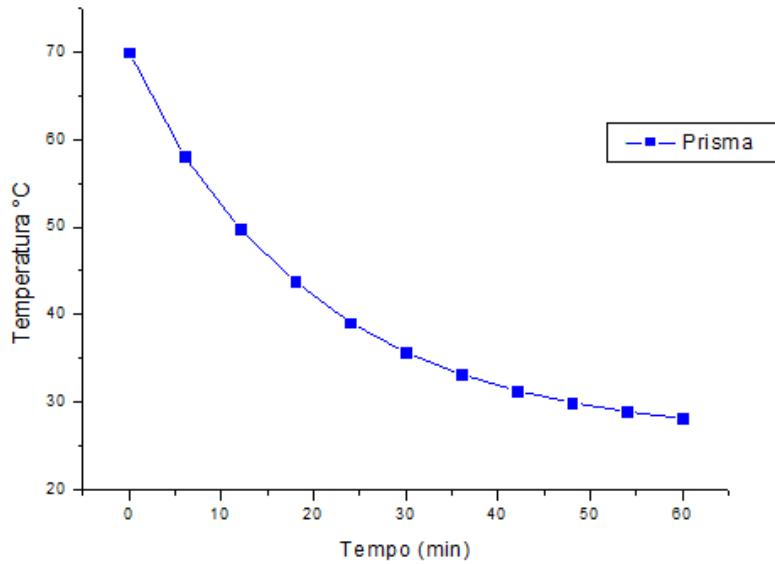
Figura 16 – Simulação de resfriamento do modelo prismático durante 60 min



Fonte: Autoria própria

segundos de simulação, assumindo um comportamento mais atenuado a partir de 30 minutos.

Figura 17 – Resfriamento do modelo prismático



Fonte: Autoria própria

5.2 Modelo cilíndrico

Nesta seção é mostrado a solução analítica e modelagem computacional da amêndoа do cupuaçu para o modelo cilíndrico. Importante salientar que as condições são iguais para todos os modelos.

5.2.1 Solução analítica

O sistema de coordenadas cilíndricas é constituído por um subsistema polar na base cilíndrica circular, como coordenadas (r, ϕ, z) , onde (r, ϕ) são as coordenadas polares de (x, y) e z é a distância orientada do plano (x, y) . A conversão das coordenadas cartesianas para as coordenadas cilíndricas é dada pela seguinte relação: $x=r \cos \phi$, $y=r \sin \phi$ e $z = z$ (ROGAWSKI, 2009). Nesta seção a amêndoа do cupuaçu será representada por meio de coordenadas cilíndricas, ilustrado na Figura 18, cuja as dimensões são ilustradas na Tabela 8.

Figura 18 – Modelo cilíndrico para a amêndoas do cupuaçu



Fonte: Autoria própria

No modelo cilíndrico a separação de variáveis é dada por:

$$\psi(r, \phi, z) = R(r)\Phi(\phi)Z(z) \quad (23)$$

Sendo r o raio polar, ϕ o ângulo polar e z o eixo de coordenada perpendicular ao plano (α, ϕ) . Substituindo em 17 com o uso do laplaciano para coordenada cilíndrica, Tabela 1, tem se:

$$R''\Phi Z + \frac{1}{r}R'\Phi Z + \frac{1}{r^2}R\Phi''Z + R\Phi Z'' = -\lambda^2$$

Fazendo o mesmo procedimento anterior são obtidas seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0$$

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0$$

$$r^2R'' + R'r + R(\lambda^2r^2 - m^2) = 0$$

com soluções dadas por:

$$Z(z) = A \cos(\lambda z) + B \sin(\lambda z)$$

$$\Phi(\phi) = C \cos(m\phi) + D \sin(m\phi), m = 1, 2, \dots,$$

$$R(r) = E J_m(\lambda r) + F N_m(\lambda r)$$

Aqui a solução em $R(r)$ é a solução da equação de Bessel, por não ter fonte de calor contínua dentro da amêndoas, implica em $F = 0$, isso evita a função de Neumann $N_m(\lambda r)$, pois diverge em $r = 0$ (SALES; LIMA, 2018). No modelo cilíndrico as seguintes condições de fronteiras e iniciais são: $\Psi(r, \phi, 0, t) = \Psi(r, \phi, c, t) = 0$; $\Psi(r, \phi, z, 0) = 0$ e $\Psi(r, \phi, z, 0) = T_0$. onde as temperaturas são nulas nos planos que cortam o cilindro em $z = 0$, $z = c$ e o mesmo para superfície lateral do cilindro, $r = r$. No instante $t = 0$ a temperatura é constante T_0 .

Com essas condições obtém-se os valores das constantes das soluções das equações diferenciais ordinárias. Substituindo essas soluções em 23, e depois em 6, chega se a solução para o modelo cilíndrico é dada por:

$$\Psi(r, z, t) = \frac{8T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_{0n}(2m+1)J_1(\alpha_{0n})} J_1\left(\frac{\alpha_{0n}}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}r\right) \sin\left(\frac{2m+1}{c}e^{-\alpha[\frac{\alpha_{0n}}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}+\frac{2m+1}{c}\pi]t}\right) \quad (24)$$

onde os pontos internos na amêndoа de cupuaçu seguem as transformações de coordenadas do sistema retangular para cilíndrico, portanto, $r^2 = a^2 + b^2$, $z=c$ que são os limites da amêndoа e $r^2 = x^2 + y^2$ para pontos internos. O fator α_{0n} são as raízes de Bessel e J_1 é a função de Bessel de primeira espécie de ordem 1. Sendo detalhado no Apêndice E.

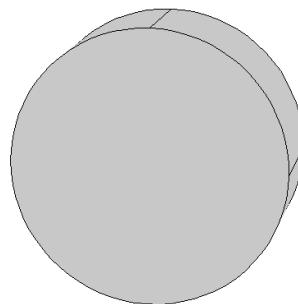
5.2.2 Modelagem computacional

Esta seção apresenta a modelagem computacional do modelo cilíndrico.

5.2.2.1 Construção da geometria

Para a representação do modelo cilíndrico da amêndoа no cupuaçu foi construída a geometria usando a opção “cilindro” disponível no COMSOL®. As dimensões consideradas são ilustradas na Tabela 8. A Figura 19 ilustra a cilíndrica para a representação da amêndoа do cupuaçu.

Figura 19 – Representação do modelo cilíndrico



Fonte: Autoria própria

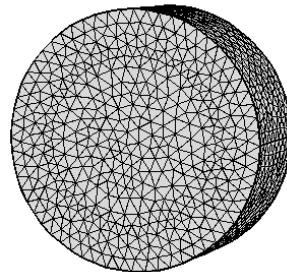
O material utilizado na simulação pode ser analisa na subseção 5.1.2.2.

5.2.2.2 Criação da malha de cálculo

A malha criada para a resolução dos cálculos foi a malha tetraédrica, tipo fina. O maior refinamento da malha oferece maior precisão nos resultados, porém exige maior esforço computacional, como a geometria não possui elevado grau de complexidade, foi

escolhida a malha fina, assegurando maior precisão nos resultados. A Figura 20 mostra a malha gerada na geometria cilíndrica.

Figura 20 – Malha fina tetraédrica



Fonte: Autoria própria

Com o domínio discretizado, o software consegue resolver as equações diferenciais parciais por meio do método dos elementos finitos. A Tabela 10 apresenta as características da malha gerada ilustrada na Figura 20.

Tabela 10 – Número e tipos de elementos para discretização do modelo cilíndrico

Tipos de elementos	Número de elementos
Tetraédrico	33.315
Triangular	2.730
Aresta	152
Vértice	8

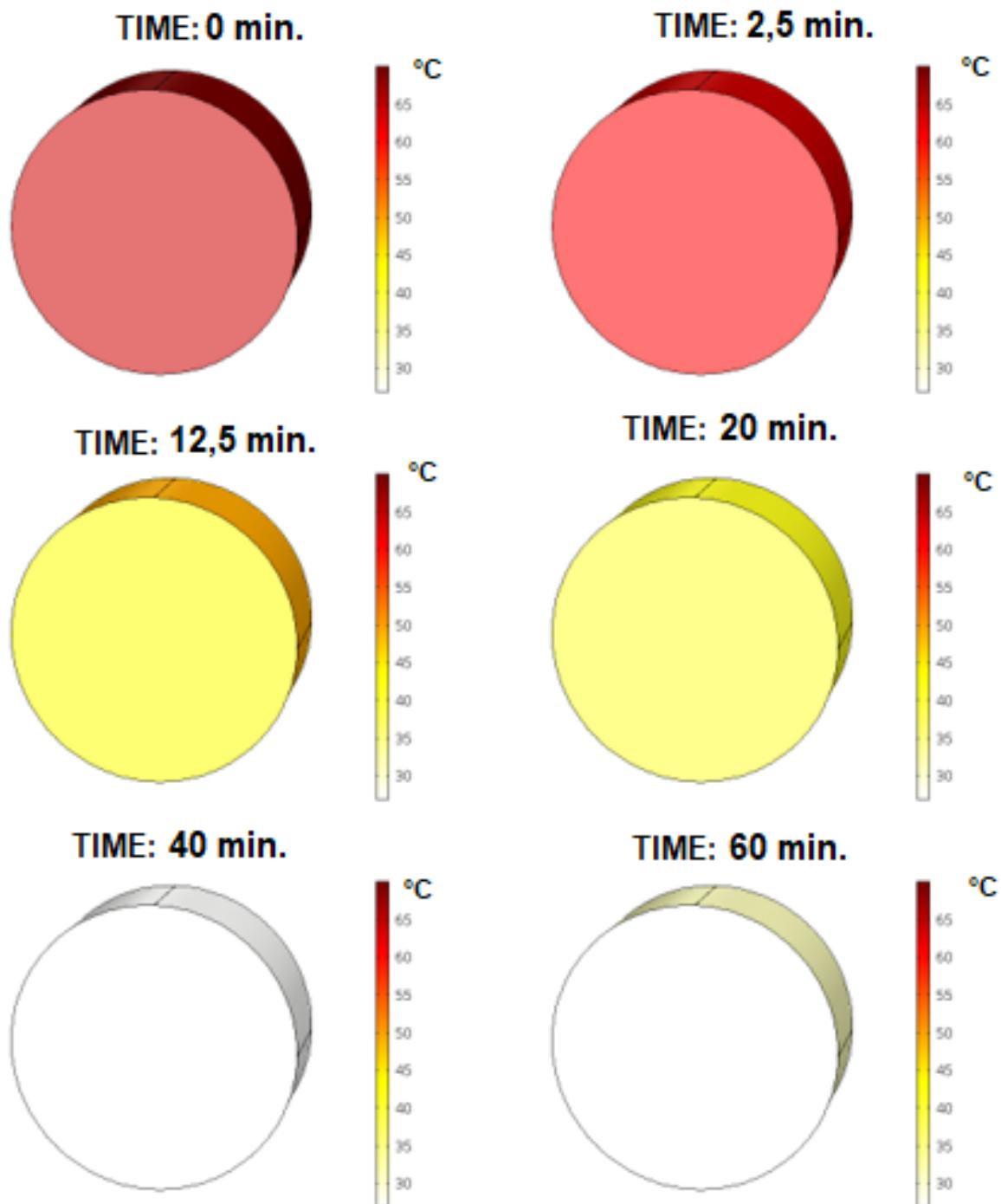
Fonte: Autoria própria

5.2.2.3 Simulação

Após a criação da malha, a etapa seguinte é a simulação. O estudo avaliou a dissipação do calor presente na amêndoа do cupuaçu, em contato com a temperatura ambiente. A temperatura inicial da amêndoа é de 70°C, a temperatura ambiental é 25°C. A Figura 21 mostra o comportamento de resfriamento do modelo cilíndrico no tempo de simulação de 60 min.

A Figura 21 apresenta o modelo cilíndrico, que inicialmente possuía temperatura de 70°C, e ao interagir com o ambiente, cede calor para o mesmo, sendo a temperatura ambiente considerada para a simulação de 25 °C. A Figura 21 ilustra o resfriamento do modelo cilíndrico nos tempos de simulação de 0 min, 2,5 min, 12,5 min, 20 min, 40 min, 60 min,, e de uma maneira geral, é observado a dissipação de calor ao longo do tempo tendendo ao equilíbrio térmico. O comportamento de redução da temperatura é ilustrado na Figura 22.

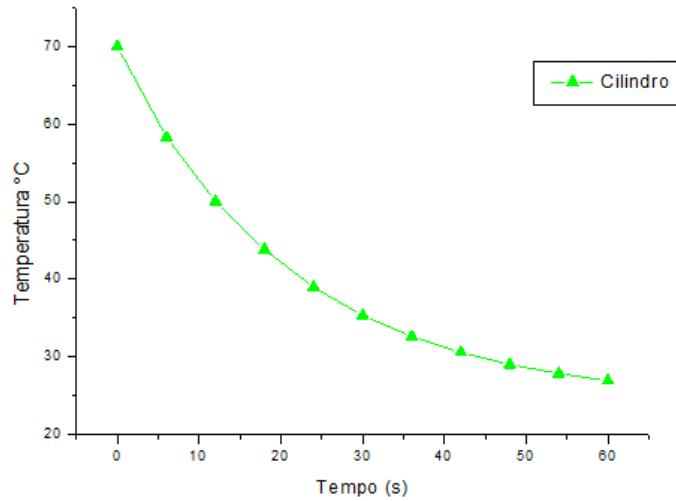
Figura 21 – Resfriamento do modelo cilíndrico em função do tempo, 60 min s de simulação



Fonte: Autoria própria

A Figura 22 mostra que a temperatura no volume do modelo cilíndrico, que representa a amêndoа do cupuaçu, tem uma significativa redução devido a troca de calor para o ambiente. A temperatura ambiente considerada na simulação foi de 25°C. A queda na temperatura é mais acentuada no início da simulação, apresentando uma

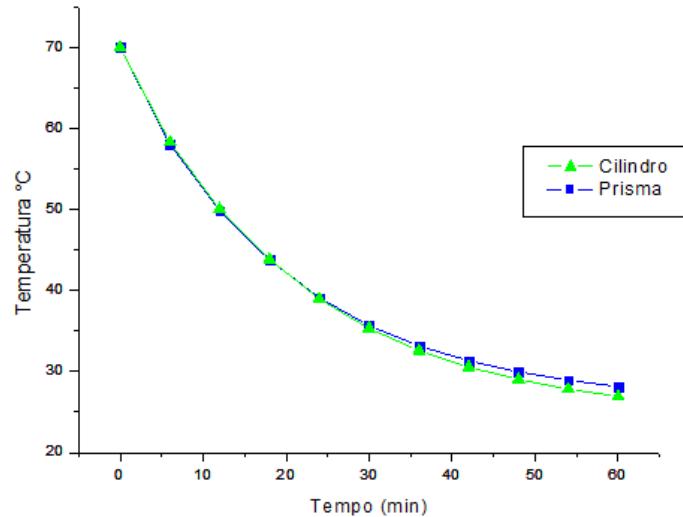
Figura 22 – Resfriamento do modelo cilíndrico em função do tempo



Fonte: Autoria própria

variação mais tênue após 30 minutos de simulação. A Figura 23, apresenta a comparação entre o comportamento do modelo prismático, Figura 17, e do modelo cilíndrico, Figura 22.

Figura 23 – Comparação entre o comportamento térmico dos modelos prismático e cilíndrico



Fonte: Autoria própria

Observando a Figura 23, verifica-se que o comportamento da curva de resfriamento do modelo prismático e cilíndrico é substancialmente próximo.

5.3 Modelo esférico

A presente seção ilustra o método analítico e modelagem computacional da amêndoа do cupuaçu por meio da geometria esférica.

5.3.1 Solução analítica

No sistema de coordenadas esféricas, um ponto é determinado de acordo a sua distância entre as coordenadas de origem e dois ângulos. O sistema de coordenada esféricas é representado por (ρ, θ, ϕ) , onde ρ equivale a distância entre o ponto e a origem, θ é o ângulo polar relativo ao eixo z e ϕ é o ângulo azimutal da projeção no plano (x,y) , em relação ao eixo de valores positivos de x . A conversão para o sistema de coordenadas cartesianas é dada pela seguinte relação: $x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ e $z = \rho \cos \phi$ (BAUER et al., 2012). Nesta seção a amêndoа do cupuaçu será representada por meio de coordenadas esféricas, que é representado na Figura 24.

Figura 24 – Modelo esférico para a amêndoа do cupuaçu



Fonte: Autoria própria

Para o modelo esférico a técnica de separação de variáveis é dada por:

$$\Psi(\rho, \theta, \phi) = R(\rho)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (25)$$

Na Tabela 1 é visto o correspondente operador laplaciano para as coordenadas esféricas. Portanto, usando o respectivo operador e a separação de variáveis em 17, obtém-se:

$$\Theta\Phi \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\Theta\Phi \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}R\Phi \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{\cot\theta}{\rho^2}R\Phi \frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\Theta R \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\lambda^2 \quad (26)$$

Dividindo a equação (26) por $R(\rho)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, resultando em:

$$\frac{\rho^2 \sin^2\theta}{R} \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2\rho \sin^2\theta}{R} \frac{dR}{d\rho} + \frac{\sin^2\theta}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{\sin^2\theta \cot\theta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\theta} + \lambda^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$$

como o lado direito é função somente de Φ , conclui-se que:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0 \quad (27)$$

sendo ($m=1,2,3\dots$). O mesmo procedimento visto anteriormente leva as equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + \lambda^2 \rho^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - \frac{\cot\theta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\theta} = k$$

onde k é a segunda constante de separação, gerando assim um sistema de três equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{\rho^2}{R} \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + \lambda^2 \rho^2 = k \\ \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - \frac{\cot\theta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\theta} = k \\ \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \end{cases}$$

Para ($k=l(l+1)$, $l=0,1,2,3\dots$) implica que a primeira equação é de Bessel, dada por:

$$\rho^2 \frac{d^2R}{d\rho^2} + 2\rho \frac{dR}{d\rho} + [\lambda^2 \rho^2 - l(l+1)]R = 0 \quad (28)$$

a segunda equação diferencial ordinária resulta na equação associada de Legendre:

$$(1-x^2) \frac{d^2\theta}{dx^2} - 2x \frac{d\theta}{dx} + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}] \Theta = 0 \quad (29)$$

onde $x=\cos \theta$. Todas as três têm soluções dadas por:

$$\begin{cases} R(\rho) = AJ_l(\lambda\rho) + BN_l(\lambda r) \\ \Theta(\theta) = CP_l^m(\cos \theta) + DQ_l^m(\cos \theta) \\ \Phi(\phi) = E \cos(m\phi) + F \sin(m\phi) \end{cases} \quad (30)$$

A solução em $R(r)$ é a solução da equação de Bessel, por não ter fonte de calor contínua dentro da amêndoas isso implica em $F=0$, a mesma observação para a função de Legendre associada de segunda espécie $Q_l^m(\cos \theta)$, ou seja $D=0$ (SALES; LIMA, 2018).

No modelo esférico as condições de fronteiras e iniciais são:

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = 0 \text{ e } \Psi(r, \phi, \phi, 0) = T_0$$

onde r é o tamanho radial para amêndoas do cupuaçu e T_0 a temperatura inicial interna na amêndoas. Usando as condições dadas, eliminam-se as constantes presentes em cada solução nas equações diferenciais lineares de segunda ordem 30. Assim, as soluções de 30 são introduzidas em 25 e 6 para chegar ao modelo esférico para temperatura:

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 4T_0 \frac{1}{\pi \beta_{0n}^2 \left[J_{\frac{3}{2}}(\beta_{0n}) \right]^2} j_0 \left[\frac{\beta_{0n}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} r \right] e^{-\alpha \left[\frac{\beta_{0n}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} \right]^2 t} \quad (31)$$

Cuja a transformação de coordenada são para pontos internos na amêndoas $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $r^2 = a^2 + b^2 + c^2$ são os pontos que definem o tamanho da amêndoas. As funções j_0 e $J_{\frac{3}{2}}$ são a função de Bessel esférica de primeira espécie de ordem zero e função de Bessel de primeira espécie de ordem $\frac{3}{2}$, respectivamente. Os cálculos são detalhados no Apêndice F.

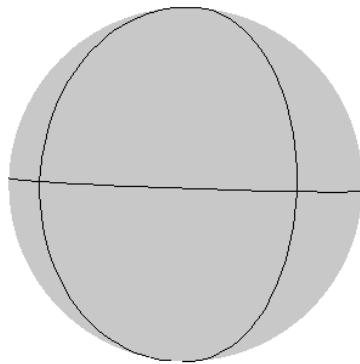
5.3.2 Modelagem computacional

A seção exibe a modelagem computacional do modelo esférico para a amêndoа do cupuaçu.

5.3.2.1 Construção da geometria

Para a representação da amêndoа no cupuaçu com modelo esférico foi construída a geometria usando a opção “esfera” disponível no COMSOL®. Com dimensões de acordo a tabela 8, A Figura 25 ilustra a cilíndrico para a representação da amêndoа do cupuaçu.

Figura 25 – Representação do modelo esférico



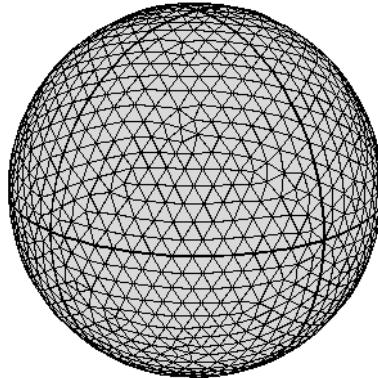
Fonte: Autoria própria

Considerando o material simulado o mesmo utilizado para os modelos anteriores, especificado em 5.1.2.2

5.3.2.2 Criação da malha de cálculo

A malha usada foi a tetraédrica, tipo fina, sua função é solucionar as equações diferenciais parciais por meio dos elementos finitos, a partir da subdivisão do modelo em infinitesimais partes. Quanto mais refinada é malha mais precisos são os cálculos, porém maior é o esforço computacional, como a geometria esférica é simples, foi utilizada a malha fina para obter cálculos com boa precisão. A Figura 26 apresenta a malha criada para a geometria esférica.

Figura 26 – Malha fina tetraédrica



Fonte: Autoria própria

A malha escolhida para a geometria esférica foi a mesma usada para a geometria cilíndrica e prismática, para melhorar a comparação dos sistemas. A Tabela 11 apresenta as características da malha gerada ilustrada na Figura 26.

Tabela 11 – Número e tipos de elementos para discretização do modelo esférico

Tipos de elementos	Número de elementos
Tetraédrico	60.931
Triangular	3.218
Aresta	236
Vértice	14

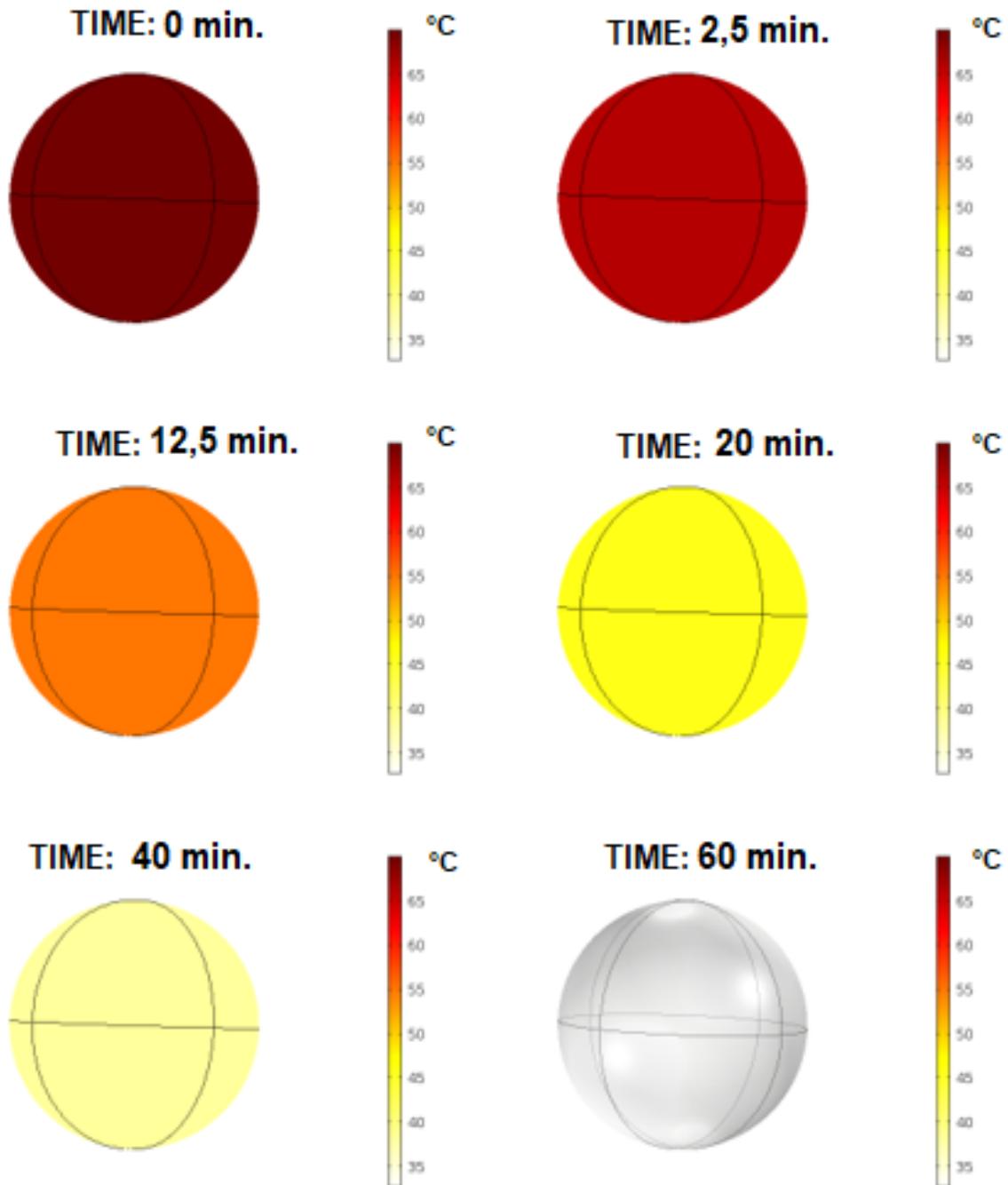
Fonte: Autoria própria

5.3.2.3 Simulação

Criada a malha de cálculo, é possível simular o sistema. A simulação analisou o comportamento de resfriamento da amêndoа do cupuaçu, inicialmente com 70°C, a amêndoа é exposta ao ambiente, com temperatura de 25 °C, com isso sua temperatura é reduzida, devido a dissipação de calor para o ambiente. Este comportamento de resfriamento é simulado o resultado é ilustrado na Figura 27.

O calor presente no interior da amêndoа vai sendo dissipado pelo ambiente, fazendo com o que a temperatura inicial seja reduzida. A Figura 27 elucida o comportamento do modelo esférico nos tempos 0 min, 2,5 min, 12,5 min, 20 min, 40 min, 60 min. Em que é possível verificar que a temperatura, do volume total, do modelo esférico diminui em função do tempo, tendendo à temperatura ambiente, satisfazendo as leis da termodinâmica.

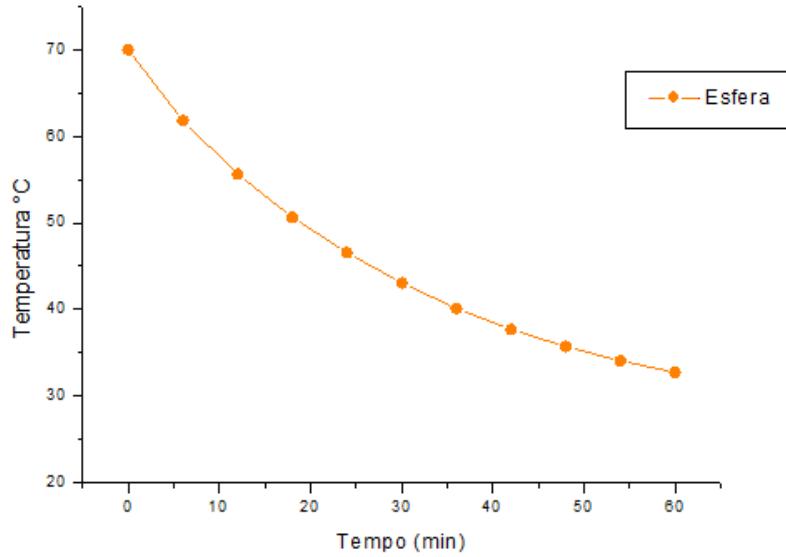
Figura 27 – Resfriamento do modelo esférico durante 60 min de simulação



Fonte: Autoria própria

A Figura 28 mostra que há uma redução na temperatura do modelo esférico em função do tempo, devido a dissipação do calor contido no seu interior para o ambiente, com temperatura de 25 °C. A redução na temperatura é significativa nos primeiros segundos de simulação, assumindo um comportamento mais tenué a partir de 30 min.

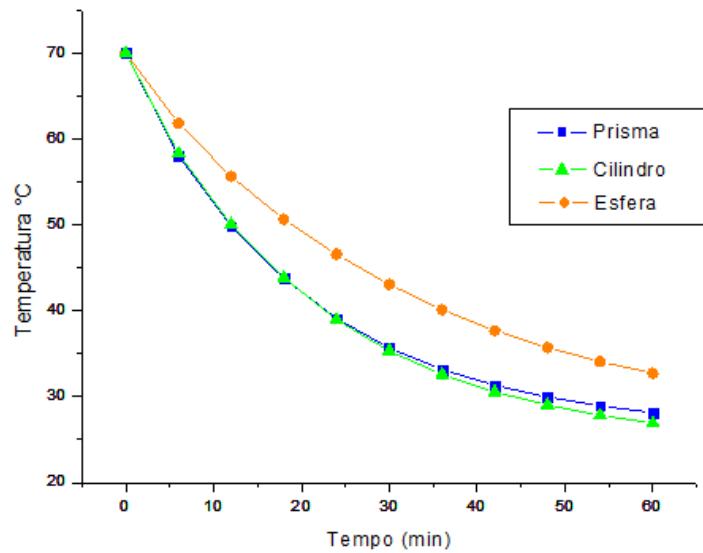
Figura 28 – Resfriamento do modelo esférico em função do tempo



Fonte: Autoria própria

A Figura 29 ilustra a comparação das curvas de resfriamento dos modelos analisados, prismático, cilíndrico e esférico.

Figura 29 – Comparação entre o comportamento térmico dos modelos prismático, cilíndrico e esférico



Fonte: Autoria própria

A Figura 29 mostra que o comportamento térmico do modelo esférico se distancia do comportamento dos modelos prismáticos e cilíndricos, esta diferença pode ser explicada devido a simetria da geometria esférica, diferentemente dos modelos

prismático e cilíndrico. O último modelo analisado é o elipsoidal, que será na próxima sessão.

5.4 Modelo elipsoidal

A seção apresenta a resolução analítica e a modelagem computacional do modelo elipsoidal para a amêndoas do cacau.

5.4.1 Solução analítica

Esta seção mostra a utilização de um modelo elipsoidal para solucionar o problema de distribuição de temperatura na amêndoas do cupuaçu. A Figura 30, ilustra a representação da amêndoas por meio de uma geometria elipsoidal.

Figura 30 – Modelo elipsoidal para a amêndoas do cupuaçu



Fonte: Autoria própria

[HAJI-SHEIKH e SPARROW \(1966\)](#) apresentam uma solução analítica para o problema de difusão de calor em esferoide prolato. Neste trabalho vamos usar uma solução para o transporte de calor dentro de uma amêndoas de cupuaçu, cuja a geometria é próxima a geometria elipsoidais. Pode ser descrita como:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \alpha \nabla \Psi$$

onde α é a difusividade térmica, t é o tempo e Ψ é o campo de temperatura.

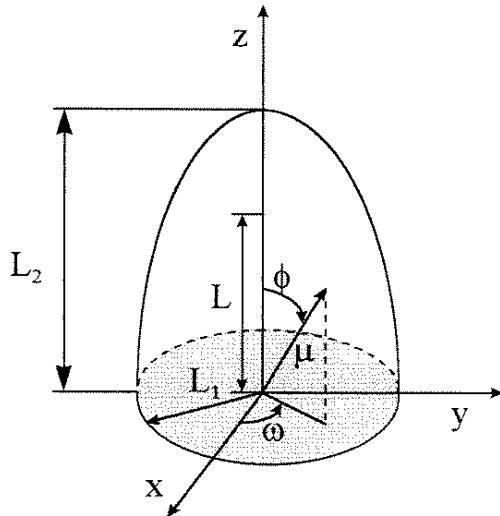
No caso específico de elipsóides de revolução, um sistema de coordenadas que se adequa muito bem à forma do corpo é o esferoidal prolato. Um elipsoide de revolução, em que o eixo de revolução é maior que o outro eixo, é chamado esferoide prolato. Em contraste, se o eixo é menor, é chamado de esferoide oblato. As relações entre os eixos de coordenadas cartesianas (x, y, z) e o esferoidal prolato (elíptico) (μ, ϕ, ω) são dados a

seguir:

$$\begin{cases} x = L \sinh \mu \sin \phi \cos \omega \\ y = L \sinh \mu \sin \phi \cos \omega \\ z = L \cosh \mu \cos \phi \end{cases}$$

onde L é o comprimento focal igual a $\sqrt{(L_2^2 - L_1^2)}$, sendo L_1 e L_2 os semieixos menor e maior da elipse, respectivamente. Sendo ilustrado na figura 31.

Figura 31 – Característica de um esferoide prolato sólido



Fonte: Autoria própria

A determinação do campo de temperatura no interior de um esferoide prolato, segundo as considerações apresentadas na seção 3.1 são:

$$\Psi(u, v, t = 0) = T_0 \text{ (Condição inicial)}$$

$$\Psi\left(\frac{L_2}{L}, v, t\right) = \text{constante} \text{ (Condição de fronteira)}$$

Essa condição de secagem que ocorre sob condições de equilíbrio na superfície.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}(u, v = 0, t) = 0$$

Corresponde a condição do campo de temperatura ser simétrico em torno do eixo z durante o processo.

A técnica de solução que será utilizada é a da separação de variáveis, assumindo-se que a função Ψ seja obtida por:

$$\Psi(u, v, t) = \varphi(u, v)T(t)$$

sendo,

$$T = Ae^{-\alpha\lambda^2 t}$$

a parte espacial é dado por:

$$\nabla^2 \varphi = -\lambda \varphi$$

onde λ é a constante de separação de variável espacial e temporal.

De acordo a Tabela 1, com a condição de simetria em z , detalhada no Apêndice G. Chegamos a duas soluções:

$$\nabla^2 \varphi = -\lambda^2 L^2 \varphi \quad (32)$$

a equação pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 \varphi + \lambda^2 L^2 \varphi = 0 \quad (33)$$

Esta expressão é conhecida como equação de Helmholtz ([MORSE; FESHBACK, 1953](#)). Pode-se usar mais uma vez a separação de variáveis.

$$\varphi = U(u)V(v) \quad (34)$$

então:

$$\frac{d}{du}[(1-u^2)\frac{dU}{du}] + (b - \lambda^2 L^2 u^2)U = 0 \quad (35)$$

e

$$\frac{d}{dv}[(1-v^2)\frac{dV}{dv}] + (b - \lambda^2 L^2 v^2)V = 0 \quad (36)$$

sendo $0 \leq v \leq 1$ e $1 \leq u \leq \frac{L_2}{L}$

Nas equações 35 e 36, b é a constante de separação de autovalor. As duas equações têm a mesma forma, sendo que a referente a $V(v)$ envolve um comportamento da solução entre o ponto singular +1 e o ponto 0, enquanto que o referente a $U(u)$, do ponto singular +1 até $\frac{L_2}{L}$. A exigência de que as soluções das equações 35 e 36 sejam finitas nos pontos singulares, torna as equações de autovalor característico para b , isto é, b deve ser determinado para que as equações U e V sejam finitas nestes pontos. Assim as soluções das equações 35 e 36 devem ser função de 1º espécie (função de 2º espécie é infinitas nos intervalos $0 \leq v \leq 1$ e $1 \leq u \leq \frac{L_2}{L}$)

Quando $c \neq 0$, a equação (36) difere da equação de Legendre associada, por ter uma singularidade essencial no infinito, logo:

$$\frac{d}{dv}[(1-v^2)\frac{dV}{dv}] + (b - \lambda^2 L^2 v^2)V = 0$$

ou

$$(1-v^2)V'' - 2vV' + [b - \lambda^2 L^2 v^2]V$$

$$V'' - \frac{2v}{1v^2} V' + \left[\frac{b - \lambda^2 L^2 v^2}{(1 - v^2)} \right] V = 0 \quad (37)$$

da definição dessas singularidades, seja uma equação diferencial de segunda ordem:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (38)$$

se $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ são polinômios, e existe um ponto x_0 tal que:

$$P(x_0) \neq 0 \quad (39)$$

então x_0 é um ponto ordinário. No caso de $P(x_0)=0$, o ponto x_0 é chamado ponto singular. Se, no entanto:

$$\lim_{v \rightarrow \pm 1} (v \pm 1) \frac{2v}{1 - v^2} = \lim_{v \rightarrow \pm 1} (v \rightarrow +1) \frac{2v}{1 - v^2} = 1$$

se,

$$v = -1 \rightarrow = -1$$

para o outro limite:

$$\lim_{v \rightarrow +1} [(v \pm 1)^2 \frac{b - \lambda^2 L^2 v^2}{(1 - v^2)}] = \lim_{v \rightarrow 1} [(v \rightarrow \pm 1)^2 \frac{b - \lambda^2 L^2 v^2}{(1 + v)(1 - v)}] = 0$$

no outro limite, temos:

$$\lim_{v \rightarrow -1} [(v \pm 1)^2 \frac{b - \lambda^2 L^2 v^2}{(1 + v)(1 - v)}] = 0$$

se $v \rightarrow \infty$ o singular é essencial.

Para funções radiais de 2º espécie convergem lentamente para pequenos valores de (V, U) (FLAMMER; FUNCTIONS, 1957), e em outros casos, eles não são absolutamente convergente para qualquer valor de (V, U) . Do exposto, a solução de função angular $V(v)$ é expressa em termo de uma série de funções de Legendre, enquanto $U(u)$ é obtida a partir de uma série de funções de Bessel esférica. As soluções das respectivas equações são dadas por:

$$U_m = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n-m}{2}} d_{nm} j_n(\lambda_{mk} u)$$

$$V_m = \sum_{n=0}^{\infty} d_{nm} P_n(v)$$

Com $m=0,2,4\dots$ e $n=0,2,4\dots$ Nas equações 38 e 39, $j_n(\lambda_{mk} u)$ é a função de Bessel esférica de 1º espécie de ordem n , enquanto que $P_n(v)$ é a função de Legendre de 1º espécie, respectivamente. Embora as equações 38 e 39 não seja definida para $u=1$ e $v=1$,

as soluções apresentadas são analíticas e finitas nestes pontos. Em particular condições finitas geralmente exigem que a solução obtida seja analítica em $|x|=1$.

Quando a equação (39) é substituída na equação (36) os coeficientes d_{nm} são determinados através da seguinte relação de recorrência (FLAMMER; FUNCTIONS, 1957).

$$A_r d_{r+2,m} + (B_r - b_n) d_{r,m} + C_r d_{r-2,m} = 0 \quad (40)$$

onde,

$$A_r = \frac{(r+2)(r+1)\lambda^2}{(2r+5)(2r+3)} \quad (41)$$

$$B_r = \frac{[(2r)(r+1)-1]\lambda^2}{(2r-1)(2r+3)} + r(r+1) \quad (42)$$

$$C_r = \frac{r(r-1)\lambda^2}{(2r-3)(2r-1)} \quad (43)$$

como $r=0,2,4\dots$

Os valores dos coeficientes b_n , equação (40), são obtidos pela equação transcendental seguinte:

$$T(b_n) = T_1(b_n) + T_2(b_n) = 0 \quad (44)$$

com,

$$T_1(b_n) = D_n - b_n - \frac{E_n}{(D_{n-2} - b_n) - \frac{E_{n-2}}{(D_{n-4} - b_n) - \dots}}$$

$$T_2(b_n) = \frac{E_{n+2}}{(D_{n+2} - b_n) - \frac{E_{n-2}}{(D_{n+4} - b_n) - \dots}}$$

sendo que,

$$D_n = n(n+1) + \frac{\lambda^2}{2} \left[1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \right]; \quad n \geq 0$$

e

$$E_n = \frac{n^2(n-1)^2\lambda^4}{(2n-1)^2(2n+1)(2n-3)}; \quad n \geq 2$$

A técnica utilizada para determinar o coeficiente b_n é denominada técnica de fração continuada (STRATTON et al., 1956), (MORSE; FESHBACK, 1953). Esta técnica é adotada para a determinação dos autovalores para $\lambda > 7,5$. Quando $\lambda \leq 10$, os autovalores são corrigidos através de uma expressão assintótica. O desenvolvimento a assintótico de b_n é dado pelo método de aproximações sucessivas:

$$b_n = (2n+1)\lambda - \frac{(2n^2+2n+3)}{2} - \frac{(2n+1)(n^2+n-3)}{2^4\lambda} - \frac{5(n^4+2n^3+7n+3)}{2^6\lambda^2} - \frac{(66n^5+165n^4+962n^3+1278n^2+1321n+453)}{2^{10}\lambda^3} + O^4 \quad (45)$$

No intervalo $7,5 < \lambda \leq 10$ nenhuma da relação fornece resultados coerentes. Uma série convergente para $d_{n,m}$ pode ser obtida para um conjunto de valores discretos de constante de separação b. Desta forma, tornam-se possíveis dois conjuntos de solução finitas, um para cada valor de n par, e outro quando n for ímpar. Para n par, o menor valor de b estar relacionado com $n=0$, o próximo com $n=2$, e assim por diante (MORSE; FESHBACK, 1953).

Dependendo do esquema de normalização adotado, os valores dos coeficientes $d_{n,m}$ serão diferentes, contudo, os coeficientes devem ser normalizados para que cada função esferoidal se reduza a correspondente função esférica quando $\lambda \rightarrow 0$. É usado neste trabalho $d_{n,m}$ converge para:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{r}{2}} r!}{2^r [(\frac{r}{2}!)^2]} d_{r,m} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{2^n [(\frac{n}{2}!)^2]} \quad (46)$$

Válida para $r=0,2,\dots$ e $n=0,2..\dots$ Esta equação é que possibilita a determinação dos coeficientes $d_{r,m}$, completamente. Para $n<0$ implica $P_n(v) = 0$, fazendo com que a série comece de em $n=0$.

A condição que restringe b nas equações diferenciais é refletida na equação (40) como um requisito de que a relação de coeficiente $\frac{d_n}{d_{n-2}} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ (STRATTON et al., 1956)

Além disso, como n é par os coeficientes d_1, d_3, \dots etc São desprezados e não devem ser considerados. A solução geral do problema é dada pela soma das soluções particulares para U(u) e V(v). Isto é:

$$\Psi(u, v, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} U_m(\lambda_{mk}, u) V_m(\lambda_{mk}, v) e^{-\lambda_{mk} \frac{\alpha}{L^2} t} \quad (47)$$

para $t=0$, tem-se $\Psi(u, v, t) = t_0$.

$$T_0 = \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} U_m(\lambda_{mk}, u) V_m(\lambda_{mk}, v) \quad (48)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (48) por $U_m(\lambda_{mk}, u) V_m(v) (u^2 - v^2)$ e integrando em $du dv$, tem-se:

$$A_{mk} = \frac{\int_0^1 \int_{\lambda}^{\frac{L_2}{L}} U_m(\lambda_{mu}, u) V_m(v) (u^2 - v^2) du dv}{\int_0^1 \int_{\lambda}^{\frac{L_2}{L}} [U_m(\lambda_{mu}, u) V_m(v)]^2 (u^2 - v^2) du dv} \quad (49)$$

para $p=m$, para $p \neq m$, tem:

$$\int_0^1 \int_1^{\frac{L_2}{L}} U_p(\lambda_{pk}, u) V_p(v) U_m(\lambda_{mk}, u) V_m(v) (u^2 - v^2) du dv = 0$$

A função $(u^2 - v^2)$ é a função peso, em outras palavras, foi usado a condição de ortogonalidade.

Ambos, para ter a relação geral para 47. Os coeficientes λ , b e d devem ser obtidos utilizando a condição de $U_m = 0$ na superfície do esferoide prolato ($u = \frac{L_2}{L}$), condição única que satisfaz a condição de contorno na superfície do corpo.

Uma particularidade da solução desta equação é que para pequenos valores de $\frac{\alpha t}{L^2}$ é necessário utilizar um alto número de termos das séries, resultando em um considerável inconveniente. Toda via, para altos valores desta grandeza, o termo exponencial predomina e a solução converge rapidamente, em virtude do rápido decréscimo da função exponencial.

A formulação aqui apresentada pode ser utilizada para descrever fenômenos transientes de difusão de massa (secagem ou umidificação) e calor (aquecimento ou resfriamento) em corpos com geometria esférica ($\frac{L_2}{L_1} = 1$) cilíndrica ($\frac{L_2}{L_1} = \infty$) e elipsoidal ($0 < \frac{L_2}{L_1} < \infty$), com as condições de contorno indicadas.

O mérito do método, em relação ao numérico está na técnica desenvolvida para solução analítica. Para obter os valores dos coeficientes λ , b e d_{nm} da solução final de temperatura dentro da amêndoа, um programa computacional foi usado, o Mathematica®. Assim as integrais para A_m , com a condição de ortogonalidade, foram resolvidas com o auxílio do software Mathematica®.

Como b é uma constante de separação de autovalor e está conectado com λ (equações (35) e (36)), para cada valor de b_n dado pela equação (45), teremos um λ_m . Mas, os valores de λ são raízes de Bessel esférica, logo necessita de mais um índice, que chamamos de k. Com ajuda das relações das equações (40) a (44), obtemos os valores para b_n . A equação (46) é usada para obter valores de d_{nm} .

Expandindo a equação (47) de m=0 até m=4 temos:

$$\Psi(u, v, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_{0k} e^{(-\lambda_{0k}^2 \frac{\alpha}{L^2} t)} U_0(\lambda_{0k}, u) V_0(v) + A_{2k} e^{(-\lambda_{2k}^2 \frac{\alpha}{L^2} t)} U_2(\lambda_{2k}, u) V_2(v) + A_{4k} e^{(-\lambda_{4k}^2 \frac{\alpha}{L^2} t)} U_4(\lambda_{4k}, u) V_4(v)]$$

agora expandindo para k= 1,2,3

$$\begin{aligned}
\psi(u, v, t) = & A_{01} e^{-\lambda_{01}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} U_0(\lambda_{01}, u) V_0(v) + \\
& A_{02} e^{-\lambda_{02}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} U_0(\lambda_{02}, u) V_0(v) + A_{03} e^{-\lambda_{03}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} U_0(\lambda_{03}, u) V_0(v) + \\
& A_{21} e^{-\lambda_{21}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} U_2(\lambda_{21}, u) V_2(v) + A_{22} e^{-\lambda_{22}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} U_2(\lambda_{22}, u) V_2(v) + \\
& A_{23} e^{-\lambda_{23}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} U_2(\lambda_{23}, u) V_2(v) + A_{41} e^{-\lambda_{41}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} U_4(\lambda_{41}, u) V_4(v) + \\
& A_{42} e^{-\lambda_{42}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} U_4(\lambda_{42}, u) V_4(v) + A_{43} e^{-\lambda_{43}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} U_4(\lambda_{43}, u) V_4(v)
\end{aligned} \tag{50}$$

para a amêndoа estudada temos:

$$L = 26,22 \times 10^{-3} m$$

$$u=1,07$$

$$v=0,54$$

sendo que u e v vem do ponto onde se escolhe a fonte de calor para a medição.

Para as funções U_m e V_m , tem -se

$$\begin{aligned}
U_{0k} &= \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^{\frac{n}{2}} d_{n0} j_n(\lambda_{0k} u)] \\
U_{2k} &= \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^{\frac{n-2}{2}} d_{n2} j_n(\lambda_{2k} u)] \\
U_{4k} &= \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^{\frac{n-4}{2}} d_{n4} j_n(\lambda_{4k} u)]
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
V_{0m} &= \sum_{n=0}^{\infty} d_{0n} P_u(v) \\
V_{2k} &= \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} P_u(v) \\
V_{4k} &= \sum_{n=0}^{\infty} d_{4n} P_u(v)
\end{aligned} \tag{52}$$

para $m=0,2,4$ e $n=0,2$, tem-se:

$$U_{0k} = d_{00}j_0(\lambda_{0k}u) - d_{20}j_2(\lambda_{0k}u)$$

$$U_{2k} = d_{02}j_0(\lambda_{2k}u) - d_{22}j_2(\lambda_{2k}u)$$

$$U_{4k} = d_{04}j_0(\lambda_{4k}u) - d_{24}j_2(\lambda_{4k}u)$$

$$V_0 = d_{00}P_0(v) + d_{02}P_2(v)$$

$$V_2 = d_{20}P_0(v) + d_{22}P_2(v)$$

$$V_0 = d_{40}P_0(v) + d_{42}P_2(v)$$

onde j_0 e j_2 são funções esféricas de Bessel e P_0 e P_2 são polinômios de Legendre.

Desta forma, construímos as seguintes tabelas:

Tabela 12 – Resultado gerado pelo software Mathematica®

$\lambda_{m k}$		$d_{n m}$	
m	k	$n=0$	$n=2$
0	1	0,9	-0,18
	2	0,73	-0,48
	3	0,6	-0,61
2	1	0,12	1,10
	2	1,22	1,06
	3	0,25	0,82
4	1	0,013	0,18
	2	0,052	0,39
	3	0,1	0,57

Fonte: Autoria própria

Tabela 13 – Resultado gerado pelo software Mathematica®

m	k	λ	b
0	1	1,13	0,59
	2	2,81	1,94
	3	4,23	3,41
2	1	2,49	9,54
	2	3,93	15,02
	3	5,35	21,97
4	1	3,56	26,72
	2	5,08	54,38
	3	6,51	44,76

Fonte: Autoria própria

As integrais são:

$$A_{mk} = T_0 \frac{\int_0^1 \int_1^{1,17} U_{mk}(u) V_m(v) (u^2 - v^2) dudv}{\int_0^1 \int_1^{1,17} [U_{mk}(u) V_m(v)]^2 (u^2 - v^2) dudv}$$

$$A_{01} = T_0 \frac{\int_0^1 \int_1^{1,17} U_{01}(u) V_0(v) (u^2 - v^2) dudv}{\int_0^1 \int_1^{1,17} [U_{01}(u) V_0(v)]^2 (u^2 - v^2) dudv}$$

$$A_{02} = T_0 \frac{\int_0^1 \int_1^{1,17} U_{02}(u) V_0(v) (u^2 - v^2) dudv}{\int_0^1 \int_1^{1,17} [U_{02}(u) V_0(v)]^2 (u^2 - v^2) dudv}$$

$$A_{03} = T_0 \frac{\int_0^1 \int_1^{1,17} U_{03}(u) V_0(v) (u^2 - v^2) dudv}{\int_0^1 \int_1^{1,17} [U_{03}(u) V_0(v)]^2 (u^2 - v^2) dudv}$$

$$A_{21} = T_0 \frac{\int_0^1 \int_1^{1,17} U_{21}(u) V_2(v) (u^2 - v^2) dudv}{\int_0^1 \int_1^{1,17} [U_{21}(u) V_2(v)]^2 (u^2 - v^2) dudv}$$

$$A_{23} = T_0 \frac{\int_0^1 \int_1^{1,17} U_{23}(u) V_2(v) (u^2 - v^2) dudv}{\int_0^1 \int_1^{1,17} [U_{23}(u) V_2(v)]^2 (u^2 - v^2) dudv}$$

$$A_{41} = T_0 \frac{\int_0^1 \int_1^{1,17} U_{41}(u) V_4(v) (u^2 - v^2) dudv}{\int_0^1 \int_1^{1,17} [U_{41}(u) V_4(v)]^2 (u^2 - v^2) dudv}$$

$$A_{42} = T_0 \frac{\int_0^1 \int_1^{1,17} U_{42}(u) V_4(v) (u^2 - v^2) dudv}{\int_0^1 \int_1^{1,17} [U_{42}(u) V_4(v)]^2 (u^2 - v^2) dudv}$$

$$A_{43} = T_0 \frac{\int_0^1 \int_1^{1,17} U_{43}(u) V_4(v) (u^2 - v^2) dudv}{\int_0^1 \int_1^{1,17} [U_{43}(u) V_4(v)]^2 (u^2 - v^2) dudv}$$

Colocando 52 em 51, tem-se:

$$\Psi(u, v, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mk} [(-1)^{\frac{n-m}{2}} d_{nm} j_n(\lambda_{mk} u)] [d_{nm} P_n(v)] e^{-\lambda_{mk}^2 \frac{\alpha}{L^2} t}$$

para n=0,2, temos:

$$\begin{aligned}\Psi(u, v, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} [(-1)^{\frac{-m}{2}} d_{0m} j_0(\lambda_{mk} u) + (-1)^{\frac{2-m}{2}} d_{2m} j_2(\lambda_{mk} u)] [d_{0m} P_0(v) + \\ + d_{2m} P_2(v)] e^{-\lambda_{nm}^2 \frac{\alpha}{L^2} t}\end{aligned}$$

fazendo o produto entre as parcelas, tem:

$$\begin{aligned}\Psi(u, v, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} [(-1)^{\frac{-m}{2}} d_{0m}^2 j_0(\lambda_{mk} u) P_0(v) + (-1)^{\frac{-m}{2}} d_{0m} d_{2m} j_0(\lambda_{mk} u) P_2(v) + \\ + (-1)^{\frac{2-m}{2}} d_{2m} d_{0m} j_2(\lambda_{mk} u) P_0(v) + (-1)^{\frac{2-m}{2}} d_{0m}^2 j_2(\lambda_{mk} u) P_2(v)] e^{-\lambda_{mk}^2 \frac{\alpha}{L^2} t}\end{aligned}$$

definindo $F(j, p)_{mk}$, como:

$$\begin{aligned}F^{(2)}(j, p)_{mk} = (-1)^{\frac{-m}{2}} [d_{0m}^2 P_0(v) - d_{0m} d_{2m} P_2(v)] j_0(\lambda_{mk} u) [d_{2m} d_{0m} P_0(v) + \\ - d_{2m}^2 (\lambda_{mk} u) P_2(v)] j_2(\lambda_{mk} u)\end{aligned}$$

a função F com o índice superior (2), significa n=[0,2] então, tem-se:

$$\Psi(u, v, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} F^{(2)}(j, p)_{mk} e^{-\lambda_{km}^2 \frac{\alpha}{L^2} t}$$

expandindo até k=3

$$\begin{aligned}\Psi(u, v, t) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_{m1} F^{(2)}(j, p)_{m1} e^{-\lambda_{m1}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} + A_{m2} F^{(2)}(j, p)_{m2} e^{-\lambda_{m2}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} + \\ + A_{m3} F^{(2)}(j, p)_{m3} e^{-\lambda_{m3}^2 \frac{\alpha}{L^2} t}]\end{aligned}$$

fazendo a somatória m=0,2, tem-se:

$$\begin{aligned}\Psi(u, v, t) = A_{01} F_{01} e^{-\lambda_{01}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} + A_{21} F_{21} e^{-\lambda_{21}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} + A_{02} F_{02} e^{-\lambda_{02}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} + A_{22} F_{22} e^{-\lambda_{22}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} + \\ + A_{03} F_{03} e^{-\lambda_{03}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} + A_{23} F_{23} e^{-\lambda_{23}^2 \frac{\alpha}{L^2} t} \quad (53)\end{aligned}$$

Depois de calcular as λ_{nm} , e d_{nm} , foram calculados as integrais A_{nm} e o fator $F_{mk}^{(2)}$. Assim é obtida as tabelas abaixo, com ajuda do software Mathematica®:

Tabela 14 – Resultado gerado pelo software Mathematica®

F_{mk}	Valor
F_{01}	0,648
F_{02}	0,133
F_{03}	0,0043
F_{21}	-0,0165
F_{22}	-0,034
F_{23}	0,0035
F_{41}	-0,00004
F_{42}	0,0008
F_{43}	0,0054

Fonte: Autoria própria

Tabela 15 – Resultado gerado pelo software Mathematica®

A_{mk}	Valor
A_{01}	2,105
A_{02}	2,533
A_{03}	-32,7041
A_{21}	-2,618
A_{22}	0,2631
A_{23}	-9,844
A_{41}	65,433
A_{42}	23,925
A_{43}	3,06

Fonte: Autoria própria

Tabela 16 – Resultado gerado pelo software Mathematica®

λ_{mk}	Valor
λ_{01}	1,13
λ_{02}	2,81
λ_{03}	4,23

Fonte: Autoria própria

Tabela 17 – Resultado gerado pelo software Mathematica®

λ_{21}	2,49
λ_{22}	3,93
λ_{23}	5,35

Fonte: Autoria própria

Com os dados destas tabelas, é possível calcular a temperatura em função do tempo e da posição, dado pela equação (53).

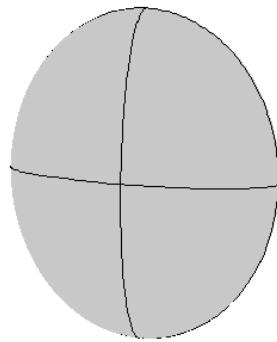
5.4.2 Modelagem computacional

A seção mostra a modelagem computacional da amêndoа do cupuaçu para o modelo elipsoidal.

5.4.2.1 Construção da geometria

A amêndoа foi construída de por meio de um elipsoide com medidas: $L_2=a=26$ mm, $L_1=b=22$ mm e $c=10$ mm. A Figura 32 ilustra o elipsoide gerado pelo COMSOL® para a representação da amêndoа do cupuaçu.

Figura 32 – Representação da amêndoа de cupuaçu.



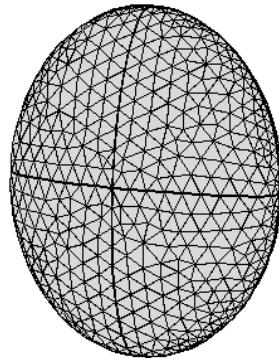
Fonte: Autoria própria

O material para a simulação do modelo elipsoidal é o mesmo no caso dos modelos: prismático, esférico e cilíndrico, ilustrado na subseção 5.1.2.2

5.4.2.2 Criação da malha de cálculo

A malha criada para a simulação do modelo, consistiu em uma malha tetraédrica, do tipo fina com construção automática, ilustrada na Figura 33. Para a simulação de todos os modelos foi utilizado o mesmo tipo de malha, para garantir a melhor comparação dos resultados.

Figura 33 – Malha fina tetraédrica



Fonte: Autoria própria

Existem diferentes tipos e tamanhos de malha, quanto mais refinada mais precisa é a simulação e consequentemente maior o esforço computacional. As malhas de cálculo são essenciais para a realização da simulação, pois a partir destas, as equações diferenciais parciais são solucionadas por meio do método dos elementos finitos ([LOTT et al., 2006 apud MCGUINNESS et al., 1992](#)). Os elementos que caracterizam a malha gerada é apresentada na tabela.

Tabela 18 – número e tipos de elementos para discretização do modelo elipsoidal

Tipos de elementos	Número de elementos
Tetraédrico	17.911
Triangular	1.952
Aresta	176
Vértice	6

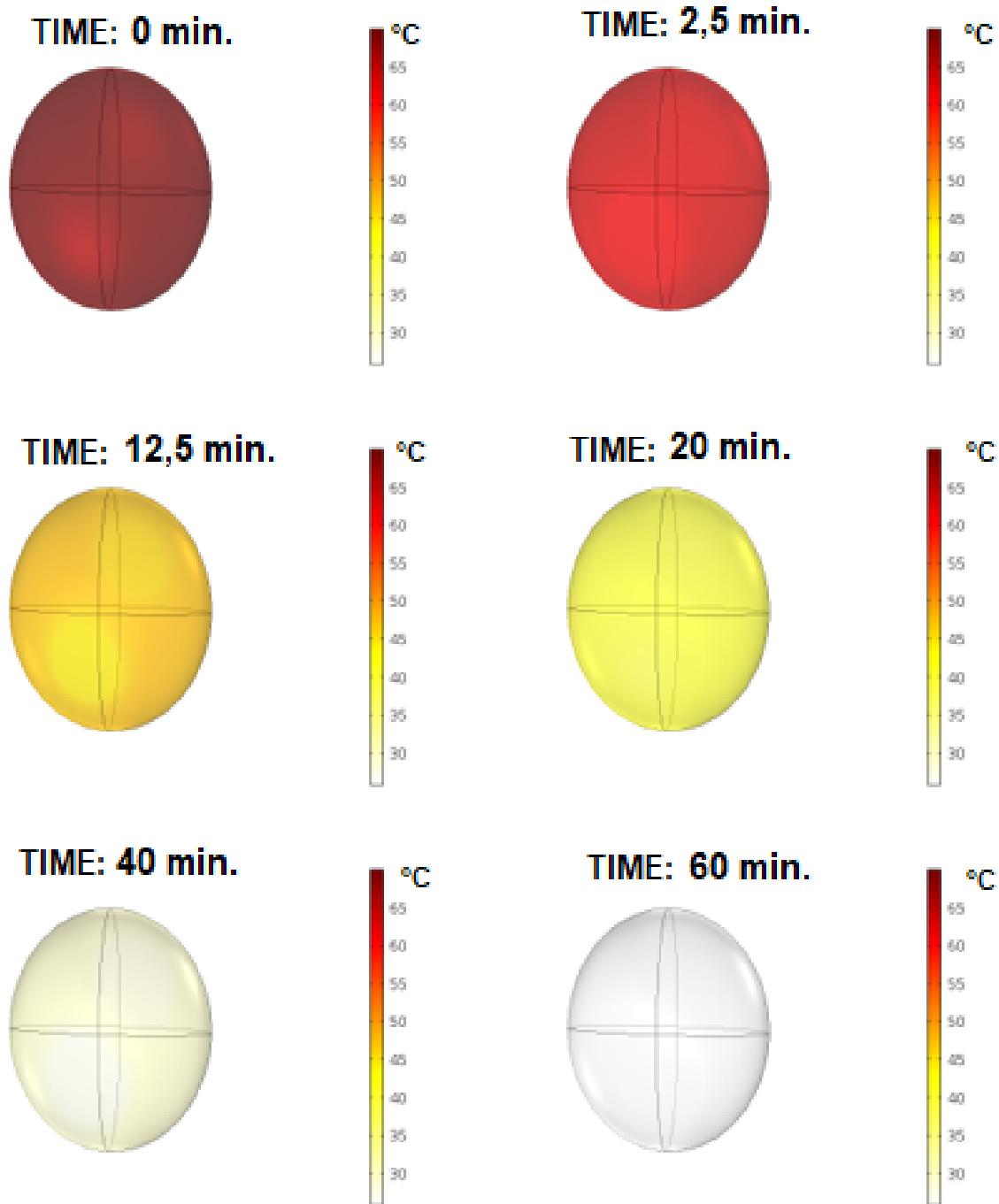
Fonte: Autoria própria

5.4.2.3 Simulação

O procedimento de simulação empregado foi o mesmo para as simulações anteriores, a amêndoа ao entrar em contato com o ambiente começa a dissipar o calor. A simulação inicia com a amêndoа a 70°C, e o comportamento de resfriamento é avaliado para um tempo de 60 min, que é ilustrado na Figura 34.

A Figura 34 mostra o comportamento do modelo elipsoidal no tempos de simulação de 0 min, 2,5 min, 12,5 min, 20 min, 40 min, 60 min. No qual, é possível verificar que o modelo cede calor para o ambiente, reduzindo a temperatura no volume total. Correspondendo as leis da termodinâmica, observa-se que o modelo tende ao equilíbrio térmico em função do tempo. A dissipação do calor da amêndoа ao longo do tempo simulado é ilustrado na Figura 35.

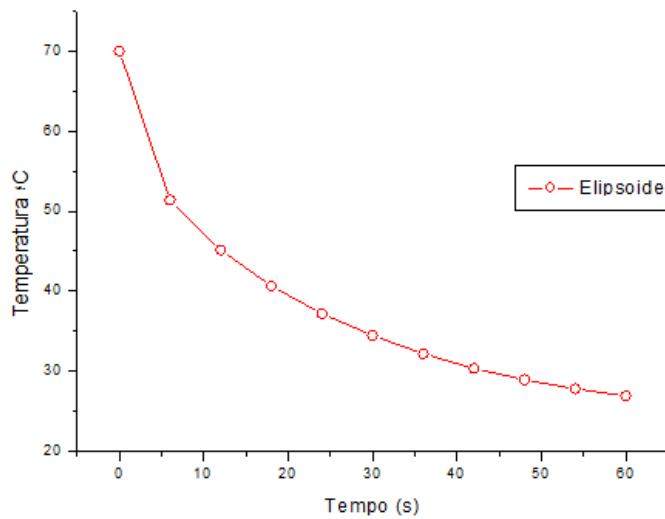
Figura 34 – Simulação do resfriamento do modelo elipsoidal, durante 60 min



Fonte: Autoria própria

Analisando a Figura 35, pode-se inferir que a temperatura da amêndoа é dissipada pelo ambiente, tendo uma redução considerável na sua temperatura, a queda é mais acentuada no início da simulação, apresentando uma mudança mais tenua após 30 min de simulação. A Figura 36 mostra o comportamentos dos modelos prismático,

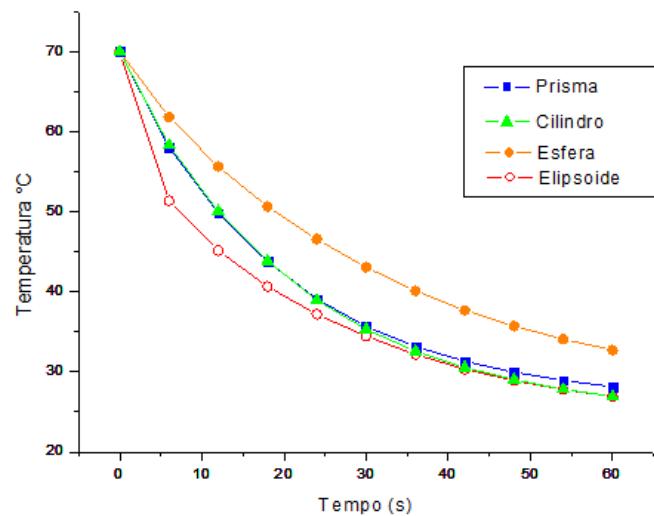
Figura 35 – Comportamento térmico da amêndoа do cupuaçu no modelo elipsoidal



Fonte: Autoria própria

cilíndrico, esférico e elipsoidal.

Figura 36 – Comparação entre o comportamento térmico dos modelos prismático, cilíndrico, esférico e elipsoidal



Fonte: Autoria própria

Na Figura 36 pode-se observar os quatro modelos analisados, em que a curva em vermelho representa o comportamento do elipsoide, em azul o prisma, em verde o cilindro e em laranja a esfera. Para verificar quais dos modelos representa melhor o comportamento da amêndoа do cupuaçu, foi analisado experimentalmente a curva de resfriamento da amêndoа do cupuaçu, que é ilustrado no próximo capítulo.

6 Comparação dos Modelos e Validação da Hipótese

Neste capítulo, será apresentada a curva de resfriamento da amêndoia do cupuaçu obtida experimentalmente, para que os modelos simulados sejam avaliados em relação ao comportamento experimental e com isso identificado qual modelo representa melhor o comportamento da curva de resfriamento da amêndoia do cacau. Além disso será validada a hipótese assumida de que o comportamento térmico da amêndoia do cacau é similar ao comportamento térmico da amêndoia do cupuaçu, por meio da comparação das propriedades termofísicas das amêndoas.

6.0.1 Determinação experimental da curva de resfriamento da amêndoia

Para determinar o comportamento de resfriamento do cupuaçu, foi utilizada 1 amêndoia de cupuaçu seca, com temperatura inicial de 70°C. Com o auxílio de um termômetro infravermelho foi medido a variação de temperatura por 60 minutos.

Os materiais utilizados para realizar o experimento foram: amêndoia de cupuaçu, termômetro infravermelho SCAN TEMP/ série 600 e uma estufa. Ilustrados na Figura 37.

Figura 37 – Elementos utilizados no experimento



Fonte: Autoria própria

A amêndoia foi introduzida na estufa, e foi aquecendo gradativamente até atingir 70°C, em que foi retirada da estufa e exposta ao ambiente com temperatura de 25°C. Com um termômetro digital a laser, a variação de temperatura, ao longo do tempo, foi

sendo registrada. As medidas foram repetidas 3 vezes, objetivando reduzir as incertezas. Ilustrado na Tabela 19.

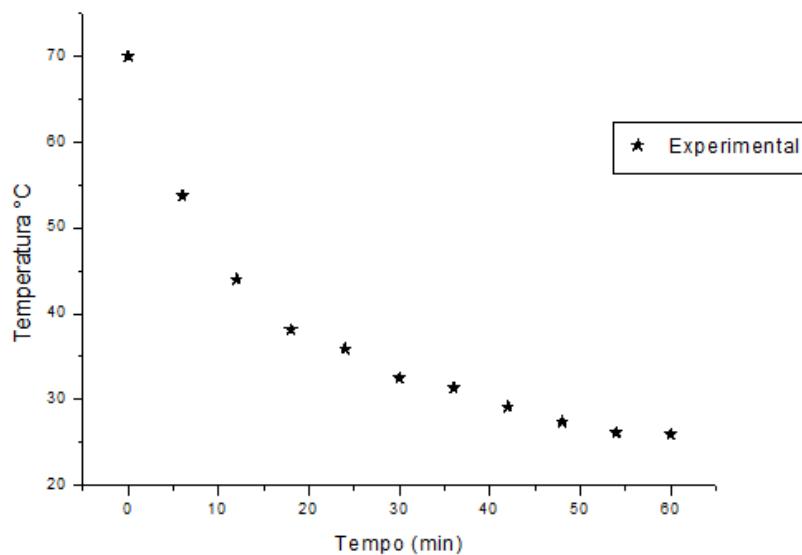
Tabela 19 – Dados experimentais do resfriamento da amêndoа do cupuaçu

Tempo (min)	Medida 1	Medida 2	Medida 3	Média	Desvio
0:00	70,00	70,00	70,00	70,00	0,00
6:00	54,80	51,60	53,80	53,40	1,64
12:00	42,80	45,20	44,00	44,00	1,20
18:00	36,40	39,30	38,70	38,13	1,53
24:00	32,89	37,12	37,40	35,80	2,53
30:00	31,60	33,00	32,90	32,50	0,78
36:00	29,40	32,40	32,10	31,30	1,65
42:00	28,10	29,90	29,60	29,20	0,96
48:00	27,10	27,50	27,60	27,40	0,26
54:00	26,00	26,10	26,30	26,13	0,15
60:00	25,60	26,00	26,10	25,90	0,26

Fonte: Autoria própria

Desta forma, calculando a média das observações, Tabela 19, pode-se obter o comportamento da curva de resfriamento da amêndoа do cupuaçu que é ilustrado na Figura 38.

Figura 38 – Comportamento real do resfriamento da amêndoа do cupuaçu



Fonte: Autoria própria

Analizando a Figura 38 verifica-se que a variação de temperatura é mais intensa nos primeiros minutos de resfriamento, após 30 minutos a variação é tênuе e tende a temperatura ambiente que é de 25 °C.

6.1 Comparação entre os modelos geométricos

Esta seção apresenta a comparação dos modelos, e qual entre as geometrias estudadas, melhor descreve o comportamento da amêndoas do cupuaçu. A resolução analítica das equações de cada modelo é sintetizada na Tabela 20 ([SALES; LIMA, 2018](#)).

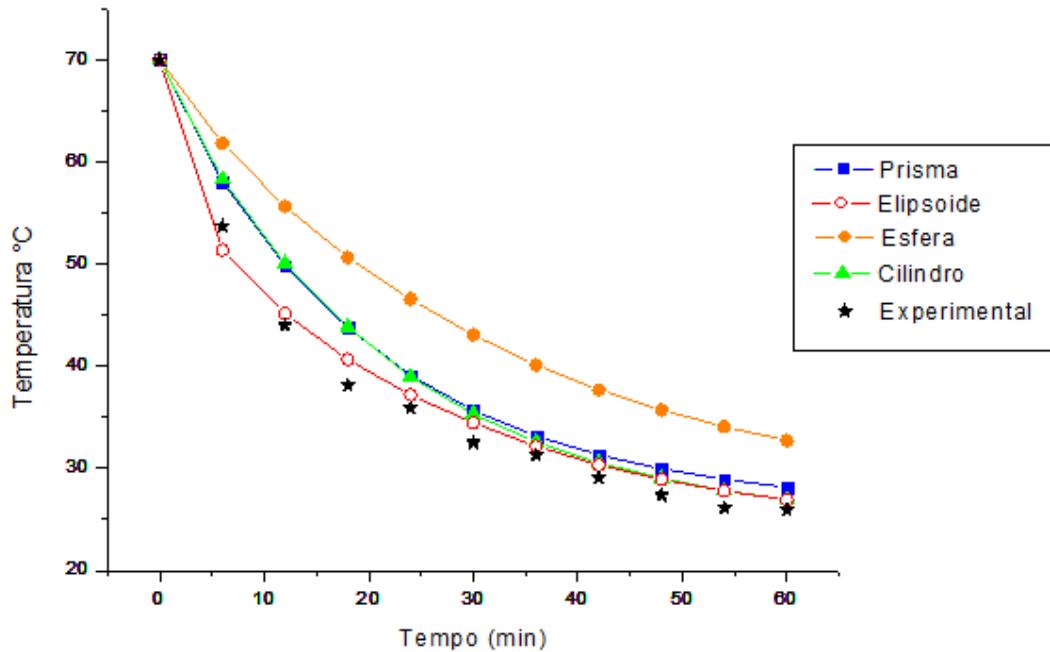
Tabela 20 – Operador laplaciano em diversas geometrias

GEOMETRIA	SOLUÇÃO GERAL
PRISMA	$\Psi(x, y, z, t) = \frac{64T_0}{\pi^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2m+1)(2p+1)} \times \sin\left(\frac{2n+1}{a}\pi x\right) \sin\left(\frac{2m+1}{b}\pi y\right) \sin\left(\frac{2p+1}{c}\pi z\right) \\ \times e^{-\alpha\pi^2 \left[\left(\frac{2n+1}{a}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{b}\right)^2 + \left(\frac{2p+1}{c}\right)^2 \right]t}$
CILINDRO	$\Psi(r, z, t) = \frac{8T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_{0n}(2m+1)J_1(\alpha_{0n})} J_1\left(\frac{\alpha_{0n}}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} r\right) \sin\left(\frac{2m+1}{c}\pi z\right) \\ \times e^{-\alpha \left[\left(\frac{\alpha_{0n}}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{c}\pi\right)^2 \right]t}$
ESFERA	$\Psi(r, t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\beta_{0n}^2 \pi \left(J_3(\beta_{0n})\right)^2} J_0\left(\frac{\beta_{0n}}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} r\right) \times e^{-\alpha \left[\left(\frac{\beta_{0n}}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}\right)^2 \right]t}$
ELIPSOIDE	$\Psi(u, v, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mk} [(-1)^{\frac{n-m}{2}} d_{nm} j_n(\lambda_{mk} u)] [d_{nm} P_n(v)] e^{-\lambda_{mk}^2 \frac{\alpha}{L^2} t}$

Fonte: Autoria própria

O modelo de maior simplicidade na resolução é o prismático, coordenadas cartesianas, entretanto o de maior complexidade é o modelo elipsoidal, a técnica de resolução foi desenvolvida pelo professor Dr Jorge Sales, da instituição Universidade Estadual de Santa Cruz. Utilizou-se o software Mathematica® para auxiliar na resolução das equações, a técnica utilizada foi a de separação de variáveis, que é uma das principais técnicas para a resolução analítica de equações diferenciais parciais, EDP, que diferentemente da resolução numérica, é necessário a descrição geométrica do problema, e suas condições iniciais e de contorno. Desta forma foi resolvida a equação de Fourier de maneira analítica para cada modelo. Com o auxílio do software COMSOL® foi simulado o comportamento de resfriamento das amêndoas, o COMSOL® soluciona as equações diferenciais parciais pelo método de elementos finitos, em que o domínio é discretizado e as equações diferenciais parciais são resolvidas. A Figura 39 apresenta a comparação dos modelos estudados e a observação experimental.

Figura 39 – Comparação dos modelos geométricos



Fonte: Autoria própria

Analizando a Figura 39, pode-se observar que os modelos descrevem de maneira satisfatória o comportamento da amêndoia do cupuaçu. Para mensurar o quanto similar é o comportamento de cada modelo em relação ao comportamento experimental, é importante calcular o desvio dos modelos em relação a curva experimental, a Tabela 40 mostra esta análise.

Figura 40 – Desvio relativo dos modelos em função do comportamento experimental

Tempo (min)	Desvio Relativo					Prisma	Cilindro	Espera	Elipsóide
	Prisma	Cilindro	Espera	Elipsóide	Experimental				
0:00	70,00	70,00	70,00	70,00	70,00	0%	0%	0%	0%
6:00	58,06	58,31	61,80	51,38	58,06	8%	9%	15%	4%
12:00	49,82	50,03	55,64	45,14	49,82	13%	14%	26%	3%
18:00	43,78	43,84	50,65	40,65	43,78	15%	15%	33%	7%
24:00	39,10	38,96	46,58	37,18	39,10	9%	9%	30%	4%
30:00	35,67	35,32	43,06	34,46	35,67	10%	9%	32%	6%
36:00	33,17	32,60	40,12	32,17	33,17	6%	4%	28%	3%
42:00	31,33	30,56	37,69	30,35	31,33	8%	5%	29%	4%
48:00	29,96	29,01	35,71	28,92	29,96	9%	6%	30%	6%
54:00	28,92	27,83	34,08	27,80	28,92	11%	6%	30%	6%
60:00	28,13	26,91	32,73	26,93	28,13	9%	4%	26%	4%
Média						9%	7%	26%	4%

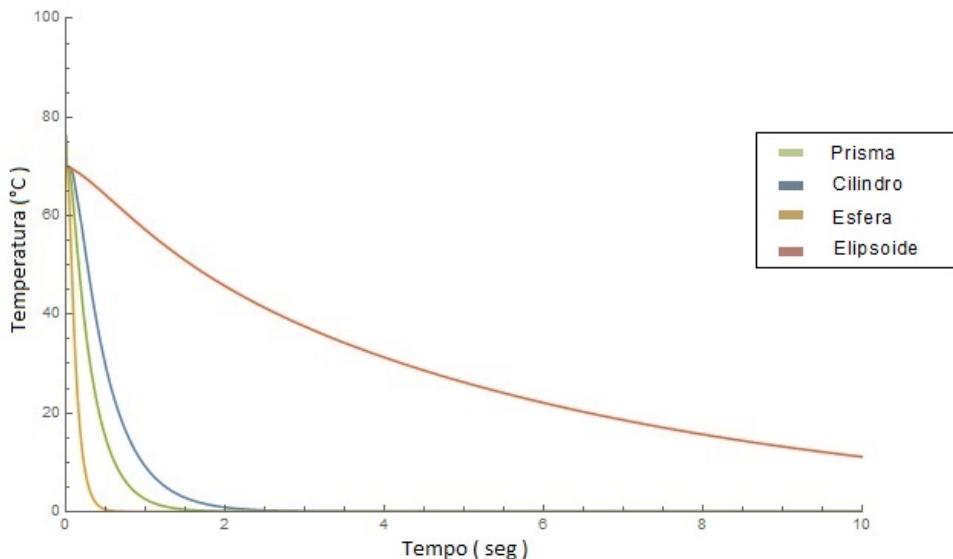
Fonte: Autoria própria

Portanto, observando a Tabela 40 e a Figura 39, verifica-se que o desvio relativo

médio dos modelos em relação a curva experimental é de 9%, 7%, 26% e 4% dos modelos: prismático, cilíndrico, esférico e elipsoidal, respectivamente, em relação ao comportamento experimental. Logo, pode-se inferir que o modelo elipsoidal é o que melhor descreve o comportamento do resfriamento da amêndoia em relação a curva experimental, entretanto a resolução analítica da geometria elipsoidal é a mais complexa. O modelo cilindro e prismático apresentam uma boa descrição do comportamento experimental, e possui menor complexidade na solução se comparado com o modelo elipsoidal. Pode-se observar que o modelo esférico apresentou o comportamento mais distante do experimental, se comparado com o prismático, elipsoidal e cilíndrico.

Além disso, analisando a convergência dos modelos em relação ao tempo e temperatura, pode-se verificar que o modelo elipsoidal converge mais lentamente, como pode ser visto na Figura 41.

Figura 41 – Convergência dos modelos em função do tempo e temperatura



Fonte: Autoria própria

A Figura 41 mostra, em vermelho o comportamento da convergência do modelo elipsoidal, em azul o modelo cilíndrico, em verde o prismático e em laranja o esférico. Sendo o elipsoidal que converge mais lentamente, as demais geometrias apresentam uma convergência mais rápida. A justificativa de analisar a curva de convergência até a temperatura zero, é para verificar a existência de singularidade nas soluções dos quatro modelos, pois em alguns casos a equação pode ser convergente, porém em zero divergir, desta forma, avaliou-se a convergência no caso crítico.

6.1.1 Validação da hipótese

A hipótese considerada foi de que o comportamento térmico da amêndoaa do cupuaçu é similar a amêndoaa do cacau, este comportamento é determinado pelas propriedades termofísicas dos materiais. Desta forma, a Tabela 21 sintetiza os valores das propriedade termofísicas da amêndoaa do cupuaçu juntamente com as propriedades termofísicas do cacau, determinadas por (SASSERON, 1984), para uma umidade de 9,61%.

Tabela 21 – Propriedades termofísicas da amêndoaa do cupuaçu e do cacau

	Cupuaçu (LIMA, CUNHA, 2018)	Cacau (SASSERON, 1984)	Desvio Relativo
Difusividade térmica (α)	$3,78 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	$5,63 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	27,80%
Condutividade térmica (k)	$0,135 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$	$0,163 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$	13,29%
Calor específico (c)	$3,69 \text{ kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}$	$3,29 \text{ kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}$	8,10%
Massa específica (ρ)	$964,44 \text{ kg m}^{-3}$	$923,70 \text{ kg m}^{-3}$	3,05%

Fonte: Autoria própria

A Tabela 21 elucida que as propriedades termofísicas das amêndoas de cupuaçu e cacau são semelhantes. Para quantificar a diferença das propriedades termofísicas da amêndoaa do cacau em relação a amêndoaa do cupuaçu, foi calculado o desvio relativo, verificando que a porcentagem em relação a grandeza das propriedades é pequeno. Esta similaridade entre as propriedades pode ser explicado pela Figura 6, uma vez que o coeficiente de correlação entre a amêndoaa do cacau e cupuaçu é de R=0,9928, indicando a forte relação entre as amêndoas. E analisando a Figura 5, verifica-se que a relação entre a umidade do cacau e do cupuaçu é praticamente 1:1, sabendo que a difusividade depende diretamente do teor de umidade Borges et al. (2005), este fato justifica os valores próximos das propriedades termofísicas entre a amêndoaa de cacau e de cupuaçu.

7 Conclusão

Este trabalho permitiu analisar o comportamento térmico da amêndoia do cupuaçu, avaliado por meio de quatro diferentes modelos geométricos, prismático, cilíndrico, esférico e elipsoidal. Os modelos foram solucionados de maneira analítica a partir da equação de difusão de calor de Fick e simulados por meio do software COMSOL®. Para ser realizada a simulação foi necessário criar um material equivalente ao da amêndoia do cupuaçu, pois na biblioteca do COMSOL® não possui o material constituinte da amêndoia do cupuaçu, desta forma foi necessário determinar as propriedades termofísicas, sendo que o calor específico e massa específicas foram determinadas experimentalmente com o suporte da Universidade Estadual de Santa Cruz- UESC. No cálculo da difusividade foi necessário o uso da equação do calor em regime transiente, em coordenadas cilíndricas, calculada com o auxílio do software Mathematica®. Conhecendo a massa específica, $964,44 \text{ kgm}^{-3}$, calor específico, $3,69 \text{ kJkg}^{-1}\text{K}^{-1}$, e difusividade térmica, $5,78 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, é possível calcular a condutividade térmica da amêndoia do cupuaçu, sendo igual a $0,135 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. Comparando com os valores apresentados na literatura para o cacau verifica-se que as propriedades do cacau e do cupuaçu, apresentam grande similaridade, isso pode ser explicado pela proximidade das propriedades químico-físicas, e teor de umidade praticamente igual. A partir dos valores das propriedade termofísicas, o software foi alimentado, e a simulação realizada, no qual foi verificado a curva de resfriamento para cada modelo geométrico.

Com o objetivo de determinar qual modelo geométrico descreve melhor o comportamento de resfriamento da amêndoia do cupuaçu, foi realizada a observação experimental no Laboratório de Materiais e Meio Ambiente – LAMMA na UESC. A curva apresentada por cada modelo foi plotada no software Origin®, e comparada com a curva experimental. Os modelos estudados descrevem de maneira satisfatório o comportamento de resfriamento da amêndoia do cupuaçu em relação a curva experimental, sendo o modelo elipsoidal o que apresenta maior proximidade. Porém o modelo elipsoidal possui grande complexidade na solução analítica, entre os quatro modelos estudados o de maior dificuldade na solução analítica é o de coordenadas elipsoidal.

Além disso, como proposta de trabalhos futuro, pode-se replicar o procedimento empregado neste estudo para determinar e analisar o comportamento térmico, difusividade e condutividade térmica de outros grãos, de tipos e formas variadas.

Referências

- ALMEIDA., B. V. **Determinação e propriedades físicas de amêndoas de cacau.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, 1979.
- ANDRADE, E. T.; COUTO S. M. AND QUEIROZ, D. M.; PEIXOTO, A. B. Determinação de propriedades térmicas de grãos de milho. **Revista Ciência e Agrotecnologia, Lavras**, v. 28, n. 3, p. 488–498, 2004.
- ANUSAVICE, K.; SHEN, C.; RAWLS, H. R. **Phillips Materiais Dentários.** [S.l.]: Elsevier LTDA, 2005. v. 11.
- BARRETO, W. S.; BARRETO F. S. AND RIBEIRO, M. A. Q.; VALLE, R. R.; SACRAMENTO, C. K.; NETO, B. A. M. Comparação de características químicas de polpas e amêndoas de cacau e cupuaçu. In: **51 Congresso Brasileiro de Química.** São Luiz, Maranhão: 51º CBQ Anais, 2011.
- BAUER, W.; WESTFALL, G.; DIAS, H. **Física para Universitários - Mecânica:**. São Paulo: McGraw Hill Brasil, 2012. 410p p.
- BORGES, P. A. P.; CERVI, A.; SILVA, G. L. Estimation of the thermal diffusivity in soy grains in function of grains moisture content. in: International congress of mechanical engineerin. In: **International Congress of Mechanical Engineerina.** Ouro Preto, Minas Gerais: Anais ICME, 2005.
- BORGES, P. A. P.; FENGLER, C.; CERVI, A. Estimativa da difusividade térmica de grãos de soja pelo método da compactação. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, Campina Grande**, v. 13, n. 5, p. 591–595, 2009.
- CALLISTER, W. D. J.; RETHWISCH, D. G. **Materials Science And Engineering - An Introduction.** Estados Unidos: John Wiley Sons, 2013. v. 9.
- CHOI, J. News internalizing and externalizing: The dimensions of news sharing on online social networking sites. **Journalism Mass Communication Quarterly**, v. 93, n. 4, p. 816–835, 2016.
- COHEN, K. O.; JACKIX, M. N. H. **Estudo do liquor de cupuaçu.** [S.l.], 2005. v. 25, n. 1, 182-190 p.
- COHEN, K. O.; LUCCAS, V.; SOUSA, M. V.; JACKIX, M. N. H. **Processamento Tecnológico das Amêndoas de Cacau e Cupuaçu.** Belém: Embrapa Amazônia Oriental, 2003.
- COMSOL. **COMSOL Multiphysics.** 2017. <<https://br.comsol.com/multiphysics>>. Accessed: 2017-19-07.
- ELENO, L. T. F. **A primeira Lei de Fick da Difusão.** Dissertação (Material de apoio para LOM3083 — Fenômenos de Transporte em Engenharia de Materiais e LOM3213 — Fenômenos de Transporte B) — Escola de Engenharia de Lorena da Universidade de São Paulo (EEL-USP) Departamento de Engenharia de Materiais (Demar), 2016.

- EMBRAPA. **Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento.** Embrapa Amapá: Multimídia: Banco de Imagens, 2016.
- FILHO, G. A. F.; RAMOS, J. V. Cupuaçuzeiro: Uma atividade econômica para o sul da bahia. In: **I Encontro sobre Frutas Tropicais Nativas e Exóticas.** [S.l.]: Anais, 2006.
- FLAMMER, C.; FUNCTIONS, S. **Spheroidal Wave Functions.** [S.l.]: Stanford University Press, 1957.
- GALBIATTI, D. A. **Calor e temperatura: uma revisão dos conceitos nas diferentes abordagens físicas.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011.
- HAJI-SHEIKH, A.; SPARROW, E. M. Transient heat conduction in a prolate spheroidal solid. **Transactions of the ASME:Journal of Heat Transfer**, v. 88, n. 3, p. 331 – 333, 1966.
- KLEIN, C.; DUTROW, B. **Manual de ciência dos minerais.** Porto Alegre: Bookman, 2012. v. 23.
- LEITE, O. **Geometria analítica espacial.** [S.l.]: Loyola, 1996. ISBN 9788515011278.
- LIMA, G. P. A.; SALES, J. H. Sistema alternativo para secagem de cacau e geração de energia. **Revista GEINTEC: gestão, inovação e tecnologias**, v. 5, n. 1, p. 1703–1715, 2015.
- LIMA, G. P. A.; SALES, J. H. Difusividade térmica da amêndoia do cupuaçu. In: **XX ENMC – National Meeting on Computational Modeling and VIII ECTM – Meeting on Materials Science and Technology.** Nova Friburgo, RJ: Anais, 2017.
- LOTT, R. S.; MACHADO, A.; MAZZIEIRO N. T. ANDE JÚNIOR, J. L. Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos. **Revista Dental Press de Ortodontia e Ortopedia Facial**, v. 11, n. 2, p. 35–43, 2006.
- LUIKOV, A. V. Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies: review. **International Journal heat and mass transfer**, v. 18, n. 1, p. 1–14, 1975.
- MCGUINNESS, N.; WILSON, A. N.; JONES, M.; MIDDLETON, J.; ROBERTSON, N. R. Stresses induced by edgewise appliances in the periodontal ligament - a finite element study. **The Angle Orthodontist**, v. 62, n. 1, p. 15–22, 1992.
- MEDEIROS, M. L.; LANNES, S. C. S. Propriedades físicas de substitutos do cacau. **Ciência e Tecnologia de Alimentos**, v. 30, p. 243–253, 2010.
- MORSE, P. M.; FESHBACK, H. **Methods of Theoretical Physics.** New York: McGraw-Hill, 1953.
- NAZARÉ, R. F. R.; BARBOSA, W. C.; VIÉGAS, R. M. F. **Processamento das sementes de cupuaçu para a obtenção de cupulate.** Belém, 1990. 38 p.
- PARK, K. J.; ALONSO, L. F. T.; NUNES, A. S. Determinação experimental da condutividade e difusividade térmica de grãos em regime permanente. **Revista Ciência e Tecnologia de Alimentos**, v. 19, n. 2, p. 264–269, 1999.

- ROCHA, F. CARACTERIZAÇÃO QUÍMICA, FÍSICA E TERMOFÍSICA DA AMÊDOA DO BARU (*Dipteryx alata* Vog.). Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná (Engenharia de Alimentos), 2016.
- ROGAWSKI, J. **Calculo**. Porto Alegre: BOOKMAN COMPANHIA ED, 2009. 624p p.
- SAID, M. M. **Aspectos culturais e potencial de uso do cupuaçu (*Theobroma grandiflorum* (Willd. Ex Spreng. Schum.) no estado do Amazonas**. Dissertação (Mestrado) — Dissertação (mestrado em Ciências do Ambiente e Sustentabilidade na Amazônia) — Universidade Federal do Amazonas/UFAM, 2011.
- SALES, J. H.; LIMA, G. P. A. Difusividade térmica do cacau em função da geometria do modelo. **Revista SODEBRAS**, v. 13, n. 149, p. 31–34, 2018.
- SANTOS, C. C. **Influência dos processos de fermentação e secagem no teor de compostos fenólicos e capacidade antioxidante de amêndoas de cacau amazônico (*Theobroma cacao* var. *Forasteiro*)**. Dissertação (Mestrado) — Dissertação (Mestrado em Ciência e Tecnologia de Alimentos). Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.
- SANTOS F. K. G. AND GOMES, K. K. P.; SILVA, M. L. P. **Apostila de Laboratório de Química Geral**. Mossoró/RN, 2010.
- SASSERON, J. L. **Avaliação de propriedades físicas e curvas de secagem, em camadas finas, de amêndoas de cacau (*Theobromacacao* L.)**. Dissertação (Mestrado) — Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola) — Universidade Federal de Viçosa, 1984.
- SILVA, W. P.; MATA, M. R. M. C.; SILVA, C. D. P. S.; A., G. M.; B, L. A. G. Determinação da difusividade e da energia de ativação para feijão macassar (*vigna unguiculata*(L.) walp.), variedade sempre-verde, com base no comportamento da secagem. **Revistas Engenharia agrícola, Jaboticabal**, v. 28, n. 2, p. 325–333, 2008.
- SIQUEIRA, V. C.; O., R.; CHAVES, H. T. Difusividade efetiva de grãos e frutos de pinhão-manso. **Revistas Científicas da América Latina Rede de Caribe, Espanha e Portugal. Semina: Ciências Agrárias**, v. 33, n. 1, p. 2919–2929, 2012.
- SOUZA, A. G. C.; L., S. S. E. Produção de mudas de cupuaçu (*theobroma grandiflorum* (willd. ex spreng. schum.)). **Embrapa Amazônia Ocidental, Circular Técnica**, v. 1, p. 19, 1999.
- SOUZA, A. G. C.; SILVA, S. E. L.; TAVARES, A. M.; RODRIGUES, M. R. L. A cultura do cupuaçu (*theobroma grandiflorum* (willd. ex spreng.) schum.)). **Embrapa Amazônia Ocidental Manaus**, v. 1, p. 39, 1999.
- SPOLADORE, D.; TEIXEIRA, J.; MORAES, R.; ZTJLLO, M. **Composição química de amêndoas fermentadas de cacau**. Bragantina: Revista Cientifica do Instituto Agronômico, 1983.
- STRATTON, J. A.; MORSE, P. M.; CHU, L. J.; LITTLE J. D. C. AND CORBATÓ, F. J. **Sheroidal wave functions**. New York: Wiley, 1956.
- VIANA, A. D. **Propriedades termofísicas e comportamento reológico da polpa de cupuaçu (*theobroma grandiflorum*) em diferentes concentrações e temperaturas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB (Programa de Pós-graduação em Engenharia de Alimentos), 2010.

- VRIESMANN, L. C.; PETKOWICZ, C. L. d. O. Polysaccharides from the pulp of cupuassu (*theobroma grandiflorum*): structural characterization of a pectic fraction. **Carbohydrate Polymers**, v. 77, p. 72–79, 2009.
- VRIESMANN, L. C.; SILVEIRA, J. L. M. C. L. D. O.; PETKOWICZ, C. L. O. Chemical and rheological properties of a starch-rich fraction from the pulp of the fruit cupuassu (*theobroma grandiflorum*). **Brazil Materials Science and Engineering**, v. 29, p. 651–656, 2009.
- YANG, H.; PROTIVA, P.; CUI, B.; MA, C.; BGGETT, S.; HEQUET, V.; MORI, S.; WEINSTEIN, I.; KENNELLY, E. New bioactive polyphenols from *theobroma grandiflorum* (“cupuaçu”). **Journal of Natural Products.**, v. 66, p. 1501–1504, 2003.
- ÇENGEL, A. Y.; GHAJAR, A. J. **Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática**. São Paulo: McGraw-Hill Interamericana do Brasil LTDA, 2009. v. 3.

Apêndices

APÊNDICE A – Propriedades termofísicas

Analizando a literatura não foi encontrado pesquisas sobre as propriedades termofísicas da amêndoia do cupuaçu. Porém há informações referentes a outros grãos.

A difusividade dos grãos e frutos de pinhão-manso, foram determinados ([SILVEIRA et al., 2012](#)) por meio de um experimento no Laboratório de Pós-colheita de Produtos Vegetais do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – Campus Rio Verde (IF Goiano – Campus Rio Verde). Com grão com teor de umidade de 0,5% e frutos com teor de umidade de 4,40%. A secagem dos materiais ocorreu em uma estufa de ventilação forçada, monitorada por um psicrômetro. Para a determinação da redução do teor de água, foi utilizado o método gravimétrico. O resultado obtido da difusividade dos grãos do pinhão-manso foi de magnitude entre $9,29 \times 10^{-10}$ e $41,48 \times 10^{-10} m^2 s^{-1}$, e a difusividade do fruto do pinhão-manso foi de magnitude entre $16,20 \times 10^{-10}$ e $68,11 \times 10^{-10} m^2 s^{-1}$.

No feijão macassar, utilizando um modelo esférico, baseado na lei de Fick, a difusividade obtida variou de $7,13 \times 10^{-11}$ e $14,0 \times 10^{-11} m^2 s^{-1}$ ([SILVA et al., 2008](#)). A pesquisa foi realizada no Laboratório de Armazenamento e Processamento de Produtos Agrícolas (LAPPA), do Departamento de Engenharia Agrícola, da Universidade Federal de Campina Grande - PB.

A difusividade do trigo foi obtido por meio de um equipamento baixo custo de construção, instalado na Faculdade de Engenharia Agrícola/UNICAMP, composto por termopares de cobre, interligado a uma unidade registradora de dados conectados a um computador, foram feitas as leituras, obtendo uma difusividade entre $1,12 \times 10^{-4} m^2 s^{-1}$ e $1,67 \times 10^{-4} m^2 s^{-1}$ ([PARK et al., 1999](#)).

Para a determinação das propriedades térmicas de grão de milho, foi utilizado o método do cilindro infinito com uma fonte de calor linear com acoplamento central. Este estudo foi desenvolvido na área de pré-processamento de produtos agrícolas (Departamento de Engenharia Agrícola) e no Laboratório de Análise de Sementes (Departamento de Fitotecnia), do Centro de Ciências Agrárias da Universidade Federal de Viçosa, em Viçosa - MG. O resultado obtido para o grão do milho foi de magnitude entre $1,02 \times 10^{-7}$ e $8,67 \times 10^{-8} m^2 s^{-1}$ ([ANDRADE et al., 2004](#)).

A difusividade do grão de soja foi determinada com base nas alterações da difusividade da massa de grãos submetida a variados níveis de compactação e em curvas de temperatura em função do tempo, coletadas em pontos internos e nos contornos de cilindros compostos de grãos. O resultado obtido para a difusividade do grão de soja foi de $1,22 \times 10^{-7} m^2 s^{-1}$ ([BORGES et al., 2009](#)).

Já a amêndoia do Baru, foi determinada por meio de um aparelho de medição composto por um tubo de latão, dois terminais. Os dados foram registrados e o valor calculado para a difusividade do baru foi de $1,365 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (ROCHA, 2016).

Uma referência fundamental para o desenvolvimento deste estudo foi o trabalho realizado pelo Sasseron (SASSERON, 1984), para obter a difusividade na amêndoia do cacau foi inserida uma sonda no eixo longitudinal da amêndoia, com o cuidado de que houvesse bom contato entre a agulha e o material constituinte da amêndoia. As variações de temperatura, de acordo com o tempo, eram registradas num potenciômetro, durante 15 segundos. O resultado obtido foi para a amêndoia do cacau foi de magnitude entre $4,7 \times 10^{-5}$ e $13,7 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

A.0.1 Condutividade térmica

A condutividade térmica é a taxa de calor e energia, que flui através de um corpo, por unidade de tempo ($\frac{dQ}{dt}$ ou fluxo de calor Q), gerando um gradiente de temperatura, $\frac{dT}{dx}$, e pela segunda lei da termodinâmica, o calor flui no sentido na menor temperatura (ALMEIDA., 1979). Esta relaciona a temperatura com o movimento de partículas que atravessa um corpo. Desta forma, ao ser submetido a uma fonte de calor, os átomos ou moléculas do corpo vibram com maior intensamente, resultando na transferência da energia cinética de uma partícula para outra. Portanto, a condutividade térmica consiste na transferência do calor de regiões de maior para temperatura, para regiões de menor temperatura. A condutibilidade térmica é a propriedade que define a capacidade que um corpo tem de transferir o calor (CALLISTER; RETHWISCH, 2013).

Pode-se determinar a condutividade térmica por meio da equação 54.

$$k = \rho c \alpha \quad (54)$$

sendo,

k = condutividade térmica, $\text{Wm}^{-1}\text{k}^{-1}$

ρ = massa específica, kgm^{-3}

c = calor específico, $\text{Jkg}^{-1}\text{k}^{-1}$

α = difusividade térmica m^2s^{-1}

A condutividade térmica dos materiais biológicos varia em função do produto, da temperatura e umidade. Nos grãos, a condutividade térmica tem relação direta e linear com o teor de umidade. A determinação da condutividade térmica de materiais biológicos possui alto grau de complexidade, devido o transporte simultâneo do calor e massa, das reações químicas e das mudanças estruturais e biológicas (SASSERON, 1984). O modelo empírico para determinar a condutividade térmica é dado pela equação 55

(ALMEIDA., 1979):

$$T_2 - T_1 = \frac{Q}{4\pi k} \ln \frac{t_2}{t_1} \quad (55)$$

sendo,

T_1 = temperatura no instante t_1 , K;

T_2 = temperatura no instante t_2 , K;

Q = potência térmica dissipada da fonte, por unidade de comprimento, Wm^{-1} ;

k = condutividade térmica, $Wm^{-1}k^{-1}$.

Almeida (ALMEIDA., 1979), obteve a equação 55 admitindo uma fonte de calor linear, de comprimento infinito, num meio homogêneo. Porém para determinação da condutividade térmica da amêndoa de cacau Sasseron, (SASSERON, 1984) apresenta uma amostra finita, com fonte de comprimento finito, a intensidade da corrente elétrica não é perfeitamente constante, o raio e a massa da fonte não são nulos.

A.0.2 Calor específico

A capacidade térmica de um corpo consiste na razão entre o calor, Q e sua respectiva variação de temperatura, ΔT . E o calor específico consiste na razão entre a capacidade térmica e a massa do corpo (ALMEIDA., 1979):

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} \quad (56)$$

sendo,

c = calor específico, $Jkg^{-1}k^{-1}$

$\frac{Q}{\Delta T}$ = capacidade térmica, $cal^{\circ}C^{-1}$;

m = massa do corpo, kg .

Segundo (ALMEIDA., 1979) existem muitas maneiras de se determinar o calor específico de um material, baseando-se no equilíbrio térmico estabelecido entre o corpo. É possível determinar o calor específico a partir da razão entre a condutividade térmica (k), pelo produto da a difusividade térmica (α) e a massa específica (ρ) do material desejado:

$$c = \frac{k}{\alpha\rho} \quad (57)$$

onde,

c = calor específico, $Jkg^{-1}k^{-1}$

k = condutividade térmica, $Wm^{-1}k^{-1}$

ρ = massa específica, kgm^{-3}

$$\alpha = \text{difusividade térmica } m^2 s^{-1}$$

O calor específico pode ser dado à pressão constante ou a volume constante, dependendo da maneira que a energia é estocada no corpo. De maneira geral o calor específico dos materiais biológicos é determinado à pressão constante e apresenta variação praticamente linear em função da temperatura ([SASSERON, 1984](#)).

A propagação da energia térmica de um corpo ocorre devido a um gradiente de temperatura, $\frac{dT}{dx}$. O calor específico de um corpo expressa a variação de temperatura, com a quantidade de calor estocado. Para uma quantidade infinitesimal de calor, dQ , que gera uma variação infinitesimal de temperatura, dT , num corpo de massa m , ([ALMEIDA., 1979](#)) o calor específico se dar pela equação 58

$$c = \frac{dQ}{mdT} \quad (58)$$

sendo,

c = calor específico, $J kg^{-1} k^{-1}$;

dQ = quantidade infinitesimal de calor, J ;

dT = quantidade infinitesimal de temperatura, K ;

m = massa do corpo, kg .

Com isso, pode-se entender o calor específico como a quantidade de energia térmica necessária para variar a temperatura em um corpo de massa m ([GALBIATTI, 2011](#)).

A.0.3 Massa específica

A massa específica (ρ) consiste na razão entre a massa (m) por unidade de volume (v), de acordo o Sistema Internacional de Unidades (SI), a massa específica é expressa em gramas por centímetro cúbico ($g cm^{-3}$) ou quilogramas por metro cúbico ($kg m^{-3}$) ([KLEIN; DUTROW, 2012](#)). Pode-se determinar a massa específica utilizando a equação 59:

$$\rho = \frac{m}{v} \quad (59)$$

sendo,

ρ = massa específica, $kg m^{-3}$

m = massa do corpo, kg ;

v = volume, m^{-3}

Segundo ([ALMEIDA., 1979](#)), é possível determinar a massa específica unitária utilizando diferentes métodos, como: deslocamento de líquido, deslocamento de gases ou interação de radiação de matéria.

A.0.4 Difusividade

A difusividade térmica é uma propriedade intrínseca de cada material, e o caracteriza quanto à condução de calor. A difusividade revela a velocidade de propagação do calor de um material quando há mudanças de temperatura ([ANUSAVICE et al., 2005](#)). A difusividade térmica pode ser calculada por meio da equação 60:

$$\alpha = \frac{k}{c\rho} \quad (60)$$

sendo,

α = difusividade térmica, $m^2 s^{-1}$

c = calor específico, $J kg^{-1} K^{-1}$;

k = condutividade térmica, $W m^{-1} K^{-1}$;

ρ = massa específica, $kg m^{-3}$.

Sabendo que a condutividade térmica (k) descreve o quanto bem um material conduz o calor, a capacidade térmica, que corresponde ao produto do calor específico (c) e a massa específica (ρ), descreve a quantidade de calor que um material pode estocar por unidade de volume. Logo pode-se entender que a difusividade térmica é a razão entre o calor conduzido por um certo material e o calor estocado por unidade de volume. Desta forma pode-se inferir que um material com baixa condutividade térmica e alta capacidade térmica, possui baixa difusividade térmica, de maneira inversa, um material com alta condutividade térmica e baixa capacidade térmica, possui alta difusividade térmica. Quanto maior for o valor da difusividade térmica, maior será a velocidade de propagação de calor do material. Materiais com baixa difusividade revelam que grande parte do calor é absorvido pelo material e uma pequena parte é conduzida ([ÇENGEL; GHAJAR, 2009](#)).

A difusão em sólidos ocorre devido às imperfeições do material, como as vacâncias, e os interstícios, e estas imperfeições permitem que a matéria percorra dentro da matéria. A difusão é um fenômeno termicamente ativado e pode ocorrer por meio do mecanismo de difusão por vacância, em que o material se movimenta pelo sólido pelas vacâncias. Pode ocorrer também pelo mecanismo de movimentação pelos interstícios. Difusão por troca simples, por troca cíclica, intersticial indireto ou uma combinação de todos estes mecanismos ([CHOI, 2016](#)).

APÊNDICE B – Determinação experimental

Os experimentos foram realizados na Universidade Estadual de Santa Cruz- UESC, tendo suporte de três laboratórios, o Laboratório de Materiais e Meio Ambiente- LAMMA, Laboratório de biotransformação e biocatalise orgânica LABIOCAT e o Centro de Inovação do Cacau- CIC. Foram realizadas três práticas distintas, objetivando determinar a massa específica, calor específico e o comportamento de resfriamento da amêndoas, desta forma foi possível determinar a difusividade da amêndoas do cupuaçu e alimentar o software de simulação para avaliar o comportamento térmico da amêndoas do cupuaçu comparando com o comportamento experimental.

B.0.1 Determinação da massa específica do cupuaçu

A massa específica foi determinada a partir da resolução da equação 59, que consiste na razão entre a massa das amêndoas e o seu volume. Foi medido a massa de 10 amêndoas de cupuaçu com auxílio de uma balança, semi-micro AUW220D, de 0,00001g de precisão. O volume foi determinado por meio do processo de descolamento de líquido ([SASSERON, 1984](#)). Foi utilizado um proveta graduada de 100ml, contendo 50 ml de água, após pesada, as amêndoas foram individualmente introduzidas na proveta, deslocando o volume de água, e com base no Princípio de Arquimedes, de deslocamento de líquido foi determinado o volume de cada amêndoas, ilustrado na Figura 42. Foram realizadas 10 medidas, e calculado média e desvio padrão.

Figura 42 – Determinação do volume por deslocamento de líquido

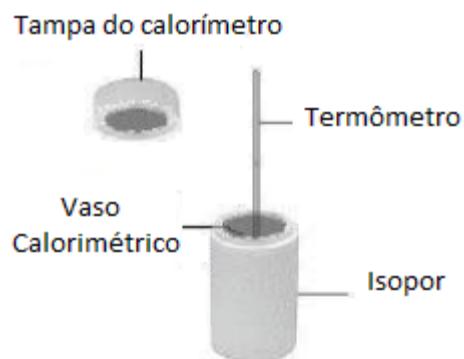


Fonte: Autoria própria

B.0.2 Determinação do calor específico do cupuaçu

Utilizou-se um calorímetro para determinar o calor específico da amêndoada do cupuaçu, o equipamento é constituído de um recipiente, vaso calorimétrico, que fica dentro de um material de isopor que isola o recipiente do meio externo para impedir a troca de calor entre do ambiente e o conteúdo dentro do vaso calorimétrico. A Figura 43 ilustra o calorímetro utilizado para a realização do experimento.

Figura 43 – Calorímetro



Fonte: ([SANTOS F. K. G. AND GOMES; SILVA, 2010](#))

Para a realização do experimento, a primeira etapa consistiu em calibrar o calorímetro, para tal, foi inserido 50ml de água a 25°C dentro do vaso calorimétrico, e misturado mais 100ml de água a 50°C. O conteúdo foi misturado e verificada a temperatura de equilíbrio do sistema. Depois foram pesadas as amêndoas de cupuaçu, e introduzido na mistura em temperatura de equilíbrio. Para aumentar a precisão dos dados, as medidas foram repetidas três vezes e a média dos experimentos foi o valor considerado para o calor específico do cupuaçu.

B.0.3 Determinação da difusividade térmica do cupuaçu

Para a determinação da difusividade foi necessário construir uma pastilha cilíndrica constituída de cupuaçu. A pastilha foi engendrada no Centro de Inovação do Cacau- CIC, sob supervisão do Dr. Samuel Saito. O procedimento empregado consistiu em: primeiramente as amêndoas foram descascadas e trituradas, com auxílio de um triturador de grãos, ilustrado na [44](#).

Figura 44 – Triturador de grãos



Fonte: Autoria Própria

As amêndoas de cupuaçu foram trituradas e o resultado pode ser observado na Figura 45.

Figura 45 – Amêndoas do cupuaçu trituradas



Fonte: Autoria Própria

As amêndoas trituradas, foram inseridas no molde cilíndrico para construir a pastilha, a Figura 46 apresenta o molde utilizado.

Figura 46 – Molde para construção das pastilhas



Fonte: Autoria Própria

O passo seguinte foi a prensagem das amêndoas trituradas dentro do molde, para isso foi utilizado uma pressa pneumática, ilustrada na Figura 47.

Figura 47 – Prensa pneumáticas



Fonte: Autoria Própria

O molde foi pressionado a 2,5 toneladas, compactando o material e formando a pastilha, que são ilustradas na Figura 48.

Figura 48 – Pastilha de cupuaçu



Fonte: Autoria Própria

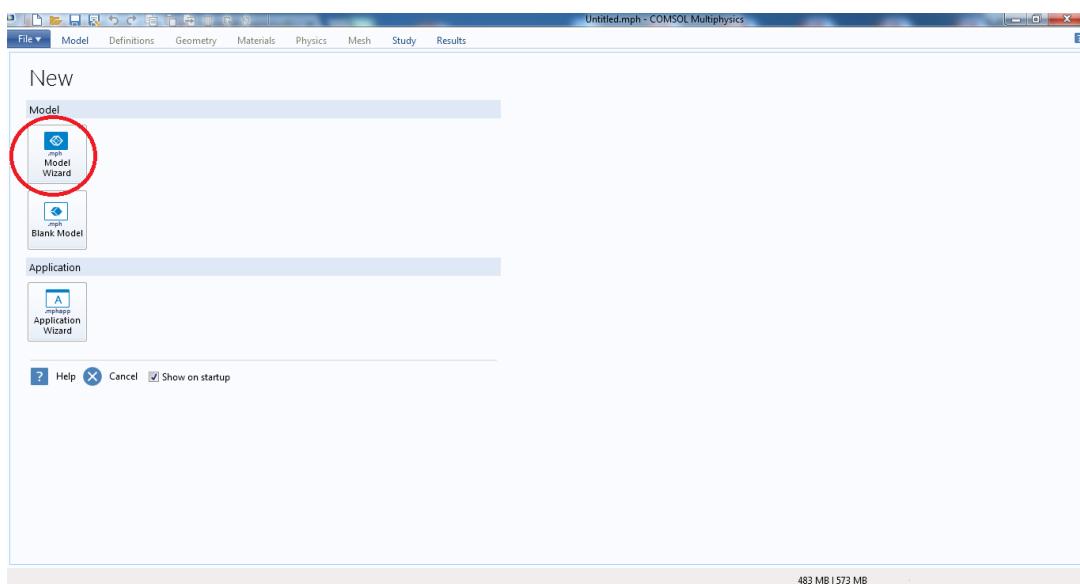
B.0.4 Determinação da condutividade térmica da amêndoar do cupuaçu

A condutividade térmica das amêndoas do cupuaçu foi determinada de maneira indireta, por meio da equação 54, em que foram usados os valores experimentais obtidos para a massa específica, calor específico e o valor calculado por meio da equação do calor em coordenadas cilíndricas para a difusividade térmica.

APÊNDICE C – Simulação Computacional

Para simular o comportamento térmico das diferentes geometrias foi utilizado software COMSOL®, a sequência de passos empregadas na simulação, ilustrada na Figura 8 é detalha neste apêndice. A Figura 49 apresenta a escolha do modo de simulação escolhido, que foi o “*model wizard*”, este consiste em um modo inteligente, presente no software, que facilita a construção do modelo que será simulado.

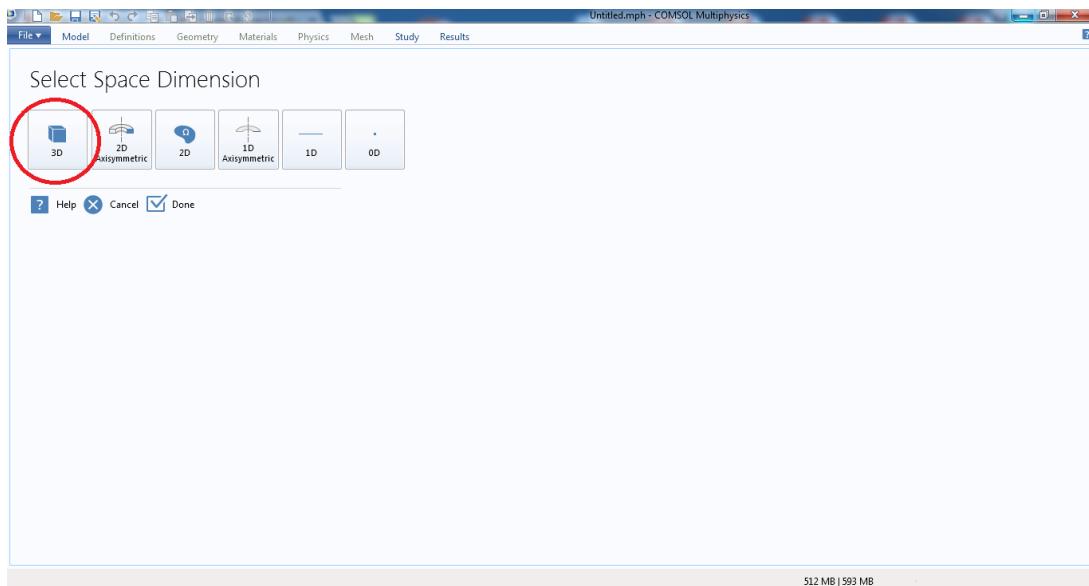
Figura 49 – Escolha do modelo: Model wizard



Fonte: Autoria própria

Após a escolha do modo de simulação, deve ser selecionado a dimensão do espaço que se deseja operar. A Figura 50 apresenta a dimensão escolhida do espaço trabalhado, que foi a tridimensional. Para facilitar a observação do comportamento da dissipação do calor do interior de cada geometria é mais conveniente trabalhar em três dimensões.

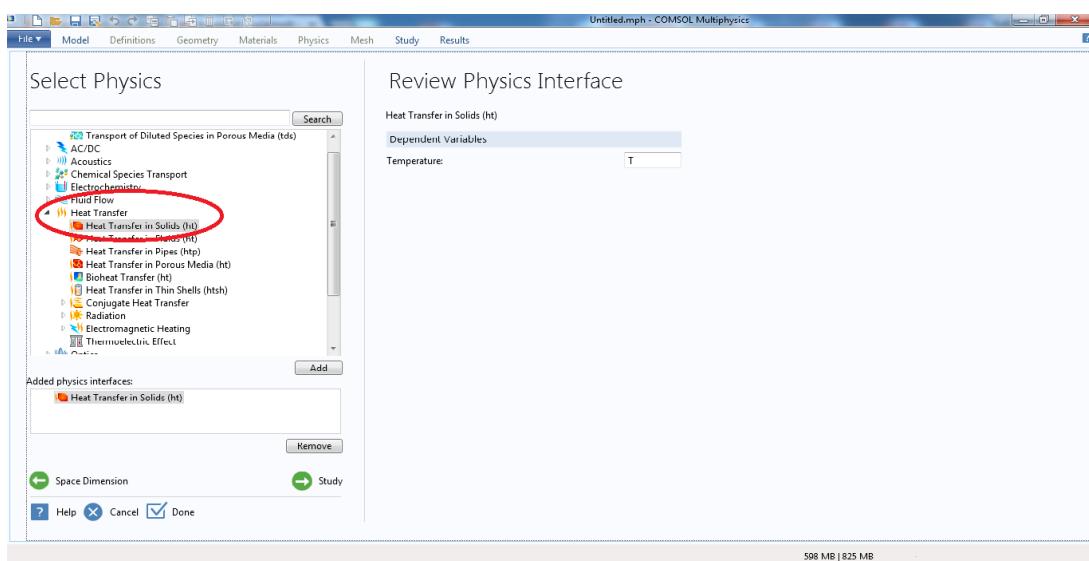
Figura 50 – Escolha da dimensão: 3D



Fonte: Autoria própria

Para o estudo de mecanismos de transferência de calor pelo COMSOL, é necessário determinar a física que compreende o estudo. A Figura 51 mostra a física utilizada na solução do problema de transferência de calor, que consistiu na "Heat transfer module", módulo de transferência de calor, este possibilita o estudo de situações onde há geração, absorção ou transferência de calor ou energia.

Figura 51 – Escolha da física: Heat transfer module

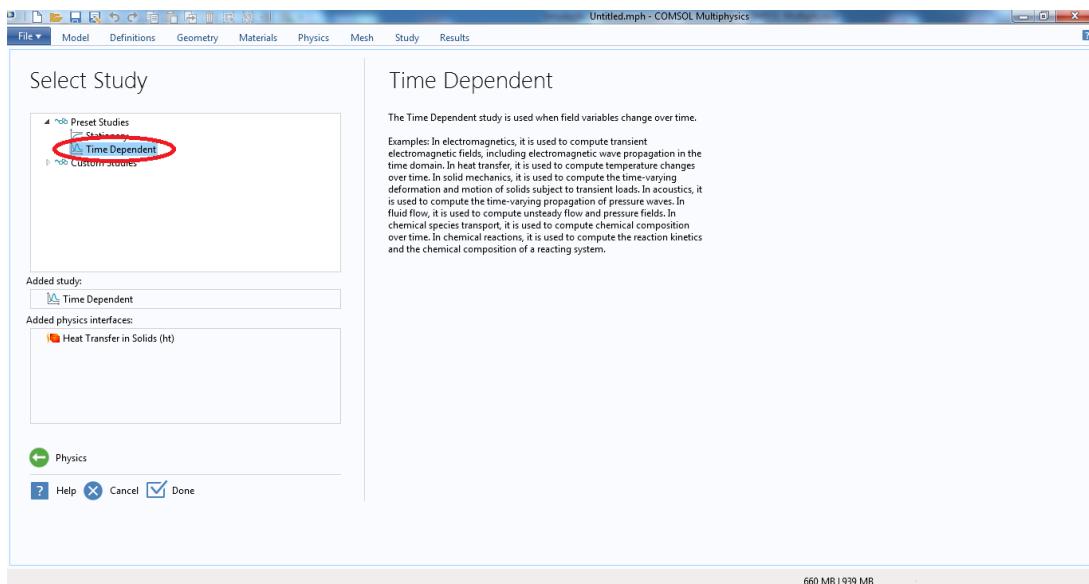


Fonte: Autoria própria

O comportamento de resfriamento da amêndoaa do cupuaçu não ocorre em

regime estacionário, ele é dependente do tempo, desta forma o tipo de estudo escolhido foi, "Time dependent", que depende do tempo, ilustrado na Figura 52.

Figura 52 – Tipo de estudo: Time dependent



Fonte: Autoria própria

Como na biblioteca do COMSOL®, não possui material equivalente ao cupuaçu, foi necessário determinar suas propriedade termofísicas, apresentados anteriormente. Além disso, as dimensões para criar os modelos foram equivalentes as dimensões média da amêndoaa do cupuaçu. Desta forma, os parâmetros usados para todos os modelos geométrico simulados são ilustrados na Figura 53.

Figura 53 – Parâmetros da simulação

Name	Expression	Value	Description
a	26[mm]	0.026 m	Coordenada x (valor maior)
b	22[mm]	0.022 m	Coordenada y (valor intermediário)
c	10[mm]	0.01 m	Coordenada z (valor menor)
T_amendoa	70[degC]	343.15 K	Temperatura inicial na amêndoaa
ccu	3.69[kJ/(kg*K)]	3690 J/(kg·K)	Calor específico
pcu	964.44[kg/m^3]	964.44 kg/m³	Massa específica
kcu	0.135[kW/(m·K)]	135 W/(m·K)	Condutividade termica

Fonte: Autoria própria

APÊNDICE D – Sistema retangular de coordenadas

O vetor espacial em coordenadas cartesianas é $\vec{r} = (x, y, z)$. Então, temos:

$$\frac{\nabla^2 \psi(x, y, z)}{\psi(x, y, z)} = -\lambda^2. \quad (61)$$

Aplica-se o método da separação de variáveis, fazendo $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ e substituindo na equação (61), obtendo assim, a expressão seguinte:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \quad (62)$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \lambda^2 = 0. \quad (63)$$

A partir dessa equação, é possível encontrar cada uma das funções (X, Y, Z).

D.1 Encontrando $X(x)$

Pode-se manipular a equação (63) fazendo:

$$\frac{X''}{X} = - \left(\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \lambda^2 \right), \quad (64)$$

em que o membro esquerdo é função de x e o direito é função de y e z . Com isso, conclui-se que:

$$\frac{X''}{X} = c, \quad (65)$$

em que c é uma constante qualquer. Essa constante é negativa ($-k_x^2$) quando a temperatura se comporta de forma oscilatória na direção x e positiva (k_x^2), caso contrário.

D.1.1 Quando $c = -k_x^2$

Quando a constante é negativa, a equação (65) assume a forma:

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2, \quad (66)$$

que é uma equação diferencial linear de coeficientes constantes. Sua solução é encontrada pelo método das raízes, e é dada abaixo:

$$X(x) = A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x). \quad (67)$$

D.1.2 Quando $c = k_x$

Quando a constante é negativa, a equação (65) assume a forma:

$$\frac{X''}{X} = k_x^2, \quad (68)$$

que é uma equação diferencial linear de coeficientes constantes. Sua solução é encontrada pelo método das raízes, e é dada abaixo:

$$X(x) = A_1 \cosh(k_x x) + A_2 \operatorname{senh}(k_x x). \quad (69)$$

D.2 Encontrando $Y(y)$

Pode-se manipular a equação (63) fazendo:

$$\frac{Y''}{Y} = -\left(\frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} + \lambda^2\right), \quad (70)$$

em que o membro esquerdo é função de y e o direito é função de x e z . Com isso, conclui-se que:

$$\frac{Y''}{Y} = c, \quad (71)$$

em que c é uma constante qualquer. Essa constante é negativa ($-k_y^2$) quando a temperatura se comporta de forma oscilatória na direção y e positiva (k_y^2), caso contrário.

D.2.1 Quando $c = -k_y$

Quando a constante é negativa, a equação (71) assume a forma:

$$\frac{Y''}{Y} = -k_y^2, \quad (72)$$

que é uma equação diferencial linear de coeficientes constantes. Sua solução é encontrada pelo método das raízes, e é dada abaixo:

$$Y(y) = A_1 \cos(k_y y) + A_2 \operatorname{sen}(k_y y). \quad (73)$$

D.2.2 Quando $c = k_y$

Quando a constante é negativa, a equação (71) assume a forma:

$$\frac{Y''}{Y} = k_y^2, \quad (74)$$

que é uma equação diferencial linear de coeficientes constantes. Sua solução é encontrada pelo método das raízes, e é dada abaixo:

$$Y(y) = A_1 \cosh(k_y y) + A_2 \operatorname{senh}(k_y y). \quad (75)$$

D.3 Encontrando $Z(z)$

Pode-se manipular a equação (63) fazendo:

$$\frac{Z''}{Z} = - \left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda^2 \right), \quad (76)$$

em que o membro esquerdo é função de z e o direito é função de x e y . Com isso, conclui-se que:

$$\frac{Z''}{Z} = c, \quad (77)$$

em que c é uma constante qualquer. Essa constante é negativa ($-k_z^2$) quando a temperatura se comporta de forma oscilatória na direção z e positiva (k_z^2), caso contrário.

D.3.1 Quando $c = -k_z^2$

Quando a constante é negativa, a equação (77) assume a forma:

$$\frac{Z''}{Z} = -k_z^2, \quad (78)$$

que é uma equação diferencial linear de coeficientes constantes. Sua solução é encontrada pelo método das raízes, e é dada abaixo:

$$Z(z) = A_1 \cos(k_z z) + A_2 \sin(k_z z). \quad (79)$$

D.3.2 Quando $c = k_z^2$

Quando a constante é positiva, a equação (77) assume a forma:

$$\frac{Z''}{Z} = k_z^2, \quad (80)$$

que é uma equação diferencial linear de coeficientes constantes. Sua solução é encontrada pelo método das raízes, e é dada abaixo:

$$Z(z) = A_1 \cosh(k_z z) + A_2 \sinh(k_z z). \quad (81)$$

Com isso, a escolha das soluções para cada coordenada espacial vai depender do problema em questão.

D.4 Problema de valores no contorno

Seja um paralelepípedo de dimensões (a, b, c) sólido, com faces mantidas à temepratura nula. Se inicialmente a temperatura do sólido é dada por T_0 , calcule a temperatura em $t > 0$.

D.4.1 Solução

Como as temperaturas das faces do sólido são nulas, então conclui-se que a temperatura se comporta de forma oscilatória na direção de x , de y e de z . Portanto, tem-se:

$$X(x) = A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x). \quad (82)$$

$$Y(y) = B_1 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y). \quad (83)$$

$$Z(z) = C_1 \cos(k_z z) + C_2 \sin(k_z z). \quad (84)$$

As condições do problema mostram que:

$$\left\{ \begin{array}{l} X(0) = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Z(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 \cos(0) + A_2 \sin(0) = 0 \\ B_1 \cos(0) + B_2 \sin(0) = 0 \\ C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 = 0. \\ B_1 = 0. \\ C_1 = 0. \end{array} \right. \quad (85)$$

Além disso, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} X(a) = 0 \\ Y(b) = 0 \\ Z(c) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_2 \sin(k_x a) = 0 \\ B_2 \sin(k_y b) = 0 \\ C_2 \sin(k_z c) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_x = \frac{n\pi}{a}, \\ k_y = \frac{m\pi}{b}, \\ k_z = \frac{p\pi}{c}, \end{array} \right. \quad (86)$$

onde $m, n, p = 0, 1, 2, \dots, +\infty$. Existe também a equação de vínculo, por meio da qual é possível escrever λ em função das constantes k_x , k_y e k_z . A relação é descrita abaixo:

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \quad (87)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2} \right) \quad (88)$$

De (82), (83), (84), (85), (86) e (88) e tendo em mente que a solução geral é a soma de todas as soluções, tem-se que a função temperatura é:

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} A_{mnp} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \times \sin\left(\frac{p\pi z}{c}\right) e^{-\alpha\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right)t}. \quad (89)$$

Com isso, resta apenas uma condição a ser satisfeita. Sabe-se que em $t = 0$, a temperatura é igual a T_0 . Portanto, tem-se:

$$\Psi(x, y, z, 0) = T_0 \Rightarrow \quad (90)$$

$$\Rightarrow T_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} A_{mnp} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{c}\right) \quad (91)$$

A essa altura, é necessário lançar mão de uma propriedade integral em que:

$$\int_a^b \sin(nx) \sin(qx) dx = \frac{b-a}{2} \delta_{nq}, \quad (92)$$

em que δ_{nq} é nulo se $n \neq q$ e igual a 1 se $n = q$. Assim, multiplica-se os dois termos de 33 por $\sin\left(\frac{q\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{r\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{s\pi}{c}z\right)$, e integra-se como descrito abaixo:

$$\begin{aligned} T_0 \int_0^a \int_0^b \int_0^c \sin\left(\frac{q\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{r\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{s\pi}{c}z\right) dz dy dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} A_{mnp} \times \\ &\times \int_0^a \int_0^b \int_0^c \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{q\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{r\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{s\pi}{c}z\right) dz dy dx \Rightarrow \\ \Rightarrow T_0 \int_0^a \int_0^b \int_0^c \sin\left(\frac{q\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{r\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{s\pi}{c}z\right) dz dy dx &= \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} A_{mnp} \frac{a}{2} \delta_{nq} \frac{b}{2} \delta_{mr} \frac{c}{2} \delta_{ps}. \quad (93) \end{aligned}$$

Para que não haja solução trivial, deve-se fazer $n = q$, $m = r$ e $p = s$, para que os deltas valham 1. Feito isso, o somatório não é mais necessário, uma vez que os índices possuem valores fixos. Assim:

$$T_0 \int_0^a \int_0^b \int_0^c \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right) dz dy dx = A_{mnp} \frac{abc}{8} \Rightarrow \quad (94)$$

$$\Rightarrow T_0 \left\{ \frac{a}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \right\} \left\{ \frac{b}{m\pi} [1 - \cos(m\pi)] \right\} \left\{ \frac{c}{p\pi} [1 - \cos(p\pi)] \right\} = A_{mnp} \frac{abc}{8} \Rightarrow \quad (95)$$

$$\Rightarrow A_{mnp} = \frac{8T_0}{nmp\pi^3} [1 - \cos(n\pi)] [1 - \cos(m\pi)] [1 - \cos(p\pi)]. \quad (96)$$

Para que não haja solução nula, então todos os índices n , m e p devem ser ímpares no coeficiente, e na solução. Assim, (96) se torna:

$$A_{mnp} = \frac{64T_0}{(2n+1)(2m+1)(2p+1)\pi^3}. \quad (97)$$

A partir destes resultados, tem-se que a solução para o problema de valores no contorno é:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{64T_0}{(2n+1)(2m+1)(2p+1)\pi^3} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{a}x\right] \times \\ &\times \sin\left[\frac{(2m+1)\pi}{b}y\right] \sin\left[\frac{(2p+1)\pi}{c}z\right] e^{-\alpha\pi^2\left[\frac{(2n+1)^2}{a^2} + \frac{(2m+1)^2}{b^2} + \frac{(2p+1)^2}{c^2}\right]t}. \quad (98) \end{aligned}$$

APÊNDICE E – Sistema cilíndrico de coordenadas

O vetor espacial em coordenadas cilíndricas é $\vec{r} = (r, \phi, z)$. Tem-se:

$$\frac{\nabla^2 \psi(r, \phi, z)}{\psi(r, \phi, z)} = -\lambda^2. \quad (99)$$

Aplica-se o método da separação de variáveis, fazendo $\psi(r, \phi, z) = R(x)\Phi(\phi)Z(z)$ e substituindo na equação (196), obtendo assim, a expressão seguinte:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \quad (100)$$

$$\Rightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} + \lambda^2 = 0. \quad (101)$$

A partir dessa equação, é possível encontrar cada uma das funções (R, Φ, Z).

E.1 Encontrando $Z(z)$

Pode-se manipular a equação (197) fazendo:

$$\frac{Z''}{Z} = - \left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \lambda^2 \right), \quad (102)$$

em que o membro esquerdo é função de z e o direito é função de r e ϕ . Com isso, conclui-se que:

$$\frac{Z''}{Z} = c, \quad (103)$$

em que c é uma constante qualquer. Essa constante é negativa ($-\varepsilon^2$) quando a temperatura se comporta de forma oscilatória na direção z e positiva (ε^2), caso contrário.

E.1.1 Quando $c = -\varepsilon^2$

Quando a constante é negativa, a equação (199) assume a forma:

$$\frac{Z''}{Z} = -\varepsilon^2, \quad (104)$$

que é uma equação diferencial linear de coeficientes constantes. Sua solução é encontrada pelo método das raízes, e é dada abaixo:

$$Z(z) = A_1 \cos(\varepsilon z) + A_2 \sin(\varepsilon z). \quad (105)$$

E.1.2 Quando $c = \varepsilon^2$

Quando a constante é negativa, a equação (199) assume a forma:

$$\frac{Z''}{Z} = \varepsilon^2, \quad (106)$$

que é uma equação diferencial linear de coeficientes constantes. Sua solução é encontrada pelo método das raízes, e é dada abaixo:

$$Z(z) = A_1 \cosh(\varepsilon z) + A_2 \operatorname{senh}(\varepsilon z). \quad (107)$$

E.2 Encontrando $\Phi(\phi)$

Pode-se manipular a equação (197) fazendo:

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = - \left(r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 \frac{Z''}{Z} + r^2 \lambda^2 \right), \quad (108)$$

em que o membro esquerdo é função de ϕ e o direito é função de r e z . Com isso, conclui-se que:

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = c, \quad (109)$$

em que c é uma constante qualquer. Essa constante deve ser negativa, uma vez que ϕ representa um ângulo. Assim, $c = -m^2$, e tem-se:

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2, \quad (110)$$

que é uma equação diferencial linear de coeficientes constantes. Sua solução é encontrada pelo método das raízes, e é dada abaixo:

$$\Phi(\phi) = B_1 \cos(m\phi) + B_2 \operatorname{sen}(m\phi). \quad (111)$$

E.3 Encontrando $R(r)$

A solução para o r depende da solução para z . Caso a solução para z seja dada por (201), pela condição (200) e também (219), tem-se a partir de (197):

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} - r^2 \varepsilon^2 + r^2 \lambda^2 - m^2 = 0, \quad (112)$$

que pode ser organizada, da seguinte maneira:

$$r^2 R'' + r R' + [\xi^2 r^2 - m^2] R = 0, \quad (113)$$

onde $\xi^2 = \lambda^2 - \varepsilon^2$. Essa é a equação diferencial de Bessel, e sua solução é dada abaixo:

$$R(r) = C_1 J_m(\xi r) + C_2 N_m(\xi r). \quad (114)$$

Caso a solução para z seja dada por (205), pela condição (203) e também (219), tem-se a partir de (197):

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 \varepsilon^2 + r^2 \lambda^2 - m^2 = 0, \quad (115)$$

que pode ser organizada, da seguinte maneira:

$$r^2 R'' + r R' + [\zeta^2 r^2 - m^2] R = 0, \quad (116)$$

onde $\zeta^2 = \lambda^2 + \varepsilon^2$. Essa é a equação diferencial de Bessel, e sua solução é dada abaixo:

$$R(r) = C_1 J_m(\zeta r) + C_2 N_m(\zeta r). \quad (117)$$

Com isso, a escolha das soluções para cada coordenada espacial vai depender do problema em questão.

E.4 Problema de valores no contorno

Inicialmente, a temperatura de um sólido cilíndrico ($r \leq a, 0 \leq z \leq h$) é constante igual a T_0 . Sua superfície, então é posta à temperatura nula. Calcular a distribuição de temperaturas no sólido para $t \geq 0$.

E.4.1 Solução

Como as temperaturas das faces do sólido são nulas, então conclui-se que a temperatura se comporta de forma oscilatória na direção de z . Portanto, tem-se:

$$Z(z) = A_1 \cos(\varepsilon z) + A_2 \sin(\varepsilon z) \quad (118)$$

$$\Phi(\phi) = B_1 \cos(m\phi) + B_2 \sin(m\phi) \quad (119)$$

$$R(r) = C_1 J_m(\xi r) + C_2 N_m(\xi r) \quad (120)$$

Inicialmente, analisa-se (243), e conclui-se que, para $r = 0$ a função $N_m(\xi r)$ é indefinida. Dessa maneira, para evitar esta singularidade, faz-se $C_2 = 0$. O problema proposto fornece as seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(0) = 0 \\ Z(h) = 0 \\ R(a) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 \cos(0) + A_2 \sin(0) = 0 \\ A_1 \cos(\varepsilon h) + A_2 \sin(\varepsilon h) = 0 \\ C_1 J_m(\xi a) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 = 0, \\ \varepsilon = \frac{p\pi}{h}, \\ \xi = \frac{\alpha_{mn}}{a}, \end{array} \right. \quad (121)$$

onde $p = 0, 1, 2, \dots, +\infty$, $n = 1, 2, \dots, +\infty$ e $m = 0, 1, 2, \dots, +\infty$.

Como definido anteriormente, tem-se que $\xi^2 = \lambda^2 - \varepsilon^2$, e portanto, com os resultados de (244) pode-se determinar λ^2 :

$$\xi^2 = \lambda^2 - \varepsilon^2 \Rightarrow \lambda^2 = \xi^2 + \varepsilon^2 \Rightarrow \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2. \quad (122)$$

Assim, juntando os resultados obtidos em (241), (242), (243), (244) e (245) e tendo em mente que a solução geral é a soma de todas as soluções, tem-se que a função temperatura é:

$$\begin{aligned} \Psi(r, \phi, z, t) = & \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} J_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) \operatorname{sen} \left(\frac{p\pi}{h} z \right) [A_{mnp} \cos(m\phi) + \\ & + B_{mnp} \operatorname{sen}(m\phi)] e^{-\alpha \left[\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h} \right)^2 \right] t}. \end{aligned} \quad (123)$$

Resta ainda uma condição a ser satisfeita:

$$\begin{aligned} \Psi(r, \phi, z, 0) = T_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow T_0 = & \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} J_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) \operatorname{sen} \left(\frac{p\pi}{h} z \right) \times \\ & \times [A_{mnp} \cos(m\phi) + B_{mnp} \operatorname{sen}(m\phi)]. \end{aligned} \quad (124)$$

Para resolver esta equação, multiplica-se os dois membros por $J_m \left(\frac{\alpha_{mq}}{a} r \right) r \operatorname{sen} \left(\frac{s\pi}{h} z \right) \cos(u\phi)$ e integra-se em relação a cada uma das variáveis (r, ϕ e z).

$$\begin{aligned} T_0 \int_0^a \int_0^h \int_0^{2\pi} J_m \left(\frac{\alpha_{mq}}{a} r \right) r \operatorname{sen} \left(\frac{s\pi}{h} z \right) \cos(u\phi) d\phi dz dr = \\ = & \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^a \int_0^h \int_0^{2\pi} J_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) J_m \left(\frac{\alpha_{mq}}{a} r \right) r \operatorname{sen} \left(\frac{p\pi}{h} z \right) \operatorname{sen} \left(\frac{s\pi}{h} z \right) \times \\ & \times [A_{mnp} \cos(m\phi) + B_{mnp} \operatorname{sen}(m\phi)] \cos(u\phi) d\phi dz dr \end{aligned} \quad (125)$$

As integrais podem ser resolvidas separadamente. Resolver-se-á, inicialmente, as integrais em relação a ϕ . Para isso, serão necessárias as propriedades seguintes:

$$\int_a^b \cos(m\omega\phi) \cos(u\omega\phi) d\phi = \frac{b-a}{2} \delta_{mu}. \quad (126)$$

$$\int_a^b \operatorname{sen}(m\omega\phi) \cos(u\omega\phi) d\phi = 0. \quad (127)$$

No segundo membro, a integral em ϕ é:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [A_{mnp} \cos(m\phi) + B_{mnp} \sin(m\phi)] \cos(u\phi) d\phi &= \\ = \int_0^{2\pi} A_{mnp} \cos(m\phi) \cos(u\phi) d\phi + \int_0^{2\pi} B_{mnp} \sin(m\phi) \cos(u\phi) d\phi &= \\ = A_{mnp} \frac{2\pi - 0}{2} \delta_{mu} &= A_{mnp} \pi. \end{aligned} \quad (128)$$

Nesse resultado, forçou-se $m = u$, de forma que $\delta_{mu} = 1$. Com isso, não é mais necessário o somatório em m .

No primeiro membro da equação, a integral em ϕ é:

$$\int_0^{2\pi} \cos(u\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \cos(u\phi) \cos(0\phi) d\phi = \frac{2\pi - 0}{2} \delta_{u0} = \pi. \quad (129)$$

Nesse resultado, forçou-se $u = 0$, de forma que $\delta_{u0} = 1$. Assim, por consequência, se $m = u$ e $u = 0$, então $m = 0$.

Agora, para resolver as integrais em z , será necessária a seguinte propriedade:

$$\int_a^b \sin(m\omega\phi) \sin(u\omega\phi) d\phi = \frac{b-a}{2} \delta_{mu}. \quad (130)$$

No segundo membro da equação a integral em z é:

$$\int_0^h \sin\left(\frac{p\pi}{h}z\right) \sin\left(\frac{s\pi}{h}z\right) dz = \frac{h-0}{2} \delta_{ps} = \frac{h}{2}. \quad (131)$$

Nesse resultado forçou-se $p = s$, de forma que $\delta_{ps} = 1$. Com isso, não é mais necessário o somatório em p .

No primeiro membro da equação, a integral em z é:

$$\int_0^h \sin\left(\frac{s\pi}{h}z\right) dz = -\frac{h}{s\pi} \left[\cos\left(\frac{s\pi}{h}z\right) \right]_0^h = \frac{h}{s\pi} [1 - \cos(s\pi)], \quad (132)$$

e para evitar a solução nula, o índice s deve ser sempre ímpar. Além disso, foi posto anteriormente que $s = p$. Com isso, a solução da integral é dada abaixo:

$$\int_0^h \sin\left(\frac{p\pi}{h}z\right) dz = \frac{2h}{(2p+1)\pi}. \quad (133)$$

Restam agora as integrais em r . Para isso serão necessárias as relações:

$$\int_0^a J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}r\right) J_m\left(\frac{\alpha_{mq}}{a}r\right) r dr = \frac{a^2}{2} [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2 \delta_{nq}. \quad (134)$$

$$r^m J_{m-1}(r) = \frac{d}{dr} [r^m J_m(r)]. \quad (135)$$

No segundo membro, a integral em r é (sabendo que $m = 0$):

$$\int_0^a J_0\left(\frac{\alpha_{0n}}{a}r\right) J_0\left(\frac{\alpha_{0q}}{a}r\right) r dr = \frac{a^2}{2} [J_1(\alpha_{0n})]^2 \delta_{nq} = \frac{a^2}{2} [J_1(\alpha_{0n})]^2. \quad (136)$$

Nesse resultado, forçou-se $n = q$, de modo que $\delta_{nq} = 1$. Desse modo, o somatório em n não é mais necessário.

No primeiro membro da equação, a integral em r é (sabendo que $n = q$):

$$\begin{aligned} \int_0^a J_0\left(\frac{\alpha_{0n}}{a}r\right) r dr &= \frac{a^2}{\alpha_{0n}^2} \int_0^{\alpha_{0n}} x J_0(x) dx = \\ &= \frac{a^2}{\alpha_{0n}^2} \int_0^{\alpha_{0n}} \frac{d}{dx} [x J_1(x)] dx = \frac{a^2}{\alpha_{0n}} J_1(\alpha_{0n}) \end{aligned} \quad (137)$$

onde fez-se a substituição $x = \frac{\alpha_{0n}}{a}r$.

Com os resultados obtidos em pode-se reescrever a equação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} T_0 \frac{a^2}{\alpha_{0n}} J_1(\alpha_{0n}) \frac{2h}{(2p+1)\pi} \pi &= \frac{a^2}{2} [J_1(\alpha_{0n})]^2 \frac{h}{2} A_{mnp} \pi \Rightarrow \\ \Rightarrow A_{mnp} &= \frac{8T_0}{\alpha_{0n}(2m+1)\pi J_1(\alpha_{0n})} \end{aligned} \quad (138)$$

Determinada a forma de A_{mnp} , a solução para a distribuição de temperatura é igual:

$$\begin{aligned} \Psi(r, z, t) &= \frac{8T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_{0n}(2m+1)J_1(\alpha_{0n})} J_1\left(\frac{\alpha_{0n}}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}r\right) \\ &\quad \sin\left(\frac{2m+1}{c}\right) e^{-\alpha\left[\frac{\alpha_{0n}}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} + \frac{2m+1}{c}\pi\right]t} \end{aligned} \quad (139)$$

APÊNDICE F – Sistema esférico de coordenadas

O vetor espacial em coordenadas esféricas é $\vec{r} = (r, \theta, \phi)$. A equação de Fourier então, pode ser escrita como:

$$\frac{\nabla^2 \psi(r, \theta, \phi)}{\psi(r, \theta, \phi)} = -\lambda^2. \quad (140)$$

Aplica-se o método da separação de variáveis, fazendo $\psi(r, \theta, \phi) = R(x)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ e substituindo na equação (140), obtendo assim, a expressão seguinte:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cotg(\theta)}{r^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sen(\theta)^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -\lambda^2 \Rightarrow \quad (141)$$

$$\Rightarrow \frac{R''}{R} + \frac{2R'}{rR} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{\cotg(\theta)}{r^2} \frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{1}{r^2 \sen(\theta)^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \lambda^2 = 0. \quad (142)$$

A partir dessa equação, é possível encontrar cada uma das funções (R, Θ, Φ) .

F.1 Encontrando $\Phi(\phi)$

Pode-se manipular a equação (142), fazendo:

$$-r^2 \sen(\theta)^2 \left(\frac{R''}{R} + \frac{2R'}{rR} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{\cotg(\theta)}{r^2} \frac{\Theta'}{\Theta} + \lambda^2 \right) = \frac{\Phi''}{\Phi}, \quad (143)$$

em que o membro esquerdo é função de r e θ e o direito é função de ϕ . Com isso, conclui-se que:

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2 \Rightarrow \Phi'' + m^2 \Phi = 0, \quad (144)$$

em que m é uma constante qualquer.

A equação diferencial (144) é homogênea de segunda ordem, e é resolvida por meio do método das raízes, tendo como solução a função abaixo:

$$\Phi(\phi) = A_1 \cos(m\phi) + B_1 \sen(m\phi) \quad (145)$$

F.2 Encontrando $R(r)$

Substituindo a relação de (144) em (142), chega-se à seguinte equação:

$$\frac{R''}{R} + \frac{2R'}{rR} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{\cotg(\theta)}{r^2} \frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{m^2}{r^2 \sen(\theta)^2} + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \quad (146)$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \cotg(\theta) \frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{m^2}{\sen(\theta)^2} = -r^2 \lambda^2 \Rightarrow \quad (147)$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} + r^2 \lambda^2 = \frac{m^2}{\sen(\theta)^2} - \frac{\Theta''}{\Theta} - \cotg(\theta) \frac{\Theta'}{\Theta}. \quad (148)$$

Percebe-se que o membro esquerdo de (148) é função de r e o membro direito é função de θ . Com isso, vem:

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} + r^2 \lambda^2 = l(l+1) \Rightarrow \quad (149)$$

$$\Rightarrow r^2 R'' + 2r R' + [r^2 \lambda^2 - l(l+1)] R = 0. \quad (150)$$

Fazendo $x = \lambda r$, tem-se:

$$R' = \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dx} \frac{dx}{dr} = \lambda \frac{dR}{dx}; \quad (151)$$

$$R'' = \frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d}{dr}(R') = \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dR}{dx} \right) \frac{dx}{dr} = \lambda^2 \frac{dR^2}{dx^2}; \quad (152)$$

e substituindo estes resultados na equação (150), vem:

$$\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 \lambda^2 \frac{dR^2}{dx^2} + 2\frac{x}{\lambda} \lambda \frac{dR}{dx} + [x^2 - l(l+1)] R = 0 \Rightarrow \quad (153)$$

$$\Rightarrow x^2 \frac{dR^2}{dx^2} + 2x \frac{dR}{dx} + [x^2 - l(l+1)] R = 0. \quad (154)$$

Esta é uma das equações de Bessel, cuja solução é dada abaixo:

$$R(r) = A_1 j_l(x) + B_1 n_l(x) \Rightarrow R(r) = A_1 j_l(\lambda r) + B_1 n_l(\lambda r). \quad (155)$$

Nesta solução, as funções $j_l(x)$ e $n_l(x)$ são as funções esféricas de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente.

F.3 Encontrando $\Theta(\theta)$

A partir de (148) e (150) conclui-se que:

$$\frac{m^2}{\sin(\theta)^2} - \frac{\Theta''}{\Theta} - \cot(\theta) \frac{\Theta'}{\Theta} = l(l+1) \Rightarrow \quad (156)$$

$$\Rightarrow \Theta'' + \cot(\theta) \Theta' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin(\theta)^2} \right] \Theta = 0. \quad (157)$$

Fazendo $y = \cos(\theta)$, vem:

$$\Theta' = \frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{dy} \frac{dy}{d\theta} = -\sin(\theta) \frac{d\Theta}{dy}; \quad (158)$$

$$\Theta'' = \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \frac{d}{dy} (\Theta') \frac{dy}{d\theta} = -\sin(\theta) \frac{d}{dy} \left(-\sin(\theta) \frac{d\Theta}{dy} \right) = \quad (159)$$

$$= \sin(\theta)^2 \frac{d^2\Theta}{dy^2} - \cos(\theta) \frac{d\Theta}{dy}; \quad (160)$$

Substituindo essas relações na equação (157), vem:

$$\operatorname{sen}(\theta)^2 \frac{d^2\Theta}{dy^2} - \cos(\theta) \frac{d\Theta}{dy} + \operatorname{cotg}(\theta) \left[-\operatorname{sen}(\theta) \frac{d\Theta}{dy} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}(\theta)^2} \right] \Theta = 0 \Rightarrow \quad (161)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(\theta)^2 \frac{d^2\Theta}{dy^2} - 2\cos(\theta) \frac{d\Theta}{dy} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}(\theta)^2} \right] \Theta = 0. \quad (162)$$

Substituindo todos os termos usando a relação $y = \cos(\theta)$, vem:

$$(1-y^2) \frac{d^2\Theta}{dy^2} - 2y \frac{d\Theta}{dy} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-y^2} \right] \Theta = 0 \quad (163)$$

Esta é a equação associada de Legendre, que tem como solução a função abaixo:

$$\Theta(\theta) = A_1 P_l^m(y) + B_1 Q_l^m(y) \Rightarrow \quad (164)$$

$$\Rightarrow \Theta(\theta) = A_1 P_l^m[\cos(\theta)] + B_1 Q_l^m[\cos(\theta)], \quad (165)$$

onde as funções $P_l^m(y)$ e $Q_l^m(y)$ são as funções associadas de Legendre de primeira e segunda espécie, respectivamente.

F.4 Problema de valores no contorno

Seja uma esfera de raio a , inicialmente à temperatura T_0 , que posteriormente tem sua superfície posta à temperatura nula. Encontre a distribuição de temperaturas em $t > 0$.

F.4.1 Solução

As soluções para cada coordenada são dadas por (145), (155), (164), listadas abaixo:

$$T(t) = k_0 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (166)$$

$$R(r) = A_1 j_l(\lambda r) + B_1 n_l(\lambda r) \quad (167)$$

$$\Theta(\theta) = A_2 P_l^m[\cos(\theta)] + B_2 Q_l^m[\cos(\theta)] \quad (168)$$

$$\Phi(\phi) = A_3 \cos(m\phi) + B_3 \operatorname{sen}(m\phi) \quad (169)$$

As condições de contorno do problema também estão listadas abaixo:

$$\Psi(r, \theta, \phi, 0) = T_0 \quad (170)$$

$$\Psi(a, \theta, \phi, t) = 0 \Rightarrow R(a) = 0 \quad (171)$$

As funções de Bessel esférica e associada de Legendre, ambas de segunda espécie, apresentam singularidades, de forma que deve-se fazer B_1 e B_2 nulos. Trabalhando a condição (171), vem:

$$R(a) = 0 \Rightarrow A_1 j_l(\lambda a) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\beta_{ln}}{a}, \quad (172)$$

onde o termo β_{ln} representa as raízes n-ésimas da função de Bessel de ordem $l + \frac{1}{2}$.

Reunindo estes resultados, tendo em mente que a solução geral é a soma de todas as possíveis soluções e definindo $A_{lmn} = A_1 A_2 A_3 k_0$ e $B_{lmn} = A_1 A_2 B_3 k_0$, a função temperatura é dada abaixo:

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} j_l \left[\frac{\beta_{ln}}{a} r \right] P_l^m [\cos(\theta)] \times \quad (173)$$

$$\times [A_{lmn} \cos(m\phi) + B_{lmn} \sin(m\phi)] e^{-\alpha \left[\frac{\beta_{ln}}{a} \right]^2 t} \quad (174)$$

Resta satisfazer a condição (170). Tem-se:

$$T_0 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} j_l \left[\frac{\beta_{ln}}{a} r \right] P_l^m [\cos(\theta)] [A_{lmn} \cos(m\phi) + B_{lmn} \sin(m\phi)] \quad (175)$$

Para resolver esta equação, multiplicar-se-á os dois termos por $\cos(p\phi) j_l \left(\frac{\beta_{ls}}{a} r \right) r^2 P_q^m [\cos(\theta)]$, e posteriormente, integrar-se-á os dois termos em relação a ϕ , a r e a $\cos(\theta)$, nos seguintes intervalos: $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ e $0 \leq r \leq a$. Chega-se então a seguinte equação:

$$T_0 \int_0^a j_l \left[\frac{\beta_{ln}}{a} r \right] r^2 dr \int_{-1}^{+1} P_q^m [\cos(\theta)] d[\cos(\theta)] \int_0^{2\pi} \cos(p\phi) d\phi = \quad (176)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a j_l \left(\frac{\beta_{ls}}{a} r \right) j_l \left(\frac{\beta_{ln}}{a} r \right) r^2 dr \times \quad (177)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_q^m [\cos(\theta)] P_l^m [\cos(\theta)] d[\cos(\theta)] \times \quad (177)$$

$$\int_0^{2\pi} [A_{lmn} \cos(m\phi) + B_{lmn} \sin(m\phi)] \cos(p\phi) d\phi \quad (178)$$

São necessárias algumas propriedades de ortogonalidade para resolver essas

integrais:

$$\int_a^b \cos(m\phi) \cos(p\phi) d\phi = \frac{(b-a)}{2} \delta_{mp} \quad (179)$$

$$\int_a^b \sin(m\phi) \cos(p\phi) d\phi = 0 \quad (180)$$

$$\int_a^b \cos(p\phi) d\phi = \frac{(b-a)}{2} \delta_{0p} \quad (181)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m [\cos(\theta)] P_q^m [\cos(\theta)] d[\cos(\theta)] = \frac{2}{(2l+1)} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ql} \quad (182)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_l [\cos(\theta)] d[\cos(\theta)] = \quad (183)$$

$$\int_0^a j_l \left(\frac{\beta_{ln}}{a} r \right) j_l \left(\frac{\beta_{ls}}{a} r \right) r^2 dr = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{\beta_{ln}\beta_{ls}}} \left[J_{l+\frac{3}{2}}(\beta_{ls}) \right]^2 \delta_{ns} \quad (184)$$

Inicialmente, resolver-se-á as integrais do segundo termo. A primeira, em relação a r é:

$$\int_0^a j_l \left(\frac{\beta_{ls}}{a} r \right) j_l \left(\frac{\beta_{ln}}{a} r \right) r^2 dr = \frac{\pi a^3}{4\beta_{ln}} \left[J_{l+\frac{3}{2}}(\beta_{ln}) \right]^2, \quad (185)$$

onde fez-se $n = s$, para que $\delta_{ns} = 1$. Assim, como n assume valor fixo, não é mais necessário o somatório em n .

A segunda integral, em relação a ϕ , é:

$$\int_0^{2\pi} [A_{lmn} \cos(m\phi) + B_{lmn} \sin(m\phi)] \cos(p\phi) d\phi = \quad (186)$$

$$\int_0^{2\pi} A_{lmn} \cos(m\phi) \cos(p\phi) d\phi + \int_0^{2\pi} B_{lmn} \sin(m\phi) \cos(p\phi) d\phi = \quad (187)$$

$$A_{lmn} \pi, \quad (188)$$

onde fez-se $m = p$, para que $\delta_{mp} = 1$. Como m assume um valor fixo, não é mais necessário o somatório em m .

A terceira integral, em relação a $\cos(\theta)$, é:

$$\int_{-1}^{+1} P_q^m [\cos(\theta)] P_l^m [\cos(\theta)] d[\cos(\theta)] = \frac{2}{(2l+1)} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}, \quad (189)$$

onde fez-se $q = l$, para que $\delta_{ql} = 1$.

Agora, deve-se resolver as integrais do primeiro membro. A primeira integral, em relação a ϕ , é:

$$\int_0^{2\pi} \cos(p\phi) d\phi = \pi, \quad (190)$$

onde fez-se $p = 0$, para que $\delta_{0p} = 1$. Em consequência disso, como $m = p$, então $m = 0$.

A segunda integral, em relação a $\cos(\theta)$, é:

$$\int_{-1}^{+1} P_q^m [\cos(\theta)] d[\cos(\theta)] = \int_{-1}^{+1} P_l^0 [\cos(\theta)] d[\cos(\theta)], \quad (191)$$

sabe-se que $P_l^0 [\cos(\theta)] \equiv P_l [\cos(\theta)]$ e $P_0 [\cos(\theta)] = 1$. Portanto, a integral acima pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\int_{-1}^{+1} P_0 [\cos(\theta)] P_l [\cos(\theta)] d[\cos(\theta)] = 2, \quad (192)$$

onde fez-se $l = 0$, para que $\delta_{l0} = 1$.

A terceira integral, em relação a r , é:

$$\int_0^a j_l \left(\frac{\beta_{ln}}{a} r \right) r^2 dr = \int_0^a j_0 \left(\frac{\beta_{0n}}{a} r \right) r^2 dr = a^3 \frac{1}{\beta_{0n}^3}. \quad (193)$$

Substituindo estes resultados, chega-se à:

$$A_{00n} = 4T_0 \frac{1}{\pi \beta_{0n}^2 \left[J_{\frac{3}{2}} (\beta_{0n}) \right]^2} \quad (194)$$

Uma vez que $m = l = 0$, e as constantes foram definidas, a função temperatura é então:

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 4T_0 \frac{1}{\pi \beta_{0n}^2 \left[J_{\frac{3}{2}} (\beta_{0n}) \right]^2} j_0 \left[\frac{\beta_{0n}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} r \right] e^{-\alpha \left[\frac{\beta_{0n}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} \right]^2 t} \quad (195)$$

Percebe-se que a temperatura não depende de nenhum dos ângulos. Esse comportamento é esperado devido a simetria do problema.

APÊNDICE G – Coordenadas esferoidais oblongas (Prolato elíptico)

Tem-se as expressões de correspondência entre as coordenadas retangulares e esferoidais prolatas:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{senh}(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \cos(\phi); \\ y = a \operatorname{senh}(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \operatorname{sen}(\phi); \\ z = a \cosh(\xi) \cos(\eta); \end{cases} \quad (196)$$

onde $\xi \geq 0$, $0 \leq \eta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

G.0.1 Ortogonalidade

Um vetor qualquer, que liga a origem do sistema de coordenadas à um ponto qualquer (em coordenadas retangulares), pode ser escrito como:

$$\vec{r} = \hat{x}\vec{i} + \hat{y}\vec{j} + \hat{z}\vec{k}. \quad (197)$$

Substituindo as relações dadas em 196, vem:

$$\vec{r} = [\operatorname{senh}(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \cos(\phi)] \hat{i} + [\operatorname{senh}(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \operatorname{sen}(\phi)] \hat{j} + [a \cosh(\xi) \cos(\eta)] \hat{k} \quad (198)$$

Definindo os versores do sistema de esferoidal prolato, tem-se:

$$\hat{e}_\phi = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right\|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}; \quad (199)$$

$$\hat{e}_\eta = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right\|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}; \quad (200)$$

$$\hat{e}_\xi = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right\|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}. \quad (201)$$

Temos então, a partir da expressão 199:

$$\begin{aligned} \hat{e}_\phi = \frac{1}{a \operatorname{senh}(\xi) \operatorname{sen}(\eta)} & [-a \operatorname{senh}(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \operatorname{sen}(\phi) \hat{i} + \\ & + a \operatorname{senh}(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \cos(\phi) \hat{j}] \Rightarrow \end{aligned} \quad (202)$$

$$\Rightarrow \hat{e}_\phi = -\sin(\phi) \hat{i} + \cos(\phi) \hat{j}. \quad (203)$$

De 200, temos:

$$\begin{aligned} \hat{e}_\eta = \frac{1}{a\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} & [a \operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \cos(\phi) \hat{i} + \\ & + a \operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \sin(\phi) \hat{j} - a \cosh(\xi) \sin(\eta) \hat{k}] \Rightarrow \end{aligned} \quad (204)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{e}_\eta = \frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \cos(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \hat{i} + \frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \sin(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \hat{j} - \\ - \frac{\cosh(\xi) \sin(\eta)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \hat{k}. \end{aligned} \quad (205)$$

A partir de 201, obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{e}_\xi = \frac{1}{a\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} & [a \cosh(\xi) \sin(\eta) \cos(\phi) \hat{i} + \\ & + a \cosh(\xi) \sin(\eta) \sin(\phi) \hat{j} + a \operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \hat{k}] \Rightarrow \end{aligned} \quad (206)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{e}_\xi = \frac{\cosh(\xi) \sin(\eta) \cos(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \hat{i} + \frac{\cosh(\xi) \sin(\eta) \sin(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \hat{j} + \\ + \frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \hat{k}. \end{aligned} \quad (207)$$

Para provar que estes três vetores são ortogonais, algumas condições devem ser satisfeitas:

$$\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\eta = 0 \quad (208)$$

$$\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\xi = 0 \quad (209)$$

$$\hat{e}_\xi \cdot \hat{e}_\eta = 0 \quad (210)$$

$$\hat{e}_\eta \cdot \hat{e}_\eta = 1 \quad (211)$$

$$\hat{e}_\xi \cdot \hat{e}_\xi = 1 \quad (212)$$

$$\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi = 1 \quad (213)$$

Condição I:

$$\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\eta = \left[-\sin(\phi) \hat{i} + \cos(\phi) \hat{j} \right] \cdot \left[\frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \cos(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} \hat{i} + \frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \sin(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} \hat{j} - \frac{\cosh(\xi) \sin(\eta)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} \hat{k} \right] \Rightarrow \quad (214)$$

$$\Rightarrow \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\eta = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} [-\sin(\phi) \cos(\phi) \operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) + \cos(\phi) \sin(\phi) \operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta)] \Rightarrow \quad (215)$$

$$\Rightarrow \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\eta = 0. \quad (216)$$

Condição II:

$$\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\xi = \left[-\sin(\phi) \hat{i} + \cos(\phi) \hat{j} \right] \cdot \left[\frac{\cosh(\xi) \sin(\eta) \cos(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} \hat{i} + \frac{\cosh(\xi) \sin(\eta) \sin(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} \hat{j} + \frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} \hat{k} \right] \Rightarrow \quad (217)$$

$$\Rightarrow \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\xi = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} [-\sin(\phi) \cos(\phi) \cosh(\xi) \sin(\eta) + \cos(\phi) \sin(\phi) \cosh(\xi) \sin(\eta)] \Rightarrow \quad (218)$$

$$\Rightarrow \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\xi = 0. \quad (219)$$

Condição III:

$$\begin{aligned} \hat{e}_\xi \cdot \hat{e}_\eta &= \left[\frac{\cosh(\xi) \sin(\eta) \cos(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} \hat{i} + \frac{\cosh(\xi) \sin(\eta) \sin(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} \hat{j} + \frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} \hat{k} \right] \cdot \\ &\cdot \left[\frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \cos(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} \hat{i} + \frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \sin(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} \hat{j} - \frac{\cosh(\xi) \sin(\eta)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \sin^2(\eta)}} \hat{k} \right] \Rightarrow \end{aligned} \quad (220)$$

$$\widehat{e}_\xi \cdot \widehat{e}_\eta = \frac{1}{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)} \{ \cosh(\xi) \operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \operatorname{sen}(\eta) [\cos^2(\phi) + \operatorname{sen}^2(\phi)] - \\ - \cosh(\xi) \operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \operatorname{sen}(\eta) \} \Rightarrow \quad (221)$$

$$\widehat{e}_\xi \cdot \widehat{e}_\eta = \frac{1}{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)} \{ \cosh(\xi) \operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \operatorname{sen}(\eta) - \\ - \cosh(\xi) \operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \operatorname{sen}(\eta) \} \Rightarrow \quad (222)$$

$$\widehat{e}_\xi \cdot \widehat{e}_\eta = 0. \quad (223)$$

Condição IV:

$$\begin{aligned} \widehat{e}_\eta \cdot \widehat{e}_\eta &= \left[\frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \cos(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \widehat{i} + \frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \operatorname{sen}(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \widehat{j} - \frac{\cosh(\xi) \operatorname{sen}(\eta)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \widehat{k} \right] \cdot \\ &\cdot \left[\frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \cos(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \widehat{i} + \frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \operatorname{sen}(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \widehat{j} - \frac{\cosh(\xi) \operatorname{sen}(\eta)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \widehat{k} \right] \Rightarrow \end{aligned} \quad (224)$$

$$\Rightarrow \widehat{e}_\eta \cdot \widehat{e}_\eta = \frac{\operatorname{senh}^2(\xi) \cos^2(\eta) [\cos^2(\phi) + \operatorname{sen}^2(\phi)] + \cosh^2(\xi) \operatorname{sen}^2(\eta)}{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)} \Rightarrow \quad (225)$$

$$\Rightarrow \widehat{e}_\eta \cdot \widehat{e}_\eta = \frac{\operatorname{senh}^2(\xi) \cos^2(\eta) + \operatorname{sen}^2(\eta) + \operatorname{senh}^2(\xi) \operatorname{sen}^2(\eta)}{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)} \Rightarrow \quad (226)$$

$$\Rightarrow \widehat{e}_\eta \cdot \widehat{e}_\eta = \frac{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)} \Rightarrow \quad (227)$$

$$\Rightarrow \widehat{e}_\eta \cdot \widehat{e}_\eta = 1. \quad (228)$$

Condição V:

$$\begin{aligned} \widehat{e}_\xi \cdot \widehat{e}_\xi &= \left[\frac{\cosh(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \cos(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \widehat{i} + \frac{\cosh(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \operatorname{sen}(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \widehat{j} + \frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \widehat{k} \right] \cdot \\ &\cdot \left[\frac{\cosh(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \cos(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \widehat{i} + \frac{\cosh(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \operatorname{sen}(\phi)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \widehat{j} + \frac{\operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}} \widehat{k} \right] \Rightarrow \end{aligned} \quad (229)$$

$$\Rightarrow \hat{e}_\xi \cdot \hat{e}_\xi = \frac{\cosh^2(\xi) \operatorname{sen}^2(\eta) [\cos^2(\phi) + \operatorname{sen}^2(\phi)] + \operatorname{senh}^2(\xi) \cos^2(\eta)}{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)} \Rightarrow \quad (230)$$

$$\Rightarrow \hat{e}_\xi \cdot \hat{e}_\xi = \frac{\operatorname{sen}^2(\eta) + \operatorname{sen}^2(\eta) \operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{senh}^2(\xi) \cos^2(\eta)}{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)} \Rightarrow \quad (231)$$

$$\Rightarrow \hat{e}_\xi \cdot \hat{e}_\xi = \frac{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)} \Rightarrow \quad (232)$$

$$\Rightarrow \hat{e}_\xi \cdot \hat{e}_\xi = 1. \quad (233)$$

Condição VI:

$$\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi = [-\operatorname{sen}(\phi) \hat{i} + \cos(\phi) \hat{j}] \cdot [-\operatorname{sen}(\phi) \hat{i} + \cos(\phi) \hat{j}] \Rightarrow \quad (234)$$

$$\Rightarrow \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi = \operatorname{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi) \Rightarrow \quad (235)$$

$$\Rightarrow \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi = 1. \quad (236)$$

Como todas as condições foram satisfeitas, então os vetores são ortogonais.

G.0.2 Fatores de escala

Partindo das relações dadas em 196, define-se:

$$dx = a \cosh(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \cos(\phi) d\xi + a \operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \cos(\phi) d\eta - \\ - a \operatorname{senh}(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \operatorname{sen}(\phi) d\phi \quad (237)$$

$$dy = a \cosh(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \operatorname{sen}(\phi) d\xi + a \operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) \operatorname{sen}(\phi) d\eta + \\ + a \operatorname{senh}(\xi) \operatorname{sen}(\eta) \cos(\phi) d\phi \quad (238)$$

$$dz = a \operatorname{senh}(\xi) \cos(\eta) d\xi - a \cosh(\xi) \operatorname{sen}(\eta) d\eta \quad (239)$$

Dessa maneira, utilizando as definições acima, pode-se escrever ds da seguinte forma:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \Rightarrow \quad (240)$$

$$\Rightarrow ds^2 = a^2 [\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)] d\xi^2 + \\ + a^2 [\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)] d\eta^2 + a^2 \operatorname{senh}^2(\xi) \operatorname{sen}^2(\eta) d\phi^2. \quad (241)$$

Com isso, é possível identificar os fatores de forma:

$$h_\xi = a\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}; \quad (242)$$

$$h_\eta = a\sqrt{\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)}; \quad (243)$$

$$h_\phi = a\operatorname{senh}(\xi)\operatorname{sen}(\eta). \quad (244)$$

G.0.3 Operador laplaciano

O laplaciano de uma função Ψ , em coordenadas esferoidais prolatas é então:

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\phi} \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \left(\frac{h_\eta h_\phi}{h_\xi} \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{h_\xi h_\phi}{h_\eta} \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\phi} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi} \right) \right] \quad (245)$$

Substituindo os resultados encontrados em 242, 243 e 244, vem:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Psi = & \frac{1}{L^3 [\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)] \operatorname{senh}(\xi) \operatorname{sen}(\eta)} \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \left(a\operatorname{senh}(\xi)\operatorname{sen}(\eta) \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(a\operatorname{senh}(\xi)\operatorname{sen}(\eta) \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{a[\operatorname{senh}^2(\xi) + \operatorname{sen}^2(\eta)]}{\operatorname{senh}(\xi)\operatorname{sen}(\eta)} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi} \right) \right] \end{aligned} \quad (246)$$

Com $a=L$ e para simplificar, fazendo $u = \cosh(\xi)$ e $v = \cos(\eta)$ e considerando que simétrico em z , obtemos:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{L^2(u^2 - v^2)} \frac{\partial}{\partial u} [(u^2 - 1) \frac{\partial\varphi}{\partial u}] - \frac{\partial}{\partial v} [(v^2 - 1) \frac{\partial\varphi}{\partial v}]$$

Anexos

ANEXO A – Propriedades termofísicas da amêndoа do cacau

A tabela 22 apresenta as propriedades termofísicas da amêndoа do cacau para diferentes teores de umidade ([SASSERON, 1984](#))

Tabela 22 – Propriedades termofísicas da amêndoа do cacau

Umidade (b.s.)	Condutividade térmica [k] (Wm ⁻¹ K ⁻¹)	Difusividade térmica [α] (m ² s ⁻¹)	Massa específica [ρ] (kgm ⁻³)	Calor específico [c] (JKg ⁻¹ K ⁻¹)
0,05	0,15	5,221E-05	903,46	3,18
0,11	0,16	5,245E-05	932,82	3,27
0,18	0,20	6,168E-05	962,2	3,37
0,25	0,18	5,287E-05	986,81	3,45
0,33	0,21	5,909E-05	1009,69	3,52
0,43	0,23	6,229E-05	1031,47	3,58
0,54	0,25	6,606E-05	1048,26	3,61
0,67	0,32	8,379E-05	1060,86	3,60
0,82	0,37	9,828E-05	1069,50	3,52
1,00	0,42	0,000117	1077,86	3,33
1,20	0,45	0,0001371	1093,98	3,00

Fonte: ([SASSERON, 1984](#))

O trabalho de Sasseron ([SASSERON, 1984](#)) determinou a difusividade da amêndoа do cacau. As grandezas físicas obtidas experimentalmente foram a condutividade térmica, o calor específico, a massa específica e de forma indireta a difusividade térmica da amêndoа de cacau, para teores de umidade no intervalo de 0,05, b.s. a 1,20 b.s. As curvas de secagem foram determinadas para temperaturas 60 °C, 70°C e 80°C a velocidade de 1,5 m/s. A condutividade térmica, determinada pelo método transiente, variou linearmente, de acordo com o teor de umidade. O calor específico foi determinada pelo método das misturas diretas e seguiu relação quadrática com o teor de umidade. A massa específica variou, de acordo com o teor de umidade, segundo uma relação cúbica. A difusividade, determinada a partir de sua equação de definição, seguiu uma relação quadrática com o teor de umidade.

Para obter a difusividade na amêndoа foi inserida uma sonda no eixo longitudinal da amêndoа, com o cuidado de que houvesse bom contato entre a agulha e o material constituinte da amêndoа, a mesma estava a 5 °C na superfície e sua temperatura interna inicial era de 70 °C. As variações de temperatura, de acordo com o tempo, eram registradas num potenciômetro em até 15 segundo. A condutividade térmica das amêndoas, para os diferentes teores de umidade, foi calculada a partir dos dados observados da sonda. Um calorímetro de mistura direta foi construído para a determinação do calor específico das amêndoas. A massa específica aparente foi determinada relacionando-se

a massa das amêndoas com o volume, para os mesmos níveis de umidade usados para o calor específico e difusividade térmica foi determinada indiretamente a partir dos valores da condutividade térmica, massa específica e calor específico ([SASSERON, 1984](#)).