



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ  
PRO-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL  
EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

**LUENNE NAILAM SOUSA NASCIMENTO**

**INDICADOR INDIRETO DE ROTAÇÃO EM AGLOMERADOS DE GALÁXIAS**

**ILHÉUS-BA  
2020**

**LUENNE NAILAM SOUSA NASCIMENTO**

**INDICADOR INDIRETO DE ROTAÇÃO EM AGLOMERADOS  
DE GALÁXIAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia  
da Universidade Estadual de Santa Cruz, como parte  
das exigências para obtenção do título de Mestre em  
Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Batista Ribeiro

ILHÉUS-BA  
2020

---

N244 Nascimento, Luenne Nailam Sousa  
Indicador indireto de rotação em Aglomerados de Galáxias / Luenne  
Nailam Sousa Nascimento. - Ilhéus-BA, UESC, 2020.  
159 f.: il. anexo.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Batista Ribeiro.  
Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual de Santa Cruz, Programa  
de Pós Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.  
Inclui referências e apêndice.

1. Galáxias. 2. Galáxias - Aglomerados. 3. Galáxias - Evolução. I. Título.  
CDD 523.112

---

**LUENNE NAILAM SOUSA NASCIMENTO**

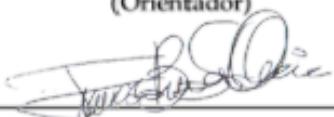
**INDICADOR INDIRETO DE ROTAÇÃO EM AGLOMERADOS  
DE GALÁXIAS**

Ilhéus-BA, 23/02/2020

  
Prof. André Luis Batista Ribeiro  
Pós-Graduação em Física - UESC  
CNPQ: 73.503.870-0

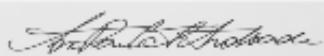
---

**Prof. Dr. André Luis Batista Ribeiro**  
PPGMC-UESC  
(Orientador)



---

**Prof. Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira**  
UESC



---

**Profa. Dra. Ana Paula de Almeida  
Andrade**  
UESC

## Resumo

Aglomerados de galáxias são as maiores estruturas gravitacionalmente ligadas do Universo e são constituídos por algumas dezenas a milhares de galáxias. Eles possuem propriedades como as funções de massa e de correlação espacial, além de sua própria evolução, cujas parametrizações podem restringir o modelo cosmológico atual. Consequentemente, o cálculo preciso das massas de aglomerados é de extrema importância. Existem diversas abordagens aplicadas ao cálculo de massa de aglomerados, sendo o método mais empregado aquele que utiliza as velocidades das galáxias membro dos aglomerados e assume o equilíbrio dinâmico através do Teorema do Virial. Este método, apesar de sua ampla aplicabilidade, não leva em conta a possível rotação dos aglomerados. A rotação desses sistemas seria uma decorrência de um impulso angular inicial que teria perdurado desde a sua formação. A rotação poderia surgir também em consequência de fusões ou interações com aglomerados vizinhos. Não levar em consideração a rotação de aglomerados pode introduzir um erro no cálculo de sua massa. Neste trabalho propomos um método para identificar a componente rotacional dos aglomerados e a correção no cálculo de sua massa. O método de detecção de rotação foi implementado em linguagem R, e aplicado a três catálogos: selec20, NoSOCS e simulação de Monte Carlo. Os resultados foram comparados com o método de Hwang & Lee (2007). Como conclusão, o nosso método permitiu realizar inferências mais seguras que o método de Hwang & Lee.

**Palavras-chave:** Rotação em Aglomerados. Testes Estatísticos. Correção de massa.

## Abstract

Clusters of galaxies are the largest gravitationally linked structures in the Universe and are made up of a few tens to thousands of galaxies. They have properties such as the functions of mass and spatial correlation, in addition to their own evolution, whose parameterization may restrict the current cosmological model. Consequently, the precise calculation of the masses of agglomerates is of utmost importance. There are several approaches applied to calculating the mass of clusters, the most used method being the one that uses the velocities of the galaxies that are members of the clusters and assumes the dynamic equilibrium through the Virial Theorem. This method, despite its wide applicability, does not take into account the possible rotation of the clusters. The rotation of these systems would be a result of an initial angular impulse that would have lasted since their formation. The rotation could also arise as a result of mergers or interactions with neighboring clusters. Failure to take into account the rotation of agglomerates can introduce an error in calculating its mass. In this work we propose a method to identify the rotational component of the clusters and the correction in the calculation of their mass. The rotation detection method was implemented in R language, and applied to three catalogs: selec20, NoSOCS and Monte Carlo simulation. The results were compared with the method of Hwang & Lee (2007). In conclusion, our method allowed us to make inferences that are safer than the Hwang & Lee method.

**Keywords:** Cluster Rotation. Statistical tests. Mass correction.

# **Lista de figuras**

Figura 1 – Histograma de velocidades de um dos aglomerados de nossa amostra.	4
Figura 2 – Distribuição de velocidades em função da distância ao centro de um dos aglomerados de nossa amostra. . . . .	5
Figura 3 – Diagrama esquemático que ilustra a lógica do teste de Hotelling unidirecional e bidirecional em um espaço simples e bidimensional.	13
Figura 4 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu. . . . .	22
Figura 5 – Perfil de velocidade de rotação do aglomerado 08 do catálogo selec20.	23
Figura 6 – Fluxograma do método implementado. . . . .	24
Figura 7 – Fluxograma do método Hwang & Lee. . . . .	25
Figura 8 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps para o aglomerado 08. . . . .	28
Figura 9 – Comparação das velocidades de rotação encontradas em cada um dos métodos para catálogo selec20. . . . .	32
Figura 10 – Comparação das velocidades de rotação encontradas em cada um dos métodos para catálogo NoSOCS. . . . .	43
Figura 11 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo selec20. . . . .	85
Figura 12 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo selec20. . . . .	86
Figura 13 – Perfil da velocidade de rotação - Catálogo selec20. . . . .	87
Figura 14 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo NoSOCS Parte I. . . . .	89
Figura 15 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo NoSOCS Parte II. . . . .	90
Figura 16 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo NoSOCS Parte III. . . . .	91
Figura 17 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo NoSOCS Parte IV. . . . .	92
Figura 18 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo NoSOCS Parte V. . . . .	93
Figura 19 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo NoSOCS Parte VI. . . . .	94
Figura 20 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo NoSOCS Parte VII. . . . .	95

Figura 21 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo NoSOCS Parte I. . . . .	96
Figura 22 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo NoSOCS Parte II. . . . .	97
Figura 23 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo NoSOCS Parte III. . . . .	98
Figura 24 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo NoSOCS Parte IV. . . . .	99
Figura 25 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo NoSOCS Parte V. . . . .	100
Figura 26 – Perfil de velocidade angular - Catálogo NoSOCS Parte I. . . . .	103
Figura 27 – Perfil de velocidade angular - Catálogo NoSOCS Parte II. . . . .	104
Figura 28 – Perfil de velocidade angular - Catálogo NoSOCS Parte III. . . . .	105
Figura 29 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte I. . . . .	107
Figura 30 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte II. . . . .	108
Figura 31 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte III. . . . .	109
Figura 32 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte IV. . . . .	110
Figura 33 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte V. . . . .	111
Figura 34 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte VI. . . . .	112
Figura 35 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte VII. . . . .	113
Figura 36 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte VIII. . . . .	114
Figura 37 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte IX. . . . .	115
Figura 38 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte I. . . . .	116
Figura 39 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte II. . . . .	117
Figura 40 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte III. . . . .	118
Figura 41 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte IV. . . . .	119

Figura 42 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte V. . . . .	120
Figura 43 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte VI. . . . .	121
Figura 44 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte VII. . . . .	122
Figura 45 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte VIII. . . . .	123
Figura 46 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte IX. . . . .	124
Figura 47 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte I. . . . .	125
Figura 48 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte II. . . . .	126
Figura 49 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte III. . . . .	127
Figura 50 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte IV. . . . .	128
Figura 51 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte V. . . . .	129
Figura 52 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte VI. . . . .	130
Figura 53 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte VII. . . . .	131
Figura 54 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte VIII. . . . .	132
Figura 55 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte IX. . . . .	133
Figura 56 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte I. . . . .	134
Figura 57 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte II. . . . .	135
Figura 58 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte III. . . . .	136
Figura 59 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte IV. . . . .	137
Figura 60 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte V. . . . .	138

Figura 61 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte VI. . . . .	139
Figura 62 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte VII. . . . .	140
Figura 63 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte VIII. . . . .	141
Figura 64 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte IX. . . . .	142
Figura 65 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte I. .	146
Figura 66 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte II. .	147
Figura 67 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte III. .	148
Figura 68 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte IV. .	149
Figura 69 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte V. .	150
Figura 70 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte VI. .	151
Figura 71 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte VII. .	152
Figura 72 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte VIII. .	153
Figura 73 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte IX. .	154
Figura 74 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra II Parte I. .	154
Figura 75 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra II Parte II. .	155

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Teste Cramer e Hotelling aplicado no catálogo selec20. . . . .	29
Tabela 2 – Resultado do métdo Hwang & Lee para o catálogo selec20. . . . .	31
Tabela 3 – Velocidades rotacionais de cada aglomerado do catálogo selec20 encontradas em cada método. . . . .	32
Tabela 4 – Teste Cramer e Hotelling aplicado no catálogo NoSOCS com rotação detectada utilizando gap. . . . .	34
Tabela 5 – Teste Cramer e Hotelling aplicado no catálogo NoSOCS com rotação detectada utilizando mediana. . . . .	35
Tabela 6 – Resultado do métdo Hwang & Lee para o catálogo NoSOCS. . . . .	35
Tabela 7 – Velocidades rotacionais de cada aglomerado do catálogo NoSOCS encontradas em cada método. . . . .	39
Tabela 8 – Teste Cramer e Hotelling aplicado na amostra I do catálogo III com rotação utilizando gap. . . . .	44
Tabela 9 – Teste Cramer e Hotelling aplicado na amostra I do catálogo III com rotação utilizando mediana. . . . .	46
Tabela 10 – Teste Cramer e Hotelling aplicado na amostra II do catálogo III com rotação utilizando gap. . . . .	49
Tabela 11 – Teste Cramer e Hotelling aplicado na amostra II do catálogo III com rotação utilizando mediana. . . . .	49
Tabela 12 – Resultado do métdo Hwang & Lee para a amostra I do catálogo III. .	50
Tabela 13 – Resultado do métdo Hwang & Lee para a amostra II do catálogo III. .	53
Tabela 14 – Cálculo correção da massa para o catálogo selec20. . . . .	58
Tabela 15 – Cálculo correção da massa para o catálogo NoSOCS. . . . .	58
Tabela 16 – Cálculo correção da massa para o catálogo III - amostra I. . . . .	59
Tabela 17 – Cálculo de correção da massa para o catálogo selec20 para o método de Hwang & Lee. . . . .	60
Tabela 18 – Cálculo de correção da massa para o catálogo NoSOCS para o método de Hwang & Lee. . . . .	61
Tabela 19 – Cálculo de correção da massa para o catálogo III amostra I para o método de Hwang & Lee. . . . .	64
Tabela 20 – Teste Cramer e Hotelling aplicado no catálogo NoSOCS utilizando gap - sem indicação rotação. . . . .	101
Tabela 21 – Teste Cramer e Hotelling aplicado no catálogo NoSOCS utilizando mediana - sem indicação rotação. . . . .	101
Tabela 22 – Teste Cramer e Hotelling aplicado na amostra II do catálogo III utilizando gap - sem indicação rotação. . . . .	142

Tabela 23 – Teste Cramer e Hotelling aplicado na amostra II do catálogo III utilizando mediana - sem indicação rotação. . . . .	145
Tabela 24 – Velocidades rotacionais de cada aglomerado do catálogo III amostra I encontradas em cada método. . . . .	155

# Sumário

<b>1 – Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 – Rotação de Aglomerados de Galáxias</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1 Aglomerado de Galáxias . . . . .	3
2.2 Distribuição de Velocidades ao longo do Aglomerado . . . . .	4
2.3 Rotação de Aglomerados . . . . .	6
<b>3 – Ferramentas Estatísticas e Computacionais</b> . . . . .	<b>9</b>
3.1 Testes de Hipótese . . . . .	9
3.1.1 Teste de Normalidade . . . . .	10
3.1.2 Testes de duas amostras . . . . .	11
3.1.3 Testes utilizados . . . . .	12
3.1.3.1 Teste de Cramer-von Mises . . . . .	12
3.1.3.2 Teste de Hotelling . . . . .	12
3.2 Linguagem R . . . . .	14
3.2.1 Pacotes utilizados neste trabalho . . . . .	15
3.2.1.1 Pacote Cramer . . . . .	15
3.2.1.2 Pacote Hotelling . . . . .	15
3.2.1.3 Pacote nortest . . . . .	15
3.2.1.4 Pacote Ellipse . . . . .	15
3.2.1.5 Pacote Astro . . . . .	16
3.2.1.6 Pacote cosmoFns . . . . .	16
<b>4 – Dados e Metodologia</b> . . . . .	<b>17</b>
4.1 Catálogo I: selec20 . . . . .	17
4.2 Catálogo II: NoSOCS . . . . .	17
4.3 Catálogo III: Simulação de Monte Carlo . . . . .	18
4.4 Método Sousa & Ribeiro . . . . .	21
4.5 Método de Hwang & Lee . . . . .	24
<b>5 – Análise</b> . . . . .	<b>27</b>
5.1 Catálogo I: selec20 . . . . .	27
5.1.1 <b>Método Sousa &amp; Ribeiro</b> . . . . .	27
5.1.2 <b>Método de Hwang &amp; Lee</b> . . . . .	30
5.2 Catálogo II: NoSOCS . . . . .	32
5.2.1 <b>Método Sousa &amp; Ribeiro</b> . . . . .	32
5.2.2 <b>Método de Hwang &amp; Lee</b> . . . . .	35

5.3	Catálogo III: Simulação de Monte Carlo . . . . .	43
5.3.1	Método Sousa & Ribeiro . . . . .	43
5.3.2	Método de Hwang & Lee . . . . .	49
5.4	Correção da massa do aglomerado . . . . .	57
<b>6 – Considerações Finais</b>	. . . . .	<b>68</b>
6.1	Discussão . . . . .	68
6.2	Conclusão . . . . .	70
6.3	Perspectivas . . . . .	70
<b>Referências</b>	. . . . .	<b>71</b>
<b>Apêndices</b>	. . . . .	<b>75</b>
<b>APÊNDICE A – Código do nosso método</b>	. . . . .	<b>76</b>
<b>Anexos</b>	. . . . .	<b>83</b>
<b>ANEXO A – Resultados Catálogo selec20</b>	. . . . .	<b>84</b>
<b>ANEXO B – Resultados Catálogo NoSOCS</b>	. . . . .	<b>88</b>
<b>ANEXO C – Resultados Catálogo III</b>	. . . . .	<b>106</b>

# 1 Introdução

Aglomerados de galáxias são as maiores estruturas do Universo observável que podem ter alcançado o estado de equilíbrio dinâmico. Eles são constituídos por algumas dezenas até milhares de galáxias ligadas pela força gravitacional. Para que as galáxias se mantenham próximas umas das outras por longas escalas de tempo é necessário que exista uma considerável força gravitacional que impeça a sua dispersão no espaço. Isto significa que a massa típica desses sistemas é muito grande (o catálogo de Abell, por exemplo, possui sistemas com massa total por volta de  $10^{14}$  a  $10^{15}$  massas solares<sup>1</sup>), o que torna o mapeamento de aglomerados e a correta obtenção de suas propriedades observadas de grande importância tanto para estudos referentes ao processo de formação de estruturas no Universo, como para restringir o modelo cosmológico atual (vide, por exemplo, [Velásquez \(2007\)](#)).

Ao longo do século XX muitos trabalhos foram voltados ao estudo de aglomerados e permitiram a sua crescente caracterização como um sistema físico bastante particular. Dessa maneira, propriedades como: a distribuição de posições e de velocidades em aglomerados, perfis de densidade numérica – entendimento quanto à distribuição das galáxias em relação a sua distância ao centro do aglomerado, funções de luminosidade – quantificar a distribuição luminosa – e de massa, puderam ser obtidas e utilizadas para descrever aglomerados ([VELÁSQUEZ, 2007](#)). Além de parâmetros dinâmicos e cinemáticos como: velocidade média (adequado a estimativa de distâncias); dispersão de velocidades (compreensão do grau de ligação gravitacional entre galáxias); massas (entender o grau de contribuição de densidade referente a massa total do Universo); e a razão massa/luminosidade (utilizada como indicativo da quantidade matéria escura e para estimar se a distribuição de luz segue a da matéria) ([FRIAÇA, 2008](#))

As conclusões alcançadas por esses trabalhos sugerem que os aglomerados iniciaram o seu processo de formação há aproximadamente 10 bilhões de anos, processo que se dá de forma continuada até os dias de hoje. Estudos baseados na distribuição de velocidades de galáxias nesses sistemas indicam que apenas uma fração deles (em torno de 60%) pode ser considerada em estado de equilíbrio dinâmico ([NASCIMENTO, 2012](#)). Os demais constituem sistemas ainda em formação ou perturbados por interações com outros aglomerados. O grande número de sistemas fora do equilíbrio pode introduzir dificuldades na interpretação das propriedades dinâmicas dos aglomerados ([FRIAÇA, 2008](#)).

Portanto, o entendimento preciso dos graus de liberdade de aglomerados é de extrema importância para que seja possível realizar inferências dinâmicas sobre esses

---

<sup>1</sup>1 massa solar  $M_{\odot}$  equivale a  $2 \times 10^{30}$  kg.

sistemas. Um dos aspectos menos estudados a respeito de aglomerados é a possibilidade de que eles tenham movimento de rotação. Ao calcular a massa do aglomerado usando as velocidades individuais das galáxias membro admite-se que o aglomerado está em equilíbrio virial, desprovido de rotação, e seu potencial gravitacional é duas vezes a soma da energia cinética dos membros e as órbitas das galáxias são aproximadamente isotrópicas. Não levar em consideração uma possível rotação de aglomerados pode gerar um erro nas suas estimativas de massa, o que afeta diretamente as restrições cosmológicas fornecidas pela função de massa desses sistemas ([FANG et al., 2009](#)).

O ponto central do presente trabalho é desenvolver uma metodologia para identificar a componente rotacional dos aglomerados e corrigir, a partir da velocidade rotacional encontrada, a sua massa. Com este propósito, implementamos na linguagem R o método proposto por Nascimento et.al (2016) adaptando-o para o estudo de rotação de aglomerados individuais. O trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 descrevemos o problema da rotação de aglomerados de galáxias, com uma breve definição de aglomerados de galáxias e sua distribuição de velocidades; no Capítulo 3 apresentamos os conceitos e ferramentas estatísticas utilizadas no projeto além da linguagem R e seus respectivos pacotes; Capítulo 4 fazemos uma descrição dos catálogos utilizados, assim como introduzimos o nosso método e o método de Hwang & Lee; no Capítulo 5 apresentamos os resultados da nossa análise, bem como a correção das massas dos aglomerados; finalmente, no Capítulo 6 fazemos nossas considerações finais e discutimos alguns desdobramentos possíveis deste trabalho.

## 2 Rotação de Aglomerados de Galáxias

### 2.1 Aglomerado de Galáxias

A origem do Universo, de acordo ao modelo cosmológico padrão, se deu há aproximadamente 14 bilhões de anos. Desde então o seu processo de expansão ocorre de forma contínua e hierárquica, de modo que unidades menores se fundem formando outras maiores. Aglomerados de galáxias são as maiores estruturas do Universo observável e compõem os objetos de estudo desta dissertação ([RYDEN, 2017](#)).

Aglomerados de galáxias são definidos basicamente por três componentes: galáxias, meio intra-aglomerado e matéria escura. A maior parte da massa do aglomerado, cerca de 80% do total, é composta de matéria escura (não-bariônica). Do restante, na forma bariônica (feita de prótons e nêutrons), 15% são compreendidos de meio intra-aglomerado (MIA) e apenas 5% da massa de um aglomerado estão na forma de estrelas e galáxias.

A busca por compreender a formação e evolução dos aglomerados de galáxias é uma das questões mais importantes da Astrofísica. No paradigma atual de formação das estruturas, as galáxias e os aglomerados surgem a partir de halos escuros. O resfriamento desses halos ocasiona a formação de estruturas condensadas, onde depois colapsariam os bárions (prótons e nêutrons), formando os sistemas astrofísicos conhecidos. Este cenário seria ainda hierárquico, com a formação dos aglomerados ocorrendo após a formação das galáxias e pequenos grupos, aproximadamente em um desvio para o vermelho  $z \approx 2$  (vide, por exemplo, [Velásquez \(2007\)](#)).

O processo de formação de aglomerados de galáxias ainda não atingiu o seu fim. Enquanto regiões centrais estão em equilíbrio dinâmico, as regiões periféricas acumulam matéria na forma de galáxias ou grupos de galáxias de modo contínuo. Comumente o entorno dos aglomerados de galáxias é constituído de grupos de galáxias que podem ser absorvidos pelo aglomerado principal ao longo do tempo, ocasionando o aumento de sua massa ([REMBOLD, 2011](#)). Estudos sobre a distribuição de velocidades de galáxias em aglomerados indicam que a mesma possui distribuição gaussiana, vide Figura 1, ou muito bem ajustada por uma gaussiana somente na região virializada do sistema (região mais interna do sistema) ([YAHIL; VIDAL, 1977](#)), podendo existir sinais de múltiplos modos normais na região mais externa ([RIBEIRO et al., 2011](#)), comprovando a presença de componentes de um sistema em processo de evolução pelo acréscimo de matéria ao seu entorno na forma de galáxias ou grupos de galáxias. Isto sugere que a formação de aglomerados de galáxias é um processo contínuo que decorre de fusões sucessivas e

encontros gravitacionais de maiores e menores proporções ([NASCIMENTO et al., 2016](#)).

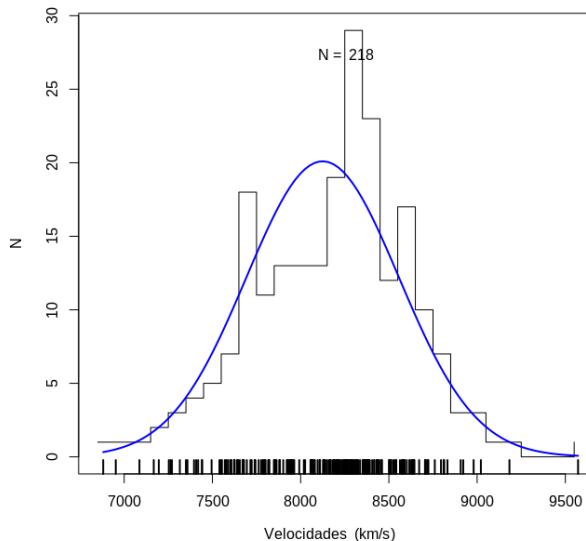


Figura 1 – Histograma de velocidades de um dos aglomerados de nossa amostra.

## 2.2 Distribuição de Velocidades ao longo do Aglomerado

A velocidade de uma galáxia contida em um aglomerado, em uma dada posição, não pode ser maior que a velocidade de escape do sistema, caso isto aconteça a galáxia não pertenceria mais ao aglomerado. A velocidade de escape e a distância ao centro do aglomerado são grandezas inversamente proporcionais, ou seja, a velocidade de escape decresce com o aumento da distância ao centro do aglomerado, portanto é mais fácil o escape de uma galáxia que está na região periférica do sistema ([OLIVEIRA F; VIEGAS, 2004](#)).

Para que o aglomerado exista como unidade dinâmica é preciso uma redução na amplitude da distribuição de velocidades das galáxias à medida que haja um afastamento da região central. O grande problema dessa propriedade é o efeito de projeção. Galáxias que estão com distâncias distintas do centro do aglomerado podem parecer ao observador com mesma distância em consequência de a observação referir-se apenas às posições projetadas no plano do céu ([OLIVEIRA F; VIEGAS, 2004](#)). Ainda assim é possível estimar com qualidade suficiente os membros dos aglomerados usando-se o perfil da velocidade em função do raio do aglomerado.

Na Figura 2 vemos a distribuição de velocidades do aglomerado em função da distância da galáxia ao centro do aglomerado, onde o estreitamento da distribuição de velocidades define uma espécie de "corneta" que pode ser utilizada para definir os membros de um aglomerado, sendo removidas as galáxias que estejam significativamente acima ou abaixo da "corneta". O contorno da corneta pode ser definido de várias

formas, mas basicamente representa a velocidade limite em cada raio para que uma galáxia esteja ligada gravitacionalmente ao sistema.

São os membros dos aglomerados que definem a sua dinâmica, ou seja, a estes objetos é que aplicamos o Teorema do Virial<sup>1</sup> para obter propriedades importantes como a massa e raio desses sistemas a partir da distribuição espacial das galáxias e de sua dispersão de velocidades.

A dispersão de velocidades está diretamente ligada à massa do aglomerado, através da expressão

$$M_{vir} = \alpha \frac{R_{vir}\sigma^2}{G}, \quad (1)$$

onde  $M_{vir}$  e  $R_{vir}$  são a massa e o raio virial,  $G$  é a constante gravitacional,  $\sigma$  é a dispersão de velocidades, e  $\alpha$  é um fator geométrico (para um sistema esférico,  $\alpha = 3/5$ ). Este valor estimado da massa virial não leva em conta uma possível componente de velocidade referente à rotação global do aglomerado, o que pode introduzir um viés no cálculo da massa, e revela a necessidade de desenvolvermos métodos para acessar este possível movimento do aglomerado.

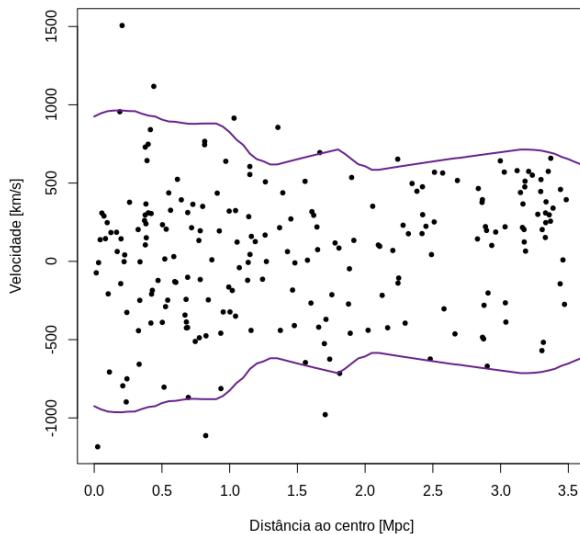


Figura 2 – Distribuição de velocidades em função da distância ao centro de um dos aglomerados de nossa amostra.

---

<sup>1</sup> $2T + V = 0$ , onde  $T$  é a energia cinética das galáxias no aglomerado, e  $V$  é a energia potencial gravitacional do sistema.

## 2.3 Rotação de Aglomerados

O conhecimento do estado dinâmico de aglomerados de galáxias pode propiciar restrições importantes em cenários cosmológicos, como a determinação da massa total do aglomerado e uma estimativa da quantidade de matéria escura no Universo. A possibilidade da existência de aglomerados em rotação tem sido discutida por muitos autores (por exemplo, veja os estudos de [\(HWANG; LEE, 2007; MANOLOPOULOU; PLIONIS, 2016\)](#)).

Para detecção de indícios de rotação, [Hwang e Lee \(2007\)](#) utilizaram dados espectroscópicos do *Sloan Digital Sky Survey*<sup>2</sup> (SDSS) e *Two-Degree-Field Galaxy Redshift Survey* (2dF-GRS). A rotação de aglomerados foi modelada globalmente, envolvendo tanto as galáxias membro como o gás intra-aglomerado. Eles levantaram inicialmente a hipótese de que a rotação se origina através de fusões de aglomerados. Um aspecto importante do método empregado por [Hwang e Lee \(2007\)](#) é que os aglomerados com rotação devem exibir divisão espacial entre galáxias com velocidades maiores e menores que a velocidade média do aglomerado, além de apresentar um pico no mapa de densidade. Nesta pesquisa de [Hwang e Lee \(2007\)](#) foram detectados seis sistemas com rotação, em um total de doze aglomerados (Abell 0954, Abell 1139, Abell 1399, Abell 2162, Abell 2169, and Abell 2366). Constatou-se ainda que estes aglomerados estão em equilíbrio dinâmico e não sofreram fusão recente, não dando suporte, portanto, à hipótese de interações como causadoras da rotação.

[Kalinkov et al. \(2005\)](#) tentaram obter o gradiente máximo no campo de velocidades de Abell 2107 e determinaram que a direção do coeficiente de correlação linear máximo definiria o eixo maior do aglomerado e o eixo menor seria o de rotação. Foram utilizadas subamostras de galáxias membro, ordenadas de acordo a distância ao centro do aglomerado para definir o grau de rotação do sistema. Esse mesmo aglomerado foi estudado por [Oegerle e Hill \(1992\)](#) e foram encontrados indícios de rotação. [Materne e Hopp \(1983\)](#) apontaram a dificuldade em diferenciar um aglomerado rotativo de dois que se sobrepõem, pelo motivo de estar se fundindo ou se afastando. Porém, o aglomerado Abell 2107 não consiste de dois aglomerados sobrepostos, em consequência do pico estreito representado em seu histograma de velocidades. O indicador mais forte que definiu sua rotação foi o ângulo de posição do eixo com o gradiente máximo no campo de velocidades quase coincidindo com o ângulo de posição do eixo com o maior alongamento. Nesse estudo o período de rotação foi calculado em uma volta a cada  $2.4 \times 10^9$  anos e houve uma correção no valor da massa para  $2.8 \times 10^{14} M_{\odot}$  (a massa inicial era de  $3.2 \times 10^{14} M_{\odot}$ , sem levar em conta a rotação). Mais recentemente, [Song et al.](#)

---

<sup>2</sup>Considerado o mais ambicioso mapeamento astronômico que já foi feito. Com este mapeamento, os astrônomos podem observar os padrões de grande escala das galáxias: filamentos e vazios em grandes regiões angulares do Universo.

(2018) estudaram 285 galáxias membro em A2107, a partir de levantamento espectroscópico próprio, e encontraram forte sinal de rotação do aglomerado, pelo menos dentro 20 minutos de arco do seu centro, embora o sinal torne-se mais fraco para regiões mais externas do sistema. Estes autores também encontram conexões deste aglomerado com estruturas filamentares em sua vizinhança que poderiam estar induzindo a rotação do sistema. Por outro lado, Liu and Tozzi (2019) estudaram a distribuição de gás emissor de raios-X em A2107 usando dados do telescópio Chandra, mas não encontraram resultado conclusivo a respeito da rotação do sistema.<sup>3</sup> (LIU; TOZZI, 2019; SONG et al., 2018)

Baseado no estudo da distribuição de velocidades das galáxias membro, Tovmasian (2015) detectou sinais de rotação em 17 sistemas de uma amostra de 65 aglomerados (26%). O método analisa o número de galáxias com velocidades mais baixas e mais altas que a velocidade média do aglomerado em diferentes partes do aglomerado. O método teve mais êxito em aglomerados planos, com  $f = a/b > 1.8$  ( $a$  e  $b$  semieixos - maior e menor – da distribuição de galáxias do aglomerado). Para estes, a taxa de detecção de rotação foi mais alta (7 dos 18 aglomerados planos, 39%). Esse resultado suporta a opinião de que os aglomerados foram originalmente formados a partir das enormes nuvens de gás primordiais e preservaram a rotação das nuvens primordiais, a menos que sofram fusões com outros aglomerados e grupos de galáxias.

Já na tese de Manolopoulou e Plionis (2016) é realizado um estudo de um novo algoritmo para dedução de rotação usando a velocidade radial projetada<sup>4</sup>. Inicialmente os testes foram realizados em aglomerados gerados em simulações de Monte Carlo para confirmar se o método fornecia indicações robustas de rotação. Em seguida, aplicado em amostras de aglomerados de Abell. Através do teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov, decidiu-se quanto a sua rotação significativa ou não, seu centro rotacional, orientação do eixo de rotação, amplitude de velocidade rotacional e, finalmente, o sentido de rotação no sentido horário ou anti-horário no plano do céu. Foram encontrados 23 aglomerados possivelmente rotativos dentro de 1.5 Mpc ou a uma distância de 2.5 Mpc do centro do aglomerado, do total de 45 da amostra.

Nascimento et al. (2016), a partir de uma amostra de galáxias observadas no Cerro Tololo Interamerican Observatory (CTIO), realizaram um estudo dinâmico em torno do par de aglomerados de Abell (A3407 e A3408). O objetivo era verificar se a amostra correspondia a um simples sistema de galáxias ou a um processo de fusão, melhorando o entendimento desse sistema. Testes estatísticos foram aplicados aos membros mostrando que ambos os sistemas bem como cada aglomerado individual

<sup>3</sup>O aglomerado A2107 é um dos mais intrigantes sistemas no universo próximo, contudo seu mapeamento feito pelo SDSS é bastante incompleto em espectroscopia (em dois graus quadrados em torno de seu centro, encontramos apenas 78 galáxias membro) o que impede que o mesmo seja estudado neste trabalho.

<sup>4</sup>É a componente da velocidade de um objeto na direção da linha de visada, isto é, a velocidade com que o objeto se aproxima ou se afasta do observador.

tem uma distribuição de velocidade Gaussiana. Um gradiente de velocidades de  $\approx 847 \pm 114 \text{ km s}^{-1}$  foi identificado ao redor do eixo principal da distribuição de galáxias projetada indicando uma possível rotação. O estudo definiu uma lacuna (ou "gap") na distribuição de velocidades e realizou testes sobre a distribuição espacial de galáxias (em torno do eixo principal do aglomerado) visando identificar diferenças entre objetos com velocidades maiores e menores que a posição do "gap". Esta comparação indicou que havia diferença significativa entre estas subamostras, sugerindo um grau de rotação no sistema A3407+A3408.

### 3 Ferramentas Estatísticas e Computacionais

Durante a investigação que realizamos sobre o movimento de rotação de aglomerados, diversas ferramentas estatísticas e computacionais foram utilizadas. Neste capítulo, apresentamos uma breve descrição deste aparato estatístico-computacional.

#### 3.1 Testes de Hipótese

Uma vez que nosso estudo faz uso de alguns testes estatísticos, fazemos aqui uma breve revisão destas importantes ferramentas da estatística inferencial. De modo geral, a análise estatística objetiva fazer inferências sobre uma população a partir da observação de uma amostra, e os testes de hipótese representam uma forma de inferência estatística. A hipótese é uma afirmação sobre parâmetros populacionais que devem ser analisadas para verificar sua veracidade. É importante ressaltar que a "verdade" não pode ser determinada, a menos que toda a população seja observada, situação impraticável na maioria das vezes, justificado pelo uso do teste estatístico sobre amostras.

A princípio é necessário estabelecer a **hipótese nula**, denotada por  $H_0$ . Já a **hipótese alternativa** ( $H_1$ ), contrapõe a hipótese nula, ou seja,  $H_0$  deverá ser rejeitada ou não em relação a  $H_1$ . É necessário estabelecer um critério auxiliar para decidir a rejeição ou não de  $H_0$  para um teste estatístico. Esse valor, determinado pelo pesquisador antes da análise de dados ou até mesmo na coleta de dados, cenário ideal, é denominado **nível alfa ( $\alpha$ ) ou nível de significância**. Comumente é utilizado como critério de rejeição uma significância de 5%. De acordo com [Cramer e Howitt \(2004\)](#),

O nível em que a hipótese nula é rejeitada é geralmente definido como 5 ou menos vezes em 100. Isso significa admitir que um dado resultado ocorra por acaso 5 ou menos vezes de 100. O nível de significância de 5% foi historicamente uma escolha arbitrária, mas tem sido considerado uma escolha razoável na maioria das circunstâncias. Se houver um motivo para variar este nível, o pesquisador pode fazê-lo. Então, em circunstâncias em que pode haver consequências adversas muito graves se a decisão errada foi feita sobre a hipótese, então o nível de significância poderia ser mais rigoroso em, digamos, 1% ([CRAMER; HOWITT, 2004](#), p. 151).

Na realização de testes de hipóteses é possível que erros sejam cometidos, como mostrado no quadro 1. **Erro do tipo I**, denotado por **erro  $\alpha$** , a rejeição de  $H_0$  quando ela é verdadeira. Contrapondo, a não-rejeição de  $H_0$  quando esta é falsa é denominada **erro do tipo II** e representado por  $\beta$ . Esse tipo de teste permite concluir se deve aceitar ou rejeitar a hipótese nula, porém não é possível quantificar o quanto provável é o resultado de ocorrer ao acaso. Por esta razão é definida a potência de um teste estatístico  $1 - \beta$  como

a probabilidade de rejeitar  $H_0$  quando de fato é falsa. Claramente, o teste ideal é aquele em que os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  são mínimos. Porém, o valor de  $\alpha$  é inversamente relacionado com o valor de  $\beta$ , sendo impossível minimizá-los simultaneamente. Geralmente, é fixado o nível de significância  $\alpha$  e escolhida a região de rejeição que minimiza  $\beta$ , ou seja, que maximize a potência do teste.

Quadro 1 – Tipos de erros em testes de hipótese.

Decisão Estatística	Natureza (estado verdadeiro ou desconhecido)	
	$H_0$ verdadeira	$H_1$ falsa
Aceitar $H_0$	acerto	Erro tipo II ( $\beta$ )
Rejeitar $H_0$	Erro tipo I ( $\alpha$ )	acerto

Fonte: ([LIEBER, 1990](#)) adaptada

O menor nível de significância pode ser definido utilizando o **valor-p** ou “*p-value*”. No teste de hipótese esse valor é comparado ao nível de significância  $\alpha$ , fixado no início, com o objetivo de decidir aceitar ou rejeitar  $H_0$ . Se o valor-p calculado do teste for igual ou maior que  $\alpha$ , a  $H_0$  é aceita. Ou seja, a hipótese nula é consistente com os resultados da amostra. Porém, se o valor-p for menor que *alpha*, a hipótese nula é rejeitada, e a hipótese alternativa, nesse caso, é então aceita como verdadeira.

### 3.1.1 Teste de Normalidade

Uma variável aleatória, por exemplo a idade de um grupo de pessoas ou as velocidades de galáxias em aglomerados, pode admitir uma distribuição de frequências da população, contendo diversas formas encontradas na literatura estatística. O intuito desses modelos é caracterizar o comportamento de um determinado evento em função da frequência de sua ocorrência. Se as variáveis forem contínuas, o evento será um intervalo de valores. Portanto, as distribuições de frequências são efetivamente distribuições de probabilidade, em que para um evento teremos associado uma probabilidade de ocorrência ([LEOTTI et al., 2012](#)).

A inspeção visual pode ser utilizada para avaliação de uma distribuição. A distribuição de frequência, usualmente apresentada em forma de histograma, relaciona valores observados à sua frequência. Pode-se, além disso, pressupor uma forma para a distribuição, identificar a ocorrência de lacunas nos dados, assim como a presença ou não de *outliers* (valores atípicos em relação à distribuição). O histograma é composto por barras justapostas que no eixo horizontal contêm a variável de interesse e no eixo vertical a sua correspondente frequência ([LEOTTI et al., 2012](#)). Para distribuições do tipo normal ou Gaussiana, o histograma constitui um formato de sino.

Entretanto, a simples constatação por meio de gráficos é subjetiva e não satisfatória, pois depende de uma interpretação visual que introduz subjetividade na pesquisa.

Desta forma, para inferir sobre a normalidade de uma distribuição uma abordagem possível é utilizar testes estatísticos ([CIRILLO; FERREIRA, 2003](#)). Como exemplo, podemos citar: os testes de aderência qui-quadrado; Kolmogorov-Smirnov; Anderson-Darling; Lilliefors e Shapiro-Wilk.

Estes testes possuem estatísticas de teste e critérios de decisão diferentes, porém compartilham da hipótese avaliada: a hipótese nula ( $H_0$ ) especifica que a variável aleatória adere à distribuição normal, sem a necessidade de definir a média ou variância da distribuição. Já a hipótese alternativa ( $H_1$ ), opõe a hipótese nula, representando qualquer outra distribuição para os dados ([LEOTTI et al., 2012](#)).

O resultado que interessa após executar um determinado teste é o seu valor-p ou nível descriptivo do teste, referente à probabilidade de que a estatística do teste (como variável aleatória) tenha valor extremo, em comparação ao valor observado da estatística do teste, quando a hipótese nula é verdadeira. Sendo o valor-p menor que o nível de significância, a hipótese nula é rejeitada. Ou seja, o valor-p representa o menor nível de significância que se pode assumir para rejeitar a hipótese nula. Logo, há significância estatística quando o valor-p é menor que o nível de significância estabelecido ([SAMPAIO, 2013](#)).

Neste trabalho, utilizaremos o teste de normalidade de Anderson-Darling para relacionar a possível rotação de aglomerados com o seu estado dinâmico global, usualmente indicado pela distribuição normal das velocidades de galáxias membro dentro da região virial dos aglomerados.

### 3.1.2 Testes de duas amostras

Um outro recurso estatístico importante a ser utilizado neste trabalho é o teste de duas amostras, que visa comparar dois subconjuntos de uma dada população. O teste de duas amostras é uma análise estatística projetada para utilizar dados de duas amostras aleatórias. O intuito do teste é determinar se a diferença entre estatísticas de duas amostras (por exemplo, suas médias) seja compatível com que elas tenham sido extraídas de uma mesma população.

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_m$  e  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$  duas amostras aleatórias independentes com funções de distribuição contínua  $F$  e  $G$ , respectivamente, o teste de duas amostras verifica se

$$H_0 : F = G \quad H_1 : F \neq G \quad (2)$$

Isto é, assume-se como hipótese nula que as médias populacionais das amostras não são significativamente diferentes. Os testes de duas amostras podem ser univariados

ou multivariados. Neste trabalho, nosso interesse está em testes 2D (bivariados) sobre a distribuição espacial de galáxias com determinadas características cinemáticas.

### 3.1.3 Testes utilizados

#### 3.1.3.1 Teste de Cramer-von Mises

O teste de Cramer (conhecido também como V de Cramer -  $\varphi_c$ ) é uma medida de associação entre duas variáveis nominais dado o intervalo de 0 a 1, indicando que um valor mais alto possui forte associação. Fundamentado no teste estatístico do qui-quadrado de Pearson, foi publicado em 1946 por Harald Cramer. A medida é definida como

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{N \cdot m}} \quad (3)$$

onde  $\chi^2$  é o valor obtido do teste estatístico

$N$  é o tamanho da amostra e

$m$  = o menor de  $(r - 1)$  ou  $(c - 1)$ , sendo  $r$  o número de linhas e  $c$  o número de colunas.

Para entender melhor a utilidade do teste de Cramer é fundamental compreender as formas como os testes estatísticos divergem das medidas de associação para variáveis categóricas. O teste qui-quadrado ( $\chi^2$ ) fornece um teste estatístico de associação entre duas variáveis categóricas (nominais) de uma população única. Ele determina se a associação entre as variáveis é significativa, utilizando como hipótese nula ( $H_0$ ) que as duas variáveis não são dependentes uma da outra e como hipótese alternativa ( $H_1$ ) que existe alguma associação entre duas variáveis (BACHMAN; PATERNOSTER, 2017).

O teste de Cramer é considerado um dos mais utilizados entre as medidas baseadas no qui-quadrado. Geralmente, quando o seu cálculo resulta no valor máximo 1 é porque existe um forte relacionamento entre duas variáveis. No cálculo de Cramer é levado em consideração as dimensões da tabela, ou seja, diferentes dimensões podem ser comparadas significativamente (BACHMAN; PATERNOSTER, 2017).

#### 3.1.3.2 Teste de Hotelling

Um dos mais conhecidos testes de hipóteses multivariados foi proposto por Harold Hotelling em 1947, o teste de  $T^2$ , compara vetores de médias populacionais. Baseado na generalização da estatística *t de Student*, foi o primeiro a levar em consideração a correlação das variáveis na formulação da estatística do teste.

O teste  $T^2$  de uma amostra pode ser usado para avaliar se um conjunto de objetos possui uma média igual a uma média hipotética Figura 3 a. Já o de duas amostras pode ser usado para testar diferenças significativas entre os vetores médios (médias multivariadas) de dois conjuntos de dados multivariados, Figura 3 b.

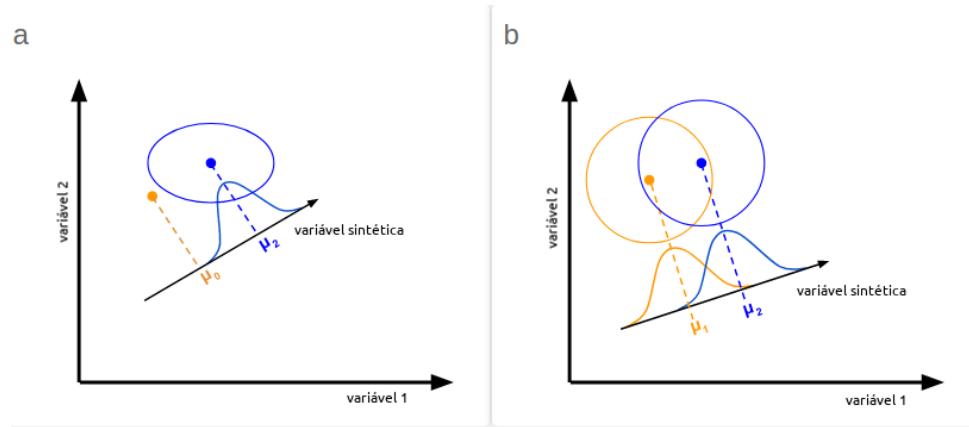


Figura 3 – Diagrama esquemático que ilustra a lógica do teste de Hotelling unidirecional e bidirecional em um espaço simples e bidimensional.

As combinações lineares das variáveis originais são utilizadas para criar uma variável sintética que melhor separe um grupo de uma média hipotética ( $\mu_0$ ; a) ou dois grupos de dados normais multivariados (b). Ou seja, o valor máximo do teste é encontrado. Os pontos indicam médias multivariadas de cada população e os círculos indicam dispersão multivariada. Essa separação pode ser explicada através do teste de comparação dos valores de  $T^2$  transformados com uma distribuição F.

Sejam  $X$  um vetor aleatório com uma dada dimensão,  $\mu$  o vetor de médias e  $\sigma$  a matriz de covariância. Para  $X$ , sendo uma distribuição multivariada e com tamanho de amostra aleatória  $n$ , a estatística de  $T^2$  é dada por

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)^T \sum_{pxp}^{-1} (\bar{X} - \mu_0) \quad (4)$$

com

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (5)$$

A equação 4 tem distribuição qui-quadrado com  $p$  graus de liberdade. Definindo um nível de significância  $\alpha$ , com  $0 < \alpha < 1$ , para valores de  $T^2$  maiores ou iguais ao valor crítico  $\chi_{a,p,c}^2$  dado por  $P[\chi_p^2 \geq \chi_{a,p,c}^2]$ , a hipótese nula será rejeitada ([HOTELLING, 1992](#)).

Sendo a matriz desconhecida, a estatística de  $T^2$  é dada por

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)S^{-1}(\bar{X} - \mu_0) \quad (6)$$

que sob a hipótese nula, tem uma distribuição proporcional a uma distribuição F (a distribuição F de Fisher-Snedecor), ou seja, o valor crítico do teste a um nível de significância  $\alpha$ , com  $0 < \alpha < 1$ , é

$$F_c = \frac{p(n-1)}{n-p} F_{1-\alpha,p,n-p} \quad (7)$$

onde  $F_{1-\alpha,p,n-p}$  é a probabilidade acumulada igual a  $(1 - \alpha)$  da distribuição de F com  $p$  n-p é igual a graus de liberdade.

Sendo S a matriz de covariâncias amostrais ( $pxp$ ), um estimado não viciado de  $\sum_{pxp}$ , dado por

$$\begin{bmatrix} S_1^2 & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_2^2 & \dots & S_{2p} \\ \ddots & & \vdots \\ & & S_p^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

em que os elementos da diagonal principal de S são as variâncias definidos por

$$S_j^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (x_{jk} - \bar{X}_j)^2, j = 1, 2, \dots, 3 \quad (9)$$

e os elementos fora da diagonal principal são as covariâncias conforme

$$S_{jh} = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (x_{jk} - \bar{X}_j)(x_{hk} - \bar{X}_h) \quad (10)$$

onde  $x_{jk}$  e  $x_{hk}$  representam os valores amostrais das variáveis  $X_j$  e  $X_h$ .

## 3.2 Linguagem R

Neste trabalho, tanto os testes estatísticos descritos acima, assim como várias outras funções de variada utilidade, foram aplicados aos dados dentro do ambiente R.

R é uma linguagem e ambiente para análise estatística e produção de gráficos, desenvolvida na década de 90 pelos estatísticos Ross Ihaka e Robert Gentleman que utilizavam sistemas pagos em seus projetos. Contém diversos pacotes integrados, permitindo que sejam realizadas uma grande variedade de estatísticas (regressão linear,

não-linear, séries temporais) e o uso de recursos gráficos avançados, o que a distingue das demais linguagens ([COMPUTING, 2012](#)).

O R é um conjunto integrado de instalações de software para manipulação de dados, cálculos e exibição gráfica. Isto abrange uma instalação eficaz de manipulação e armazenamento de dados, um conjunto de operadores para cálculos em matrizes, uma grande coleção coerente de ferramentas intermediárias para análise de dados e representações gráficas, a inclusão de condicionais (*loops* e funções recursivas) definidas pelo usuário e recursos de entrada e saída ([COMPUTING, 2012](#)).

### 3.2.1 Pacotes utilizados neste trabalho

#### 3.2.1.1 Pacote Cramer

Uma rotina em R aplicada para o teste de Cramer de duas amostras. O valor de retorno é um objeto da classe "*cramertest*", contendo, dentre outros, os seguintes componentes:

- *statistic*: valor estatístico do teste de Cramer para observações.
- *conf.level*: nível de significância do teste.
- *p.value*: estimativa do valor-p.

#### 3.2.1.2 Pacote Hotelling

Uma rotina em R aplicada para o teste de Hotelling de duas amostras. O valor de retorno é uma lista da classe "*hotelling.test*", contendo, dentre outros, o seguinte componente:

- *pval*: estimativa do valor-p.

#### 3.2.1.3 Pacote nortest

Conjunto de rotinas para testes de normalidade. Em particular, utilizamos o teste de Anderson-Darling do qual extraímos:

- *pval*: estimativa do valor-p.

#### 3.2.1.4 Pacote Ellipse

Este pacote contém diversas rotinas para ajustar e desenhar elipses e regiões de confiança do tipo elipse, implementando os gráficos descritos por Murdoch e Chow (1996) e Bates e Watts (1988).

### 3.2.1.5 Pacote Astro

O pacote **astro** fornece uma série de funções, ferramentas e rotinas no uso diário da astronomia. Pode-se agrupar essas funções em áreas como a cosmologia<sup>1</sup>, manipulação de arquivos FITS<sup>2</sup>, funções de tempo e posição. Entre outros.

### 3.2.1.6 Pacote cosmoFns

O pacote contém expressões de distância, tempo, luminosidade e outras úteis na cosmologia observacional, compreendendo observações em linhas moleculares. Atualmente codificado apenas para o universo plano.

---

<sup>1</sup>Funções que calculam distâncias, movimentação de volumes, *lookback time* e luminosidade em uma cosmologia plana

<sup>2</sup>Sistema flexível de transporte de imagens (*Flexible Image Transport System*), um formato de arquivo comum em astronomia

## 4 Dados e Metodologia

O método proposto por [Nascimento et al. \(2016\)](#) para estudar um par de aglomerados, cujos membros podem estar em rotação em torno do centro de massa do sistema, pode ser adaptado para o estudo da rotação de aglomerados individuais, onde deve-se estudar possíveis correlações entre a coordenadas de posição com a de velocidade das galáxias de um dado sistema. Neste trabalho fazemos esta adaptação e a implementamos em linguagem R. O código resultante é aplicado a um conjunto de três catálogos:

- **Catálogo I:** A amostra selec20, composta por 20 aglomerados ricos do SDSS, localizados em baixos *redshifts* ( $z \leq 0.13$ ), com espectroscopia disponível para objetos com  $m_r \leq 17.77$ .
- **Catálogo II:** NoSOCS (*Northern Sky Optical Cluster Survey*) também em baixos *redshifts* ( $z \leq 0.10$ ), mas compreendendo um número maior de aglomerados (183 objetos).
- **Catálogo III:** Esferas de NFW ([NAVARRO et al., 1997](#)), ou seja, modelos simulados de sistemas esféricos com ou sem rotação. Foram gerados 200 aglomerados com rotação e 200 sem rotação. O código que gera as esferas de NFW foi desenvolvido em linguagem fortran pelo Dr. Claudio Soriano Brandão, cedido para uso neste trabalho.

### 4.1 Catálogo I: selec20

A amostra selec20 corresponde a um conjunto de aglomerados ricos (sistemas com mais de 50 galáxias na região virializada) a baixos *redshifts* ( $z < 0.13$ ), cuja determinação de membros foi feita pelo Dr Paulo Lopes (UFRJ) fazendo uso do programa *shifting gapper* ([LOPES et al., 2009](#)). O programa *shifting gapper* remove galáxias intrusas (*outliers*) e realiza a análise virial dos aglomerados, obtendo os valores de M200 e R200. A amostra selec20, por suas características, e por conter aglomerados bastante conhecidos do Universo Local, é extremamente útil para testes e análises exploratórias.

### 4.2 Catálogo II: NoSOCS

O NoSOCS ([Gal et al. \(2000\)](#), [Gal et al. \(2003\)](#), [Gal et al. \(2009\)](#)) é um catálogo de aglomerados de galáxias elaborado a partir da versão digitalizada do Segundo

Levantamento do Observatório de Palomar (POSS-II; DPOSS, [Gal et al. \(2004\)](#), é a sua versão digital). Este catálogo é derivado de campos de alta latitude  $|b| > 30^\circ$ , cobrindo  $\sim 11,000$  graus<sup>2</sup> e contendo  $\sim 15,500$  aglomerados candidatos. Sua construção é limitada para  $r = 19.5$ , onde a separação estrela/galáxia é confiável e erros fotométricos são precisos para usar a cor g-r como indicador do *redshift*. A classificação de objetos e a calibração fotométrica são descritas em [Odewahn et al. \(2004\)](#) e [Lopes et al. \(2004\)](#), respectivamente.

Os dados foram extraídos do SDSS para cada aglomerado do NoSOCS [Lopes et al. \(2004\)](#) amostrados no DR5 (*DataRelease5*). Com o uso de dados fotométricos de alta qualidade, foi possível estimar os novos *redshifts* fotométricos, seguindo [Lopes et al. \(2009\)](#), riqueza e luminosidade óptica ([LOPES et al., 2006](#)). Para esses objetos foi aplicado uma técnica de eliminação de interferentes de galáxias (ou seja, objetos em projeção sobre os aglomerados mas que não fazem parte dele dinamicamente) nas distribuições do espaço de fase (*shifting gapper*) e estimado os raios, dispersões de velocidades e massas ( $R_{200}$ ,  $\sigma$  e  $M_{200}$ , respectivamente, através do Teorema do Virial). Após a remoção de objetos duplos e dados espúrios, o catálogo final totaliza 7414 objetos.

A amostra final com essas propriedades e em baixo  $z$  apresenta 127 agrupamentos. Posteriormente, a análise foi estendida para sistemas mais ricos, incluindo os aglomerados CIRS (*Cluster Infall Regions in the SDSS*) [Rines e Diaferio \(2006\)](#), com 56 objetos. Portanto, a lista final compreende 183 aglomerados (127 do NoSOCS e 56 do CIRS).

### 4.3 Catálogo III: Simulação de Monte Carlo

O modelo adotado segue o perfil de densidades  $\rho(r)$  de um esferóide de Navarro-Frenk-White, conforme estudos por simulações numéricas cosmológicas realizadas por Navarro, Frenk e White ([NAVARRO et al., 1997](#)). A partir dos resultados de simulações cosmológicas de N-corpos autogravitantes, sugere-se que o melhor ajuste universal do perfil radial de densidades que representam a distribuição de matéria de um aglomerado é dado por

$$\rho(r) = \rho_{crit} \frac{\delta_c}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}, \quad (11)$$

onde  $\rho(r)$  é a densidade de matéria escura a uma distância  $r$  do centro do esferóide,  $\rho_{crit}$  é a densidade crítica de fundo do Universo no momento da formação do halo,  $r_s$  é um raio característico da esfera,  $\delta_c$  é uma sobredensidade característica do halo. Nas simulações descritas por [Navarro et al. \(1997\)](#), após a formação e maturação dos halos, verifica-se que estes estão em estado de equilíbrio dinâmico seguindo o modelo da

dinâmica de N-Corpos autogravitantes em acordo com o teorema do Virial. Por outro lado, devido ao fato de que no modelo de [Navarro et al. \(1997\)](#)  $M(r) \rightarrow \infty$  para  $r \rightarrow \infty$ , os modelos de esferóide adotados neste trabalho são truncado em  $R_{200}$ , onde  $R_{200}$  é a distância da região limítrofe da esfera na qual a densidade  $\rho(r)$  é 200 vezes maior do que a densidade crítica do Universo  $\rho_{crit}$ . Também são geradas galáxias adicionais além de  $R_{200}$  até  $2.5R_{200}$ , para simular objetos circunvizinhos a cada aglomerado de modo que ou estejam em processo de captura ou em estruturas filamentares observadas entre aglomerados.

Cada amostra é gerada através de um algoritmo composto por três laços : (I) O mais externo, (II) o primeiro interno, (III) o segundo interno. As unidades de medida usadas no código estão em  $km\ s^{-1}$  para a velocidade,  $kpc$  para distância, para a constante gravitacional,  $G = 43007.1\ (kpc^3\ 10^{10}\ M_\odot^{-1}\ Gano^{-2})^1$  anos, para constante de Hubble em  $z = 0$  é  $H_0 = 0.069\ km\ s^{-1}\ kpc^{-1}$ .

Antes do primeiro laço, o código precisa como um dado de entrada um número inteiro como semente aleatória para iniciar o gerador de pseudo-números aleatórios usado ao longo de sua plena execução durante todo o código.

O primeiro laço inicia-se com um dado solicitado como entrada outro número inteiro, agora correspondente ao número de sistemas da amostra simulada. Cada membro é um aglomerado pertencente à amostra. Em seguida, atribui-se um *redshift*  $z$  pseudo-aleatório no intervalo  $0.03 \leq z \leq 0.13$  ao primeiro membro da amostra do aglomerado. Calcula-se depois o valor de  $H(z)$ , a constante de Hubble na época da virialização do aglomerado, com os parâmetros cosmológicos  $\Omega_M = 0.3$  e  $\Omega_\Lambda = 0.7$ , e a equação  $H(z) = H_0 * \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}$ .

A massa de cada aglomerado  $M_{200}$  é atribuída no valor a partir de  $10^{14} M_\odot$  até  $10^{15.5} M_\odot$ . O valor do número de membros (galáxias) do modelo  $N_{200}$  dentro do raio virial  $R_{200}$  é calculado conforme a seguinte equação obtida usando ajustes realizados em amostra de aglomerados ([ANDREON; BERGÉ, 2012](#))

$$\log(N_{200}) = 0.47(\log(M_{200}) - 14.5) + 1.58, \quad (12)$$

A partir do qual se calcula  $N_{200} = e^{\log(N_{200})}$ . Em seguida, calcula-se o valor da velocidade virial  $v_{200}$  ([SPRINGEL; WHITE, 1999](#))

$$v_{200} = \sqrt[3]{10GH(z)M_{200}}. \quad (13)$$

O valor de  $R_{200}$  é dado por

$$R_{200} = \frac{v_{200}}{10H(z)}. \quad (14)$$

Estima-se o valor do parâmetro de concentração  $c$  do esferóide, conforme uma prescrição obtida a partir de dados de aglomerados com massas  $10^{11} \leq M_{200} \leq 10^{14} M_\odot$  ([BULLOCK](#)

---

<sup>1</sup>1 Gano =  $1.0 \times 10^9$

et al., 2001). Bullock et al. (2001) analisam dados de aglomerados simulados no modelo  $\Lambda$ CDM (BULLOCK et al., 2001) a partir de simulações numéricas, enquanto Comerford e Natarajan analisam dados de aglomerados obtidos por observações (COMERFORD; NATARAJAN, 2007). Os dados são compatíveis com o seguinte ajuste:

$$c = \frac{9.00}{(1+z)} \left( \frac{M_{200}}{1300} \right)^{(-0.13)}. \quad (15)$$

Um dos dados usados para a construção dos aglomerados simulados é a escala característica,  $r_c$ . Ele é calculado pela equação que o define

$$r_c \equiv \frac{R_{200}}{c}. \quad (16)$$

A dispersão de velocidades é dada por:

$$v_{disp} = \frac{GM_{200}}{R_{200}}. \quad (17)$$

Em seguida, atribuem-se aleatoriamente os valores das coordenadas da ascenção reta e declinação do centróide do modelo, em condições de observação, como dados simulados.

Após estes procedimentos, inicia-se o segundo laço (II) para atribuir pela técnica de Monte Carlo as posições e velocidades das galáxias de um aglomerado da amostra.

As posições são determinadas resolvendo numericamente, pelo método da biseção, a equação  $q_{al} = \frac{M(r)}{M_{200}}$ , onde  $q_{al}$  é um número aleatório gerado pelo gerador de pseudo-números aleatórios.  $M(r)$  é dado por

$$M(r) = 4\pi\rho_{crit}\delta_c r_c^3 \left[ \frac{r_c + r}{r_c} - \frac{r}{r_c + r} \right]. \quad (18)$$

Deste modo,  $r$  é calculado numericamente e, a partir dos ângulos gerados aleatoriamente em coordenadas esféricas  $\theta$  e  $\phi$ , calculam-se as posições  $x, y, z$  para a galáxia.

Para atribuir os dados da velocidade de modelos sem rotação, são geradas aleatoriamente em coordenadas esféricas  $\theta$  e  $\phi$ . Em seguida, gerando uma distribuição gaussiana de velocidades para os componentes do vetor velocidade, para cada direção dos eixos coordenados- $xyz$  e, usando o valor da dispersão de velocidades  $v_{disp}$ , calculam-se  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$ .

Para modelos com rotação, calcula-se a velocidade de rotação a partir da velocidade circular de cada galáxia a partir da equação

$$v_c = \frac{GM(r)}{r}, \quad (19)$$

e o modelo é posto para rotacionar em torno do eixo- $z$ .

Em cada modelo de aglomerado gerado, calcula-se a distância do centróide do objeto a um observador hipotético posicionado em  $D(z)$  ao longo do eixo- $x$ , dada pelo *redshift*  $z$  pela equação:

$$D(z) = \frac{cz}{H_0} \left( 1 - z \frac{(1 + q_0)}{2} \right), \quad (20)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $q_0 = \Omega_M/2 - \Omega_\Lambda$  é o parâmetro de desaceleração usado no modelo cosmológico  $\Lambda CDM$ .

Cada modelo de aglomerado simulado possui  $N_{200}$  galáxias. As posições cartesianas de cada galáxia são adicionadas ao centróide localizado na origem do sistema cartesiano. Em seguida, são projetadas as suas posições no plano- $yz$ , interpretado como o planisfério celeste. As coordenadas cartesianas são convertidas em ascenção reta e declinação. Adicionalmente, para cada galáxia do aglomerado, calculam-se a projeção do vetor velocidade na linha de visada do observador e é convertido em *redshift*, adicionado ao *redshift* do aglomerado.

Enfim, cálculos semelhantes são realizados para os objetos não pertencentes ao aglomerado. O segundo e terceiro laços se finalizam e o primeiro é finalizado após a geração de todos os aglomerados.

## 4.4 Método Sousa & Ribeiro

O método foi baseado no trabalho de [Nascimento et al. \(2016\)](#) que estudou o par de aglomerados A3407 + A3408, e que pode ser adaptado para o estudo da rotação de aglomerados individuais.

Nós analisamos a possibilidade de *gaps* na distribuição de velocidades. A análise do *gap* estima a probabilidade de que um “*gap*”, de certo tamanho e em dada localização, possa ser produzido a partir de amostragens aleatórias retiradas de uma gaussiana. Primeiro as velocidades das galáxias são ordenadas em ordem crescente e o  $i$ -ésimo intervalo é definido como  $g_i = v_{i+1} - v_i$ . O *gap* é ponderado pela sua posição, através de  $w_i = i(N - i)$ , onde  $N$  é o número de galáxias do aglomerado. Os *gaps* ponderados são então redefinidos por meio da média (MM) da distribuição ordenada do *gap* ponderado dada por:

$$MM = \frac{2}{N} \sum_{i=N/4}^{3N/4} \sqrt{w_i g_i} \quad (21)$$

Investigamos *gaps* com valores maiores que 2.25, uma vez que em retiradas aleatórias de uma gaussiana, *gaps* desse tamanho ocorrem no máximo em 3% dos casos

(vide [Wainer e Schacht \(1978\)](#) e [Beers et al. \(1991\)](#)). Em seguida os dados foram divididos em duas amostras, contendo objetos com velocidades maiores e menores que o maior *gap* encontrado, referidos aqui como amostras I e II. Para o caso de aglomerados onde não foi encontrado *gap* significativo ( $> 2.25$ ), utilizamos a mediana dos dados como divisor das velocidades do sistema.

Após os *gaps* identificados na distribuição de velocidades estimamos o eixo principal do aglomerado como o resultante do ajuste de uma elipse aos dados projetados no plano do céu, como ilustrado na figura 4. O eixo principal é definido a partir do centro da elipse. O ajuste foi feito usando-se o pacote **ellipse** do R.

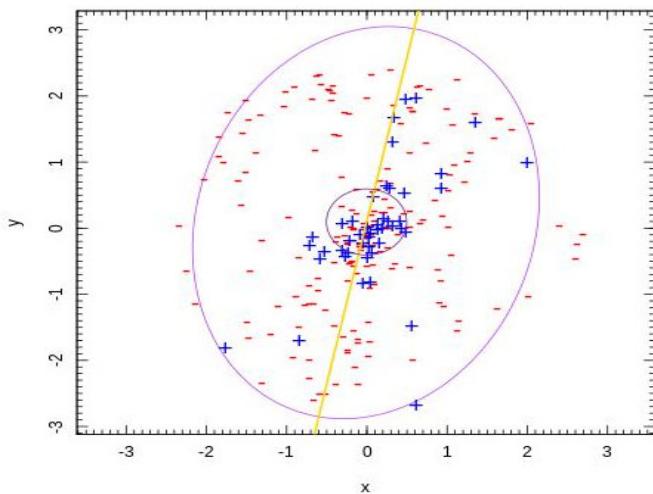


Figura 4 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu.

Na Figura 4, vemos o ajuste da elipse na distribuição (X,Y) projetada no plano do céu, com os pontos acima (+) e abaixo (-) em relação à posição do *gap* principal, indicados em azul e vermelho, respectivamente, e calculamos a distância de cada objeto ao eixo principal. Neste aglomerado analisando os objetos acima do eixo contabilizamos 13 com sinais positivos e 86 negativos, já os objetos abaixo do eixo foram 33 positivos e 93 negativos. A distribuição de galáxias em torno do *gap* de velocidades pode ser utilizada como um indicador indireto da presença ou não de rotação. Estudamos o quanto diferem espacialmente as galáxias de acordo com a sua posição em relação ao eixo principal. Com isso as amostras I e II foram então comparadas em relação a sua distribuição de duas maneiras: independente do eixo principal e em cada lado do eixo. Os testes de comparação de duas amostras utilizados foram o teste de Cramer 2D e o de Hotelling, dos pacotes **Cramer** e **Hotelling** do R, respectivamente, tendo como a hipótese nula que os pontos + e - foram retirados da mesma população.

O teste de Cramer para duas amostras pode ser usado para dados univariados e multivariados, como neste trabalho. Para o cálculo do valor crítico uma rotina de

*bootstrap* é utilizada e métodos de permutação são usados para obter o valor-p do teste. O teste de Hotelling multivariado compara médias em duas amostras. A rejeição ou não da hipótese nula é feita em todos os casos testados neste trabalho para um nível de 95% de confiança.

Dado que as distribuições espaciais das amostras I e II sejam distintas com 95% de confiança em relação aos testes acima citados, interpretamos o resultado como sendo uma indicação indireta de rotação nos aglomerados. Ou seja, interpretamos objetos com velocidades acima e abaixo do *gap* apresentam também diferentes distribuições espaciais. Para os aglomerados onde isto acontece, traçamos um perfil de velocidade de rotação ao longo da distância ao centro do aglomerado. A velocidade de rotação foi calculada de maneira cumulativa contra o raio projetado das galáxias de acordo com

$$\omega = \Delta V/R \quad (22)$$

onde  $\Delta V$  é a diferença de velocidade entre os pontos + e – internos a  $R$ , para dados radiais em ordem crescente.

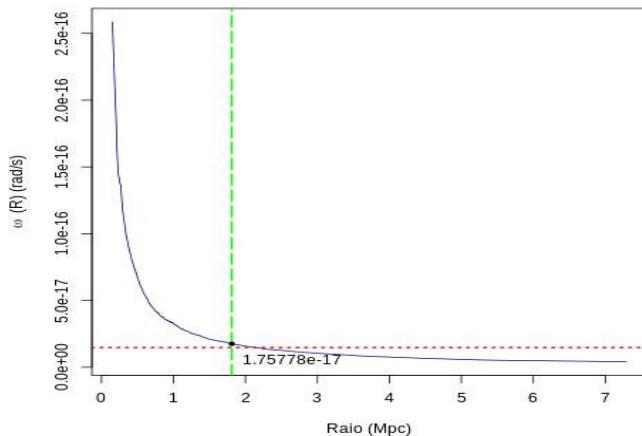


Figura 5 – Perfil de velocidade de rotação do aglomerado 08 do catálogo selec20.

No gráfico, a linha tracejada na horizontal refere-se à velocidade de rotação do aglomerado, identificada através do raio ( $R_{200}$ ) do aglomerado (intersecção da curva de rotação e o valor de  $R_{200}$ ). Uma vez obtido o valor da velocidade de rotação do aglomerado utilizamos a fórmula dada por [Lee e Rood \(1969\)](#) que investigam a dependência da forma e do teorema do virial agindo no movimento orbital. Para que a velocidade angular afete significativamente o cálculo da massa do aglomerado, qualquer aceleração centrífuga precisaria ser comparável à aceleração gravitacional. Através da equação 23 encontramos o valor limite de detecção de velocidade de rotação

do aglomerado, representada na figura 5 pela linha tracejada na vertical.

$$\omega \cong \omega_{orb} = \frac{1}{r^2} \sqrt{GM_g\Delta(1 - e^2)}, \quad (23)$$

onde  $\omega$  é a velocidade de rotação,  $G$  é constante gravitacional,  $r$  e  $M$  são raio e massa do aglomerado, respectivamente, e  $e$  é dado por

$$e = 1 - \frac{b}{a}, \quad (24)$$

sendo  $a$  e  $b$  as distâncias máximas horizontal e vertical ao centro da elipse, respectivamente.

Como observado o valor da rotação encontrado para o Aglomerado 08 do catálogo selec20 é  $1.7577e^{-17}$  rad/s. Este é um valor aparentemente baixo, porém significa uma velocidade de rotação de aproximadamente  $867 \text{ km s}^{-1}$ , maior que a dispersão de velocidades deste sistema,  $\sigma = 536 \text{ km s}^{-1}$ . O valor é próximo de  $1000 \text{ km s}^{-1}$ , que é o limite da detectabilidade de movimentos de gás em dados de raio-X, determinado observationalmente por [Dupke e Bregman \(2006\)](#) no aglomerado de Centaurus.

O método descrito acima é resumido no fluxograma ilustrado na figura 6.

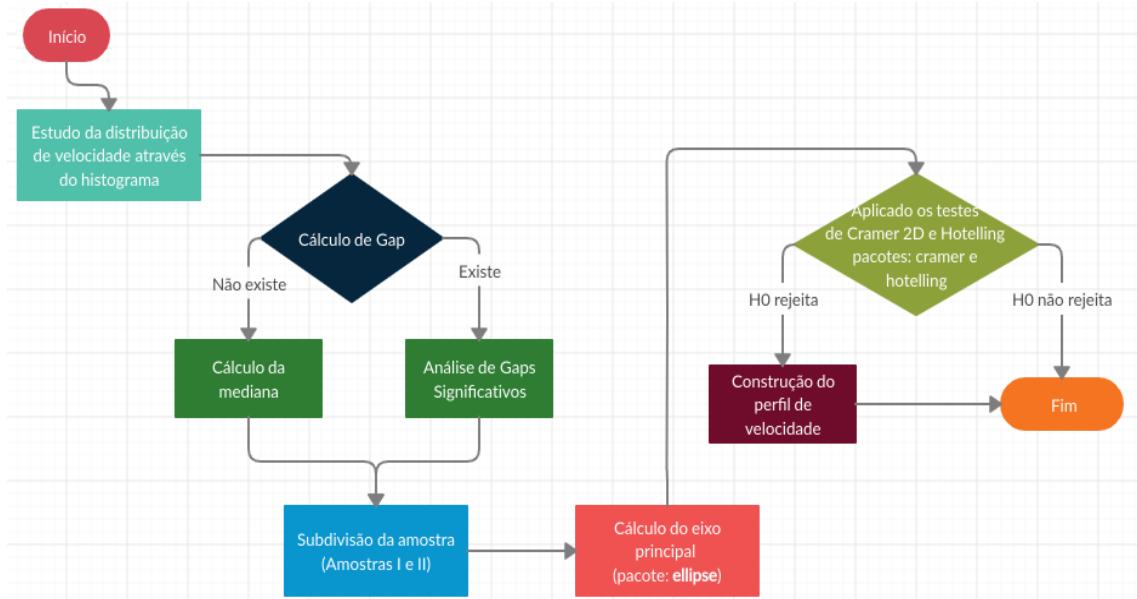


Figura 6 – Fluxograma do método implementado.

## 4.5 Método de Hwang & Lee

Para efeito de comparação, implementamos também o método proposto por [Hwang e Lee \(2007\)](#), usualmente aplicado para identificar a rotação em aglomerados.

Eles utilizam a relação senoidal para calcular o eixo de rotação ( $\Theta_o$ ) e a velocidade de rotação ( $v_{rot}$ ), através de:

$$vp(v_{rot}, \Theta) = v_{sys} + v_{rot} \cdot \sin(\Theta - \Theta_o), \quad (25)$$

onde  $v_p$  é a velocidade radial de cada galáxia devida à rotação do aglomerado,  $v_{sys}$  é a velocidade peculiar do aglomerado e  $\Theta$  é o ângulo projetado na posição de cada galáxia no plano céu, partindo do Norte para o Leste. Usando-se diferenças de velocidade em relação à velocidade média do aglomerado, o valor de  $v_{sys}$  foi definido como 0.

O procedimento de minimização do  $\chi^2$  foi utilizado para determinar o melhor ajuste dos valores de  $v_{rot}$  e  $\Theta_0$ , representado na equação 26. Ou seja, o conjunto de valores de  $v_{rot}$  e  $\Theta_0$ , são empregados no cálculo de  $\chi^2$  para cada par de parâmetros:

$$\chi^2(v_{rot}, \Theta_0) = \sum_i \frac{(v_{pi} - v_{los,i})^2}{\sigma_i^2}, \quad (26)$$

onde  $v_{los,i}$  é a velocidade de linha de visada de cada galáxia e  $\sigma_i$  é a medida em erro. Um aspecto importante do método HL é que o procedimento de minimização do  $\chi^2$  sempre leva a um ajuste da curva, e portanto, em princípio todos os aglomerados possuem alguma rotação. O que distingue os aglomerados na verdade é o grau de rotação. Os casos em que as velocidades de rotação sejam muito baixas para afetar a dinâmica dos aglomerados (ou aproximadamente zero) são considerados exemplos de sistemas sem rotação. O fluxo resumido do método é representado na figura 7.

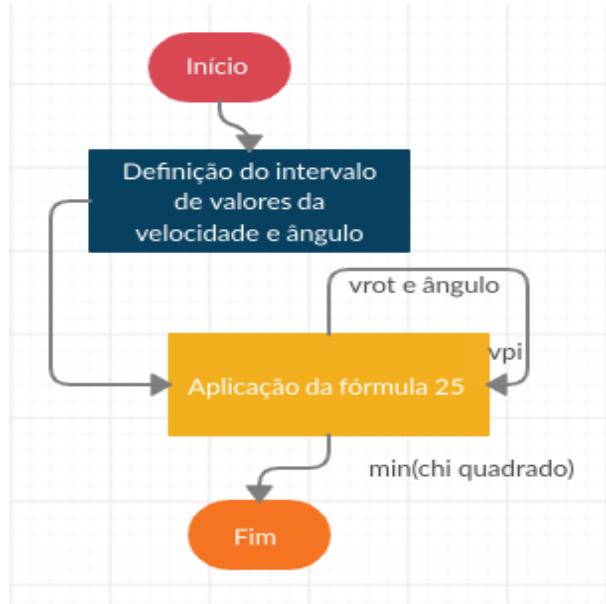


Figura 7 – Fluxograma do método Hwang & Lee.

No próximo capítulo, apresentamos os resultados da aplicação dos métodos descritos acima.

## 5 Análise

Neste trabalho realizamos 1000 simulações do método implementado usando como entrada os dados de velocidade de cada catálogo com intuito de verificar a robustez do método na identificação ou não de rotação, uma vez que várias rotinas empregadas realizam aproximações e/ou fazem uso de sementes aleatórias. No catálogo I (selec20) 90% dos casos (18 aglomerados) obtivemos resultados conclusivos, ou seja, em 900 delas encontramos o mesmo resultado, ou seja, a detecção ou não de rotação. Já no catálogo NoSOCS, e nos Modelos III sem e com rotação obtivemos resultados conclusivos em 97.8% (179 aglomerados), 97% (194 aglomerados) e 100% dos casos, respectivamente. Nas seções subsequentes apresentamos os resultados para cada catálogo.

### 5.1 Catálogo I: selec20

#### 5.1.1 Método Sousa & Ribeiro

Os resultados completos da aplicação de nosso método para o catálogo selec20 são apresentados no Anexo A e na tabela 1. Na Figura 8, é exibida a análise de *gaps* para um dos 20 aglomerados da amostra, o aglomerado 08. O gráfico na figura contém o histograma da distribuição de velocidades, o ajuste gaussiano superposto (linha em azul), barras inferiores indicando as velocidades individuais ordenadas em ordem crescente, sendo que em vermelho estão indicados os *gaps* com valores maiores que 2.25, ou seja, os *gaps* significativos. Quando mais de um *gap* é encontrado, escolhemos aquele de maior valor; finalmente, a linha vertical tracejada indica a posição da BCG (*brightest cluster galaxy*) apenas como referência.

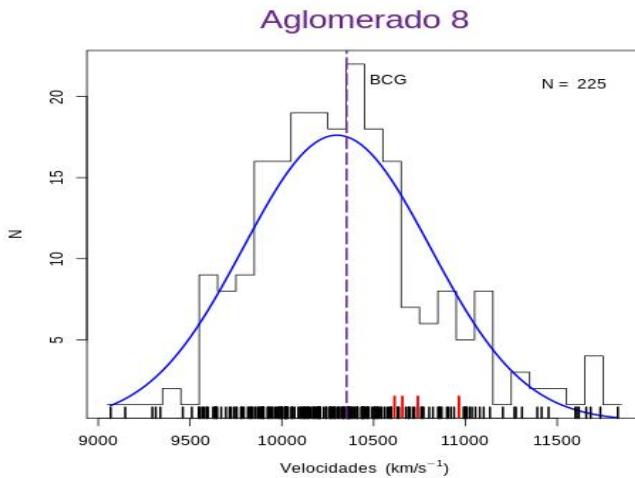


Figura 8 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps para o aglomerado 08.

Na Figura 4, vemos o ajuste da elipse na distribuição ( $X, Y$ ) projetada no plano do céu, com os pontos acima (+) e abaixo (-) em relação à posição do *gap* principal, indicados em azul e vermelho, respectivamente. A distribuição de galáxias em torno do *gap* de velocidades pode ser utilizada como um indicador indireto da presença ou não de rotação. Estudamos o quanto diferem espacialmente as galáxias de acordo com a sua posição em relação ao eixo principal. A hipótese nula dos testes é a de que os pontos + e - foram retirados da mesma população. Aplicamos dois testes estatísticos, Cramer 2D e Hotelling, em três cenários diferentes: todos os pontos do gráfico, acima e abaixo do eixo principal (Tabela 1). Nesta tabela, e nas seguintes, valores-p marcados em vermelho indicam diferença significativa nas distribuições de galáxias + e - para um nível de confiança de 95%.

Tabela 1 – Teste Cramer e Hotelling aplicado no catálogo selec20.

Cluster	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3		Nº galáxias
	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	
01	0.4965	0.6160	0.7682	0.8717	0.3646	0.7469	223
02	<b>0.0039</b>	<b>0.0078</b>	0.0769	<b>0.0069</b>	<b>0.0219</b>	0.0916	244
03	0.2987	0.5612	0.6483	0.2024	0.0609	0.1299	177
04	<b>&lt;0.0001</b>	<b>&lt;0.0001</b>	<b>&lt;0.0001</b>	<b>&lt;0.0001</b>	<b>0.0069</b>	<b>0.01569</b>	435
05	0.0979	<b>0.0483</b>	<b>0.0449</b>	0.0723	0.0829	0.3963	951
06	0.2817	0.2650	0.4725	0.8041	0.2577	0.4140	165
07	<b>0.0419</b>	0.5880	0.5564	0.6346	<b>0.0389</b>	0.8842	313
08	<b>0.0099</b>	0.4446	<b>0.0119</b>	0.0807	0.0719	0.0551	225
09	<b>0.0289</b>	0.2301	<b>0.0359</b>	<b>0.0373</b>	0.0959	<b>0.0364</b>	215
10	<b>0.0009</b>	<b>0.0067</b>	<b>0.0039</b>	<b>0.0258</b>	0.5024	0.8036	308
11	<b>0.0009</b>	<b>0.0031</b>	0.3356	0.9006	<b>0.0009</b>	0.0696	651
12	<b>&lt;0.0001</b>	<b>&lt;0.0001</b>	<b>&lt;0.0001</b>	<b>&lt;0.0001</b>	<b>&lt;0.0001</b>	<b>&lt;0.0001</b>	173
13	0.1068	0.6982	0.1338	0.1516	0.2657	0.3324	218
14	<b>0.0389</b>	<b>0.0054</b>	0.4755	0.2110	0.7602	0.5019	127
15	0.1178	0.5744	0.3416	0.2242	<b>0.0369</b>	0.0609	114
16	<b>0.0449</b>	0.5181	<b>0.0029</b>	<b>0.0194</b>	0.4085	0.4775	144
17	<b>&lt;0.0001</b>	<b>&lt;0.0001</b>	<b>&lt;0.0001</b>	<b>&lt;0.0001</b>	0.23676	0.3371	773
18	<b>&lt;0.0001</b>	<b>0.0427</b>	<b>0.0149</b>	<b>0.0075</b>	0.1298	0.7534	233
19	0.0879	0.4063	0.2997	0.2953	0.1378	0.2396	113
20	0.1188	0.9037	0.0729	0.3173	0.1288	0.2297	210

O teste de Hotelling multivariado compara médias em duas amostras. A rejeição ou não da hipótese nula é feita em todos os casos para um nível de 95% de confiança. Consideramos evidência significativa de rotação se houve rejeição da hipótese nula em pelo menos um dos cenários testados. Isto nos leva a 14 aglomerados com evidência de algum grau de rotação. São eles os aglomerados: 02, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17 e 18. Em uma análise mais criteriosa verificamos que:

- 14.29% dos aglomerados houve rejeição da hipótese nula (indicando rotação) em pelo menos um dos testes (Cramer e Hotelling) nos três cenários (todos os pontos, acima e abaixo do eixo principal).
- 35.71% dos aglomerados houve rejeição da hipótese nula em pelo menos um dos testes em dois cenários.
- 7.14% dos aglomerados houve rejeição da hipótese nula nos dois testes em apenas um cenário.
- 7.14% dos aglomerados houve rejeição da hipótese nula em pelo menos um dos testes em um cenário.
- 14.29% dos aglomerados houve rejeição da hipótese nula em ambos os testes nos três cenários.
- 21.42% dos aglomerados houve rejeição da hipótese nula em ambos os testes em dois cenários.

Esta subdivisão permite que os usuários do programa analisem os resultados com maior ou menor conservadorismo. Quando se deseja cometer menos falsos positivos na análise, devemos considerar que 42.86% da amostra de aglomerados não têm rotação. No extremo oposto, relaxando a interpretação, poderíamos concluir que apenas 7.14% dos aglomerados não possuem rotação.

Finalmente, calculamos o perfil de velocidade de rotação para estes quatorze aglomerados, como ilustrado na Figura 5. A velocidade de rotação foi calculada de maneira cumulativa contra o raio projetado das galáxias de acordo com

$$\omega = \Delta V/R \quad (27)$$

onde  $\Delta V$  é a diferença de velocidade entre os pontos + e – internos a  $R$ .

No gráfico o valor exibido é a velocidade de rotação do aglomerado determinado a partir do R200 e a linha na vertical, o valor em y, é a velocidade angular de rotação no aglomerado, calculado pela fórmula da equação 23.

### 5.1.2 Método de Hwang & Lee

Aplicamos o método de Hwang & Lee para o catálogo selec20 e os resultados são apresentados na tabela 2. Para todos os aglomerados foi detectado um grau de rotação, dada a construção do método.

Tabela 2 – Resultado do método Hwang &amp; Lee para o catálogo selec20.

Cluster	Velocidade Rotacional	Ângulo (radiano)	Ângulo (grau)
1	-724.22	2.307	132.181
2	-661.24	2.715	155.558
3	-1016.65	1.767	101.242
4	750.69	2.092	119.863
5	-790.08	1.197	68.583
6	656.37	0.785	44.977
7	-1067.90	2.638	151.146
8	852.35	0.14	8.021
9	703.58	2.187	125.306
10	-873.78	1.678	96.142
11	-1117.95	2.803	160.6
12	-946.77	3.069	175.841
13	-891.43	2.461	141.005
14	-625.88	0.474	27.158
15	864.45	0.278	15.928
16	-1041.45	1.011	57.926
17	-505.15	2.556	146.448
18	889.73	0.812	46.524
19	-1062.70	3.029	173.549
20	944.22	1.909	109.378

Com intuito de comparar os valores das velocidades de rotação encontradas em cada um dos métodos para todos os aglomerados do catálogo selec20, construímos uma tabela 3, onde vemos que o nosso método tem um viés para velocidades mais altas, embora esta tendência seja produzida principalmente por três casos onde encontramos  $v_{rot} > 1500 \text{ km s}^{-1}$ , este resultado também é ilustrado no gráfico da Figura 9.

Tabela 3 – Velocidades rotacionais de cada aglomerado do catálogo selec20 encontradas em cada método.

Cluster	Velocidade Rotacional ( $km\ s^{-1}$ )	Velocidade Rotacional ( $km\ s^{-1}$ )
	Método Sousa & Ribeiro	Método Hwang & Lee
01	sem rotação	724.22
02	1014.69	661.24
03	sem rotação	1016.65
04	816.91	750.69
05	1284.33	790.08
06	sem rotação	656.37
07	1878.89	1067.90
08	824.97	852.35
09	837.38	703.58
10	1232.28	873.78
11	1154.06	1117.95
12	2728.77	946.77
13	sem rotação	891.43
14	-	625.88
15	-	864.45
16	81.13	1041.45
17	2239.97	505.15
18	-	889.73
19	sem rotação	1062.70
20	sem rotação	944.22

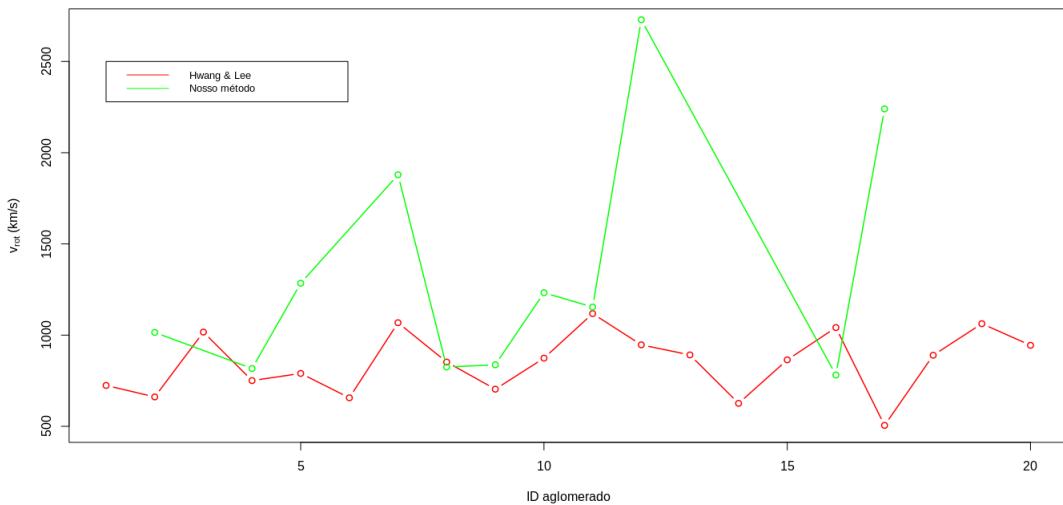


Figura 9 – Comparaçāo das velocidades de rotação encontradas em cada um dos métodos para catálogo selec20.

## 5.2 Catálogo II: NoSOCS

### 5.2.1 Método Sousa & Ribeiro

No catálogo de NoSOCS, diferente do selec20, 56.33% dos aglomerados (um total de 89) não apresentaram *gaps* significativos, nestes casos os dados foram divididos pelo cálculo da mediana. Além disso, 13.66%, cerca de 25 aglomerados, continham um total

inferior a 20 objetos, o que tornava o cálculo de detecção de rotação inviável. Por esse motivo, reduzimos a amostra de 183 para 158 aglomerados.

Aplicamos os mesmos cenários e testes usados no catálogo anterior e verificamos que:

- 34.43% dos aglomerados apresentaram indicação indireta de rotação, levando em conta um dos testes (Cramer e Hotelling) em pelo menos um cenário. Importante considerar que 47.62% dos sistemas não têm *gap*, ou seja, em casos onde os dados foram divididos pela mediana.
- Desse total, tendo em conta a rejeição da hipótese em ambos os testes para os três cenários um total de 6.35%, dois cenários 15.87% e um cenário 9.52%.
- Já a rejeição da hipótese em pelo menos um dos testes para os três cenários um total de 11.11%, dois cenários 15.87% e um cenário 41.27%.

Os resultados são apresentados nas tabelas [4](#) e [5](#) e no Anexo [B](#).

Tabela 4 – Teste Cramer e Hotelling aplicado no catálogo NoSOCS com rotação detectada utilizando gap.

Cluster	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3		$V_{rot}(km\ s^{-1})$	Nº galáxias
	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling		
01238	<b>0.0039</b>	<b>0.0056</b>	<b>0.0219</b>	<b>0.0252</b>	0.0569	0.1505	797.69	44
01836	< 0.0001	0.0003	0.0069	0.0108	<b>0.0229</b>	<b>0.0012</b>	448.87	86
02440	<b>0.0179</b>	0.0906	<b>0.0699</b>	<b>0.0057</b>	<b>0.1508</b>	<b>0.1378</b>	302.64	41
02447	0.5114	0.6465	<b>0.0319</b>	0.0532	0.7432	0.5480	-	46
04681	<b>0.0149</b>	<b>0.0174</b>	<b>0.0249</b>	<b>0.0478</b>	0.2047	0.2128	1084.22	162
04703	<b>0.0019</b>	0.0005	<b>0.0279</b>	<b>0.0186</b>	0.1098	0.1499	1147.11	91
06256	<b>0.0359</b>	0.0166	<b>0.0269</b>	<b>0.0133</b>	0.2837	0.3682	665.03	37
06547	< 0.0001	<b>0.0052</b>	0.5624	0.8490	<b>0.0019</b>	<b>0.0050</b>	1104.74	112
07217	0.0779	<b>0.0384</b>	0.3826	0.4338	0.1528	0.4565	-	24
07703	<b>0.0439</b>	0.0796	<b>0.0059</b>	<b>0.0151</b>	0.5864	0.9808	308.04	48
09148	<b>0.0129</b>	<b>0.0044</b>	<b>0.0489</b>	0.1124	<b>0.0229</b>	0.0891	-	31
10008	<b>0.0019</b>	0.2934	<b>0.0299</b>	0.3870	<b>0.0259</b>	0.1435	1524.44	123
10013	<b>0.0089</b>	<b>0.0313</b>	0.2877	0.8329	0.3776	0.5823	933.65	86
10015	<b>0.0039</b>	0.0576	0.0929	0.2795	<b>0.0299</b>	0.0574	1291.87	139
10020	<b>0.0009</b>	<b>0.0086</b>	<b>0.0039</b>	0.4036	<b>0.0049</b>	<b>0.0166</b>	1195.4	114
10021	<b>0.0049</b>	<b>0.0305</b>	<b>0.0129</b>	<b>0.0152</b>	NA	NA	-	89
10023	<b>0.0409</b>	0.0848	0.0789	0.2775	0.1108	0.2771	1738.54	107
10024	<b>0.0379</b>	0.0749	0.0909	0.2553	0.2317	0.4133	1873.25	113
10027	0.1638	0.4139	0.2687	0.3932	<b>0.0359</b>	0.0593	824.85	86
10029	<b>0.0259</b>	0.0564	<b>0.0489</b>	0.1656	0.0579	0.0581	505.62	135
10030	< 0.0001	> 1.0	<b>0.0139</b>	<b>0.0152</b>	< 0.0001	> 1.0	323.01	87
10037	<b>0.0009</b>	<b>0.0089</b>	<b>0.0329</b>	0.2859	0.0709	0.1575	1141.23	145
10043	<b>0.0209</b>	0.0599	0.0539	0.0616	0.1888	0.2711	686.59	218
10044	< 0.0001	> 1.0	<b>0.0039</b>	<b>0.0081</b>	<b>0.0019</b>	<b>0.0010</b>	1431.5	177
10045	0.1038	0.2814	<b>0.0379</b>	0.0935	0.4815	0.9611	450.57	55
10051	<b>0.0459</b>	0.2409	< 0.0001	<b>0.0037</b>	0.2147	0.0671	857.33	189
10053	0.0659	0.5593	< 0.0001	0.0001	<b>0.0019</b>	<b>0.0010</b>	981.84	447
10054	< 0.0001	<b>0.0068</b>	0.2017	0.5760	< 0.0001	<b>0.0107</b>	1230.39	537
10056	<b>0.0259</b>	<b>0.0209</b>	0.1608	<b>0.0471</b>	0.3186	0.3730	1457.95	100
10059	<b>0.0419</b>	0.4240	0.1118	0.2904	0.3096	0.4049	-	150
10060	0.2017	0.9175	<b>0.0059</b>	<b>0.0485</b>	0.8311	0.6474	803.62	133
10063	0.0999	0.6957	<b>0.0499</b>	0.1891	<b>0.0339</b>	0.1027	1236.38	219
10064	0.0969	<b>0.0428</b>	0.2797	0.1394	0.6283	0.7897	1122.04	133

Tabela 5 – Teste Cramer e Hotelling aplicado no catálogo NoSOCS com rotação detectada utilizando mediana.

Cluster	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3		$V_{rot}(km\ s^{-1})$	Nº galáxias
	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling		
01831	< 0.0001	0.0026	0.0019	0.0312	0.0099	0.0040	345.55	72
02137	0.0369	0.3470	0.2487	0.3295	0.1618	0.7326	-	34
02433	0.1188	0.3012	0.8461	NA	0.0329	0.2165	593.83	31
03176	0.0409	0.4379	0.1558	0.1618	0.1118	0.7231	428.81	26
03691	0.0609	0.0318	0.4645	0.5344	0.4355	0.1154	-	43
03907	0.1148	0.1686	0.0159	0.0652	0.6063	0.9985	547.83	44
04048	0.1398	0.0232	0.2527	0.2135	0.8171	0.5988	-	30
04409	0.0009	0.0012	0.1018	0.1781	0.0069	0.01041	-	23
04470	0.0479	0.1103	0.5114	NA	0.0569	0.1361	775.23	35
04479	0.0909	0.1737	0.8301	0.0699	0.0139	0.0205	-	25
04672	0.3546	0.6005	0.5404	0.4337	0.1688	0.0242	-	48
05359	0.0969	0.1166	0.0109	0.0250	0.4835	0.7024	656.00	62
05447	< 0.0001	0.0010	0.0239	0.0463	0.0079	0.0156	497.66	57
06207	0.6263	0.3789	0.2682	0.0077	0.7092	0.5950	-	21
06286	0.1298	0.0540	0.0199	0.0133	0.1308	0.1592	673.53	70
07395	0.3286	0.7779	0.4095	0.6738	0.1368	0.0007	-	29
08022	0.2667	0.8572	0.0409	0.2593	0.1478	0.1502	650.79	51
08721	0.0329	0.1291	0.2257	0.5158	0.0849	0.2758	390.67	47
09061	0.3026	0.0371	0.8051	0.8967	0.5174	0.0671	-	46
10006	0.0409	0.0847	0.1958	0.6024	0.0189	0.0057	932.21	74
10016	0.0009	0.0008	0.0349	0.0727	0.0009	0.0056	-	92
10018	0.3986	0.3313	0.0479	0.8072	0.3306	0.1415	748.49	65
10026	0.0339	0.0363	0.5314	0.6806	< 0.0001	0.0018	-	130
10028	0.0189	0.0187	0.2317	0.2742	0.0539	0.0525	830.93	80
10031	< 0.0001	0.0006	0.0029	0.0010	< 0.0001	0.0001	1070.37	141
10035	0.1228	0.1567	0.5054	0.9967	0.0299	0.0745	807.11	58
10036	0.4105	0.9175	0.0569	0.0455	0.6703	0.5445	647.85	119
10040	0.0009	0.0019	0.0369	0.0593	0.0079	0.0099	635.65	99
10050	0.0209	0.5951	0.0689	0.2795	0.0779	0.0509	795.6	77
10055	< 0.0001	0.3621	0.2607	0.1808	< 0.0001	0.0007	-	104

## 5.2.2 Método de Hwang & Lee

Aplicamos o método de Hwang & Lee para o catálogo NoSOCS e os resultados são apresentados na tabela 6. Em cerca de 97.26% dos aglomerados (178) foi detectada rotação. Apenas nos aglomerados 02907, 08049, 08720, 09144 e 10046 não identificamos nenhum grau de rotação.

Tabela 6 – Resultado do método Hwang & Lee para o catálogo NoSOCS.

Cluster	Velocidade Rotacional	Ângulo (radiano)	Ângulo (grau)
00053	-587.01	3.141	179.981
00086	53.71	0	0
00339	-1184.30	3.044	174.443
00719	488.11	0.826	47.363
00996	969.00	0.966	55.379
01052	328.83	1.808	103.625
01189	-660.52	2.738	156.907
01238	-550.89	0.146	8.371
01264	782.77	0.628	35.996
01347	644.06	3.141	179.981
01478	801.68	0.589	33.746

---

01831	-1184.30	1.681	96.328
01836	-356.52	2.365	135.515
01877	665.08	1.861	106.655
01933	643.25	2.203	126.221
02035	-383.22	1.478	84.697
02104	940.52	2.339	134.029
02137	1016.62	1.713	98.171
02182	581.02	0.872	49.994
02186	631.46	2.513	143.985
02249	1085.40	1.256	71.992
02298	761.15	0.336	19.283
02301	-816.24	2.250	128.905
02433	-352.07	1.256	71.992
02440	-503.39	0.392	22.497
02447	631.46	0.907	51.994
02469	-1002.72	0.628	35.996
02490	789.35	1.912	109.554
02752	177.52	2.261	129.586
02759	672.72	1.142	65.447
02789	376.11	0.196	11.248
02827	-116.20	0.369	21.174
02899	-286.97	2.191	125.568
02907	-	-	-
03031	-771.62	3.141	179.981
03112	561.62	0.966	55.379
03176	722.24	0.628	35.996
03229	436.91	0.538	30.854
03459	-1042.44	2.061	118.113
03565	-404.09	0.490	28.122
03631	-1184.30	2.792	159.983
03691	-751.97	0.299	17.141
03742	-842.29	0.387	22.189
03898	-1184.30	0.649	37.237
03907	-603.67	0.219	12.556
03915	-324.56	1.047	59.993
03975	-191.30	0.883	50.619
04023	-715.55	2.902	166.287
04048	1007.13	1.733	99.300
04100	517.97	1.658	94.990
04376	761.15	1.907	109.274
04404	672.72	2.855	163.619
04405	217.57	0.092	5.29358
04409	-977.96	2.141	122.714
04458	594.65	1.1038	63.236
04470	-316.47	2.402	137.633
04479	-238.59	1.963	112.488
04537	-276.42	0	0
04641	328.83	1.256	71.992
04672	-942.84	3.007	172.323
04681	958.52	0.468	26.829
04703	1034.96	1.780	101.989
04710	599.03	2.804	160.698
05039	-860.05	0.448	25.711
05206	177.52	1.633	93.590
05325	-690.88	2.868	164.331
05359	-700.59	2.008	115.070
05447	315.32	0.504	28.925

05535	-522.30	1.308	74.992
05717	916.01	1.828	104.765
05780	1085.40	0	0
05859	768.69	0.949	54.413
05908	-745.00	0.405	23.223
06070	653.07	0.673	38.567
06173	-1184.30	1.287	73.763
06175	-276.42	2.827	161.983
06184	-1016.17	2.210	126.653
06207	-616.87	3.141	179.981
06233	697.89	0.996	57.067
06256	-679.92	0.698	39.995
06261	-1184.30	1.671	95.735
06264	-197.47	1.775	101.728
06286	-625.09	3.050	174.764
06392	-377.29	1.186	67.993
06447	457.61	1.804	103.393
06475	-739.26	1.108	63.523
06506	1039.08	1.218	69.788
06508	-639.57	2.010	115.188
06547	942.26	1.698	97.287
06723	-427.73	1.495	85.705
06758	-697.93	2.917	167.125
06841	678.01	2.980	170.752
06861	-616.87	0.392	22.497
06924	-922.41	1.329	76.146
07204	-771.62	0.999	57.266
07217	98.57	2.458	140.855
07395	274.79	1.907	109.274
07435	-907.50	0.383	21.949
07520	-427.73	3.141	179.981
07584	1085.40	2.792	159.983
07703	-797.96	2.874	164.664
07775	917.27	2.908	166.649
07815	561.62	1.933	110.758
07837	653.07	2.543	145.699
07975	-1119.45	0.448	25.711
08022	722.24	1.633	93.590
08049	-	-	-
08173	1085.40	2.731	156.505
08219	722.24	0.879	50.394
08291	-914.09	0.747	42.852
08338	684.86	3.141	179.981
08710	-1039.42	1.069	61.270
08720	-	-	-
08721	-1184.30	2.526	144.768
08738	-911.93	2.953	169.182
08742	-896.08	2.692	154.270
08975	740.01	0.478	27.388
09061	-1133.86	1.605	91.990
09075	-706.46	2.976	170.509
09132	-394.83	3.141	179.981
09144	-	-	-
09148	-427.73	2.094	119.987
09153	789.35	0.956	54.777
09157	490.95	3.066	175.696
09162	431.41	1.863	106.768

09176	730.75	1.996	114.363
09177	156.88	2.855	163.619
10001	362.21	0.554	31.761
10004	-863.87	0.702	40.231
10006	525.74	1.506	86.292
10008	-1128.48	0.283	16.227
10009	-849.42	2.214	126.872
10010	-659.22	2.321	132.971
10013	-650.25	2.217	127.046
10014	1085.40	2.645	151.563
10015	509.75	0.614	35.213
10016	786.09	0.138	7.911
10017	-1053.85	2.058	117.919
10018	-1077.90	1.178	67.493
10019	-1071.60	0.445	25.529
10020	-441.12	0.500	28.669
10021	1085.40	1.213	69.538
10022	780.92	1.111	63.652
10023	-841.70	1.718	98.480
10024	-1042.44	2.047	117.309
10025	-1020.88	3.066	175.662
10026	839.07	3.0685	175.796
10027	978.59	0.036	2.117
10028	-695.88	0.119	6.834
10029	1034.58	3.071	175.952
10030	-392.54	1.497	85.805
10031	890.85	1.121	64.279
10032	-271.48	1.434	82.165
10033	537.54	0.361	20.687
10034	601.69	0.772	44.257
10035	926.12	0.936	53.678
10036	-1165.06	2.955	169.304
10037	-679.92	3.054	174.982
10038	615.34	0.111	6.389
10039	626.05	1.047	59.993
10040	575.87	0.160	9.182
10041	-1042.44	3.141	179.981
10042	-305.70	1.824	104.505
10043	196.34	2.576	147.634
10044	995.12	1.053	60.334
10045	1043.36	1.512	86.657
10046	-	-	-
10047	-782.58	1.612	92.380
10048	-1158.98	0.992	56.871
10049	-383.22	1.154	66.169
10050	-587.01	1.240	71.045
10051	409.31	2.573	147.431
10052	-276.42	0.773	44.303
10053	1003.97	1.387	79.498
10054	-629.57	2.584	148.082
10055	-875.79	0.335	19.221
10056	-1092.59	1.872	107.261
10058	-902.05	0.016	0.932
10059	-194.16	2.466	141.328
10060	793.09	2.213	126.805
10062	-906.37	1.666	95.500
10063	398.24	2.810	160.992

10064	414.80	1.285	73.628
-------	--------	-------	--------

Os valores das velocidades de rotação encontradas em cada um dos métodos pode ser vista na tabela 7 e no gráfico ilustrado na figura 10, onde vemos mais uma vez uma razoável concordância dos resultados, a menos de alguns aglomerados com velocidade de rotação mais alta identifica pelo método de Sousa & Ribeiro.

Tabela 7 – Velocidades rotacionais de cada aglomerado do catálogo NoSOCS encontradas em cada método.

Cluster	Velocidade Rotacional ( $km\ s^{-1}$ )	Velocidade Rotacional ( $km\ s^{-1}$ )
	Método Sousa & Ribeiro	Método Hwang & Lee
00053	sem rotação	587.01
00086	sem rotação	53.71
00339	sem rotação	1184.30
00719	sem rotação	488.11
00996	sem rotação	969.00
01052	sem rotação	328.83
01189	sem rotação	660.52
01238	797.69	550.89
01264	sem rotação	782.77
01347	sem rotação	644.06
01478	sem rotação	801.68
01831	345.55	1184.30
01836	448.87	356.52
01877	sem rotação	665.08
01933	sem rotação	643.25
02035	sem rotação	383.22
02104	sem rotação	940.52
02137	sem rotação	1016.62
02182	sem rotação	581.02
02186	sem rotação	631.46
02249	sem rotação	1085.40
02298	sem rotação	761.15
02301	sem rotação	816.24
02433	593.83	352.07
02440	302.64	503.39
02447	-	631.46
02469	sem rotação	1002.72
02490	sem rotação	789.35
02752	sem rotação	177.52
02759	sem rotação	672.72
02789	sem rotação	376.11
02827	sem rotação	116.20
02899	sem rotação	286.97
02907	sem rotação	-
03031	sem rotação	771.62
03112	sem rotação	561.62
03176	428.81	722.24
03229	sem rotação	436.91
03459	sem rotação	1042.44
03565	sem rotação	404.09
03631	sem rotação	1184.30
03691	-	751.97

03742	sem rotação	842.29
03898	sem rotação	1184.30
03907	547.83	603.67
03915	sem rotação	324.56
03975	sem rotação	191.30
04023	sem rotação	715.55
04048	-	1007.13
04100	sem rotação	517.97
04376	sem rotação	761.15
04404	sem rotação	672.72
04405	sem rotação	217.57
04409	-	977.96
04458	sem rotação	594.65
04470	775.23	316.47
04479	-	238.59
04537	sem rotação	276.42
04641	sem rotação	328.83
04672	-	942.84
04681	1084.22	958.52
04703	1147.11	1034.96
04710	sem rotação	599.03
05039	sem rotação	860.05
05206	sem rotação	177.52
05325	sem rotação	690.88
05359	656.00	700.59
05447	497.66	315.32
05535	sem rotação	522.30
05717	sem rotação	916.01
05780	sem rotação	1085.40
05859	sem rotação	768.69
05908	sem rotação	745.00
06070	sem rotação	653.07
06173	sem rotação	1184.30
06175	sem rotação	276.42
06184	sem rotação	1016.17
06207	-	616.87
06233	sem rotação	697.89
06256	665.03	679.92
06261	sem rotação	1184.30
06264	sem rotação	197.47
06286	673.53	625.09
06392	sem rotação	377.29
06447	sem rotação	457.61
06475	sem rotação	739.26
06506	sem rotação	1039.08
06508	sem rotação	639.57
06547	1104.74	942.26
06723	sem rotação	427.73
06758	sem rotação	697.93
06841	sem rotação	678.01
06861	sem rotação	616.87
06924	sem rotação	922.41
07204	sem rotação	771.62
07217	-	98.57
07395	-	274.79
07435	sem rotação	907.50
07520	sem rotação	427.73

07584	sem rotação	1085.40
07703	308.04	797.96
07775	sem rotação	917.27
07815	sem rotação	561.62
07837	sem rotação	653.07
07975	sem rotação	1119.45
08022	650.79	722.24
08049	sem rotação	-
08173	sem rotação	1085.40
08219	sem rotação	722.24
08291	sem rotação	914.09
08338	sem rotação	684.86
08710	sem rotação	1039.42
08720	sem rotação	-
08721	390.67	1184.30
08738	sem rotação	911.93
08742	sem rotação	896.08
08975	sem rotação	740.01
09061	-	1133.86
09075	sem rotação	706.46
09132	sem rotação	394.83
09144	sem rotação	-
09148	-	427.73
09153	sem rotação	789.35
09157	sem rotação	490.95
09162	sem rotação	431.41
09176	sem rotação	730.75
09177	sem rotação	156.88
10001	sem rotação	362.21
10004	sem rotação	863.87
10006	932.21	525.74
10008	1524.44	1128.48
10009	sem rotação	849.42
10010	sem rotação	659.22
10013	933.65	650.25
10014	sem rotação	1085.40
10015	1291.87	509.75
10016	-	786.09
10017	sem rotação	1053.85
10018	748.49	1077.90
10019	sem rotação	1071.60
10020	1195.4	441.12
10021	-	1085.40
10022	sem rotação	780.92
10023	1738.54	841.70
10024	1873.25	1042.44
10025	sem rotação	1020.88
10026	-	839.07
10027	824.85	978.59
10028	830.93	695.88
10029	505.62	1034.58
10030	323.01	392.54
10031	1070.37	890.85
10032	sem rotação	271.48
10033	sem rotação	537.54
10034	sem rotação	601.69
10035	807.11	926.12

---

10036	647.85	1165.06
10037	1141.23	679.92
10038	sem rotação	615.34
10039	sem rotação	626.05
10040	635.65	575.87
10041	sem rotação	1042.44
10042	sem rotação	305.70
10043	686.59	196.34
10044	1431.5	995.12
10045	450.57	1043.36
10046	sem rotação	-
10047	sem rotação	782.58
10048	sem rotação	1158.98
10049	sem rotação	383.22
10050	795.6	587.01
10051	857.33	409.31
10052	sem rotação	276.42
10053	981.84	1003.97
10054	1230.39	629.57
10055	-	875.79
10056	1457.95	1092.59
10058	sem rotação	902.05
10059	-	194.16
10060	803.62	793.09
10062	sem rotação	906.37
10063	1236.38	398.24
10064	1122.04	414.80

---

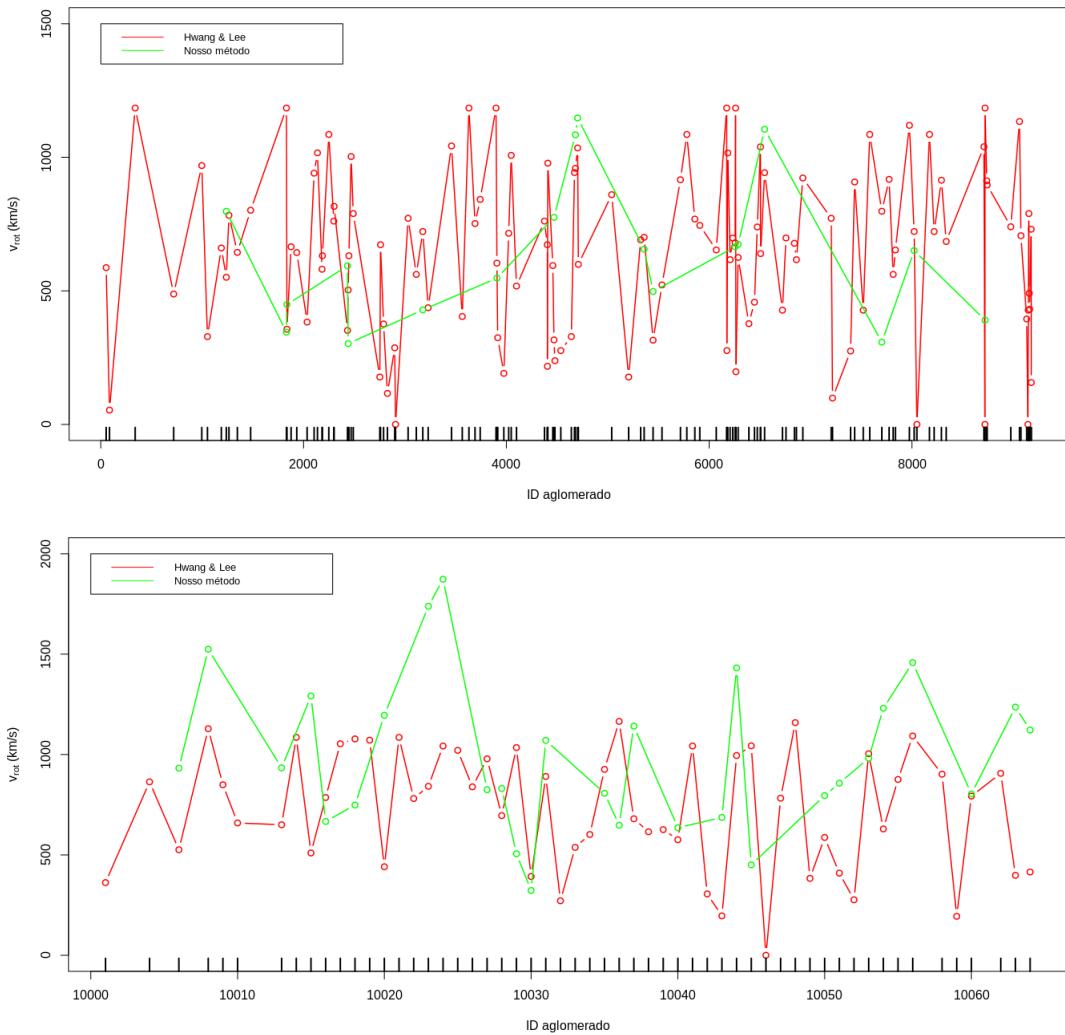


Figura 10 – Comparação das velocidades de rotação encontradas em cada um dos métodos para catálogo NoSOCS.

## 5.3 Catálogo III: Simulação de Monte Carlo

### 5.3.1 Método Sousa & Ribeiro

Utilizamos o método descrito na seção 4.2 na geração de duas amostras, com e sem rotação, que chamaremos de amostra I e II, respectivamente, cada uma com 200 elementos. Na amostra com rotação 59.5% dos casos (119 aglomerados) não apresentaram *gaps* significativos, portanto utilizamos a mediana. Já na amostra sem rotação o número de casos que não apresentaram *gaps* significativos foi menor, 18.5%, ou seja, 37 aglomerados.

Aplicamos os mesmos cenários e testes usados nos catálogos anteriores e identificamos que:

Para a amostra I:

- 100% dos aglomerados apresentaram indicação de rotação.
- Desse total, a rejeição da hipótese em ambos os testes para um cenário foi um total de 6%, dois cenários 5% e nos três cenários 15%.
- Já a rejeição da hipótese em pelo menos um dos testes para um cenário foi um total de 4%, dois cenários 11% e os três cenários 59%.

Para a amostra II:

- 13.5% dos aglomerados apresentaram indicação indireta de rotação.
- Desse total, a rejeição da hipótese em ambos os testes para um cenário foi um total aproximado de 37.04%, dois cenários 3.7%.
- Já a rejeição da hipótese em pelo menos um dos testes para um cenário foi um total aproximado de 37.04%, dois cenários 22.22%.

Devemos notar que os resultados para a amostra I permitem que entendamos melhor como analisar a saída do programa. Como a amostra é controlada e todos os modelos simulados possuem rotação, nosso primeiro resultado é totalmente consistente com isto, ou seja, de fato encontramos 100% dos aglomerados com indicação de rotação. Se, no entanto, aplicamos os testes estatísticos sobre a distribuição espacial das galáxias, este número pode diminuir, dependendo da escolha. Isto sugere que o conservadorismo pode levar a algum nível de falsos negativos nos diagnósticos da amostra. Por exemplo, se usarmos o critério de rejeição da hipótese em ambos os testes para os três cenários investigados (15%), encontrariam 30 aglomerados sem rotação, quando na verdade eles rotacionam. Esta consideração sugere menos conservadorismo em relação a falsos negativos, se estes casos são indesejáveis para o usuário.

Por outro lado, os resultados para a amostra II, com modelos sem rotação, sugerem que podemos ter considerável fração de falsos positivos em nossos diagnósticos. Inicialmente, temos uma indicação de que 13.5%, ou seja, 27 aglomerados sem rotação teriam indicação de rotação. Vamos adotar este número como um fator de erro (ou confiança) em nossos diagnósticos, no que se refere a falsos positivos.

Os resultados para este catálogo são apresentados nas tabelas [8](#) a [11](#) e no Anexo.

Tabela 8 – Teste Cramer e Hotelling aplicado na amostra I do catálogo III com rotação utilizando gap.

Cluster	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3		Nº galáxias
	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	
002	0.0119	> 1.0	-	-	0.0919	0.0024	22
005	< 0.0001	0.0001	0.0999	0.1513	0.0039	0.0053	23
008	0.0029	0.0001	0.2567	0.1049	-	-	23

018	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	0.0002	0.0119	0.0119	25
022	< 0.0001	> 1.0	0.0389	0.0953	0.0009	0.0044	26
030	< 0.0001	0.9050	0.0039	0.0012	0.0019	0.0008	28
031	< 0.0001	> 1.0	0.0119	NA	< 0.0001	0.0010	28
038	< 0.0001	0.2570	0.0029	0.0023	0.0029	0.0079	30
039	< 0.0001	> 1.0	0.0099	0.0088	0.0019	0.0002	30
043	< 0.0001	0.3010	0.0039	0.0057	0	> 1.0	31
048	< 0.0001	> 1.0	0.0019	0.0061	< 0.0001	0.0061	32
050	< 0.0001	> 1.0	0.0029	0.0007	0.0029	0.0066	33
052	0.0009	> 1.0	-	-	0.0019	0.0002	33
055	< 0.0001	0.0126	-	-	0.5134	NA	34
058	< 0.0001	0.8530	0.1518	0.1180	-	-	35
059	< 0.0001	0.2880	0.0029	0.0030	< 0.0001	0.0002	35
068	< 0.0001	> 1.0	0.0139	0.0120	< 0.0001	0.0007	38
078	< 0.0001	0.0033	< 0.0001	0.0012	0.0029	0.0001	41
079	< 0.0001	0.0299	-	-	0.1198	0.0547	42
080	< 0.0001	0.0149	0.0009	0.0008	< 0.0001	> 1.0	42
083	< 0.0001	0.0022	0.0029	0.0005	< 0.0001	0.0009	43
084	< 0.0001	0.0004	0.0009	> 1.0	0.0079	0.0123	43
085	< 0.0001	0.0078	< 0.0001	0.0001	0.0009	0.0022	44
087	< 0.0001	0.0089	0.0189	0.0112	0.0149	0.0171	44
089	< 0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	< 0.0001	> 1.0	45
094	< 0.0001	0.1330	< 0.0001	0.0003	0.0039	0.0024	47
096	< 0.0001	0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	> 1.0	48
097	< 0.0001	0.0002	< 0.0001	0.0001	< 0.0001	> 1.0	48
103	< 0.0001	0.0724	0.0509	0.1133	0.0279	0.0554	51
109	< 0.0001	< 0.0001	-	-	-	-	53
110	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0635	< 0.0001	> 1.0	54
111	< 0.0001	0.0001	0.0019	0.0010	0.00099	0.0023	54
112	< 0.0001	0.4100	< 0.0001	0.0003	< 0.0001	0.0002	54
113	< 0.0001	< 0.0001	-	-	0.0069	> 1.0	55
115	< 0.0001	< 0.0001	0.1998	NA	0.2717	0.0964	56
116	< 0.0001	< 0.0001	0.0549	NA	0.0539	0.0585	56
121	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	0.0029	> 1.0	59
122	< 0.0001	0.0001	< 0.0001	0.0002	< 0.0001	> 1.0	59
123	< 0.0001	< 0.0001	-	-	0.0109	0.0002	60
126	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	> 1.0	61
127	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.3410	0.0019	0.0008	62
130	< 0.0001	< 0.0001	0.0009	0.0004	0.0159	0.0061	63
131	< 0.0001	0.01410	< 0.0001	> 1.0	0.1448	0.0851	64
132	< 0.0001	0.0001	0.0029	0.0001	0.0009	0.0021	64
134	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0168	0.0009	0.0002	65
135	< 0.0001	< 0.0001	0.0069	NA	< 0.0001	> 1.0	66
139	< 0.0001	< 0.0001	0.0229	0.0211	0.0019	0.0001	68
144	< 0.0001	0.0036	-	-	0.0209	0.0033	71
145	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	> 1.0	71
147	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.00813	0.0119	0.0059	72
148	< 0.0001	< 0.0001	0.0239	0.0089	-	-	73
153	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0282	< 0.0001	0.0003	76
154	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0021	< 0.0001	0.3820	77
156	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	0.0009	0.0005	78
161	< 0.0001	< 0.0001	0.0979	0.0515	-	-	81
162	< 0.0001	< 0.0001	0.0069	0.0168	0.0439	NA	82
164	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.4890	-	-	83
165	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	0.0247	84
166	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.1950	< 0.0001	> 1.0	84
167	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0001	< 0.0001	0.3990	85

168	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.3290	< 0.0001	0.2840	86
169	< 0.0001	< 0.0001	0.0069	<b>0.0106</b>	< 0.0001	> 1.0	87
170	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.9260	< 0.0001	> 1.0	87
173	< 0.0001	< 0.0001	0.0209	<b>0.0072</b>	< 0.0001	> 1.0	89
174	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0533	< 0.0001	<b>0.0005</b>	90
175	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	<b>0.0002</b>	< 0.0001	0.1710	91
176	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.3140	< 0.0001	<b>0.0048</b>	92
178	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	<b>0.0246</b>	< 0.0001	> 1.0	93
180	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0665	< 0.0001	<b>0.0014</b>	95
181	< 0.0001	< 0.0001	0.0129	<b>0.0131</b>	< 0.0001	< 0.0001	95
182	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	<b>0.0073</b>	< 0.0001	0.0021	96
185	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0607	-	-	99
186	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	<b>0.0023</b>	< 0.0001	0.0038	99
187	< 0.0001	< 0.0001	0.0029	<b>0.0028</b>	< 0.0001	0.0039	100
191	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0053	103
192	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	<b>0.0002</b>	< 0.0001	< 0.0001	104
194	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.1160	< 0.0001	0.0001	106
195	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	<b>0.0015</b>	< 0.0001	<b>0.0551</b>	107
198	< 0.0001	< 0.0001	-	-	< 0.0001	0.7790	110
199	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	<b>0.0083</b>	110
200	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	<b>0.0325</b>	< 0.0001	0.0003	111

Tabela 9 – Teste Cramer e Hotelling aplicado na amostra I do catálogo III com rotação utilizando mediana.

Cluster	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3		Nº galáxias
	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	
001	<b>0.0289</b>	<b>0.0017</b>	0.0939	<b>0.0024</b>	-	-	22
003	<b>0.0019</b>	<b>0.0024</b>	<b>0.0109</b>	<b>0.0258</b>	<b>0.0199</b>	0.0577	22
004	<b>0.0039</b>	<b>0.0003</b>	0.1098	NA	<b>0.0339</b>	<b>0.0281</b>	23
006	<b>0.0009</b>	<b>0.0009</b>	<b>0.0099</b>	<b>0.0153</b>	<b>0.0059</b>	<b>0.0275</b>	23
007	<b>0.0009</b>	> 1.0	<b>0.0099</b>	<b>0.0150</b>	<b>0.0059</b>	<b>0.0033</b>	23
009	<b>0.0169</b>	<b>0.0001</b>	0.2917	0.2911	0.3356	0.0560	24
010	<b>0.0019</b>	> 1.0	<b>0.0189</b>	<b>0.0369</b>	<b>0.0149</b>	<b>0.0118</b>	24
011	<b>0.0009</b>	<b>0.0002</b>	-	-	<b>0.0039</b>	<b>0.0017</b>	24
012	< 0.0001	> 1.0	<b>0.0249</b>	<b>0.0391</b>	<b>0.0009</b>	<b>0.0064</b>	24
013	< 0.0001	> 1.0	0.0019	0.0022	0.0429	0.0377	24
014	< 0.0001	> 1.0	0.1718282	NA	-	-	25
015	< 0.0001	> 1.0	0.3986	NA	0.4125	0.1685	25
016	< 0.0001	> 1.0	<b>0.0159</b>	<b>0.0052</b>	<b>0.0069</b>	<b>0.0026</b>	25
017	<b>0.0029</b>	<b>0.0023</b>	<b>0.0169</b>	<b>0.0463</b>	<b>0.0349</b>	0.0574	25
019	<b>0.0059</b>	<b>0.0008</b>	0.6523	NA	0.6313	0.5093	26
020	<b>0.0009</b>	> 1.0	<b>0.0189</b>	<b>0.0045</b>	<b>0.0009</b>	<b>0.0059</b>	26
021	< 0.0001	> 1.0	<b>0.0359</b>	<b>0.0337</b>	0.2087	NA	26
023	< 0.0001	> 1.0	0.0269	0.0594	0.0099	0.0018	26
024	<b>0.0009</b>	<b>0.0005</b>	<b>0.0329</b>	0.0626	<b>0.0099</b>	<b>0.0094</b>	27
025	<b>0.0009</b>	<b>0.0017</b>	0.0709	0.0846	0.1898	0.2670	27
026	< 0.0001	> 1.0	<b>0.0459</b>	0.1095	<b>0.0009</b>	<b>0.0019</b>	27
027	<b>0.0009</b>	> 1.0	<b>0.0049</b>	<b>0.0184</b>	<b>0.0059</b>	<b>0.0078</b>	27
028	<b>0.0019</b>	<b>0.0001</b>	0.0139	0.0011	-	-	28
029	< 0.0001	> 1.0	<b>0.0009</b>	<b>0.0013</b>	<b>0.0389</b>	<b>0.0343</b>	28
032	<b>0.0149</b>	> 1.0	0.2397	0.1458	0.5844	NA	28
033	< 0.0001	<b>0.0002</b>	0.2397	NA	0.0019	0.0001	29
034	< 0.0001	> 1.0	<b>0.0049</b>	<b>0.0200</b>	< 0.0001	<b>0.0002</b>	29
035	< 0.0001	0.5450	<b>0.0029</b>	<b>0.0027</b>	< 0.0001	0.0012	29

036	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	0.0014	0.0019	0.0055	29
037	< 0.0001	> 1.0	0.0079	0.0130	< 0.0001	0.0002	30
040	< 0.0001	> 1.0	0.0119	0.0007	0.0419	0.0199	30
041	< 0.0001	> 1.0	0.0319	0.0431	-	-	31
042	< 0.0001	0.0006	0.0359	0.0602	0.0009	0.0007	31
044	0.0009	> 1.0	-	-	0.2207	0.0403	31
045	< 0.0001	0.2630	0.0029	0.0004	0.0059	0.0036	32
046	< 0.0001	0.1090	< 0.0001	> 1.0	0.0049	0.0057	32
047	0.0009	> 1.0	0.1588	NA	0.1908	0.2016	32
049	< 0.0001	0.0603	-	-	0.0029	0.0004	33
051	< 0.0001	> 1.0	0.1928	0.1026	0.1158	0.1753	33
053	0.0009	> 1.0	0.0259	0.0167	0.0539	0.0446	34
054	< 0.0001	0.3120	0.0019	0.0001	< 0.0001	> 1.0	34
056	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	0.0004	0.0009	0.0021	35
057	< 0.0001	0.0577	0.0129	NA	0.0019	0.0007	35
060	< 0.0001	0.0773	0.0009	0.0021	< 0.0001	0.0001	36
061	0.0019	0.0138	0.1598	0.0239	0.2827	NA	36
062	< 0.0001	0.0094	0.0579	0.0107	-	-	36
063	< 0.0001	> 1.0	0.3376	NA	0.0189	0.0055	37
064	< 0.0001	> 1.0	0.0169	0.0063	0.0009	0.0028	37
065	< 0.0001	0.0096	0.0199	0.0050	< 0.0001	> 1.0	37
066	< 0.0001	0.9690	0.0049	0.0040	0.0019	0.0013	38
067	0.0009	0.0001	0.0069	0.0115	0.0079	0.0234	38
069	< 0.0001	0.0282	0.0029	0.0012	0.0019	0.0067	38
070	< 0.0001	0.0119	< 0.0001	> 1.0	0.0009	0.0003	39
071	< 0.0001	> 1.0	0.0049	0.0052	0.0009	0.0002	39
072	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	0.0001	0.0039	0.0138	39
073	< 0.0001	> 1.0	0.1018	0.1723	0.3106	NA	40
074	< 0.0001	> 1.0	0.0149	0.0020	-	-	40
075	< 0.0001	0.0028	0.0069	0.0025	< 0.0001	0.0001	40
076	< 0.0001	0.6060	0.0009	0.0042	< 0.0001	0.0001	41
077	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	0.0019	0.0009	41
081	< 0.0001	0.6860	0.0059	0.0038	< 0.0001	0.0008	42
082	< 0.0001	0.9540	0.0009	0.0002	0.0019	0.0023	43
086	< 0.0001	0.0288	0.0009	0.0005	< 0.0001	0.0006	44
088	< 0.0001	0.0194	< 0.0001	> 1.0	0.0009	0.0037	45
090	< 0.0001	0.4680	0.0019	0.0001	-	-	46
091	< 0.0001	0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	0.0001	46
092	< 0.0001	> 1.0	0.0199	0.0446	0.0009	0.0005	46
093	< 0.0001	0.3770	< 0.0001	0.0001	0.1288	0.0982	47
095	< 0.0001	0.0352	0.0009	0.0023	< 0.0001	> 1.0	47
098	< 0.0001	0.0067	0.0869	0.1161	0.7172	NA	49
099	< 0.0001	0.0087	0.0169	0.0133	< 0.0001	> 1.0	49
100	< 0.0001	0.0020	0.0699	0.1894	0.0579	0.0561	49
101	< 0.0001	0.3450	0.0079	0.0014	0.0099	0.0122	50
102	< 0.0001	0.0514	0.0019	0.0010	0.0029	0.0083	50
104	< 0.0001	0.1700	0.0089	0.0012	-	-	51
105	< 0.0001	< 0.0001	0.0059	0.0067	0.0079	0.0027	51
106	< 0.0001	< 0.0001	0.0009	0.0025	-	-	52
107	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0008	< 0.0001	> 1.0	52
108	< 0.0001	< 0.0001	-	-	< 0.0001	> 1.0	53
114	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.2470	< 0.0001	0.0641	55
117	< 0.0001	0.0051	< 0.0001	> 1.0	0.0029	0.0056	57
118	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.7890	< 0.0001	0.0001	57
119	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	0.0009	> 1.0	58
120	< 0.0001	0.0001	0.0009	0.0001	< 0.0001	> 1.0	58
124	< 0.0001	0.0065	< 0.0001	> 1.0	0.0419	0.0530	60

125	< 0.0001	0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	0.6960	61
128	< 0.0001	0.0051	< 0.0001	> 1.0	0.01098	0.0048	62
129	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	> 1.0	63
133	< 0.0001	0.0318	< 0.0001	> 1.0	0.1838	NA	65
136	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0001	< 0.0001	0.0649	66
137	< 0.0001	0.0001	< 0.0001	0.1710	0.0019	0.0024	67
138	< 0.0001	0.0009	< 0.0001	0.0006	< 0.0001	0.3280	67
140	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	0.0019	0.0031	68
141	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	0.0121	69
142	< 0.0001	< 0.0001	0.0469	0.0425	< 0.0001	0.0002	70
143	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.2040	< 0.0001	> 1.0	70
146	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.2040	< 0.0001	> 1.0	72
149	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.3980	0.0009	> 1.0	74
150	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	0.8110	74
151	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.5680	< 0.0001	> 1.0	75
152	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.1970	75
155	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0001	0.0029	0.0015	77
157	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	0.2100	79
158	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	0.0727	79
159	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0207	< 0.0001	0.8910	80
160	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	0.0009	0.0004	80
163	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0116	< 0.0001	0.9310	82
171	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	0.4455544	NA	88
172	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.1980	89
177	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0446	< 0.0001	0.5500	92
179	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	< 0.0001	94
183	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	> 1.0	97
184	< 0.0001	< 0.0001	0.1498	0.1139	0.0059	0.0062	98
188	< 0.0001	< 0.0001	-	-	0.0009	> 1.0	101
189	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	> 1.0	102
190	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	0.0002	103
193	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0001	< 0.0001	0.0967	105
196	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0076	0	0.0024	108
197	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	> 1.0	< 0.0001	0.0004	109

Tabela 10 – Teste Cramer e Hotelling aplicado na amostra II do catálogo III com rotação utilizando gap.

Cluster	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3		Nº galáxias
	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	
003	0.6643	0.9703	<b>0.0339</b>	NA	0.1458	0.1320	22
013	<b>0.0389</b>	<b>0.0208</b>	0.0579	NA	0.1988	0.3100	24
019	0.5524	0.6272	0.6753	0.3431	<b>0.0429</b>	<b>0.0182</b>	26
029	0.0889	0.1869	<b>0.0399</b>	0.1120	-	-	28
075	0.4285	0.5943	0.7682	0.7250	<b>0.0439</b>	<b>0.0347</b>	40
076	0.6923	0.6958	<b>0.0459</b>	0.1490	0.3946	0.8040	41
077	<b>0.0089</b>	<b>0.0051</b>	0.0509	0.0828	<b>0.0499</b>	0.1092	41
084	<b>0.0349</b>	<b>0.0401</b>	<b>0.0049</b>	<b>0.0211</b>	0.1698	5.37E-02	43
087	0.4175	0.5135	<b>0.0459</b>	NA	0.5864	NA	44
091	0.0769	<b>0.0405</b>	0.7852	0.4170	0.0659	0.0846	46
095	<b>0.0119</b>	<b>0.0271</b>	<b>0.0049</b>	0.0654	0.4545	0.8071	47
098	<b>0.0079</b>	<b>0.0169</b>	0.4945	0.5664	<b>0.0109</b>	5.21E-02	49
099	0.1568	0.2271	0.5794	0.7764	<b>0.0219</b>	<b>0.0251</b>	49
104	<b>0.0379</b>	<b>0.0450</b>	-	-	0.1008	0.1361	51
114	0.7572	0.7282	0.2417	0.4212	0.0709	<b>0.0398</b>	55
123	0.1518	0.1645	0.1448	<b>0.0082</b>	0.4345	NA	60
148	<b>0.0289</b>	<b>0.0203</b>	0.2227	0.4450	-	-	73
152	0.0579	<b>0.04829</b>	<b>0.0239</b>	5.20E-02	0.9730	0.9445	75
155	<b>0.0119</b>	<b>0.0107</b>	0.1518	1.52E-01	<b>0.0269</b>	0.0585	77
162	0.4685	0.5076	0.5174	0.7196	<b>0.0189</b>	<b>0.0431</b>	82
182	<b>0.0419</b>	0.07297	0.0539	<b>0.0470</b>	0.7702	0.8008	96
197	<b>0.0279</b>	<b>0.0175</b>	0.0719	0.1064	0.1208	0.1649	109
198	0.0909	0.1341	0.9420	0.9737	< 0.0001	<b>0.0003</b>	110

Tabela 11 – Teste Cramer e Hotelling aplicado na amostra II do catálogo III com rotação utilizando mediana.

Cluster	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3		Nº galáxias
	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	
015	0.1178	0.2722	<b>0.0499</b>	NA	0.2487	NA	25
021	<b>0.0439</b>	0.0710	0.0639	0.1537	0.2147	0.3745	26
028	0.1558	0.7918	0.2547	0.2620	<b>0.0329</b>	<b>0.0329</b>	28
039	0.7042	0.6370	0.5724	0.6585	0.1168	<b>0.0416</b>	30

### 5.3.2 Método de Hwang & Lee

Aplicamos o método de [Hwang e Lee \(2007\)](#) para as duas amostras do catálogo III e os resultados são apresentados nas tabelas 12 e 13. Na amostra I, em 96.5% dos casos foi detectada rotação. Ou seja, o número de falsos negativos (objetos com rotação que não apresentam indicação para tal) é pequeno, apenas 7 aglomerados teriam este

diagnóstico. Por outro lado, na amostra II, em 97.8% dos casos houve indicação de algum grau de rotação, quando na verdade nenhum desses sistemas rotaciona. Ou seja, o método de HL é "agressivo" para detectar rotação mas produz uma alta taxa de falsos positivos.

Tabela 12 – Resultado do método Hwang & Lee para a amostra I do catálogo III.

Cluster	Velocidade Rotacional	Ângulo (radiano)	Ângulo (grau)
1	-968.13	1.79	102.83
2	-1076.21	1.19	68.57
3	761.15	1.34	77.11
4	-462.12	1.42	81.81
5	-358.95	1.28	73.61
6	-1081.13	0.28	16.38
7	-977.96	2.14	122.71
8	-565.29	2.71	155.42
9	-394.83	0.68	39.12
10	-888.25	1.77	101.74
11	-789.57	0.68	39.12
12	-493.52	3.00	172.15
13	986.71	2.18	125.17
14	-711.44	1.70	97.50
15	-900.58	1.57	90.00
16	-995.15	0.65	37.46
17	-1089.72	2.61	149.98
18	801.68	1.30	74.99
19	722.24	2.01	115.21
20	268.30	2.26	129.59
21	903.82	0.75	43.19
22	-1002.72	2.26	129.59
23	-821.14	0.62	35.97
24	998.10	0	0
25	823.51	1.20	69.20
26	-573.22	2.41	138.47
27	-	-	-
28	-1016.17	0.58	33.34
29	-511.79	2.21	126.66
30	-848.04	2.44	139.95
31	-595.85	0.23	13.34
32	412.89	1.74	99.97
33	761.15	1.01	57.86
34	1004.33	1.45	83.58
35	-778.99	2.80	160.69
36	-1022.17	0.67	38.55
37	-714.70	1.19	68.29
38	-714.70	0.10	6.18
39	850.60	0.86	49.67
40	1007.13	1.73	99.28
41	1009.74	0.73	41.99
42	-579.04	2.51	143.97
43	-1032.98	0	0
44	-	-	-
45	-1184.3	1.41	81.29
46	-891.43	1.01	58.03
47	-891.43	1.82	104.49
48	1085.40	1.31	75.45

49	-758.73	1.27	73.10
50	943.54	1.17	67.48
51	943.54	0.78	44.97
52	-900.58	3.04	174.33
53	-909.18	1.23	70.92
54	879.06	1.04	59.98
55	-1046.74	1.04	59.98
56	-984.03	2.12	121.74
57	885.13	1.38	79.40
58	-783.76	0.37	21.19
59	951.88	0.55	31.73
60	-1119.45	1.34	77.11
61	-1054.60	1.07	61.70
62	-730.36	1.79	102.83
63	1022.35	0.69	39.98
64	1085.4	0.87	50.01
65	-932.11	1.48	85.01
66	-570.86	1.35	77.85
67	901.37	1.78	102.14
68	-1184.3	0.84	48.63
69	533.31	2.46	141.04
70	-	-	-
71	-467.55	1.984	113.663
72	965.94	1.40	80.49
73	-951.51	0.16	9.22
74	-1184.3	2.25	129.24
75	1027.20	2.57	147.69
76	-1070.81	0.23	13.52
77	-	-	-
78	1085.4	2.74	157.49
79	-907.50	1.30	74.64
80	-962.86	2.45	140.47
81	1085.4	1.83	105.35
82	977.31	0.07	4.29
83	-1130.26	0.89	51.44
84	977.31	2.54	145.68
85	-1131.51	1.31	75.33
86	1085.4	2.48	142.30
87	-973.16	0.80	46.06
88	-	-	-
89	-410.53	2.28	130.90
90	1034.96	2.30	131.99
91	-982.54	1.04	59.98
92	-1184.3	1.53	87.99
93	-1134.95	0.88	50.87
94	740.01	1.98	113.49
95	-1134.95	0.88	50.87
96	-1039.42	3.07	176.16
97	988.81	1.80	103.40
98	707.11	0.06	3.72
99	-947.87	2.35	134.97
100	1085.4	1.96	112.46
101	1085.4	1.66	95.50
102	-582.13	0.64	36.72
103	-	-	-
104	404.49	0.44	25.20
105	858.43	2.26	129.59

---

106	-739.26	0.24	14.09
107	284.32	2.27	130.56
108	736.21	2.77	159.20
109	-1009.70	1.87	107.30
110	956.92	2.60	149.41
111	699.97	1.24	71.32
112	-1098.65	1.77	101.86
113	538.99	0.46	26.64
114	959.30	1.45	83.30
115	-606.55	1.54	88.34
116	-1143.03	1.25	72.01
117	-778.99	2.58	147.86
118	801.68	1.17	67.48
119	-1104.66	1.92	110.51
120	-1064.84	1.92	110.51
121	-910.37	1.84	105.52
122	928.86	1.13	65.13
123	-1184.3	1.75	100.65
124	-1030.42	1.75	100.65
125	-843.84	0.47	26.98
126	-881.67	2.88	164.99
127	-626.17	1.13	64.91
128	-1072.67	2.47	141.62
129	829.14	1.72	98.71
130	-854.82	1.52	87.08
131	256.77	2.94	168.54
132	-1184.3	1.29	74.30
133	-794.19	1.47	84.38
134	-	-	-
135	-1184.3	1.59	91.37
136	-1079.54	2.22	127.35
137	810.28	3.09	177.25
138	-977.96	1.76	100.88
139	543.38	2.95	169.23
140	1085.4	1.68	96.70
141	-1050.78	2.03	116.47
142	-789.57	1.00	57.40
143	-954.04	2.64	151.30
144	-924.90	0.44	25.72
145	663.88	1.39	79.69
146	-1120.36	1.10	63.36
147	765.72	2.61	149.58
148	896.25	0.65	37.46
149	-997.74	1.20	69.03
150	1023.21	2.62	150.38
151	563.98	1.18	68.11
152	993.38	1.61	92.40
153	-1002.72	2.97	170.38
154	816.62	1.03	59.18
155	846.48	0.41	23.66
156	1085.4	1.30	74.82
157	794.41	1.20	69.20
158	-1038.80	1.08	62.27
159	-1126.83	2.90	166.31
160	1027.93	0.59	34.20
161	-1042.44	0.39	22.51
162	1085.4	1.82	104.44

163	-1184.3	0.69	39.98
164	-1101.26	2.26	129.47
165	811.94	2.42	138.75
166	-1047.57	1.21	69.37
167	923.27	1.19	68.57
168	-1104.19	0.73	42.33
169	-1131.51	1.09	62.79
170	-920.38	1.24	71.15
171	954.95	2.49	142.76
172	1033.81	2.03	116.58
173	-591.08	0.32	18.39
174	-1082.29	2.89	165.85
175	681.89	0.55	32.02
176	-984.76	2.69	154.28
177	-1034.64	1.76	100.88
178	-1134.95	2.59	148.66
179	-940.24	1.75	100.65
180	-1063.57	2.00	114.86
181	-942.84	2.90	166.59
182	1061.50	1.05	60.61
183	-1113.37	1.73	99.34
184	-997.10	0.71	40.84
185	-1022.17	0.48	27.55
186	-836.89	1.98	113.89
187	-725.77	1.14	65.42
188	994.61	1.44	82.78
189	1085.4	3.11	178.17
190	729.36	0.46	26.46
191	-1117.54	0.43	24.69
192	-765.61	0.64	36.72
193	-900.58	2.65	152.27
194	-622.27	2.93	167.97
195	1063.98	2.01	115.43
196	1042.97	1.67	95.90
197	-595.85	1.28	73.33
198	-955.24	1.49	85.87
199	877.17	2.62	150.27
200	672.72	1.34	76.88

Tabela 13 – Resultado do método Hwang &amp; Lee para a amostra II do catálogo III.

Cluster	Velocidade Rotacional	Ângulo (radiano)	Ângulo (grau)
1	761.15	2.39	137.15
2	112.67	0	0
3	869.23	0.74	42.85
4	156.88	0.14	8.19
5	569.55	0.42	24.52
6	879.06	1.85	106.33
7	-1081.13	2.57	147.23
8	672.72	0	0
9	591.98	2.86	164.30
10	591.98	2.04	117.38
11	-98.79	1.093	62.61
12	493.30	0	0
13	493.30	2.18	125.17
14	-427.73	0.52	30.02

---

15	990.82	2.74	157.49
16	423.40	2.48	142.48
17	707.11	0.52	30.02
18	-238.59	0.13	7.50
19	631.46	0.25	14.38
20	813.03	0.37	21.59
21	-367.20	1.75	100.77
22	722.24	1.00	57.57
23	-911.93	1.75	100.77
24	648.91	2.29	131.53
25	736.21	2.05	117.67
26	561.62	0.12	6.93
27	-398.63	1.08	62.27
28	412.89	2.90	166.65
29	-763.98	1.39	79.97
30	-848.04	1.16	66.68
31	-595.85	1.04	59.98
32	-511.79	2.79	160.01
33	-616.87	0.11	6.41
34	-616.87	1.45	83.58
35	-535.81	1.34	77.11
36	-535.81	0.11	6.41
37	-558.17	2.60	148.95
38	-558.17	1.30	74.47
39	-871.23	0.21	12.43
40	-714.70	2.27	130.33
41	-579.04	0.52	30.02
42	707.11	0.83	48.00
43	-427.73	1.57	90.00
44	-730.36	2.09	119.96
45	865.75	0.91	52.24
46	-671.78	2.02	116.12
47	572.88	1.62	92.86
48	-598.57	0.50	29.04
49	588.90	2.74	157.49
50	943.54	1.57	90.00
51	-900.58	2.65	151.87
52	-475.01	2.65	151.87
53	-1046.74	1.14	65.42
54	-977.96	0.28	16.38
55	-496.51	0.28	16.38
56	-583.49	2.21	127.06
57	-850.52	2.77	158.80
58	-	-	-
59	885.13	0.27	15.86
60	-17.02	1.25	72.01
61	566.61	1.07	61.70
62	112.67	1.79	102.83
63	896.25	3.05	174.96
64	707.11	0.96	54.99
65	770.16	0.08	4.98
66	717.34	0.42	24.34
67	-1122.95	2.80	160.52
68	717.34	0.76	43.77
69	1085.4	1.18	68.11
70	-587.01	2.39	137.38
71	786.75	1.07	61.58

---

72	-646.73	0.24	14.20
73	-1067.90	1.208	69.206
74	-835.11	1.20	69.20
75	-1067.90	1.20	69.20
76	-900.58	0.70	40.50
77	-673.61	2.27	130.50
78	858.43	1.41	81.00
79	863.96	0.91	52.65
80	-907.50	1.60	92.18
81	-464.63	2.45	140.47
82	-914.09	1.12	64.27
83	274.79	1.49	85.70
84	-1184.3	2.69	154.28
85	768.69	1.46	83.70
86	927.04	3.06	175.82
87	1085.4	2.19	125.58
88	-823.21	1.99	114.52
89	-1132.71	0.14	8.19
90	984.52	1.46	83.98
91	480.14	2.09	119.96
92	-326.85	0.27	15.98
93	-1184.3	0.06	3.89
94	-740.22	1.77	101.74
95	-641.54	1.43	82.15
96	-653.09	1.33	76.59
97	795.65	0.80	45.94
98	-806.01	2.22	127.47
99	-1184.3	0	0
100	1038.11	2.88	164.99
101	1039.08	1.02	58.78
102	575.87	2.24	128.55
103	813.03	0.81	46.80
104	631.46	2.07	118.76
105	1040.01	2.63	151.18
106	907.38	2.15	123.51
107	862.88	2.34	134.11
108	736.21	0.90	51.90
109	-311.33	0.42	24.23
110	785.62	2.90	166.37
111	-413.45	1.83	105.29
112	-884.52	2.72	156.23
113	-1184.3	2.85	163.33
114	202.73	2.09	119.96
115	-1019.23	1.42	81.81
116	755.26	0.57	32.71
117	-	-	-
118	234.26	2.58	147.86
119	727.02	3.08	176.79
120	567.74	1.15	66.28
121	694.07	1.51	86.90
122	615.80	1.84	105.52
123	-1068.89	1.22	70.18
124	931.52	1.65	94.58
125	-	-	-
126	-730.36	0.57	32.99
127	713.31	0.56	32.48
128	1085.4	2.98	171.12

129	-86.05	2.83	162.58
130	-	-	-
131	544.99	0.59	34.25
132	581.02	1.49	85.70
133	-936.05	0.04	2.80
134	305.19	1.71	98.42
135	-904.95	0.91	52.59
136	-730.36	1.06	60.89
137	535.17	2.61	149.98
138	810.28	2.61	149.98
139	577.25	2.72	155.82
140	678.88	1.21	69.83
141	-516.74	1.66	95.27
142	-625.09	0.50	28.70
143	-1151.40	2.09	119.96
144	-243.99	2.69	154.28
145	-373.69	2.87	164.53
146	-1152.33	0.17	10.14
147	-481.01	0.13	7.62
148	-1058.20	0.08	4.98
149	-997.74	0.64	37.00
150	-966.65	0.90	51.79
151	-540.19	3.14	180.00
152	502.63	0.17	9.73
153	510.40	2.55	146.37
154	308.92	0.41	23.66
155	-1094.70	1.90	108.90
156	-742.15	2.53	144.94
157	1027.20	2.94	168.43
158	-1038.80	0.16	9.22
159	-293.65	0.67	38.72
160	-207.46	1.07	61.52
161	-701.98	0.90	51.73
162	-651.90	1.35	77.74
163	-1100.23	0.54	31.10
164	974.68	2.33	133.88
165	-965.53	0.15	8.65
166	-1047.57	0.18	10.82
167	-914.09	1.30	74.99
168	764.97	0.59	33.85
169	979.83	2.19	125.58
170	-550.89	2.22	127.64
171	746.24	1.87	107.59
172	827.48	2.53	145.23
173	-384.74	2.32	132.91
174	906.88	0.70	40.44
175	-1159.08	2.65	151.99
176	935.74	3.07	176.05
177	-1134.41	2.27	130.56
178	-1184.3	1.02	58.66
179	-452.13	1.21	69.66
180	747.36	0.76	44.05
181	892.23	1.03	59.35
182	774.80	2.28	130.73
183	801.68	0.45	26.23
184	594.02	1.39	79.80
185	-1045.33	1.34	77.11

186	-489.49	1.41	80.83
187	-404.80	1.30	74.53
188	-1116.20	1.75	100.77
189	141.56	2.70	155.02
190	-984.03	0.27	15.86
191	-717.00	1.44	82.95
192	909.11	1.06	61.18
193	452.50	0.42	24.23
194	-989.75	0	0
195	-756.05	0.08	5.09
196	-887.33	0.35	20.16
197	-301.63	2.88	164.99
198	-1163.47	1.49	85.87
199	-1017.71	2.45	140.36
200	713.99	1.08	62.16

Na tabela 24 em Anexos listamos os valores das velocidades de rotação encontradas em cada um dos métodos. O nosso método mesmo detectando rotação em todos os aglomerados da amostra I não conseguiu identificar em alguns casos as velocidades rotacionais, situação que será analisada futuramente.

## 5.4 Correção da massa do aglomerado

Para o cálculo de correção da massa adotamos a sequência definida por [Manolopoulou e Plionis \(2016\)](#). Para a maioria dos aglomerados rotativos a dispersão de velocidades corrigida não é muito alterada, porém as alterações são relevantes. A correção é dada pela diferença relativa entre as dispersões de velocidade do aglomerado corrigida e não-corrigida, sendo definida como:

$$\delta\sigma_v = \frac{\sigma_v - \sigma_{v,cor}}{\sigma_v}, \quad (28)$$

e encontramos o valor da massa corrigida utilizando a fórmula 29

$$M_{cor} \simeq M(1 - \delta\sigma_v)^2. \quad (29)$$

Como alternativa, o cálculo pode ser realizado simplesmente pelo Teorema do Virial dado por:

$$M = \frac{V^2 R^2}{G}, \quad (30)$$

onde  $V$  é a velocidade rotacional,  $R$  é o raio,  $M$  a massa e  $G$  é a constante gravitacional.

Os resultados para os três catálogos são exibidos nas tabelas 14 a 16. Vemos na tabela 14 que 7 dos 11 aglomerados (64%) com indicação de rotação possuem  $\delta\sigma$

negativo, o que implica em um aumento de sua massa após a correção dada pela equação 29. Em apenas 4 dos 11 casos (36%) ocorre redução da massa. Notem que as variações de massa são significativas, indo de 15.89% a 28.0%. No caso da amostra do NoSOCS, tabela 15, encontramos um resultado inverso: em 18 dos 47 aglomerados (38%) vemos um aumento da massa dos aglomerados, enquanto em 30 sistemas (62%) obtivemos uma redução da massa após a correção. Notemos, mais uma vez, que as variações de massa são significativas, indo de 13.48% a 82.64%. Finalmente, para todos os aglomerados da amostra I do catálogo III vemos que  $\delta\sigma$  é negativo, implicando em aumento da massa corrigida. Uma vez que esta amostra corresponde a sistemas isolados artificialmente, isto pode indicar que a rotação nestes casos sempre leva a um aumento da massa virial.

É importante destacar que para o cálculo de correção da massa estamos considerando apenas a componente rotacional como contribuinte para o ajuste, não analisamos outras possíveis fontes, como desvios do próprio equilíbrio virial. Fazemos ainda a observação de que a correção não se aplica ao conjunto de dados da amostra II do catálogo III, uma vez que esta amostra foi definida sem rotação.

Tabela 14 – Cálculo correção da massa para o catálogo selec20.

Cluster	Anderson-Darling p-value	Vrot ( $km s^{-1}$ )	$\delta\sigma$	M200 ( $10^{14} M_\odot$ )	$M_{cor}$ ( $10^{14} M_\odot$ )
2	<b>0.0175</b>	1014.69	-0.06	6.7	7.59
4	0.5148	816.91	0.15	7.42	5.34
5	<b>0.0254</b>	1284.33	-0.19	14.98	21.07
7	<b>0.0005</b>	1878.89	-0.59	23.12	58.21
8	<b>0.0003</b>	824.97	0.08	4.8	4.04
9	<b>0.0021</b>	837.38	0.1	5.88	4.77
10	<b>0.0029</b>	1232.28	-0.08	17.91	20.93
11	<b>0.0001</b>	1154.06	-0.13	10.24	13.14
12	<b>0.0001</b>	2728.77	-0.99	53.6	212.33
16	0.2477	781.13	0.12	4.19	3.26
17	<b>&lt; 0.0001</b>	2239.97	-0.82	31.28	103.96

Tabela 15 – Cálculo correção da massa para o catálogo NoSOCS.

Cluster	Anderson-Darling p-value	Vrot ( $km s^{-1}$ )	$\Delta\sigma$	M200 ( $10^{14} M_\odot$ )	$M_{cor}$ ( $10^{14} M_\odot$ )
01238	<b>0.0042</b>	797.69	0.09	3.84	3.15
01831	0.1275	345.55	0.51	0.99	0.24
01836	0.4749	448.87	0.42	1.84	0.62
02433	0.2596	593.83	0.17	1.13	0.77
02440	0.8344	302.64	0.58	1.21	0.21
03176	0.5617	428.81	0.41	1.2	0.42
03907	0.4525	547.83	0.30	1.86	0.92
04470	0.4322	775.23	0.08	3.01	2.55
04681	0.5913	1084.22	-0.07	9.07	10.4
04703	<b>0.0016</b>	1147.11	-0.19	6.57	9.37
05359	0.9101	656.00	0.2	2.54	1.64
05447	0.2530	497.66	0.36	1.82	0.75
06256	0.2112	665.03	0.21	3.09	1.93
06286	<b>0.0431</b>	673.53	0.2	3.08	1.95

06547	<b>0.0012</b>	1104.74	-0.16	6.36	8.49
07703	0.2791	308.04	0.56	1.02	0.2
08022	0.5450	650.79	0.18	2.19	1.47
08721	0.8282	390.67	0.49	1.74	0.45
10006	0.8143	932.21	-0.02	5.02	5.24
10008	<b>0.0017</b>	1524.44	-0.59	6.81	17.32
10013	0.7772	933.65	-0.06	4.05	4.56
10015	<b>0.0146</b>	1291.87	-0.34	6.91	12.44
10016	<b>0.0097</b>	666.71	0.24	3.83	2.23
10018	0.5140	748.49	0.14	3.67	2.7
10020	<b>0.0039</b>	1195.4	-0.15	10.42	13.83
10023	<b>0.0007</b>	1738.54	-0.60	14.45	36.86
10024	<b>0.0008</b>	1873.25	-0.69	16.18	46.23
10027	0.3834	824.85	0.1	5.11	4.1
10028	<b>0.0025</b>	830.93	0.0	2.83	2.83
10029	<b>0.0040</b>	505.62	0.35	2.04	0.87
10030	0.6276	323.01	0.54	1.13	0.24
10031	<b>0.0086</b>	1070.37	-0.05	9.46	10.34
10035	0.4526	807.11	0.1	4.12	3.36
10036	0.4284	647.85	0.18	2.27	1.53
10037	<b>0.0122</b>	1141.23	-0.11	9.92	12.12
10040	0.1201	635.65	0.24	3.08	1.76
10043	<b>0.0102</b>	686.59	0.17	3.04	2.09
10044	< 0.0001	1431.5	-0.39	9.82	19.06
10045	<b>0.0019</b>	450.57	0.33	0.77	0.35
10050	0.0944	795.6	0.04	2.87	2.64
10051	< 0.0001	857.33	0.07	5.64	4.88
10053	< 0.0001	981.84	-0.03	6.93	7.34
10054	< 0.0001	1230.39	-0.22	9.81	14.51
10056	0.0748	1457.95	-0.34	12.99	23.49
10060	0.2142	803.62	0.10	4.31	3.52
10063	<b>0.0001</b>	1236.38	-0.35	5.26	9.56
10064	0.4375	1122.04	-0.12	8.36	10.57

Tabela 16 – Cálculo correção da massa para o catálogo III - amostra I.

Cluster	Anderson-Darling p-value	vrot ( $km\ s^{-1}$ )	$\Delta\sigma$	M200 ( $10^{14} M_{\odot}$ )	$M_{cor}$ ( $10^{14} M_{\odot}$ )
14	<b>0.0293</b>	844.81	-0.17	1.25	1.72
15	0.0577	873.67	-0.20	1.27	1.85
25	0.1552	769.92	-0.05	1.51	1.66
28	<b>0.0325</b>	1046.24	-0.37	1.59	3.00
40	0.0700	1012.17	-0.30	1.96	3.30
41	<b>0.0046</b>	1186.46	-0.51	2	4.54
47	<b>0.0315</b>	883.96	-0.10	2.21	2.70
53	<b>0.0094</b>	1235.94	-0.51	2.45	5.61
55	<b>0.0001</b>	1430.23	-0.73	2.54	7.64
62	<b>0.0022</b>	1270.69	-0.54	2.87	6.77
63	0.0801	1079.88	-0.29	2.92	4.82
69	<b>0.0153</b>	1404.31	-0.67	3.24	9.06
73	<b>0.0061</b>	1229.3	-0.46	3.47	7.38
74	0.0592	943.69	-0.10	3.53	4.26
79	<b>0.0080</b>	1056.99	-0.22	3.85	5.71
87	<b>0.0097</b>	1051.61	-0.17	4.42	6.10
90	<b>0.0179</b>	1328.09	-0.45	4.65	9.84
98	> 0.0001	1058.56	-0.16	5.34	7.22
100	<b>0.0001</b>	1485.14	-0.63	5.53	14.62

104	0.0109	1514.65	-0.64	5.92	15.87
105	> 0.0001	1884.19	-0.99	6.03	23.87
106	0.0013	1581.38	-0.71	6.13	17.86
111	0.0005	1427.92	-0.51	6.68	15.23
113	0.0006	1564.59	-0.61	6.92	18.00
116	> 0.0001	1778.92	-0.85	7.29	24.86
123	> 0.0001	1702.39	-0.75	8.22	25.08
128	0.0034	1524.91	-0.50	8.96	20.09
130	0.0004	1775.9	-0.77	9.28	29.06
135	> 0.0001	2259.56	-1.24	10.12	50.58
142	0.0005	1819.58	-0.76	11.42	35.51
144	> 0.0001	1710.17	-0.63	11.82	31.35
148	> 0.0001	1162.24	-0.11	12.66	15.47
156	> 0.0001	2103.29	-0.95	14.54	55.36
160	0.0003	1929.59	-0.78	15.58	49.14
162	0.0001	2097.63	-0.9	16.13	58.13
164	> 0.0001	1981.77	-0.79	16.69	53.52
167	> 0.0001	2593.04	-1.31	17.58	94.08
169	> 0.0001	2285.37	-1.03	18.2	74.64
171	> 0.0001	2260.4	-1.02	18.84	77.16
173	> 0.0001	2537.07	-1.25	19.5	98.52
176	> 0.0001	2566.57	-1.21	20.54	100.13
183	0.0014	2210.85	-0.85	23.17	79.57
184	0.0001	1651.4	-0.42	23.58	47.83
185	> 0.0001	2572.07	-1.20	23.99	116.21
187	> 0.0001	2518.29	-1.11	24.83	111.00
193	> 0.0001	1995.25	-0.66	27.54	76.25
194	> 0.0001	2467.91	-1.06	28.02	119.13
198	> 0.0001	2235.46	-0.80	30.03	97.20

Realizamos também o cálculo de correção da massa utilizando as velocidades rotacionais encontradas no método de Hwang & Lee. Os resultados são exibidos nas tabelas 17 a 19. No catálogo selec20 vemos que em 3 casos houve um aumento de massa após a correção. As variações de massa são significativas, indo de 12.5% a 38.2%. Para os demais casos resultou em uma redução da massa, variando de 1.3% a 52.5%. O catálogo de NoSocs houve um aumento na massa em aproximadamente 40.45% dos aglomerados, com taxa de variação superior a 15%. Já no catálogo III, amostra I, a redução da massa ocorreu em um total aproximado de 53.88% dos casos.

Tabela 17 – Cálculo de correção da massa para o catálogo selec20 para o método de Hwang & Lee.

Cluster	Vrot ( $km\ s^{-1}$ )	$\delta\sigma$	M200 ( $10^{14} M_{\odot}$ )	$M_{cor}$ ( $10^{14} M_{\odot}$ )
1	-724.22	0.31	11.76	5.59
2	-661.24	0.31	6.7	3.22
3	-1016.65	0.01	10.77	10.63
4	750.69	0.22	7.42	4.51
5	-790.08	0.27	14.98	7.97
6	656.37	0.33	7.34	3.34
7	-1067.9	0.1	23.12	18.8
8	852.35	0.05	4.8	4.31
9	703.58	0.24	5.88	3.36
10	-873.78	0.23	17.91	10.52

11	-1117.95	-0.1	10.24	12.33
12	-946.77	0.31	53.6	25.56
13	-891.43	0.18	14.03	9.37
14	-625.88	0.29	4.2	2.12
15	864.45	0.08	5.52	4.72
16	-1041.45	-0.18	4.19	5.79
17	-505.15	0.59	31.28	5.29
18	889.73	0.25	23.08	13.08
19	-1062.7	-0.06	8.37	9.42
20	944.22	0.11	12.36	9.7

Tabela 18 – Cálculo de correção da massa para o catálogo NoSOCS para o método de Hwang & Lee.

Cluster	Vrot ( $km\ s^{-1}$ )	$\delta\sigma$	M200 ( $10^{14} M_{\odot}$ )	$M_{cor}$ ( $10^{14} M_{\odot}$ )
00053	-587.01	0.32	3.47	1.59
00086	53.71	0.92	0.95	0.01
00339	-1184.3	-0.51	1.98	4.54
00719	488.11	0.38	2.05	0.78
00996	969.00	-0.12	3.63	4.59
01052	328.83	0.53	1.03	0.23
01189	-660.52	0.21	2.79	1.74
01238	-550.89	0.37	3.84	1.5
01264	782.77	-0.23	0.59	0.89
01347	644.06	0.32	6.22	2.85
01478	801.68	-0.3	0.46	0.77
01831	-1184.3	-0.69	0.99	2.82
01836	-356.52	0.54	1.84	0.39
01877	665.08	0.14	1.75	1.29
01933	643.25	0.13	1.45	1.1
02035	-383.22	0.42	0.69	0.23
02104	940.52	-0.02	5.02	5.2
02137	1016.62	-0.58	0.63	1.58
02182	581.02	-0.13	0.16	0.2
02186	631.46	-0.09	0.32	0.38
02249	1085.4	-0.98	0.22	0.86
02298	761.15	-0.07	1.09	1.24
02301	-816.24	0	2.51	2.5
02433	-352.07	0.51	1.13	0.27
02440	-503.39	0.3	1.21	0.59
02447	631.46	0.12	1.14	0.89
02469	-1002.72	-0.29	1.9	3.15
02490	789.35	-0.3	0.41	0.69
02752	177.52	0.78	2.36	0.11
02759	672.72	0.15	2.04	1.47
02789	376.11	0.31	0.21	0.1
02827	-116.2	0.79	0.24	0.01
02899	-286.97	0.54	0.52	0.11
03031	-771.62	-0.4	0.23	0.45
03112	561.62	0.22	1.19	0.72
03176	722.24	0	1.2	1.19
03229	436.91	0.48	2.81	0.77
03459	-1042.44	-0.03	8.84	9.41
03565	-404.09	0.4	0.8	0.29
03631	-1184.3	-1.28	0.15	0.78
03691	-751.97	-0.04	1.17	1.26

---

03742	-842.29	-0.04	2.44	2.62
03898	-1184.3	-0.39	3.23	6.21
03907	-603.67	0.22	1.86	1.12
03915	-324.56	0.65	5.22	0.64
03975	-191.30	0.75	1.54	0.1
04023	-715.55	0.23	5.67	3.32
04048	1007.13	-0.47	0.93	2
04100	517.97	0.3	1.4	0.69
04376	761.15	-0.31	0.33	0.57
04404	672.72	0.05	1.05	0.95
04405	217.57	0.63	0.33	0.05
04409	-977.96	-0.17	2.8	3.82
04458	594.65	0.29	2.81	1.43
04470	-316.47	0.62	3.01	0.42
04479	-238.59	0.6	0.41	0.06
04537	-276.42	0.48	0.21	0.06
04641	328.83	0.45	0.37	0.11
04672	-942.84	-0.46	0.62	1.32
04681	958.52	0.05	9.07	8.12
04703	1034.96	-0.08	6.57	7.63
04710	599.03	-0.02	0.36	0.37
05039	-860.05	-0.28	0.76	1.24
05206	177.52	0.74	0.89	0.06
05325	-690.88	0.08	1.48	1.25
05359	-700.59	0.14	2.54	1.87
05447	315.32	0.59	1.82	0.3
05535	-522.30	0.29	1.39	0.7
05717	916.01	-0.08	3.03	3.56
05780	1085.4	-0.5	1.19	2.69
05859	768.69	0	1.74	1.72
05908	-745.00	-0.06	1.08	1.21
06070	653.07	0.15	1.75	1.27
06173	-1184.30	-0.4	3.14	6.12
06175	-276.42	0.54	0.39	0.08
06184	-1016.17	-0.47	0.92	1.99
06207	-616.87	0.05	0.63	0.57
06233	697.89	0.13	2.19	1.66
06256	-679.92	0.19	3.09	2.02
06261	-1184.3	-0.52	1.9	4.39
06264	-197.47	0.74	1.51	0.11
06286	-625.09	0.26	3.08	1.68
06392	-377.29	0.5	1.51	0.38
06447	457.61	0.46	3.22	0.93
06475	-739.26	0.12	2.83	2.21
06506	1039.08	-0.12	5.24	6.59
06508	-639.57	0.3	4.94	2.4
06547	942.26	0.01	6.36	6.18
06723	-427.73	0.4	1.01	0.37
06758	-697.93	-0.12	0.48	0.6
06841	678.01	0.22	3.57	2.19
06861	-616.87	-0.16	0.2	0.27
06924	-922.41	-0.1	2.75	3.34
07204	-771.62	0.01	1.79	1.77
07217	98.57	0.83	0.33	0.01
07395	274.79	0.62	1.11	0.16
07435	-907.50	-0.12	2.29	2.9
07520	-427.73	0.35	0.69	0.29

07584	1085.40	-0.52	1.1	2.52
07703	-797.96	-0.14	1.02	1.34
07775	917.27	-0.05	3.63	4
07815	561.62	0.01	0.29	0.28
07837	653.07	-0.05	0.48	0.53
07975	-1119.45	-0.6	0.99	2.52
08022	722.24	0.09	2.19	1.81
08173	1085.4	-0.62	0.77	2.03
08219	722.24	-0.23	0.33	0.5
08291	-914.09	-0.02	4.26	4.43
08338	684.86	-0.03	0.73	0.77
08710	-1039.42	-0.48	1.03	2.27
08721	-1184.3	-0.53	1.74	4.09
08738	-911.93	-0.24	1.31	2.01
08742	-896.08	-0.01	4.06	4.15
08975	740.01	0.01	1.55	1.51
09061	-1133.86	-0.28	3.76	6.2
09075	-706.46	-0.08	0.64	0.74
09132	-394.83	0.38	0.51	0.2
09148	-427.73	0.5	3.06	0.78
09153	789.35	-0.11	1.11	1.36
09157	490.95	0.24	0.64	0.37
09162	431.41	0.39	0.97	0.37
09176	730.75	0.1	2.36	1.91
09177	156.88	0.78	1	0.05
10001	362.21	0.65	11.58	1.38
10004	-863.87	-0.19	1.33	1.88
10006	525.74	0.42	5.02	1.67
10008	-1128.48	-0.18	6.81	9.49
10009	-849.42	-0.15	1.45	1.92
10010	-659.22	0.16	2.15	1.53
10013	-650.25	0.26	4.05	2.21
10014	1085.40	-0.34	2.36	4.21
10015	509.75	0.47	6.91	1.94
10016	786.09	0.1	3.83	3.11
10017	-1053.85	-0.23	3.47	5.28
10018	-1077.90	-0.24	3.67	5.6
10019	-1071.60	-0.22	3.88	5.77
10020	-441.12	0.57	10.42	1.88
10021	1085.4	-0.35	2.31	4.21
10022	780.92	0.08	3.41	2.86
10023	-841.70	0.23	14.45	8.64
10024	-1042.44	0.06	16.18	14.31
10025	-1020.88	-0.2	3.44	4.96
10026	839.07	0.1	5.8	4.68
10027	978.59	-0.06	5.11	5.77
10028	-695.88	0.16	2.83	1.99
10029	1034.58	-0.34	2.04	3.64
10030	-392.54	0.44	1.13	0.35
10031	890.85	0.13	9.46	7.16
10032	-271.48	0.72	6.72	0.53
10033	537.54	0.37	3.29	1.3
10034	601.69	0.34	4.94	2.13
10035	926.12	-0.04	4.12	4.43
10036	-1165.06	-0.47	2.27	4.93
10037	-679.92	0.34	9.92	4.3
10038	615.34	0.41	10.65	3.74

10039	626.05	0.33	5.88	2.6
10040	575.87	0.31	3.08	1.45
10041	-1042.44	-0.08	6.68	7.83
10042	-305.70	0.63	2.82	0.38
10043	196.34	0.76	3.04	0.17
10044	995.12	0.03	9.82	9.21
10045	1043.36	-0.56	0.77	1.87
10047	-782.58	0.22	8.35	5.14
10048	-1158.98	-0.03	16.93	17.84
10049	-383.22	0.46	1.11	0.32
10050	-587.01	0.29	2.87	1.44
10051	409.31	0.56	5.64	1.11
10052	-276.42	0.67	2.83	0.3
10053	1003.97	-0.05	6.93	7.68
10054	-629.57	0.38	9.81	3.8
10055	-875.79	0.14	8.98	6.71
10056	-1092.59	-0.01	12.99	13.19
10058	-902.05	0.16	13	9.16
10059	-194.16	0.77	3.83	0.19
10060	793.09	0.11	4.31	3.42
10062	-906.37	-0.15	1.97	2.62
10063	398.24	0.57	5.26	0.99
10064	414.8	0.58	8.36	1.44

Tabela 19 – Cálculo de correção da massa para o catálogo III amostra I para o método de Hwang & Lee.

Cluster	Vrot ( $km\ s^{-1}$ )	$\delta\sigma$	M200 ( $10^{14} M_{\odot}$ )	M <sub>cor</sub> ( $10^{14} M_{\odot}$ )
1	-968.13	-0.41	1	1.99
2	-1076.21	-0.54	1.02	2.43
3	761.15	-0.07	1.04	1.19
4	-462.12	0.35	1.05	0.45
5	-358.95	0.5	1.07	0.27
6	-1081.13	-0.53	1.09	2.56
7	-977.96	-0.38	1.11	2.1
8	-565.29	0.21	1.13	0.71
9	-394.83	0.45	1.15	0.35
10	-888.25	-0.24	1.17	1.79
11	-789.57	-0.11	1.19	1.45
12	-493.52	0.31	1.21	0.57
13	986.71	-0.38	1.23	2.33
14	-711.44	0.01	1.25	1.22
15	-900.58	-0.24	1.27	1.96
16	-995.15	-0.39	1.3	2.5
17	-1089.72	-0.52	1.32	3.03
18	801.68	-0.1	1.34	1.62
19	722.24	0.02	1.36	1.31
20	268.3	0.64	1.39	0.18
21	903.82	-0.22	1.41	2.1
22	-1002.72	-0.35	1.44	2.62
23	-821.14	-0.12	1.46	1.83
24	998.1	-0.34	1.49	2.69
25	823.51	-0.12	1.51	1.9
26	-573.22	0.24	1.54	0.89
28	-1016.17	-0.33	1.59	2.83
29	-511.79	0.32	1.62	0.75

30	-848.04	-0.12	1.65	2.07
31	-595.85	0.21	1.68	1.05
32	412.89	0.46	1.71	0.5
33	761.15	0	1.74	1.75
34	1004.33	-0.31	1.77	3.02
35	-778.99	0	1.8	1.81
36	-1022.17	-0.33	1.83	3.26
37	-714.7	0.07	1.86	1.63
38	-714.7	0.07	1.89	1.64
39	850.6	-0.08	1.93	2.25
40	1007.13	-0.29	1.96	3.27
41	1009.74	-0.28	2	3.29
42	-579.04	0.25	2.03	1.13
43	-1032.98	-0.3	2.07	3.51
45	-1184.3	-0.52	2.14	4.94
46	-891.43	-0.13	2.18	2.76
47	-891.43	-0.11	2.21	2.75
48	1085.4	-0.34	2.25	4.06
49	-758.73	0.04	2.29	2.1
50	943.54	-0.19	2.33	3.28
51	943.54	-0.16	2.37	3.19
52	-900.58	-0.1	2.41	2.94
53	-909.18	-0.11	2.45	3.03
54	879.06	-0.1	2.5	3.02
55	-1046.74	-0.27	2.54	4.09
56	-984.03	-0.22	2.59	3.84
57	885.13	-0.08	2.63	3.07
58	-783.76	0.06	2.68	2.39
59	951.88	-0.17	2.72	3.72
60	-1119.45	-0.38	2.77	5.24
61	-1054.6	-0.27	2.82	4.58
62	-730.36	0.12	2.87	2.24
63	1022.35	-0.22	2.92	4.32
64	1085.4	-0.31	2.97	5.08
65	-932.11	-0.11	3.02	3.73
66	-570.86	0.31	3.07	1.45
67	901.37	-0.07	3.13	3.56
68	-1184.3	-0.39	3.18	6.15
69	533.31	0.36	3.24	1.31
71	-467.55	0.45	3.35	1.03
72	965.94	-0.12	3.41	4.25
73	-951.51	-0.13	3.47	4.42
74	-1184.3	-0.38	3.53	6.71
75	1027.2	-0.19	3.59	5.04
76	-1070.81	-0.23	3.65	5.51
78	1085.4	-0.24	3.78	5.78
79	-907.5	-0.05	3.85	4.21
80	-962.86	-0.1	3.91	4.78
81	1085.4	-0.25	3.98	6.25
82	977.31	-0.11	4.05	5.02
83	-1130.26	-0.3	4.12	6.98
84	977.31	-0.11	4.19	5.13
85	-1131.51	-0.28	4.27	6.97
86	1085.4	-0.23	4.34	6.54
87	-973.16	-0.09	4.42	5.22
89	-410.53	0.54	4.57	0.97
90	1034.96	-0.13	4.65	5.98

91	-982.54	-0.1	4.73	5.77
92	-1184.3	-0.32	4.81	8.37
93	-1134.95	-0.24	4.9	7.54
94	740.01	0.18	4.98	3.32
95	-1134.95	-0.24	5.07	7.8
96	-1039.42	-0.12	5.16	6.51
97	988.81	-0.08	5.25	6.1
98	707.11	0.22	5.34	3.22
99	-947.87	-0.04	5.43	5.84
100	1085.4	-0.19	5.53	7.81
101	1085.4	-0.15	5.62	7.48
102	-582.13	0.37	5.72	2.31
104	404.49	0.56	5.92	1.13
105	858.43	0.09	6.03	4.95
106	-739.26	0.2	6.13	3.9
107	284.32	0.7	6.24	0.56
108	736.21	0.23	6.35	3.8
109	-1009.7	-0.06	6.46	7.27
110	956.92	0	6.57	6.51
111	699.97	0.26	6.68	3.66
112	-1098.65	-0.16	6.8	9.19
113	538.99	0.44	6.92	2.14
114	959.3	0.01	7.04	6.84
115	-606.55	0.37	7.16	2.83
116	-1143.03	-0.19	7.29	10.27
117	-778.99	0.21	7.41	4.68
118	801.68	0.18	7.54	5.02
119	-1104.66	-0.11	7.67	9.54
120	-1064.84	-0.09	7.81	9.32
121	-910.37	0.09	7.94	6.63
122	928.86	0.05	8.08	7.31
123	-1184.3	-0.22	8.22	12.14
124	-1030.42	-0.04	8.37	9.12
125	-843.84	0.16	8.51	5.98
126	-881.67	0.1	8.66	6.94
127	-626.17	0.36	8.81	3.57
128	-1072.67	-0.05	8.96	9.94
129	829.14	0.18	9.12	6.18
130	-854.82	0.15	9.28	6.73
131	256.77	0.74	9.44	0.62
132	-1184.3	-0.16	9.61	13.03
133	-794.19	0.23	9.77	5.8
135	-1184.3	-0.17	10.12	13.9
136	-1079.54	-0.06	10.29	11.59
137	810.28	0.21	10.47	6.51
138	-977.96	0.06	10.65	9.32
139	543.38	0.48	10.84	2.95
140	1085.4	-0.04	11.03	11.93
141	-1050.78	0	11.22	11.14
142	-789.57	0.23	11.42	6.69
143	-954.04	0.09	11.61	9.57
144	-924.9	0.12	11.82	9.17
145	663.88	0.37	12.02	4.81
146	-1120.36	-0.05	12.23	13.55
147	765.72	0.28	12.45	6.46
148	896.25	0.15	12.66	9.2
149	-997.74	0.06	12.88	11.48

---

150	1023.21	0.05	13.11	11.83
151	563.98	0.47	13.34	3.72
152	993.38	0.07	13.57	11.75
153	-1002.72	0.07	13.8	11.87
154	816.62	0.24	14.04	8.15
155	846.48	0.21	14.29	8.88
156	1085.4	-0.01	14.54	14.74
157	794.41	0.26	14.79	8.06
158	-1038.8	0.04	15.05	13.91
159	-1126.83	-0.02	15.31	16.08
160	1027.93	0.05	15.58	13.95
161	-1042.44	0.07	15.85	13.82
162	1085.4	0.02	16.13	15.56
163	-1184.3	-0.08	16.41	19.29
164	-1101.26	0	16.69	16.53
165	811.94	0.28	16.98	8.80
166	-1047.57	0.06	17.28	15.28
167	923.27	0.18	17.58	11.93
168	-1104.19	0.01	17.89	17.54
169	-1131.51	0	18.2	18.30
170	-920.38	0.18	18.51	12.38
171	954.95	0.14	18.84	13.77
172	1033.81	0.1	19.16	15.4
173	-591.08	0.48	19.5	5.35
174	-1082.29	0.05	19.84	18.05
175	681.89	0.41	20.18	7.10
176	-984.76	0.15	20.54	14.74
177	-1034.64	0.12	20.89	16.33
178	-1134.95	0.01	21.26	20.98
179	-940.24	0.2	21.63	13.87
180	-1063.57	0.09	22	18.15
181	-942.84	0.19	22.39	14.52
182	1061.5	0.08	22.78	19.10
183	-1113.37	0.07	23.17	20.18
184	-997.1	0.14	23.58	17.44
185	-1022.17	0.13	23.99	18.35
186	-836.89	0.3	24.41	12.01
187	-725.77	0.39	24.83	9.22
188	994.61	0.15	25.26	18.05
189	1085.4	0.08	25.7	21.88
190	729.36	0.4	26.15	9.45
191	-1117.54	0.06	26.61	23.35
192	-765.61	0.37	27.07	10.71
193	-900.58	0.25	27.54	15.53
194	-622.27	0.48	28.02	7.57
195	1063.98	0.13	28.51	21.55
196	1042.97	0.15	29.01	21.17
197	-595.85	0.51	29.51	7.17
198	-955.24	0.23	30.03	17.75
199	877.17	0.29	30.55	15.31
200	672.72	0.45	31.08	9.49

---

## 6 Considerações Finais

### 6.1 Discussão

Neste trabalho apresentamos um método de detecção de rotação em aglomerados de galáxias desenvolvido em linguagem R. Nosso objetivo foi investigar um dos aspectos menos estudados a respeito de aglomerados, que é a possibilidade de que eles tenham algum grau de rotação. Não levar em consideração a rotação de aglomerados pode gerar um erro nas suas estimativas de massa, como vimos na Seção 5.4. O entendimento, controle e redução deste tipo de erro são de grande importância para a astrofísica extragaláctica.

Utilizamos os catálogos **selec20**, composto por 20 aglomerados; **NoSocs**, com 183 aglomerados, sendo que 25 aglomerados continham um total inferior a 20 objetos, que foram removidos da amostra por serem inviáveis para o cálculo de detecção; e **Modelos**, que consistem em esferas NFW com características rotacionais conhecidas, ou seja, correspondendo a duas amostras de aglomerados, com rotação e sem rotação, respectivamente.

Além da aplicação do nosso método a estes catálogos, implementamos o método de Hwang & Lee que utiliza a relação senoidal para o cálculo do ângulo do eixo de rotação  $\theta_o$  e a velocidade de rotação  $v_{rot}$ . A princípio para o método de Hwang & Lee todos os aglomerados possuem rotação, o que difere é o grau de rotação. Os resultados foram comparados e como conclusão temos que:

- **Para o catálogo I (selec20):** o nosso método detectou evidência de rotação para 7% a 43% da amostra, dependendo da convergência entre testes estatísticos aplicados. Já o método de Hwang & Lee detectou um grau de rotação para todos os aglomerados.
- **Para o catálogo II (NoSocs):** neste caso, nosso método detectou rotação em 6% a 41% dos casos. Diferentemente, o método de Hwang & Lee detectou rotação em  $\sim 97\%$  deles.
- **Para o catálogo III:** para este catálogo simulamos duas amostras, I e II, com 200 aglomerados em cada uma delas. Na amostra I todos os aglomerados tinham um grau de rotação, definido pelas condições de equilíbrio do sistema, e respondendo a uma curva Kepleriana. Já na amostra II, todos os aglomerados eram sem rotação. Usando nosso método, para a amostra I, detectamos rotação em todos os aglomerados. Contudo, se considerarmos a concordância entre os testes estatísticos,

podemos ter uma drástica redução deste número para frações abaixo de 60%. Por outro lado, o método de Hwang & Lee detecta rotação em 96% dos casos. Para a amostra II, o nosso método detectou rotação em 13.5% dos aglomerados e o de Hwang & Lee um total de 98%. Se considerarmos os casos em que a velocidade de rotação detectada é menor que 10% da dispersão de velocidades do sistema, este número cairia para 77%, um valor ainda muito alto de falsos positivos.

A comparação entre os métodos não é simples. O método HL só não detecta rotação quando o ajuste da senoidal, dada pela Eq. 25, resulta em uma velocidade de rotação exatamente nula, o que só acontece em poucos casos, ou quando os valores de velocidade são considerados baixos comparando-se com a dispersão de velocidades do aglomerado. Já o nosso método permite que o usuário defina o seu grau de conservadorismo frente aos resultados, levando em conta a maior ou menor concordância entre os testes estatísticos utilizados. O uso das amostradas simuladas, no entanto, permite-nos afirmar que o método HL leva à detecção excessiva de aglomerados com rotação, o que representa uma desvantagem do método. Por outro lado, nosso método produz poucos falsos positivos, que ainda podem ser reduzidos através dos testes estatísticos. Ou seja, de modo geral, nosso método detectará um menor número de aglomerados com rotação do que HL, mas os nossos resultados são mais robustos.

Quanto aos valores das velocidades de rotação obtidos, nosso método tem um pequeno viés para valores mais altos que HL, embora seja um número pequeno de aglomerados que produz este viés. Se removidos, vemos nas Figuras 10 e 11, um razoável acordo para as velocidades obtidas, considerando-se que são métodos aproximativos e com alto grau de incertezas devido à falta de informação tridimensional.

No que se refere à correção da massa estimada dos sistemas, notamos que estas podem implicar tanto em aumento como em redução de massa, dependendo do fator de correção  $\delta\sigma$  ser negativo ou positivo, respectivamente. Isto acontece nas amostras observadas, enquanto na amostra simulada, nosso método encontra sempre um aumento da massa virial, enquanto o método HL encontra casos de aumento e redução de massa em proporções quase iguais. Esta diferença de resultados é um ponto a ser investigado futuramente. Contudo, se nosso método estiver correto e de fato houver sempre aumentos da massa virial, isto poderia estar associado ao fato de as esferas de NFW serem por definição sistemas isolados, diferentemente dos aglomerados reais, sempre inseridos e em interação com suas vizinhanças. Não podemos descartar, no entanto, algum viés de construção destes modelos, algo a ser investigado futuramente. Caso HL estiver estimando correções corretas para a massa, isto significaria haver algum viés em nosso modelo, que se manifesta sistematicamente quando aplicado a dados simulados.

Por fim, não é conclusiva a relação entre a normalidade da distribuição de velocidades e a ocorrência de rotação. Nos aglomerados do catálogo *selec20*, parece haver um forte favorecimento da correlação rotação-não-gaussianidade. Mas, no catálogo *Nosocs*, isto não acontece.

## 6.2 Conclusão

Implementamos em R um método para detecção e estimação de velocidade de rotação em aglomerados de galáxias. O método oferece uma graduação de diagnósticos de acordo com testes estatísticos que permitem maior ou menor conservadorismo do usuário em relação a este grau de liberdade do aglomerado. O método fornece um meio para corrigir a massa virial dos aglomerados. Comparado ao método de HL, temos resultados mais seguros quanto à detecção da rotação, embora nosso método apresente um pequeno viés para velocidades mais altas e correções de massa diferentes no caso de esferas rotativas de NFW.

## 6.3 Perspectivas

Entre os próximos passos deste trabalho, pretendemos:

1. Implementar e testar o método de [Manolopoulou e Plionis \(2016\)](#).
2. Fazer uma seleção de aglomerados com indicação de rotação acima de 1000 km/s para buscar contrapartida em dados em raios-X.
3. Definir um erro estatístico em torno das velocidades de rotação encontradas.
4. Refazer a comparação dos métodos, já levando em conta o de [Manolopoulou e Plionis \(2016\)](#), usando um catálogo mais extenso, compreendendo pelo menos 500 aglomerados.
5. Compreender a significativa diferença de resultados para a correção de massa de sistemas simulados, esferas de NFW, entre o nosso método e HL.
6. Nos casos em que os sistemas estiverem fora do equilíbrio, obter uma nova expressão para a massa corrigida.

## Referências

- ANDREON, S.; BERGÉ, J. Richness-mass relation self-calibration for galaxy clusters. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 547, p. A117, 2012.
- BACHMAN, R.; PATERNOSTER, R. **Statistics for criminology and criminal justice**. [S.l.]: SAGE, 2017.
- BEERS, T. C.; GEBHARDT, K.; FORMAN, W.; HUCHRA, J. P.; JONES, C. A dynamical analysis of twelve clusters of galaxies. **The Astronomical Journal**, v. 102, p. 1581–1609, 1991.
- BULLOCK, J. S.; KOLATT, T. S.; SIGAD, Y.; SOMERVILLE, R. S.; KRAVTSOV, A. V.; KLYPIN, A. A.; PRIMACK, J. R.; DEKEL, A. Profiles of dark haloes: evolution, scatter and environment. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 321, n. 3, p. 559–575, 2001.
- CIRILLO, M. A.; FERREIRA, D. F. Extensão do teste para normalidade univariado baseado no coeficiente de correlação quantil-quantil para o caso multivariado. **Revista de Matemática e Estatística, São Paulo**, v. 21, n. 3, p. 67–84, 2003.
- COMERFORD, J. M.; NATARAJAN, P. The observed concentration–mass relation for galaxy clusters. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 379, n. 1, p. 190–200, 2007.
- COMPUTING, S. **The R Project for Statistical Computing**. 2012. Disponível em: <<https://www.r-project.org/>>. Acesso em: 25 de agosto de 2019.
- CRAMER, D.; HOWITT, D. L. **The Sage dictionary of statistics: a practical resource for students in the social sciences**. [S.l.]: Sage, 2004.
- DUPKE, R. A.; BREGMAN, J. N. Direct measurements of gas bulk flows in the intracluster medium of the centaurus cluster with the chandra satellite. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 639, n. 2, p. 781, 2006.
- FANG, T.; HUMPHREY, P.; BUOTE, D. Rotation and turbulence of the hot intracluster medium in galaxy clusters. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 691, n. 2, p. 1648, 2009.
- FRIAÇA, A. C. S. e. a. **Astronomia: Uma Visão Geral do Universo**. [S.l.]: EDUSP, 2008.
- GAL, R.; CARVALHO, R. D.; LOPES, P.; DJORGOVSKI, S.; BRUNNER, R. J.; MAHABAL, A.; ODEWAHN, S. C. The northern sky optical cluster survey. ii. an objective cluster catalog for 5800 square degrees. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 125, n. 4, p. 2064, 2003.
- GAL, R.; CARVALHO, R. D.; ODEWAHN, S.; DJORGOVSKI, S.; MARGONINER, V. The northern sky optical cluster survey. i. detection of galaxy clusters in dposs. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 119, n. 1, p. 12, 2000.

- GAL, R.; LOPES, P.; CARVALHO, R. D.; KOHL-MOREIRA, J.; CAPELATO, H.; DJORGOVSKI, S. The northern sky optical cluster survey. iii. a cluster catalog covering pi steradians. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 137, n. 2, p. 2981, 2009.
- GAL, R. R.; CARVALHO, R. D.; ODEWAHN, S. C.; DJORGOVSKI, S.; MAHABAL, A.; BRUNNER, R. J.; LOPES, P. The digitized second palomar observatory sky survey (dposs). ii. photometric calibration. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 128, n. 6, p. 3082, 2004.
- HOTELLING, H. The generalization of student's ratio. In: **Breakthroughs in statistics**. [S.l.]: Springer, 1992. p. 54–65.
- HWANG, H. S.; LEE, M. G. Searching for rotating galaxy clusters in sdss and 2dfgrs. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 662, n. 1, p. 236, 2007.
- KALINKOV, M.; VALCHANOV, T.; VALTCHANOV, I.; KUNEVA, I.; DISSANSKA, M. Rotation of the cluster of galaxies a2107. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 359, n. 4, p. 1491–1497, 2005.
- LEE, S.-W.; ROOD, H. L. The shape and virial theorem of a star cluster in the galactic tidal force field. **Journal of Korean Astronomical Society**, v. 2, p. 1–9, 1969.
- LEOTTI, V. B.; COSTER, R.; RIBOLDI, J. Normalidade de variáveis: métodos de verificação e comparação de alguns testes não-paramétricos por simulação. **Revista HCPA. Porto Alegre**. Vol. 32, no. 2 (2012), p. 227-234, 2012.
- LIEBER, R. L. Statistical significance and statistical power in hypothesis testing. **Journal of Orthopaedic Research**, Wiley Online Library, v. 8, n. 2, p. 304–309, 1990.
- LIU, A.; TOZZI, P. Testing the rotation versus merger scenario in the galaxy cluster abell 2107. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 485, n. 3, p. 3909–3918, 2019.
- LOPES, P.; CARVALHO, R. D.; KOHL-MOREIRA, J.; JONES, C. Nosocs in sdss–i. sample definition and comparison of mass estimates. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 392, n. 1, p. 135–152, 2009.
- LOPES, P. A.; CARVALHO, R. D.; CAPELATO, H.; GAL, R.; DJORGOVSKI, S.; BRUNNER, R. J.; ODEWAHN, S. C.; MAHABAL, A. X-ray galaxy clusters in nosocs: Substructure and the correlation of optical and x-ray properties. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 648, n. 1, p. 209, 2006.
- LOPES, P. A.; CARVALHO, R. D.; GAL, R.; DJORGOVSKI, S.; ODEWAHN, S. C.; MAHABAL, A.; BRUNNER, R. J. The northern sky optical cluster survey. iv. an intermediate-redshift galaxy cluster catalog and the comparison of two detection algorithms. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 128, n. 3, p. 1017, 2004.
- MANOLOPOULOU, M.; PLIONIS, M. Galaxy cluster's rotation. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, 2016.
- MATERNE, J.; HOPP, U. The cluster of galaxies sc0316-44-does it rotate? **Astronomy and Astrophysics**, v. 124, p. L13–L15, 1983.

- NASCIMENTO, R.; RIBEIRO, A.; TREVISON, M.; CARRASCO, E.; PLANA, H.; DUPKE, R. Dynamical analysis of the cluster pair: A3407+ a3408. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 460, n. 2, p. 2193–2206, 2016.
- NASCIMENTO, R. S. **Estudo da dinâmica de pares de aglomerados de galáxias**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2012.
- NAVARRO, J. F.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. A universal density profile from hierarchical clustering. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 490, n. 2, p. 493, 1997.
- ODEWAHN, S. C.; CARVALHO, R. D.; GAL, R.; DJORGOVSKI, S.; BRUNNER, R.; MAHABAL, A.; LOPES, P.; MOREIRA, J. K.; STALDER, B. The digitized second palomar observatory sky survey (dposs). iii. star-galaxy separation. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 128, n. 6, p. 3092, 2004.
- OEGERLE, W. R.; HILL, J. M. Structure, rotation, and the peculiar velocity cd galaxy in abell 2107. **The Astronomical Journal**, v. 104, p. 2078–2085, 1992.
- OLIVEIRA F.; VIEGAS, S. M. M. de. **Astronomia: Uma Visão Geral do Universo**. [S.l.]: EDUSP, 2004.
- REMBOLD, S. B. **Tópicos especiais em física: Astronomia**. Ilhéus: Editora Editus, 2011.
- RIBEIRO, A. L.; LOPES, P. A.; TREVISON, M. Non-gaussian velocity distributions—the effect on virial mass estimates of galaxy groups. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 413, n. 1, p. L81–L85, 2011.
- RINES, K.; DIAFERIO, A. Cirs: Cluster infall regions in the sloan digital sky survey. i. infall patterns and mass profiles. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 132, n. 3, p. 1275, 2006.
- RYDEN, B. **Introduction to cosmology**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017.
- SAMPAIO, F. S. **Estudo da Distribuição de velocidades em aglomerados de galáxias - Testes de Não Rejeitabilidade e metanálise de Fisher**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013.
- SONG, H.; HWANG, H. S.; PARK, C.; SMITH, R.; EINASTO, M. A redshift survey of the nearby galaxy cluster a2107: Global rotation of the cluster and its connection to large-scale structures in the universe. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 869, n. 2, p. 124, 2018.
- SPRINGEL, V.; WHITE, S. D. Tidal tails in cold dark matter cosmologies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Wiley Online Library, v. 307, n. 1, p. 162–178, 1999.
- TOVMASSIAN, H. M. The rotation of galaxy clusters. **Astrophysics**, Springer, v. 58, n. 3, p. 328–337, 2015.
- VELÁSQUEZ, C. A. M. **Estimativa de Parâmetros Cosmológicos usando Aglomerados de Galáxias**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

WAINER, H.; SCHACHT, S. Gapping. **Psychometrika**, Springer, v. 43, n. 2, p. 203–212, 1978.

YAHIL, A.; VIDAL, N. The velocity distribution of galaxies in clusters. **The Astrophysical Journal**, v. 214, p. 347–350, 1977.

## Apêndices

## APÊNDICE A – Código do nosso método

```

library(astro)
library(ellipse)
library(cosmoFns)
library(cramer)
library(Hotelling)

dist_2_points <- function(x1, x2) {
  return(sqrt(sum((x1 - x2)^2)))
}

# função distância entre um ponto e uma reta
dist_point_line <- function(a, slope, intercept) {
  b = c(1, intercept+slope)
  c = c(-intercept/slope, 0)
  v1 <- b - c
  v2 <- a - b
  m <- cbind(v1,v2)

  return(det(m))/sqrt(sum(v1*v1))
}

# função omega
omegaV <- function(a_point, b_point, center, R200, M200) {
  G = 4.30e-9 # mpc Msun km/s

  a = dist_2_points(a_point, center)
  b = dist_2_points(b_point, center)

  e = 1 - (b/a)
  velocity = sqrt((1/R200^4) * G * M200 * a * (1 - e^2))

  return(velocity/(R200*3.08e19))
}

myInputC = read.table("info.txt")
inputC = data.frame(cl = myInputC$V1, sigma = myInputC$V9, R200 = myInputC$V18, M200 = myInputC$V21)

myInput = read.table('selec20.dat')

inputT = data.frame(clusterID = myInput$clusterID, ra = myInput$ra, dec = myInput$dec,
                     r = myInput$r, zspec = myInput$zspec, Vel = myInput$Vel,
                     Flag = myInput$Flag)

for(ID in 1:max(inputT$clusterID)) {

  cluster_input = inputC[which(inputC$cl == as.integer(ID)), names(inputC) %in% c("sigma", "R200", "M200")]

  input <- subset(inputT, (inputT$clusterID == ID & inputT$Flag == 0))

  if(nrow(input) <= 20)
    print(paste(ID, " Número objetos: ", nrow(input)), sep="")
  if(nrow(input) > 20) {
    fileName = paste('cluster_M', ID, '.txt', sep="")
  }
}

```

```

file = paste("Aglomerado ",ID, sep="")
# file = ID

dir.create(file)
setwd(file)

# Ordenar a partir da velocidade
input = input[order(input$Vel),]

write.table(input, file=fileName, sep=" ")

##### ANÁLISE DE GAPS #####
jpeg(paste('dist',ID,'.jpg', sep=""))
h = hist(input$Vel, main = "Distribuição de Velocidades",
          xlim = c(min(input$Vel),max(input$Vel)), breaks = 30)
plot(h$mids, h$counts, type="s",
      xlab=expression(paste(Velocidades, " ", "(", "km", "/", s^{ -1}, ")")), ylab="N")

xfit = seq(min(input$Vel), max(input$Vel), length=100)
yfit = dnorm(xfit,mean=mean(input$Vel), sd = sd(input$Vel))
yfit = yfit*diff(h$mids[1:2]*length(input$Vel))
lines(xfit,yfit,col="blue",lwd=2)
rug(input$Vel, ticksize=0.03, side=1, lwd=2, col="black")

indexBCG = which.min(input$r) # posição do objeto mais brilhante

# Plota no gráfico BCG
abline(v = input$Vel[indexBCG],lty=5, lwd=2, col = "darkorchid4")
legend((input$Vel[indexBCG]), max(h$counts),"BCG",
       box.col = NA, bg = NA, adj = 0.2)

legend("topright", inset=.05, legend=paste("N = ", nrow(input)), box.lty=0)

# --- CALCULA O GAP ---
g = c()
w = c()
weiGap = c()
N = nrow(input) # número de objetos do aglomerado
lowerS = round(N/4)
upS = round(3*N/4)

for(i in 1:(N-1)) {
  g[i] = input$Vel[i+1] - input$Vel[i] #gap
  w[i] = i*(N-i) #peso
  weiGap[i] = sqrt(w[i]*g[i])
}

MM = (2/N)*sum(weiGap[lowerS:upS])
weiGap = weiGap/MM

# Considera apenas gaps > 2.25
gap_positions = which(weiGap > 2.25)

# gap não encontrado, calcula mediana
if(length(gap_positions) == 0){
  medVel = input$Vel[which(input$Vel >= median(input$Vel))]
  gap_positions = medVel[1]
  print(paste("MEDIANA ", ID, " = ", medVel[1]))
}

```

```

# Insere no histograma os gaps > 2.25
for(n in 1:length(gap_positions)) {
  aux = gap_positions[n]
  segments(x0=(input$Vel[aux]+((input$Vel[aux+1]-input$Vel[aux])/2)),
            y0=0.1, x1 = (input$Vel[aux]+((input$Vel[aux+1]-input$Vel[aux])/2)),
            y1 = 1.5, col="red", lwd=2.5)
}

title(main = file, sub = "",
      cex.main = 2, font.main= 1, col.main= "darkorchid4")

dev.off() # fecha o histograma

##### CALCULA A DIREÇÃO DO EIXO PRINCIPAL #####
# Encontra a posição do maior gap
pos_gap = which.max(weiGap)

input['Flag'] = 0

# Valores à esquerda do maior gap recebe em Flag o valor -1 e à direita 1
for(i in 1:N) {
  if(pos_gap >= i)
    input$Flag[i] = -1
  else
    input$Flag[i] = 1
}

# --- CALCULA A DISTÂNCIA ANGULAR DO SISTEMA ---

# Conversão para radiano
convrad = 0.0174533
RA = input$ra*convrad
DEC = input$dec*convrad

decCl = median(DEC)
raCl = median(RA)

# Aglomerado no plano do céu
mediumZ = median(input$zspec)

groupdist = D.A(mediumZ, omega.m = 0.3, omega.lambda = 0.7, H.0 = 100)

A = cos(DEC)*cos(RA - raCl)

x = groupdist*(cos(DEC)*sin(RA - raCl))/(sin(decCl)*sin(DEC) + cos(decCl)*A)
y = groupdist*(cos(decCl)*sin(DEC) - sin(decCl)*A)/(sin(decCl)*sin(DEC) + cos(decCl)*A)

# Insere os valores de x e y no dataframe
input['Vx'] = x
input['Vy'] = y

jpeg(paste('eixo',ID,'.jpg', sep=""))

eli = ellipse(cor(x,y),scale=c(sd(x),sd(y)),centre=c(mean(x),mean(y)),
              level=0.95, npoints=round(length(x)*0.95))
aplot(eli[,1],eli[,2],type="l",asp=1,col='darkorchid1')

# Esboça os valores de x e y (esquerda e direita do gap)
points(x,y, pch=ifelse(input$Flag == -1, "-", "+"),
       cex=2)

```

```

col=ifelse(input$Flag == -1, 'red', 'blue'), cex = 1.5)

# Calcula o centro da elipse
center_elip = c(mean(eli[,1]), mean(eli[,2]))

distance = numeric(0)
for(i in 1:nrow(eli)) {
  distance[i] = dist_2_points(center_elip, eli[i,])
}

# Distância máxima ao centro da elipse (vertical)
a = distance[which.max(distance)]
a_point = eli[which.max(distance),]

# Distância máxima ao centro da elipse (horizontal)
b = distance[which.min(distance)]
b_point = eli[which.min(distance),]

xx = c(center_elip[1], a_point[1])
yy = c(center_elip[2],a_point[2])

fitline = lm(yy ~ xx)
alpha = fitline$coef[2] # inclinação
beta = fitline$coef[1] # intersecção

dx = seq(-2,2,0.02)
ypred = dx*alpha + beta
lines(dx, ypred, col="gold1", lwd=2)

pnts = cbind(x,y)
distAxis = apply(pnts, 1, function(x) dist_point_line(as.numeric(x[1:2]),
  slope = alpha, intercept = beta))
draw.circle(center_elip[1],center_elip[2],radius=0.5, border = "darkorchid4")

title(main = file, sub = "",
  cex.main = 2, font.main= 1, col.main= "darkorchid4")

dev.off() # fecha elipse

# Insere as distâncias na última coluna do dataframe
input['DistA'] = distAxis

##### TESTES ESTATÍSTICOS #####
rotacao = FALSE # considerando que não haja uma possível rotação

con = file("Teste Espacial de duas amostras.txt")
sink(con)

# Todos os pontos do gráfico
a1 = subset(input[c("Vx","Vy")], input$Flag == -1)
a2 = subset(input[c("Vx","Vy")], input$Flag == 1)
a1 = matrix(c(a1$Vx, a1$Vy), ncol = 2)
a2 = matrix(c(a2$Vx, a2$Vy), ncol = 2)

if(length(a1) > 0 && length(a2) > 0) {
  cat("----- TODOS OS PONTOS -----\\n\\n")
  cat("----- TESTE DE CRAMER -----\\n")
  cramer = cramer.test(a1,a2)
  print(cramer$p.value)
}

```

```

cat("----- TESTE DE HOTELLING -----\\n")
hotelling = hotelling.test(a1,a2)
print(hotelling$pval)

if ((!is.na(cramer$p.value) && cramer$p.value < 0.05) || (!is.na(hotelling$pval) && hotelling$pval < 0.05))
  rotacao = TRUE
}
# Todos os pontos acima do eixo principal
a1 = subset(input[c("Vx","Vy")], input$Flag == -1 & input$DistA >= 0)
a2 = subset(input[c("Vx","Vy")], input$Flag == 1 & input$DistA >= 0)
a1 = matrix(c(a1$Vx,a1$Vy), ncol=2)
a2 = matrix(c(a2$Vx,a2$Vy), ncol=2)

if(length(a1) > 0 && length(a2) > 0) {
  cat("\\n\\n----- PONTOS ACIMA DO EIXO -----\\n\\n")
  cat("----- TESTE DE CRAMER -----\\n")
  cramer = cramer.test(a1,a2)
  print(cramer$p.value)

  cat("----- TESTE DE HOTELLING -----\\n")
  hotelling = hotelling.test(a1,a2)
  print(hotelling$pval)

  if ((!is.na(cramer$p.value) && cramer$p.value < 0.05) || (!is.na(hotelling$pval) && hotelling$pval < 0.05))
    rotacao = TRUE
}

# Todos os pontos abaixo do eixo principal
a1 = subset(input[c("Vx","Vy")], input$Flag == -1 & input$DistA < 0)
a2 = subset(input[c("Vx","Vy")], input$Flag == 1 & input$DistA < 0)
a1 = matrix(c(a1$Vx,a1$Vy), ncol=2)
a2 = matrix(c(a2$Vx,a2$Vy), ncol=2)

if(length(a1) > 0 && length(a2) > 0) {
  cat("\\n\\n----- PONTOS ABAIXO DO EIXO -----\\n\\n")
  cat("----- TESTE DE CRAMER -----\\n")
  cramer = cramer.test(a1,a2)
  print(cramer$p.value)

  cat("----- TESTE DE HOTELLING -----\\n")
  hotelling = hotelling.test(a1,a2)
  print(hotelling$pval)

  if ((!is.na(cramer$p.value) && cramer$p.value < 0.05) || (!is.na(hotelling$pval) && hotelling$pval < 0.05))
    rotacao = TRUE
}

sink() # fecha arquivo teste espacial de duas amostras

##### CALCULAR O VALOR DE W ROTACIONAL #####
if(rotacao == TRUE) {
  print(paste(file,"com rotação"))
  # Cria um outro dataframe
  velDist = data.frame(Vel = input$Vel, DistA = abs(input$DistA),
  Flag = input$Flag, Vx = input$Vx, Vy = input$Vy)

  velDist[,1] = velDist[,1] - cluster_input$sigma
  velDist[,1] = velDist[,1] * 3.2408e-20 # converte de km/s para mpc/s
  velDist = velDist[order(velDist[2]),]      # ordena a partir da distância

```

```

# Soma as velocidades de 20 galáxias (+ e -)
velNegat = 0
velPosit = 0
vel20 = velDist$Flag[1:20]

velNegat = c()
velPosit = c()

velNegat = velDist$Vel[which(vel20 == -1)]
velPosit = velDist$Vel[which(vel20 == 1)]

wiNegat = length(velNegat) + 1
wiPosit = length(velPosit) + 1

deltaV = c()
deltaV[1] = median(velPosit) - median(velNegat)

raio = c()
raio[1] = velDist$DistA[20]

w = c()
w[1] = deltaV[1]/raio[1]
j = 2

for(i in 21:nrow(velDist)) {
  velocity = velDist$Vel[i]
  if(velDist$Flag[i] == -1) {
    velNegat[wiNegat] = velocity
    wiNegat = wiNegat + 1
  }
  else{
    velPosit[wiPosit] = velocity
    wiPosit = wiPosit + 1
  }

  deltaV[j] = median(velPosit) - median(velNegat)
  raio[j] = velDist$Dist[i]
  w[j] = deltaV[j]/raio[j]
  j = j + 1
}

distance = numeric(0)
for (i in 1:nrow(velDist)){
  distance[i] = dist_2_points(center_elip, c(velDist[i,5],velDist[i,6]))
}

velDist['dist'] = distance

subR = subset(velDist, velDist$dist <= 0.5)
posBCGV = which.min(subR$r)

velocityMax = omegaV(a_point, b_point, center_elip ,cluster_input$R200, cluster_input$M200 * 1e+14)
jpeg(paste('perfil',ID,'.jpg', sep=""))

plot(raio,abs(w), type="l", xlab="Raio (Mpc)", ylab=expression(paste(omega~"(R)", " (rad/s)")),
     col="darkblue")
abline(v = cluster_input$R200,lty=5, lwd=2, col="green")

abline(h = velocityMax, lty=3, lwd=2, col="red")

```

```
AF1 = approxfun(raio,abs(w))
points(cluster_input$R200, AF1(cluster_input$R200), pch=20, col="black")
legend(cluster_input$R200, AF1(cluster_input$R200), signif(AF1(cluster_input$R200), digits = 6),
       box.col = NA, bg = NA, adj = 0.2)

title(main = file, sub = "",
      cex.main = 2, font.main= 1, col.main= "darkorchid4")
dev.off() # fecha o arquivo de perfil de velocidade angular

inputRotate = data.frame(distancia = velDist$dist, Vel = input$Vel)

inputRotate[,2] = inputRotate[,2] * 3.2408e-20 # converte de km/s para mpc/s
inputRotate[,1] = inputRotate[,1] * 0.001       # converte de kpc para mpc

inputRotate = inputRotate[order(inputRotate[1]),]    # ordena a partir da distância

jpeg('CurvaDeRotacao.jpg') # cria imagem para gráfico
plot(inputRotate$distancia,inputRotate$Vel, type="l", xlab="Distância (Mpc)",
      ylab="Velocidade (Mpc/s)",col="darkblue")

title(main = file, sub = "",
      cex.main = 2, font.main= 1, col.main= "darkorchid4")
dev.off() # fecha o arquivo de perfil de velocidade angular
}
if(rotacao == FALSE)
print(paste(file,"sem rotação"))

setwd("../")
}
```

## Anexos

## **ANEXO A – Resultados Catálogo selec20**

Com a aplicação do nosso método nos 20 aglomerados do catálogo selec20 obtivemos os seguintes resultados, dado o histograma de velocidade, o eixo principal e o perfil de rotação apenas para os aglomerados que apresentaram rotação significativa.

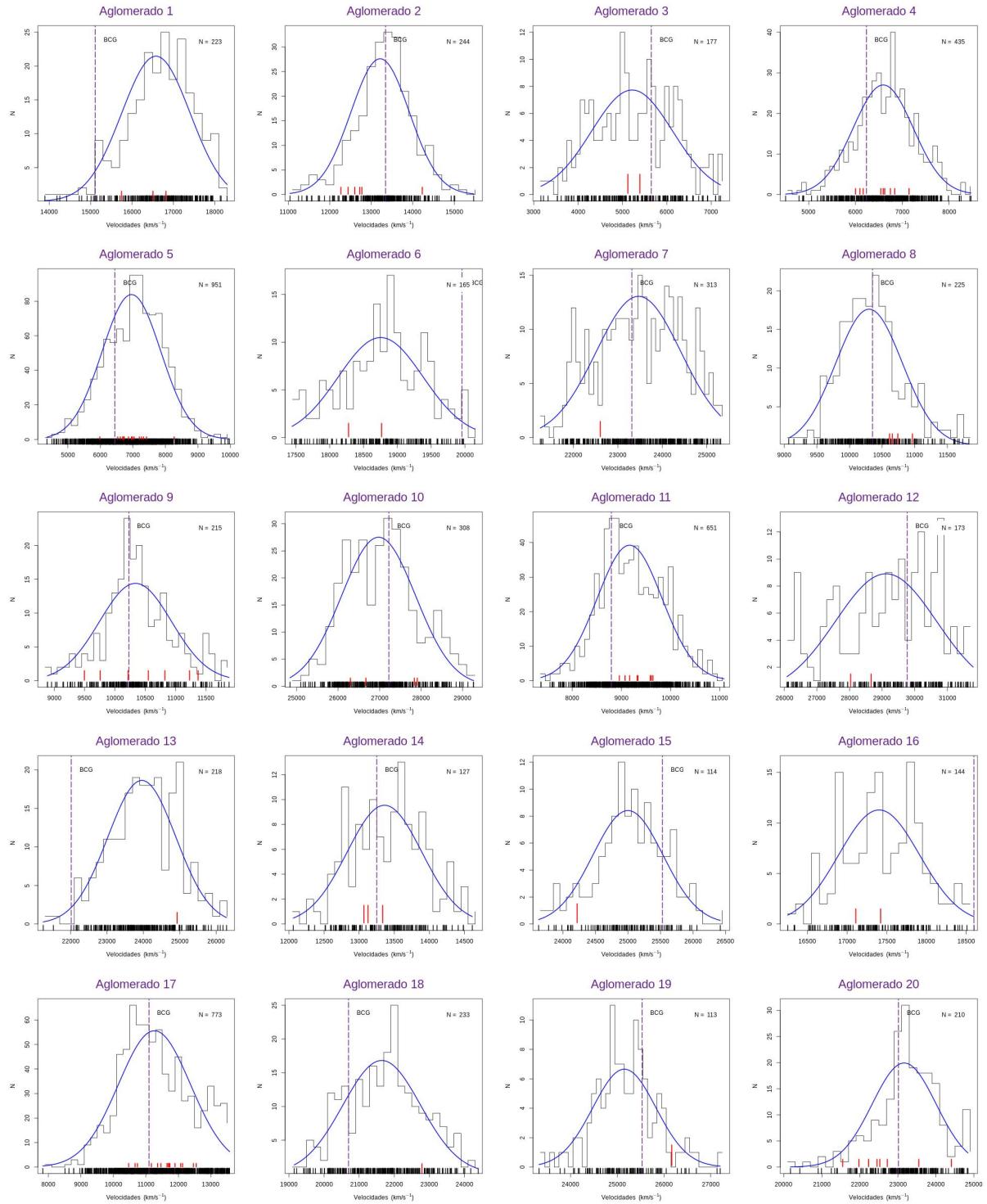


Figura 11 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo selec20.

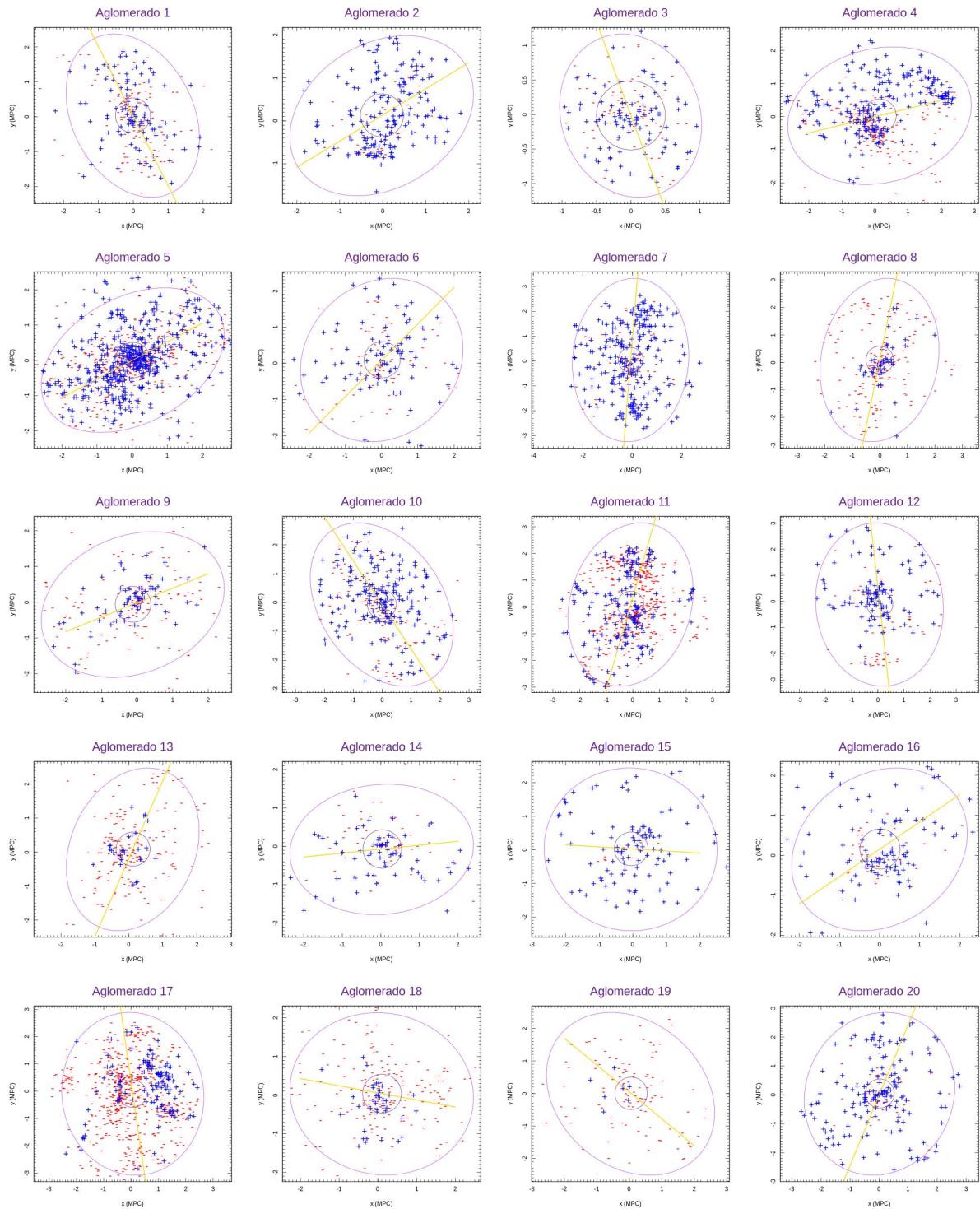


Figura 12 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo selec20.

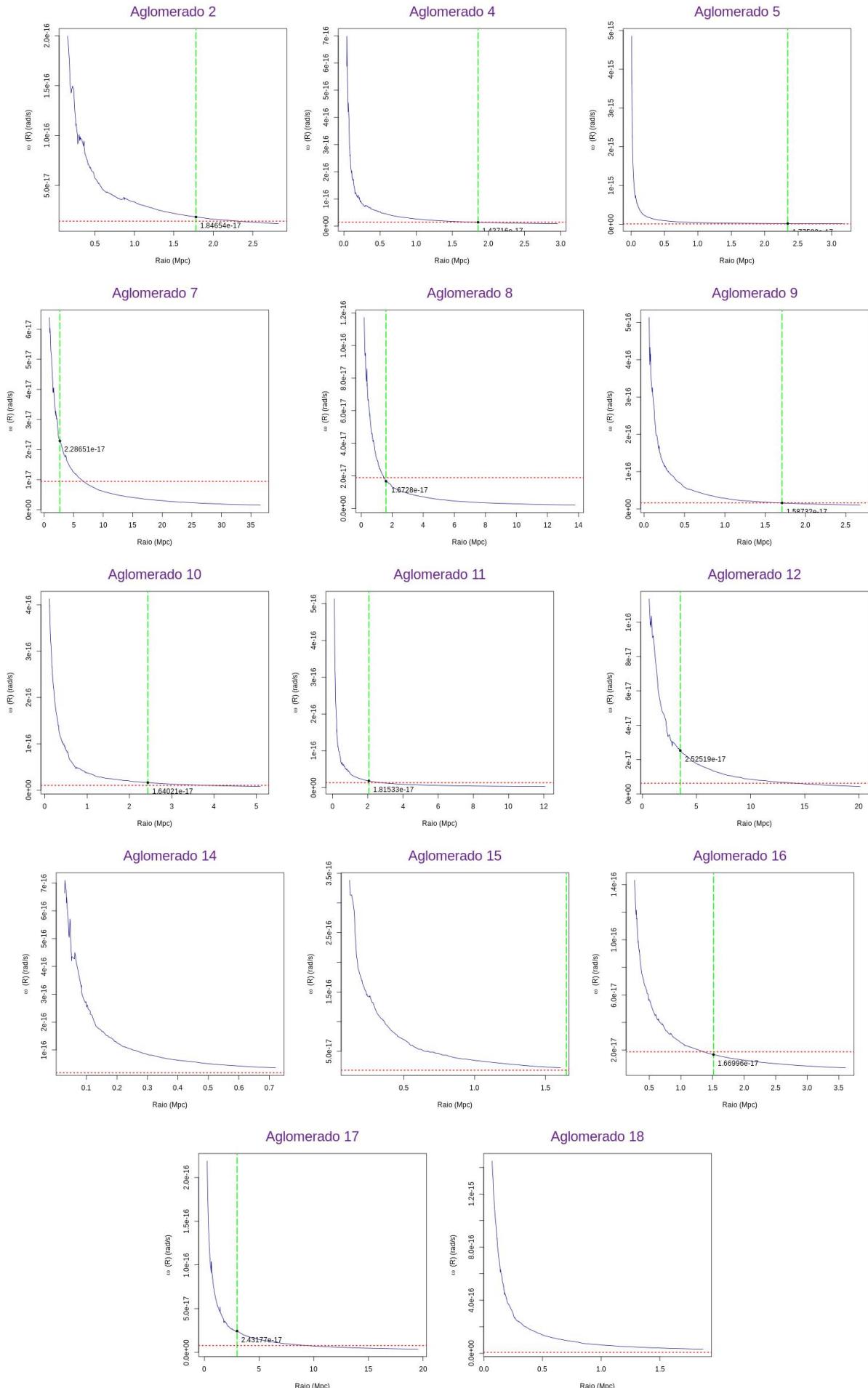


Figura 13 – Perfil da velocidade de rotação - Catálogo selec20.

## **ANEXO B – Resultados Catálogo NoSOCS**

Os resultados obtidos na aplicação do nosso método para o catálogo NoSOCS são os seguintes, dado o histograma de velocidade, o eixo principal, a tabela comparativa dos testes utilizados (Cramer e Hotelling) e o perfil de rotação apenas para os aglomerados que apresentaram rotação significativa.

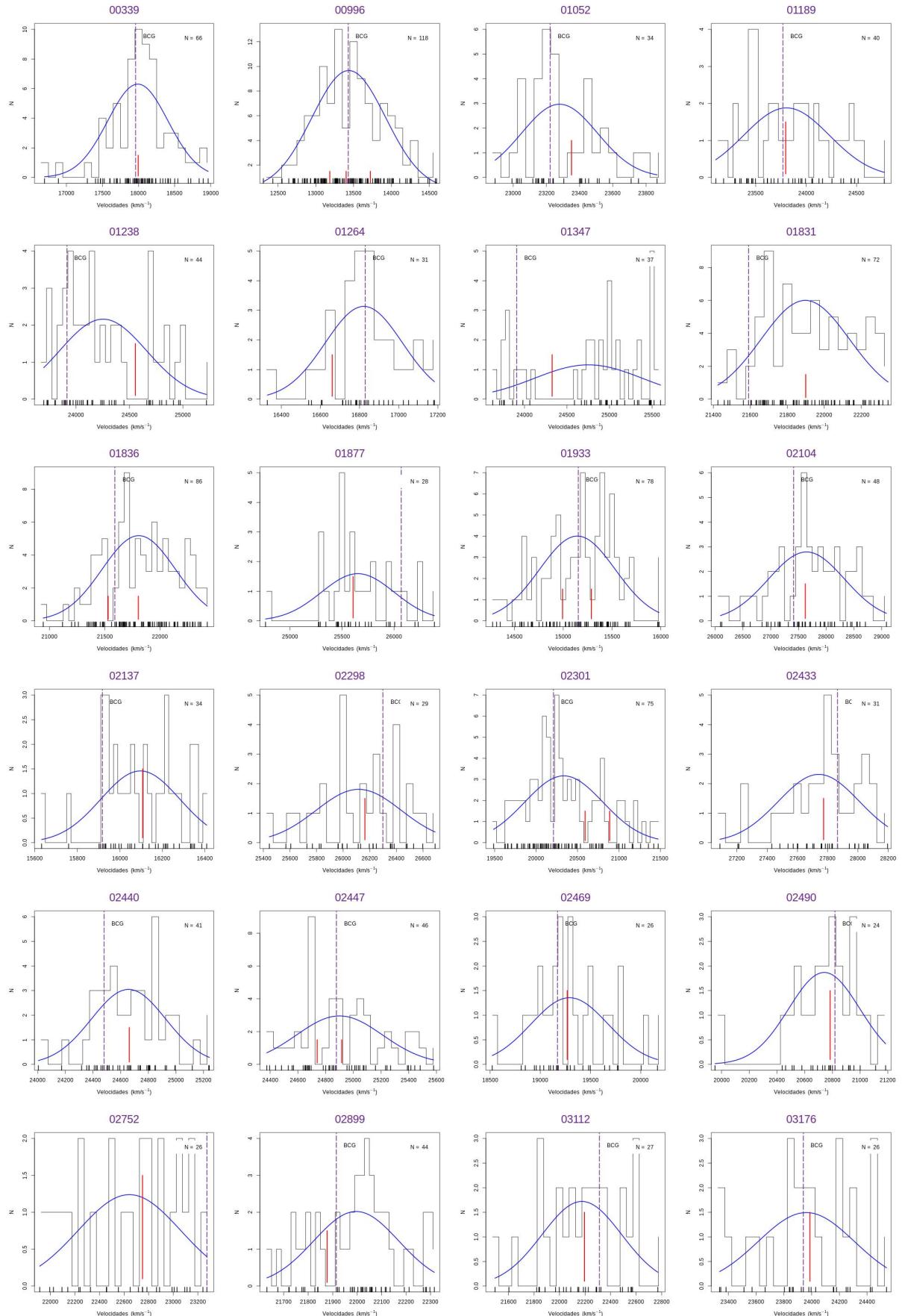


Figura 14 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo NoSOCS Parte I.

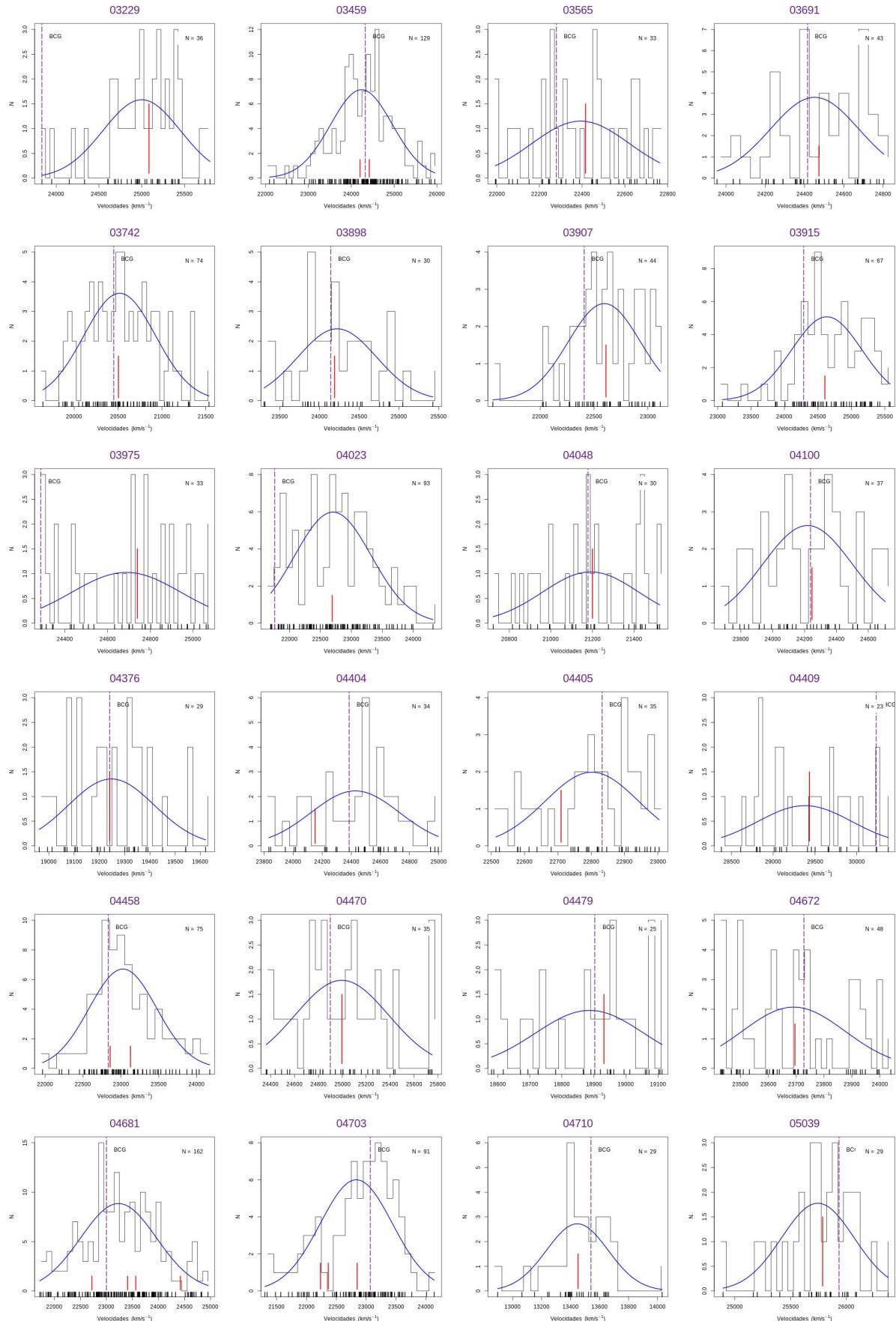


Figura 15 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo No-SOCS Parte II.

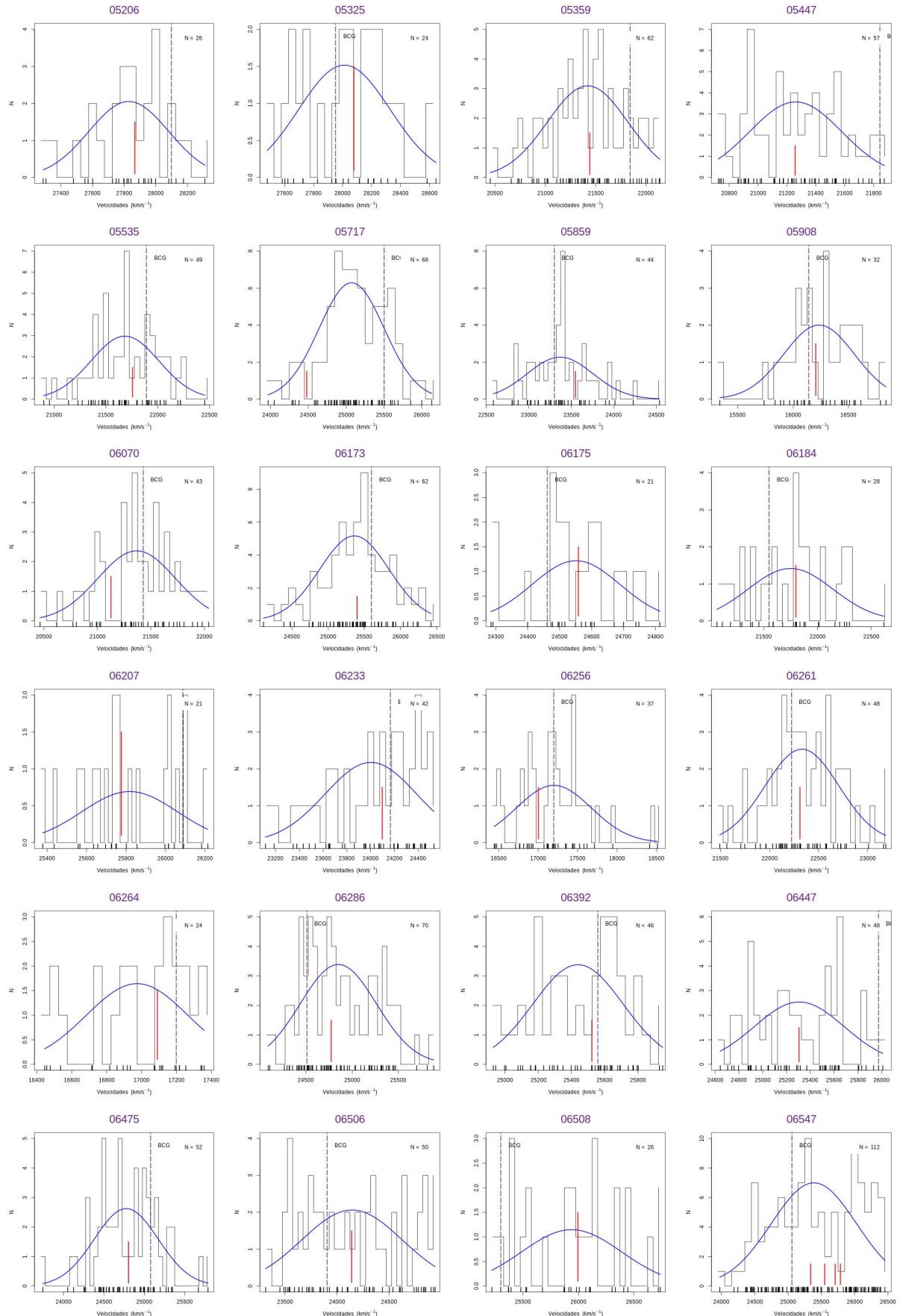


Figura 16 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo NoSOCS Parte III.

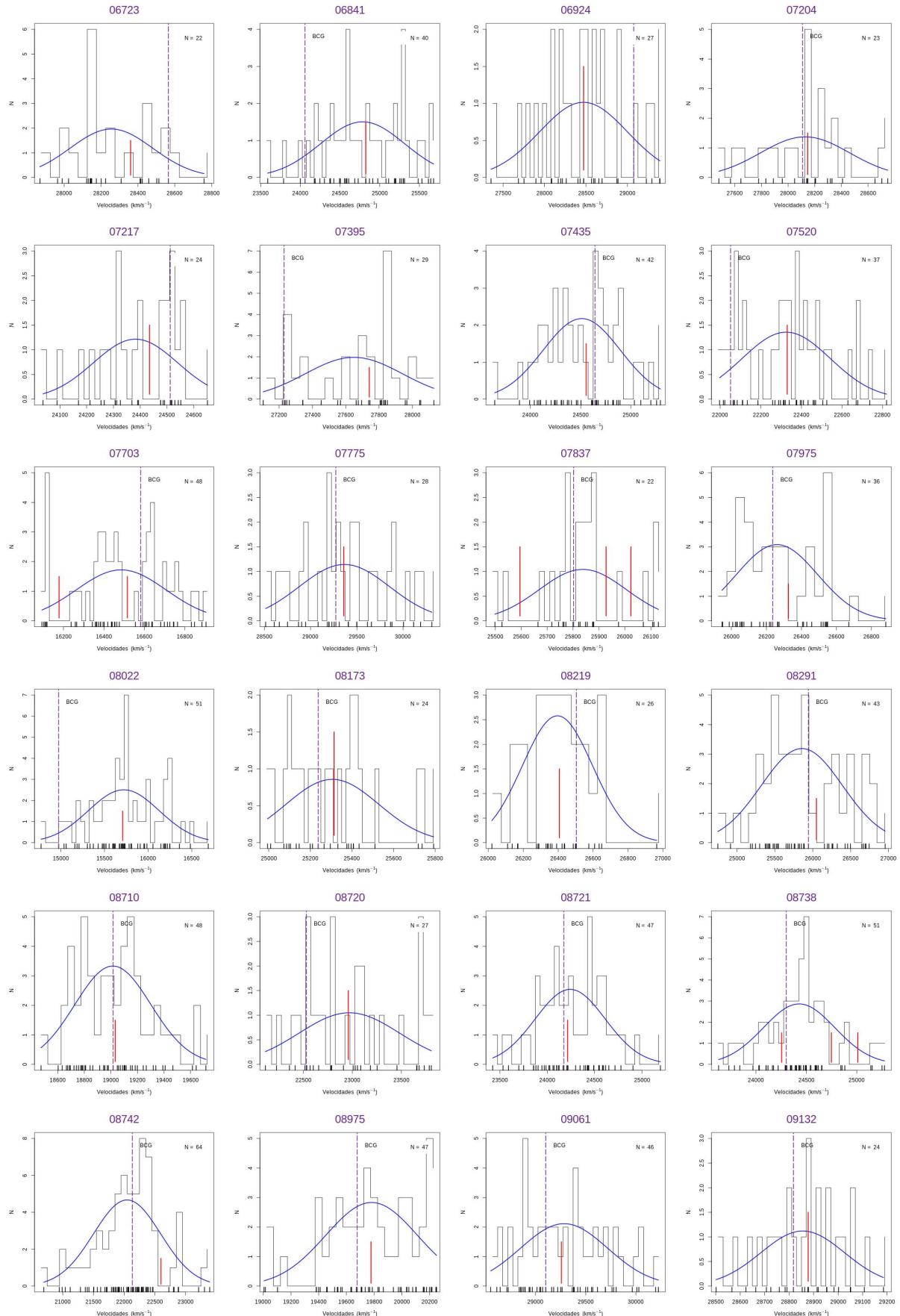


Figura 17 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo NoSOCS Parte IV.

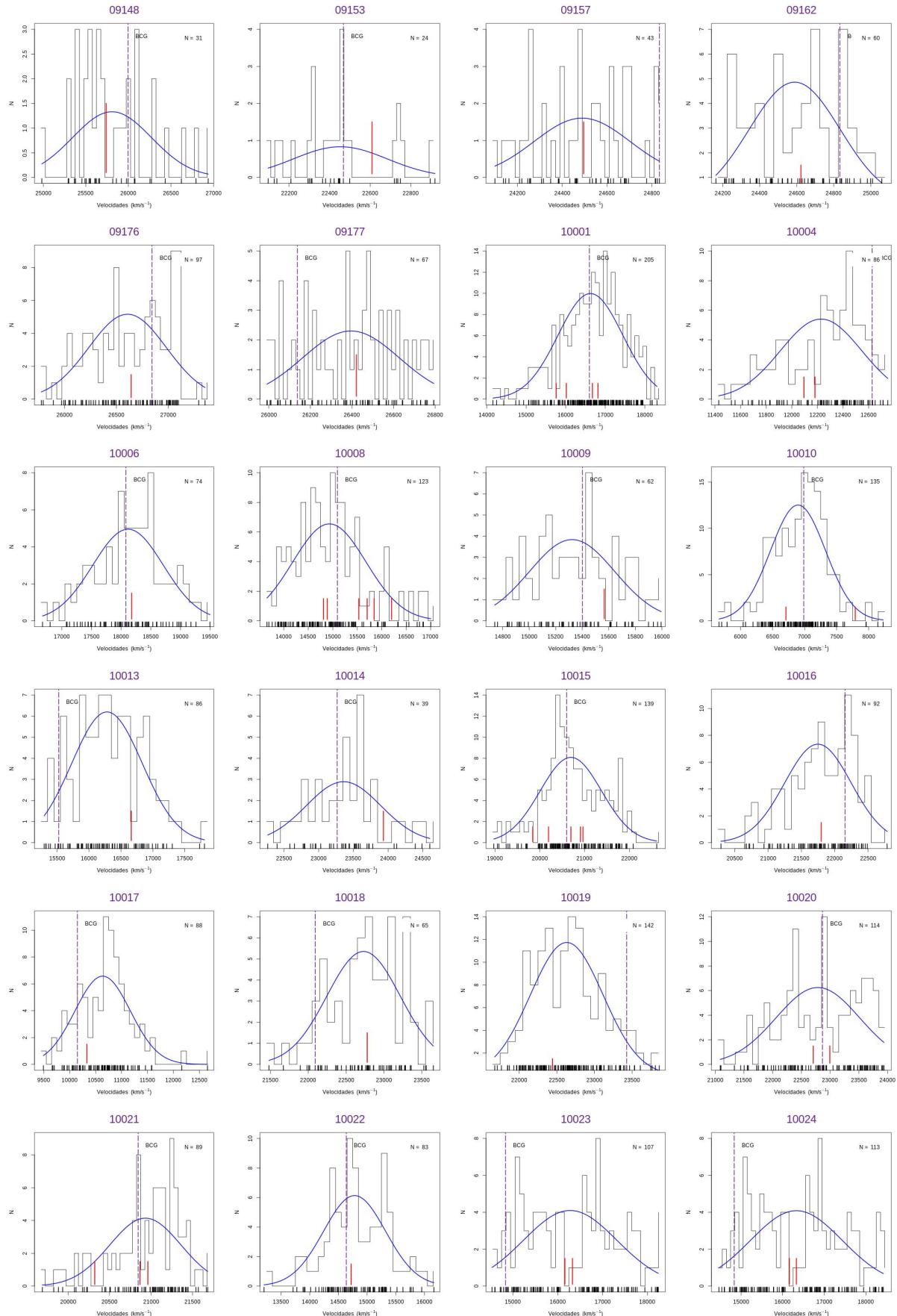


Figura 18 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo No-SOCS Parte V.

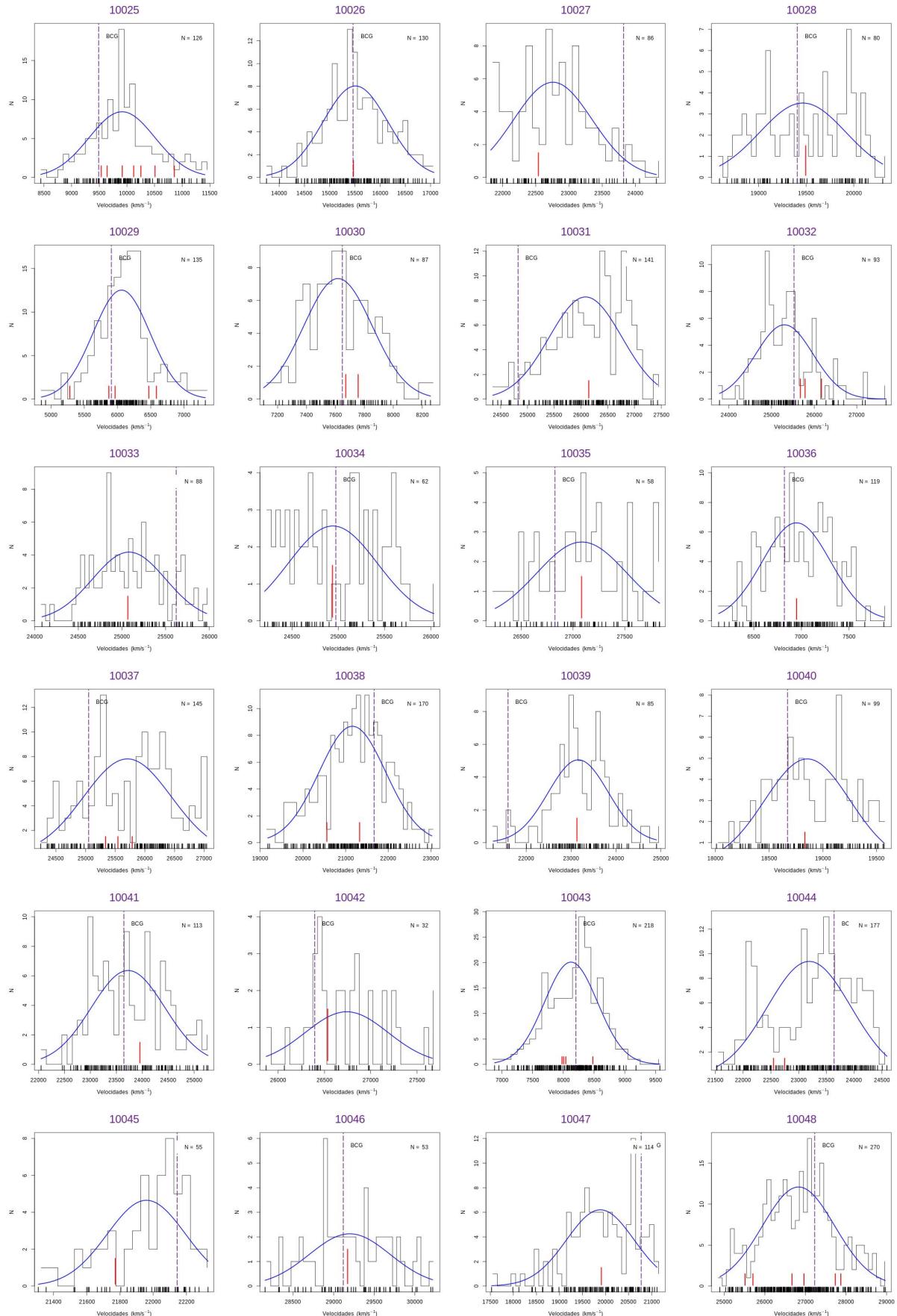


Figura 19 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo NoSOCS Parte VI.

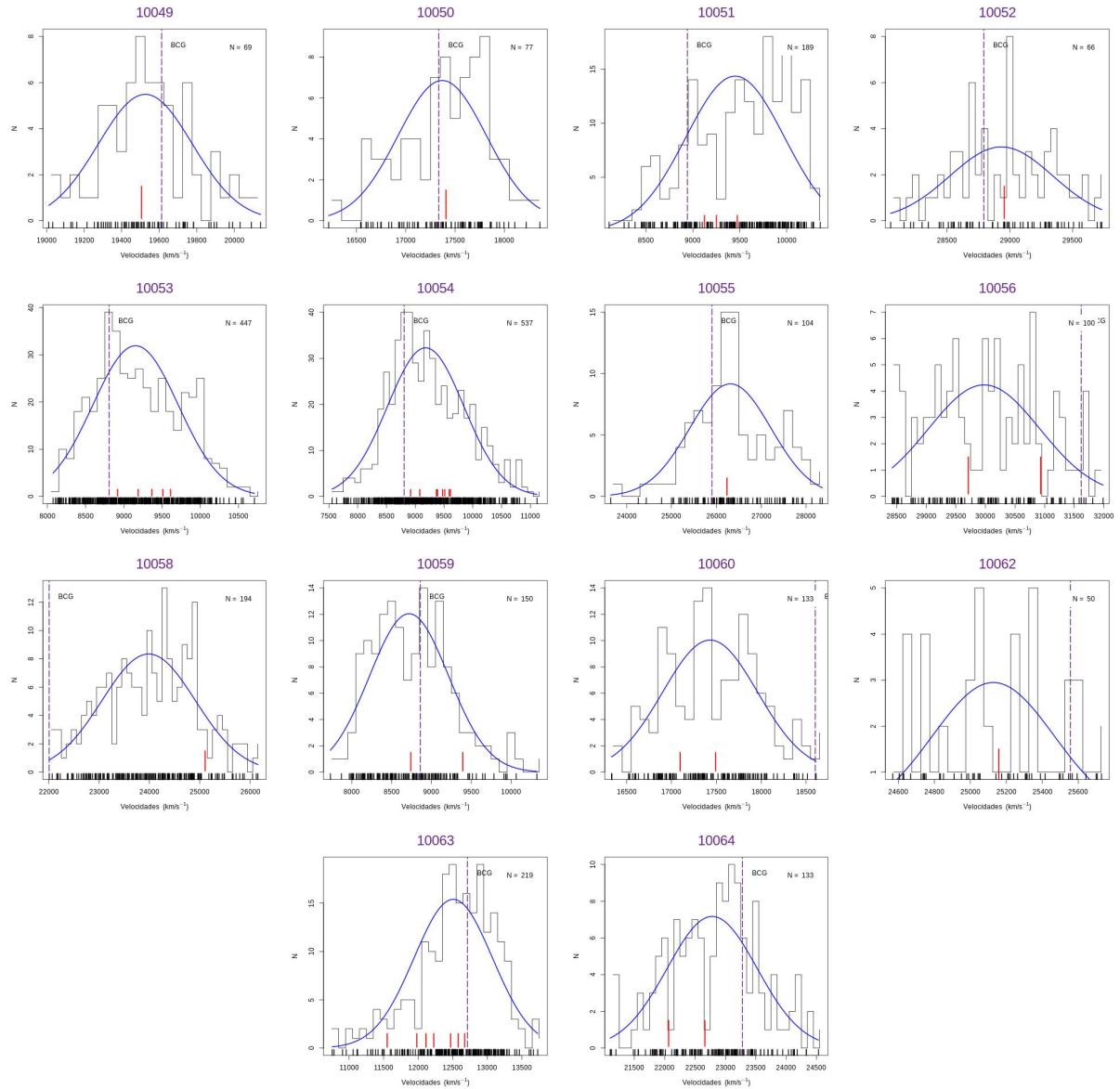


Figura 20 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo No-SOCS Parte VII.

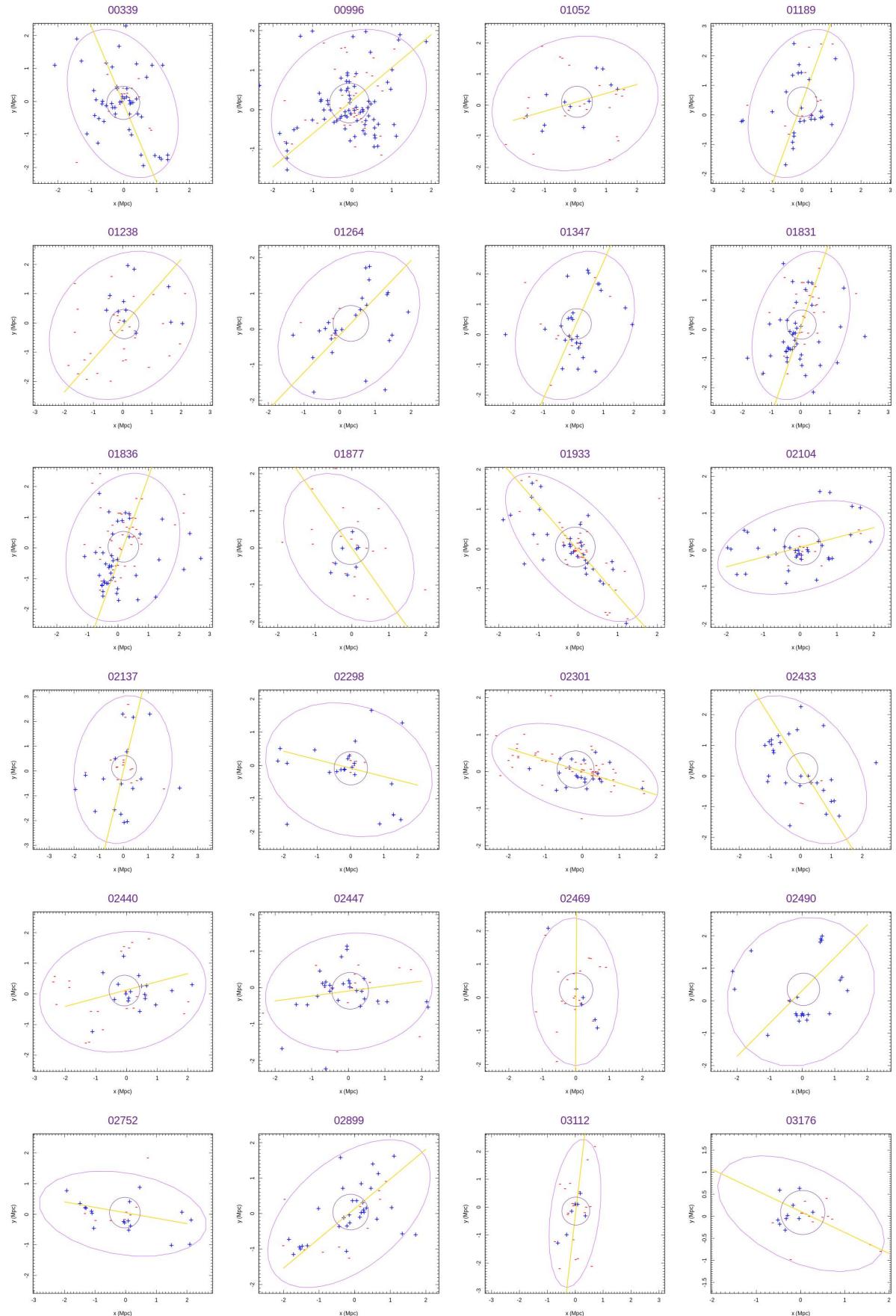


Figura 21 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo NoSOCS Parte I.

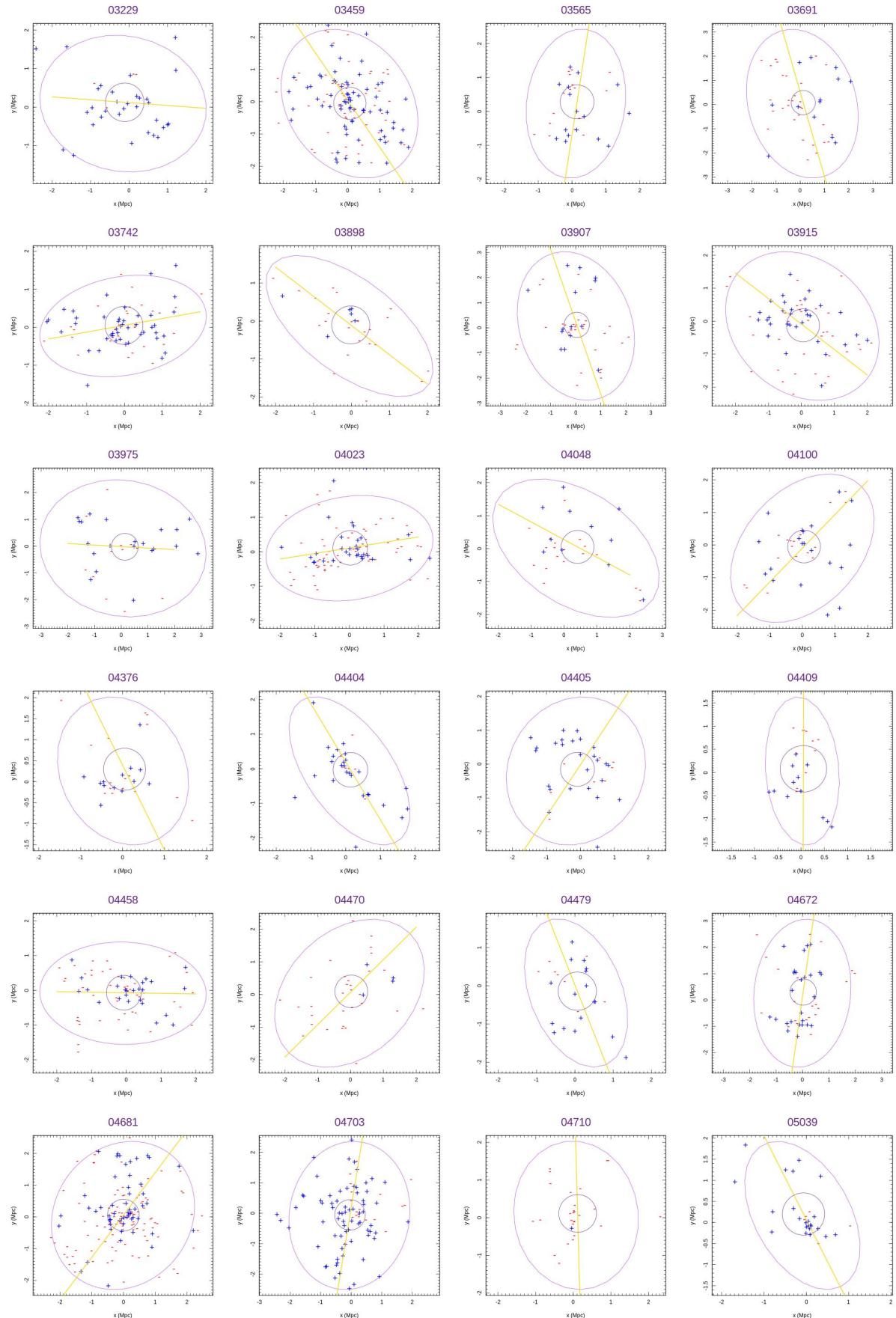


Figura 22 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo NoSOCS Parte II.

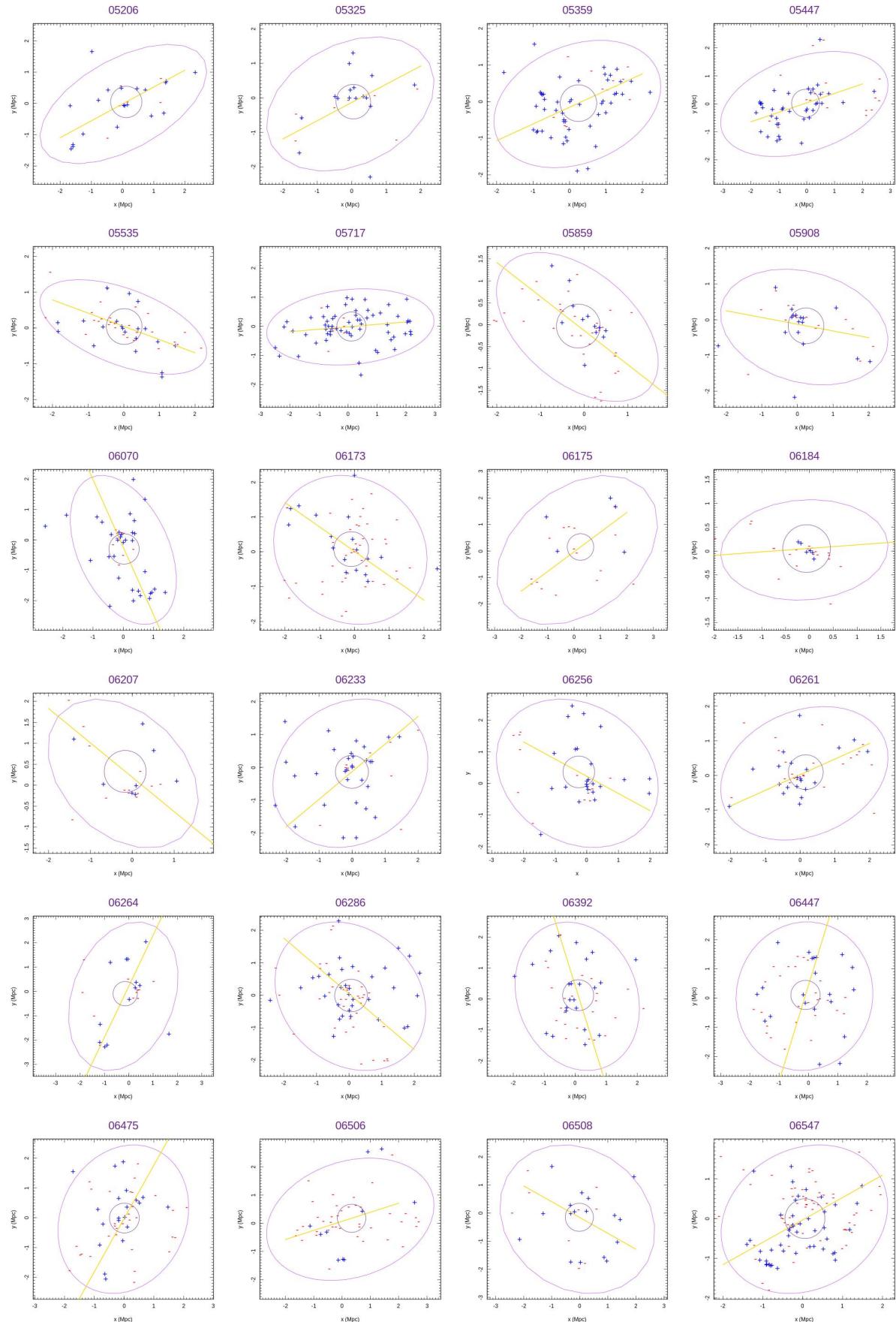


Figura 23 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo NoSOCS Parte III.

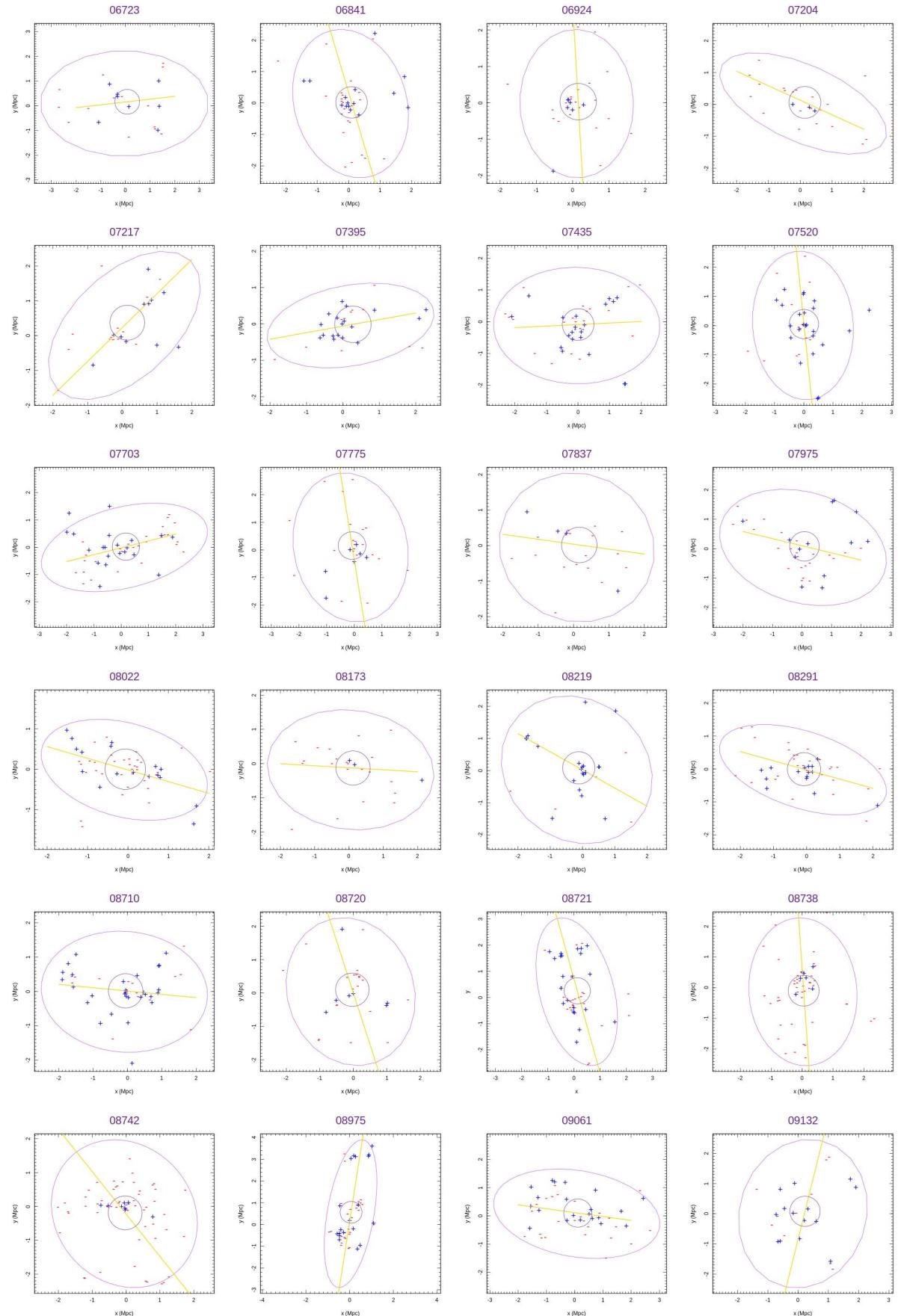


Figura 24 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo NoSOCS Parte IV.

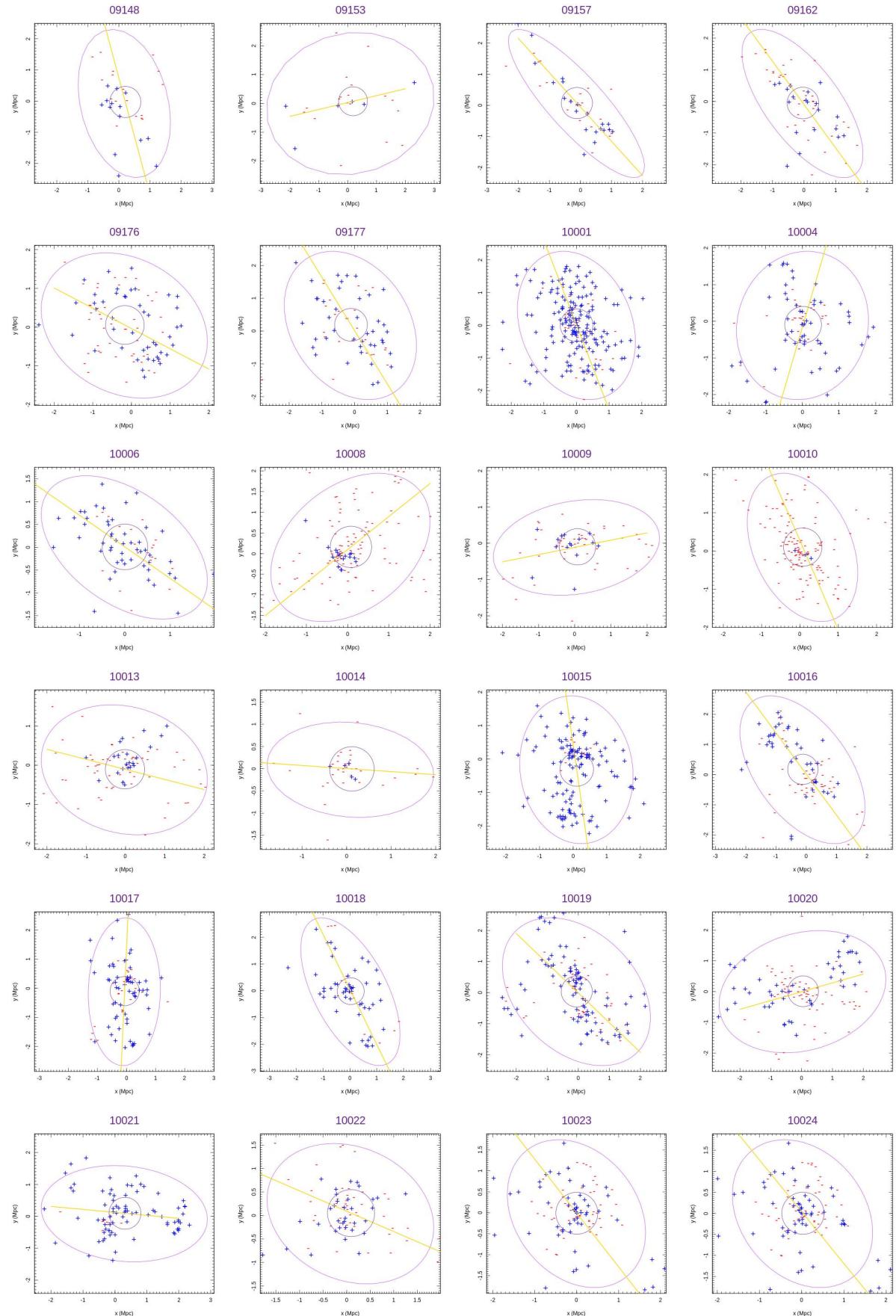


Figura 25 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo NoSOCS Parte V.

Tabela 20 – Teste Cramer e Hotelling aplicado no catálogo NoSOCS utilizando gap - sem indicação rotação.

Cluster	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3		Nº galáxias
	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	
00996	0.7412	0.8761	0.5254	0.6375	0.4935	0.8687	118
01052	0.6333	0.9305	0.1148	0.0534	0.2847	0.5574	34
01264	0.1038	0.1679	0.2257	0.4912	NA	NA	31
01347	0.4925	0.3881	0.4985	0.6860	0.5344	0.4913	37
01933	0.3146	0.2462	0.7542	0.7689	0.2857	0.4333	78
02301	0.0989	0.3656	0.4085	0.6013	0.0879	0.4950	75
02899	0.3666	0.4510	0.3946	0.4849	0.2547	0.5869	44
03459	0.8231	0.6045	0.4615	0.2909	0.9630	0.8782	129
04404	0.5824	0.8435	0.5164	0.8678	0.5784	0.4055	34
04405	0.2657	0.3529	0.2897	0.3697	0.8181	0.9429	35
04458	0.0919	0.2165	0.1958	0.1484	0.1368	0.2482	75
05535	0.7182	0.4094	0.4365	0.5584	0.2587	0.1105	49
05717	0.1798	0.5592	0.4015	0.7776	0.3526	0.7187	68
05859	0.2207	0.1678	0.7592	0.9945	0.7602	0.9039	44
05908	0.7312	0.6639	0.4885	0.9556	0.6673	0.8438	32
06070	0.0669	0.6518	0.1618	0.0595	0.1928	0.1794	43
06723	0.5814	0.7952	0.4435	0.4749	0.7402	0.6023	22
07837	0.2017	0.2020	0.2117	0.0822	0.2937	NA	22
07975	0.0899	0.0574	0.0679	0.0699	0.4175	0.4909	36
08291	0.2207	0.2387	0.2027	0.2041	0.5094	0.5338	43
08738	0.1178	0.4439	0.3286	0.4319	0.2907	0.2139	51
08742	0.1798	0.8047	0.1018	0.1251	0.3526	0.4534	64
09153	0.6443	0.7399	0.4125	0.4849	0.2647	0.2816	24
10001	0.7002	0.5486	0.5944	0.3344	0.6723	0.6086	205
10004	0.0629	0.5419	0.1388	0.4331	0.0859	0.1359	86
10009	0.2237	0.5741	0.4675	0.4290	0.5614	0.8211	62
10010	0.3386	0.8987	0.4155	0.4845	0.6523	0.4993	135
10014	0.6173	0.9580	0.7252	0.6412	0.5714	0.9368	39
10017	0.3016	0.7229	0.0789	0.1712	0.0659	0.4018	88
10019	0.2897	0.4306	0.1128	0.1846	0.8461	0.8852	142
10025	0.1358	0.5160	0.3946	0.8024	0.1108	0.2339	126
10032	0.0549	0.2733	0.5364	0.3797	0.1508	0.3255	93
10038	0.1058	0.5774	0.1648	0.4121	0.2837	0.2596	170
10041	0.4195	0.5239	0.4405	0.7856	0.8511	0.7160	113
10042	0.3886	0.7649	0.7422	0.6799	0.2027	0.2416	32
10048	0.5994	0.9850	0.4345	0.7785	0.6643	0.7787	270
10058	0.3416	0.8175	0.1908	0.0893	0.5124	0.6402	194

Tabela 21 – Teste Cramer e Hotelling aplicado no catálogo NoSOCS utilizando mediana - sem indicação rotação.

Cluster	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3		Nº galáxias
	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	
00339	0.3316	0.9613	0.2927	0.5918	0.8291	0.8731	66
01189	0.4375	0.4349	0.4675	0.4934	0.0749	0.0895	40
01877	0.2207	0.5432	0.4055	0.2932	0.3836	0.7414	28
02104	0.1458	0.2732	0.2337	0.1225	0.6023	0.5387	48
02298	0.3016	0.6269	0.2077	0.1750	0.6743	0.6889	29
02469	0.3956	0.6919	0.0809	NA	0.0639	0.1412	26
02490	0.6793	NA	0.3896	NA	-	-	24
02752	0.4945	0.5949	0.4980	0.7631	0.5644	0.6835	27
03112	0.6373	0.9296	0.3806	0.5115	0.4135	0.5982	27
03229	0.1968	0.3636	0.6583	NA	0.5834	0.9801	36

03565	0.2417	0.0973	0.3676	0.0715	0.5794	0.3825	33
03742	0.8811	0.8641	0.2367	0.3934	0.4575	0.5633	74
03898	0.2317	0.4892	0.1458	0.5520	0.3776	0.4105	30
03915	0.0819	0.3495	0.3526	0.4467	0.0539	0.0504	67
03975	0.2087	0.1740	0.5484	0.6921	0.5404	0.5736	33
04023	0.2637	0.4502	0.7682	0.8864	0.1548	0.1767	93
04100	0.3676	0.2932	0.6093	0.8529	0.1608	0.1241	37
04376	0.2637	0.3737	0.2627	0.1573	0.2397	0.1663	29
04710	0.7262	NA	-	-	0.6823	NA	29
05039	0.2937	0.2833	0.3266	0.5049	0.7352	NA	29
05206	0.6853	0.7371	0.3256	0.4527	0.7012	0.9924	26
05325	0.3116	0.5188	0.0589	0.1093	0.8211	0.9761	24
06173	0.3286	0.3997	0.2887	0.5266	0.3086	0.2110	62
06175	0.0739	0.0931	0.3316	0.4934	0.2217	NA	21
06184	0.3386	0.9743	0.3656	0.6413	0.3746	0.6746	28
06233	0.2697	0.1376	0.1178	0.1823	0.1738	0.2156	42
06261	0.4545	0.5955	0.9690	0.9682	0.0719	0.1983	48
06264	0.4865	0.8170	0.2637	0.2610	0.1328	0.3385	24
06392	0.2587	0.2429	0.1578	0.2800	0.5954	0.7202	46
06447	0.2157	0.2377	0.2337	0.3918	0.2897	0.4684	48
06475	0.3516	0.3046	0.2087	0.4157	0.3726	0.2559	52
06506	0.3516	0.9908	0.0819	0.2413	0.1388	0.3520	50
06508	0.4075	0.2915	0.6413	0.6564	0.4395	0.5430	26
06841	0.1098	0.0907	0.5114	0.4045	0.1728	0.4598	40
06924	0.2897	0.3820	0.7862	NA	0.3956	0.4781	27
07204	0.5314	0.9523	-	-	0.4445	0.3492	23
07435	0.5204	0.4180	0.5534	0.8188	0.6543	0.8206	42
07520	0.1968	0.0857	0.2387	0.2867	0.3396	0.4175	37
07775	0.2177	0.3310	0.6363	0.8227	0.1688	0.2417	28
08173	0.4305	0.4044	0.2467	0.3353	0.1478	NA	24
08219	0.1438	0.2354	0.1748	0.2804	0.1028	0.1630	26
08710	0.6413	0.4951	0.6943	0.7955	0.3746	0.2338	48
08720	0.6603	0.9053	0.1968	0.6057	0.3106	0.4077	27
08975	0.1158	0.2638	0.4695	0.5373	0.0669	0.0857	47
09132	0.7582	0.9657	0.6493	0.6231	0.3536	0.9450	24
09157	0.6443	0.9126	0.6483	0.7453	0.5104	0.5389	43
09162	0.1798	0.3738	0.3826	0.5206	0.3536	0.4131	60
09176	0.1068	0.4251	0.2897	0.3069	0.0839	0.9942	97
09177	0.7992	0.7533	0.6313	0.3442	0.7092	0.9310	67
10022	0.0869	0.1801	0.4775	0.9737	0.1028	0.1139	83
10033	0.0629	0.1825	0.2547	0.4373	0.3606	0.5479	88
10034	0.2257	0.1639	0.6453	0.5191	0.1278	0.1358	62
10039	0.1828	0.7297	-	-	0.1838	0.3686	85
10046	0.4685	0.1671	0.5834	0.3850	0.8341	0.6650	53
10047	0.2937	0.5173	0.7602	0.3851	0.0959	0.1480	114
10049	0.0939	0.0776	0.7232	0.4297	0.3326	0.5222	69
10052	0.2527	0.5931	0.6613	0.8109	0.2927	0.1249	66
10062	0.8101	0.5488	0.6333	0.4049	0.1678	0.1822	50

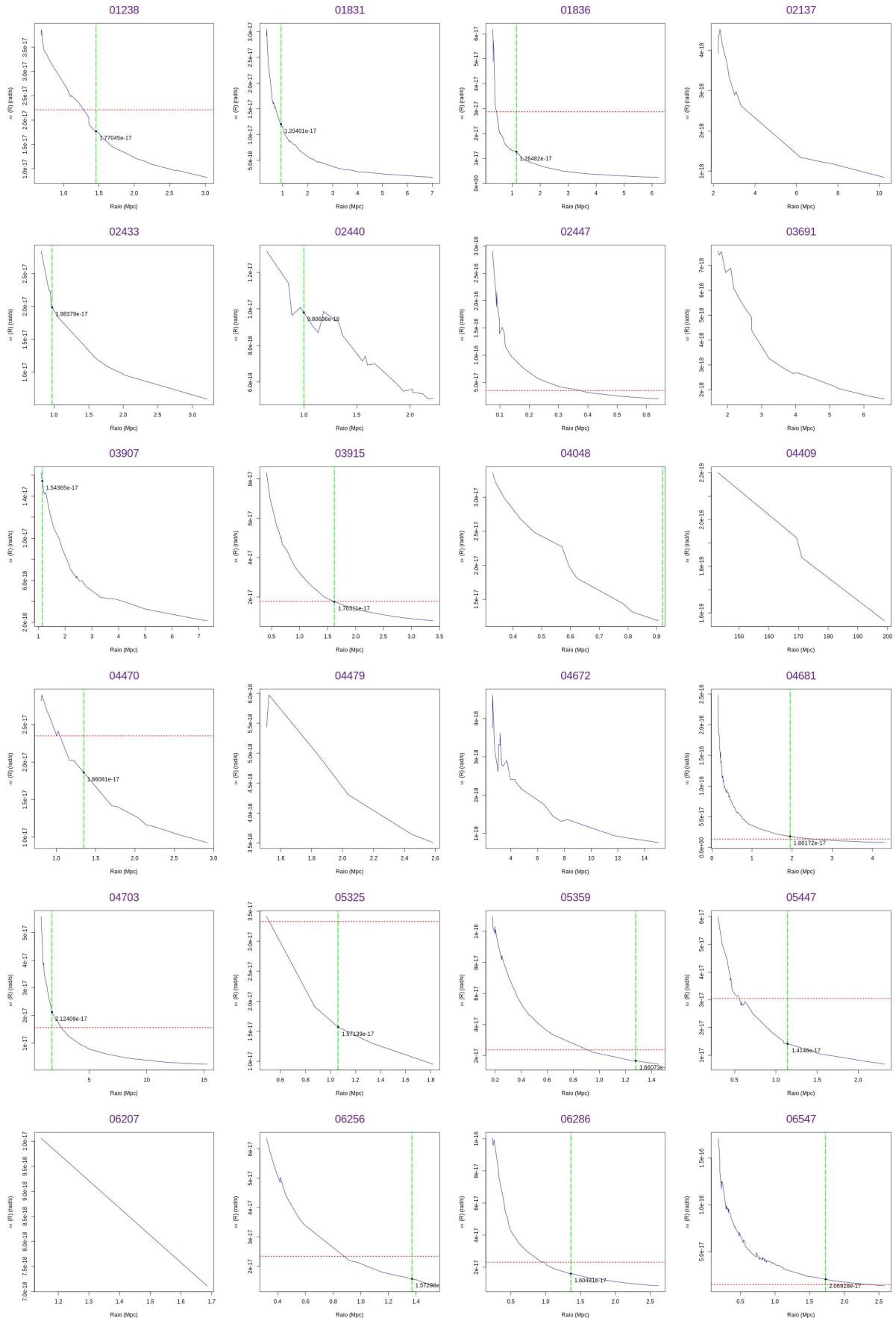


Figura 26 – Perfil de velocidad angular - Catálogo NoSOCS Parte I.

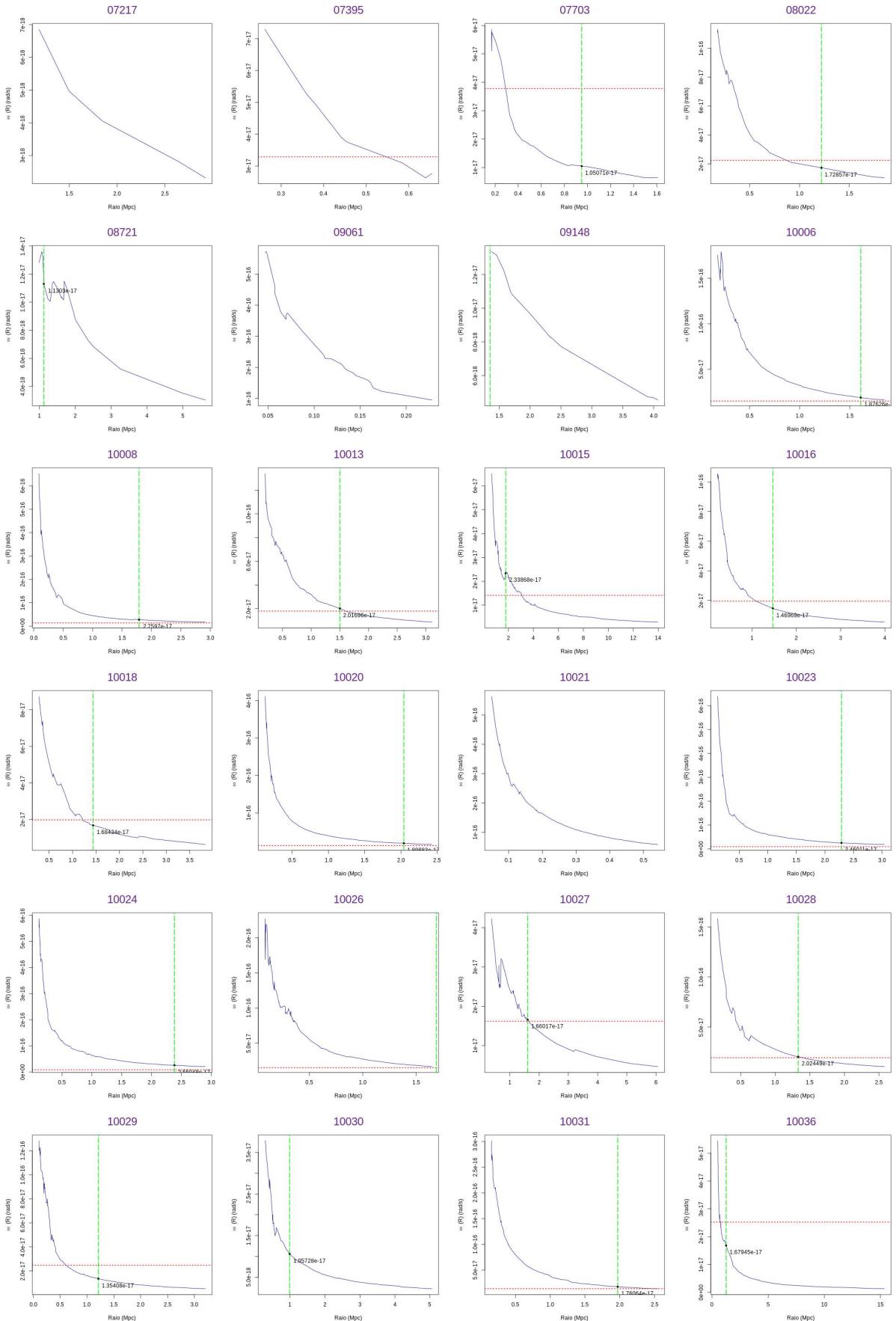


Figura 27 – Perfil de velocidade angular - Catálogo NoSOCS Parte II.

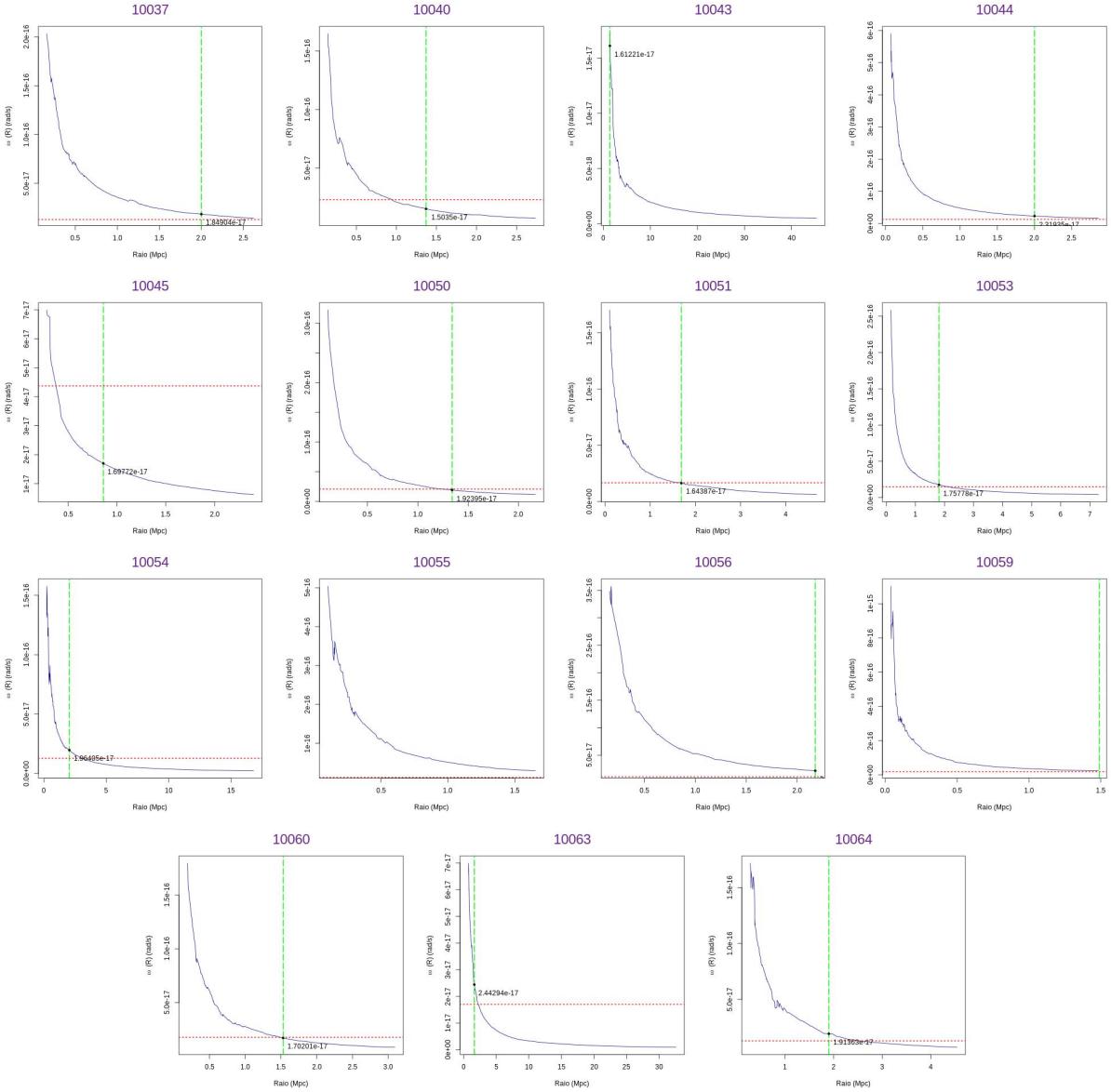


Figura 28 – Perfil de velocidad angular - Catálogo NoSOCS Parte III.

## ANEXO C – Resultados Catálogo III

Com a aplicação do nosso método no catálogo III para as duas amostras I e II, com e sem rotação, respectivamente, cada uma com 200 aglomerados, obtivemos os seguintes resultados, dado o histograma de velocidade, o eixo principal e o perfil de rotação apenas para os aglomerados que apresentaram rotação significativa.

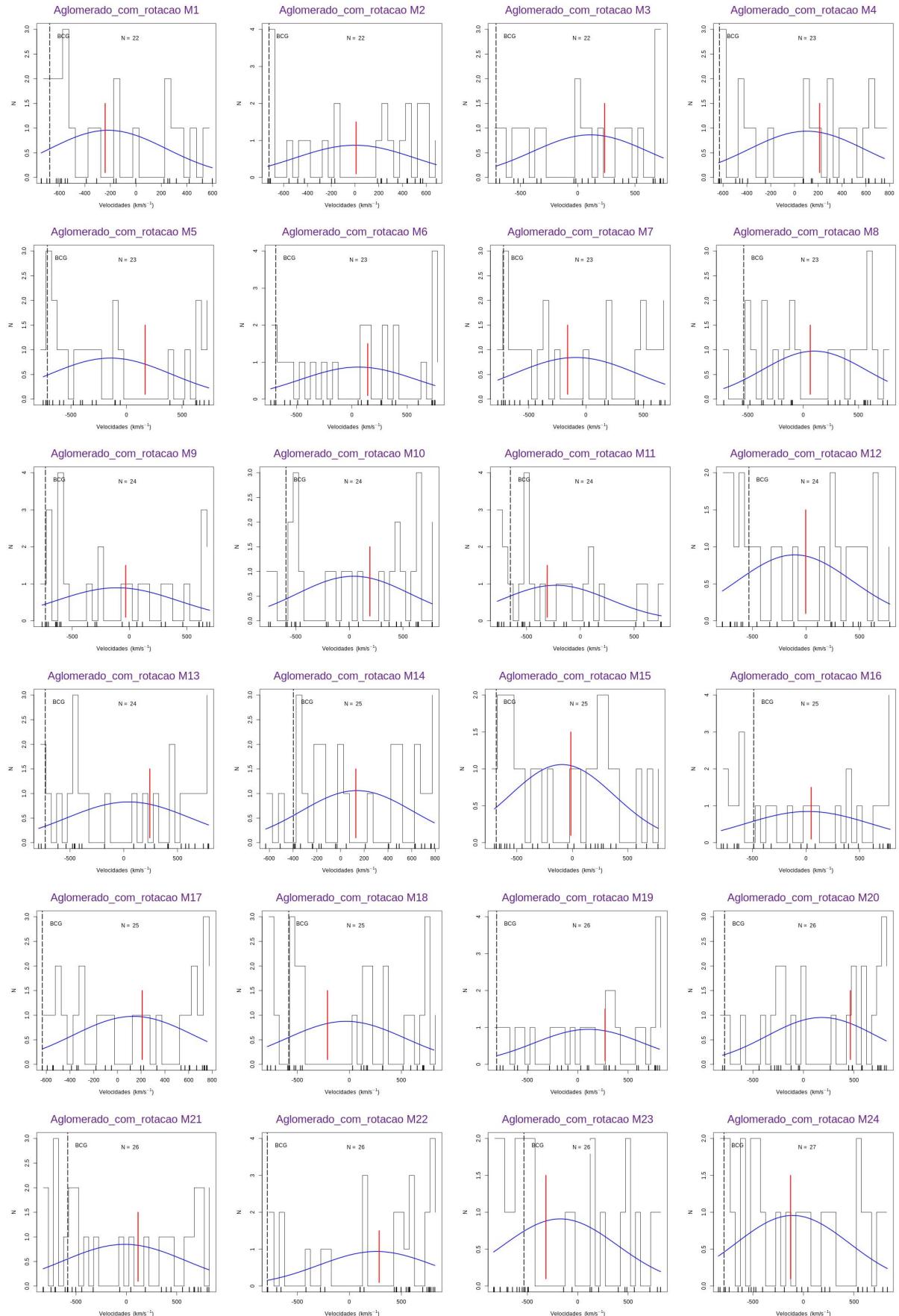


Figura 29 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte I.

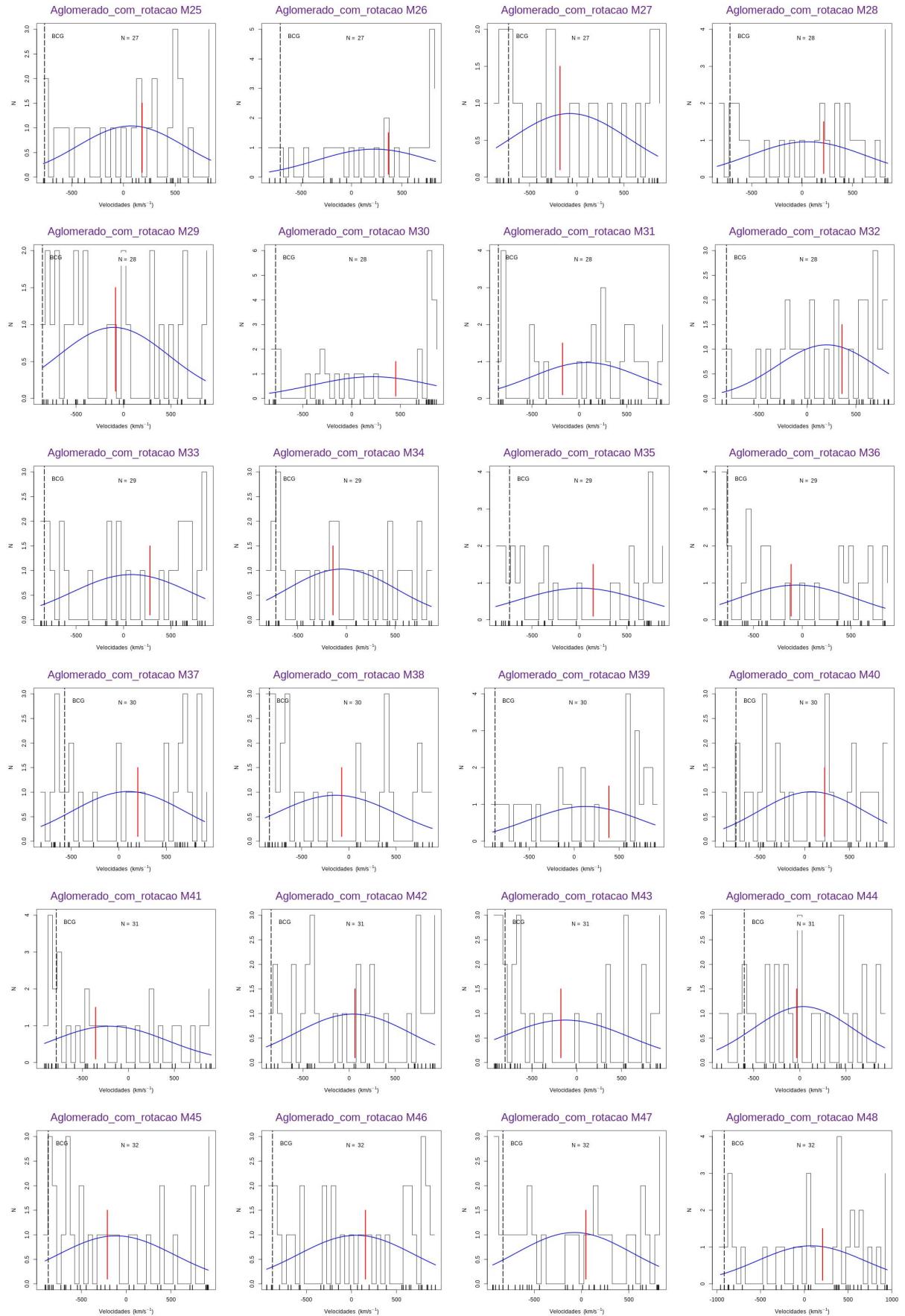


Figura 30 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte II.

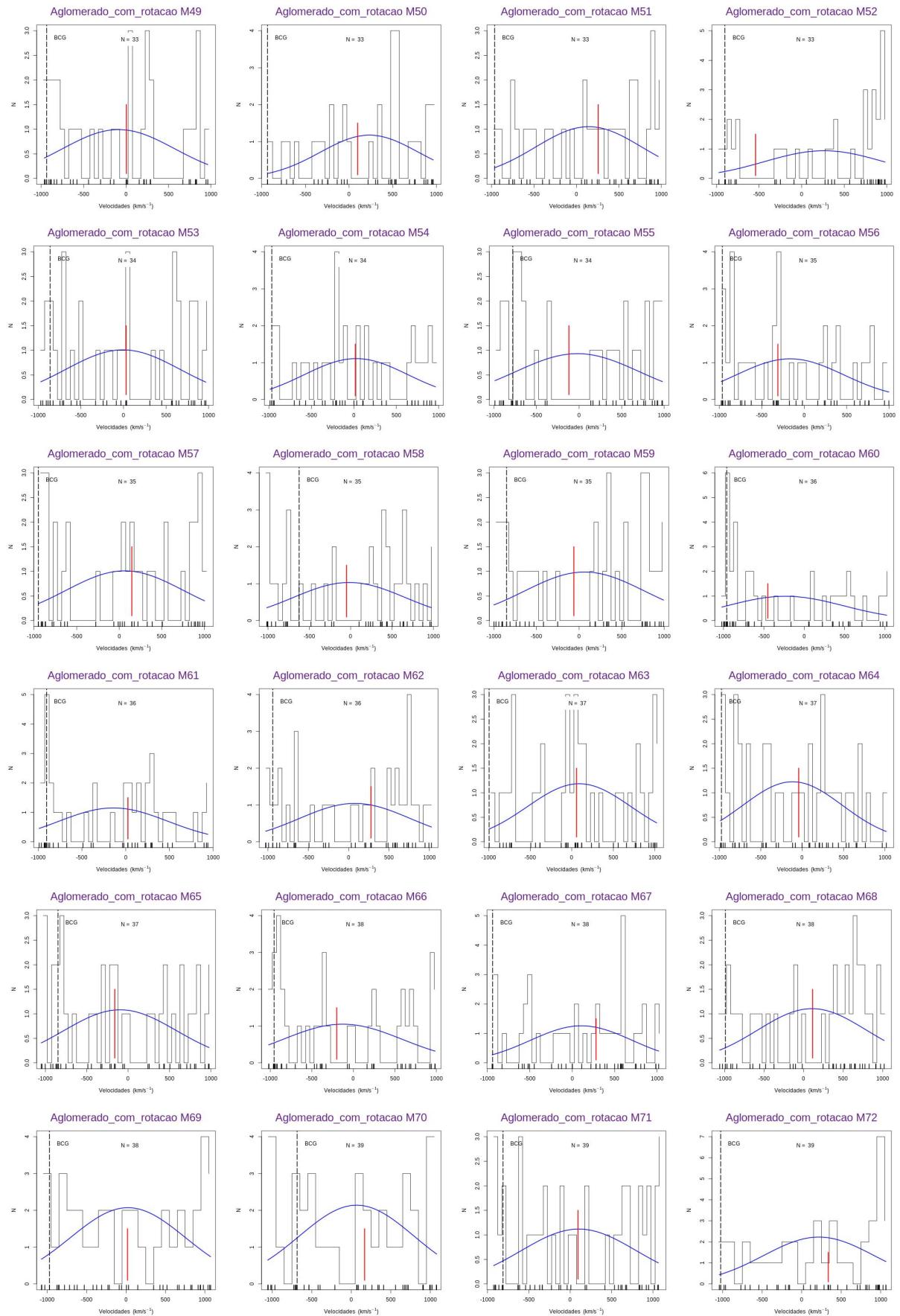


Figura 31 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte III.

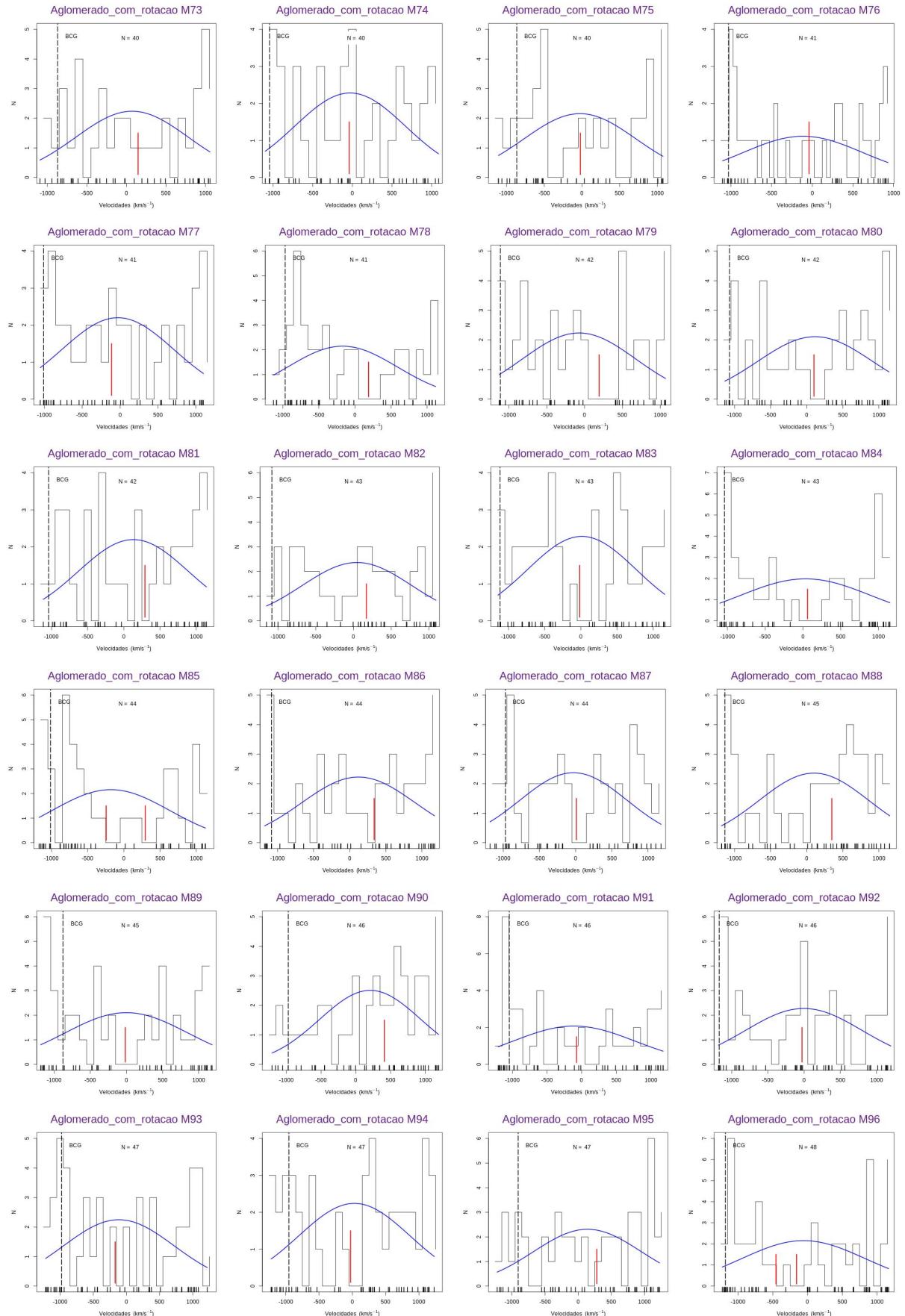


Figura 32 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte IV.

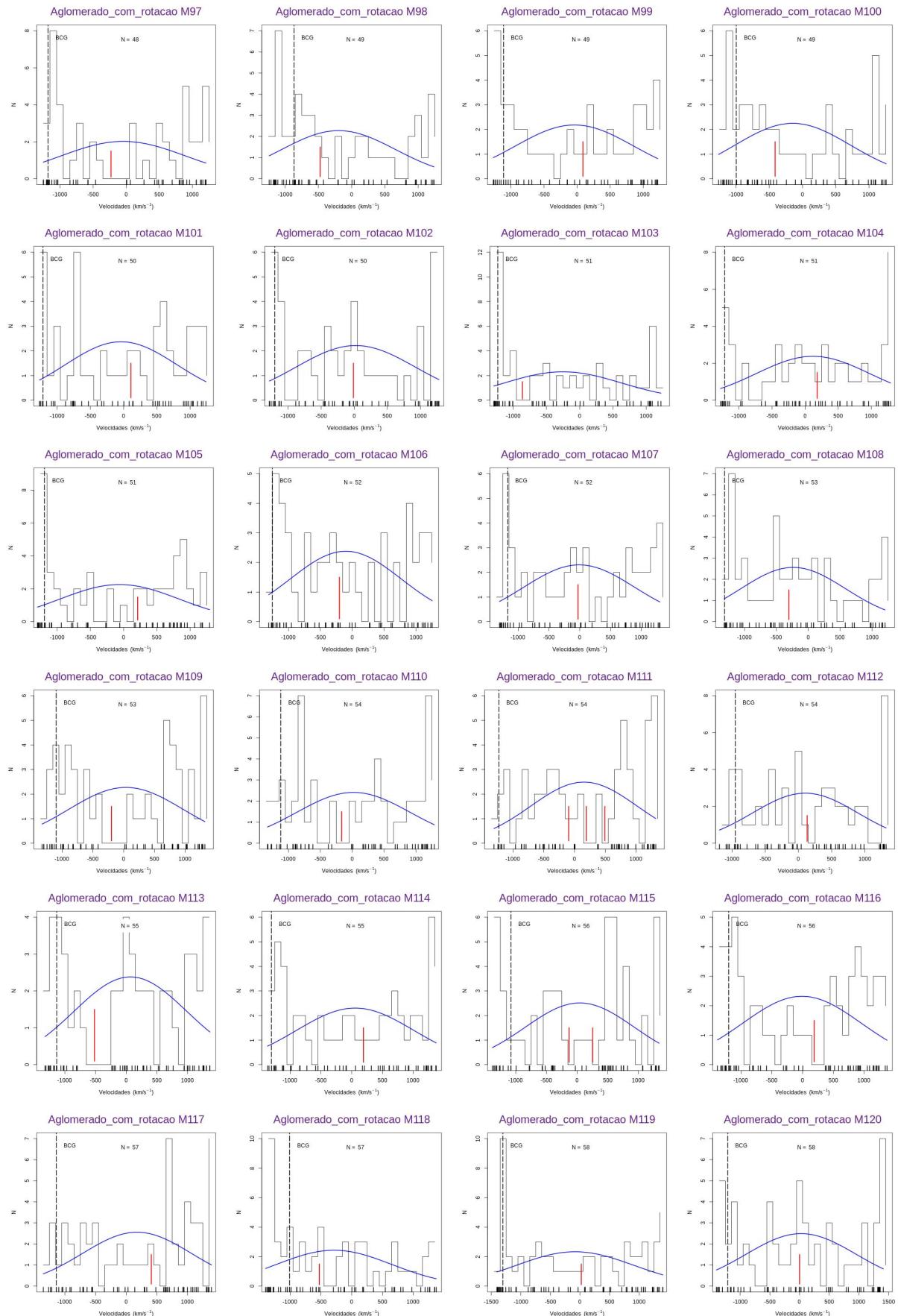


Figura 33 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte V.

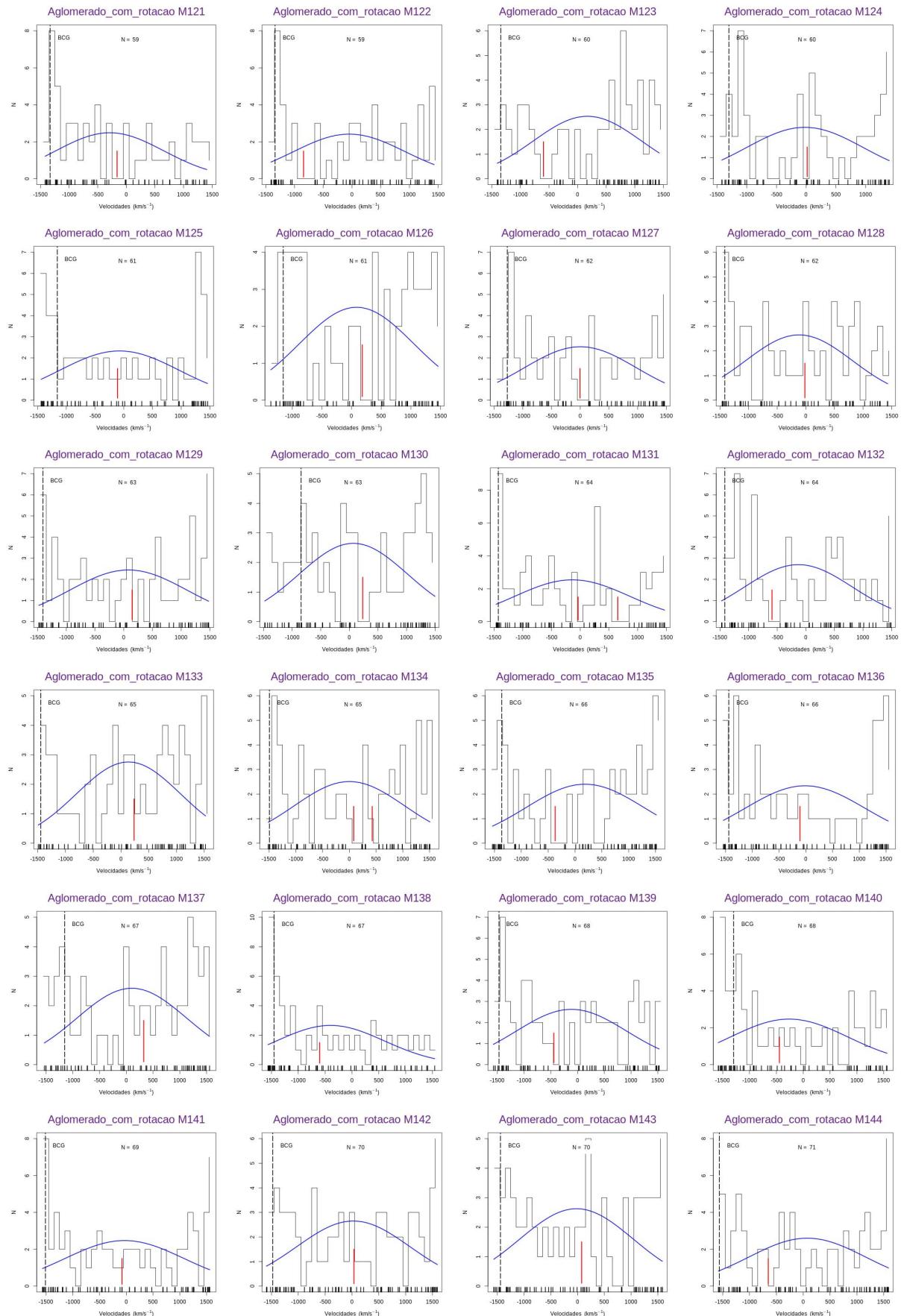


Figura 34 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte VI.

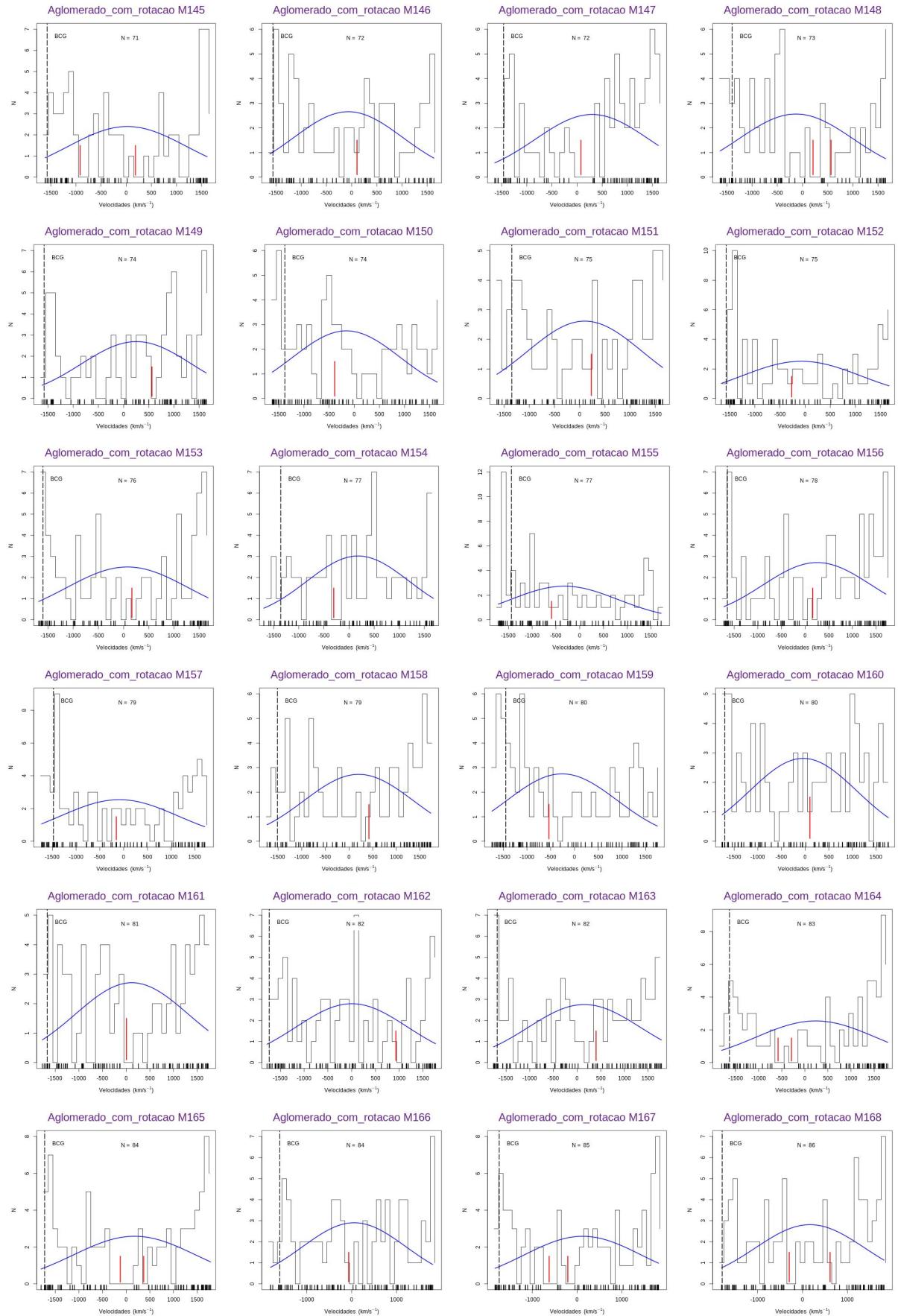


Figura 35 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte VII.

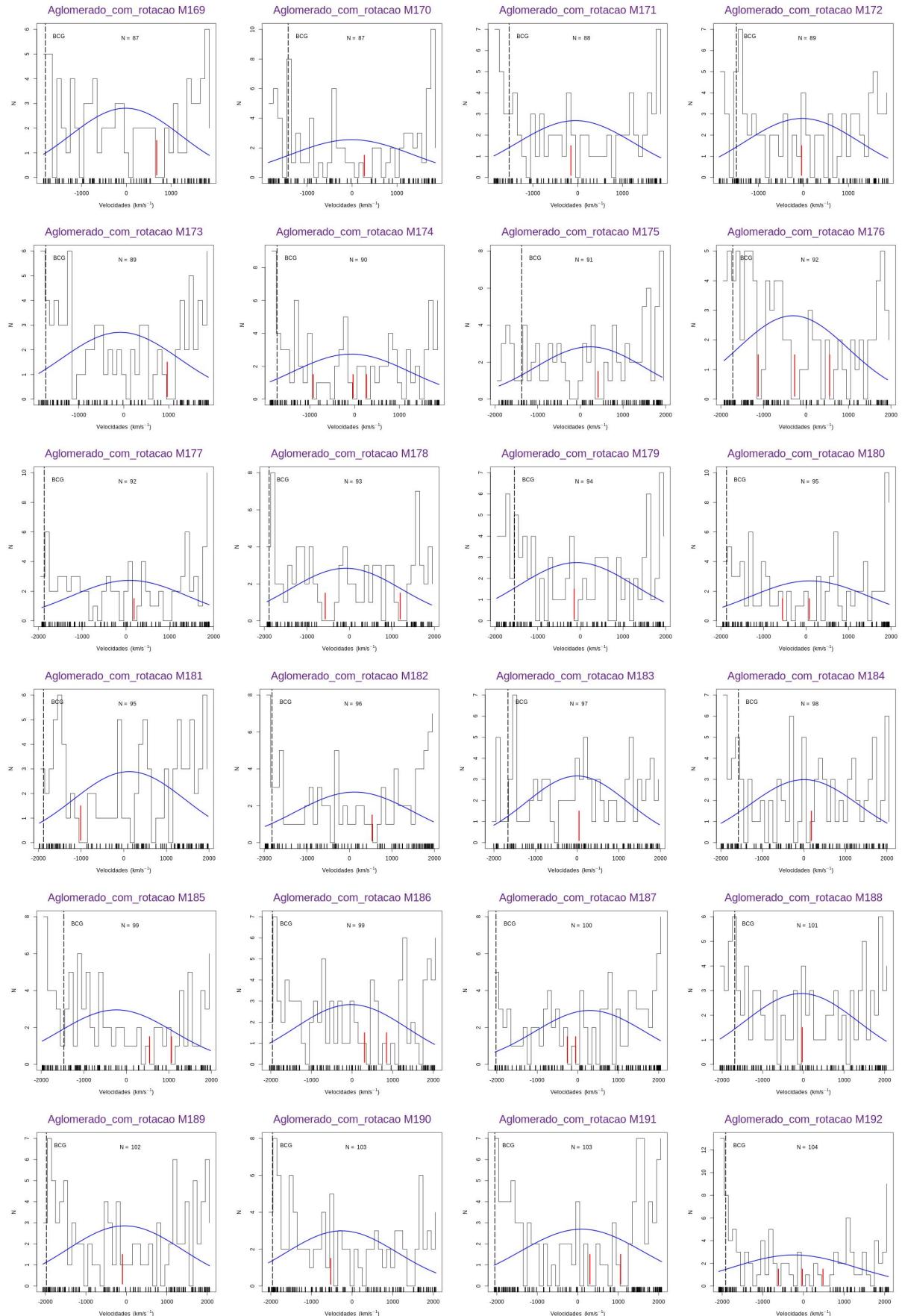


Figura 36 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte VIII.

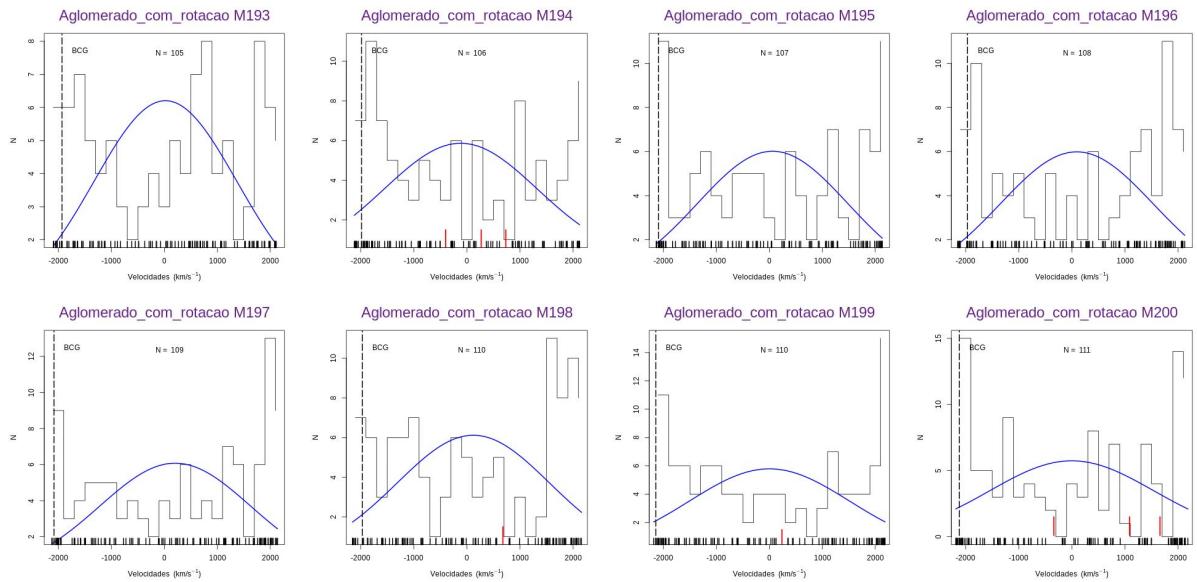


Figura 37 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra I Parte IX.

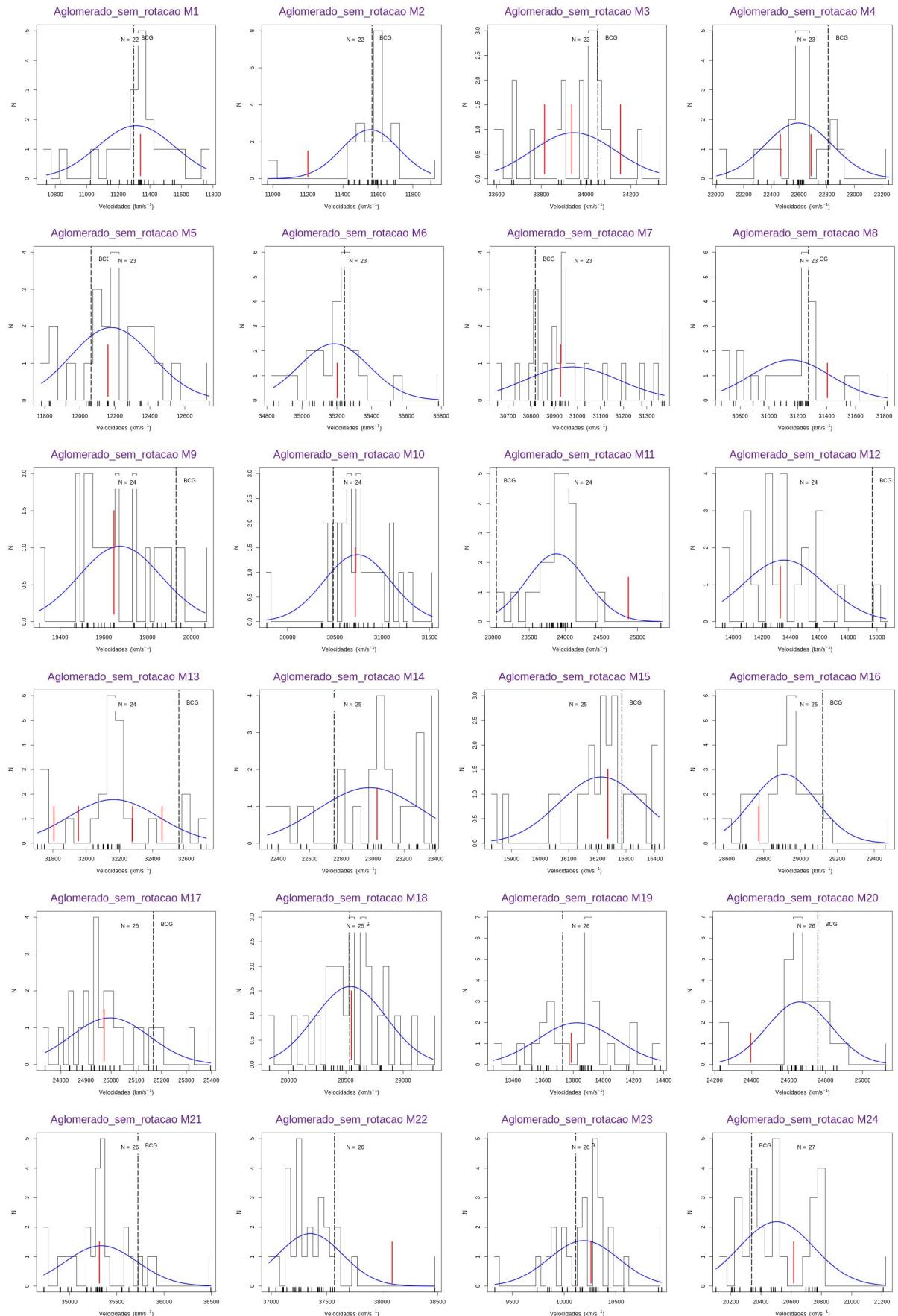


Figura 38 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte I.

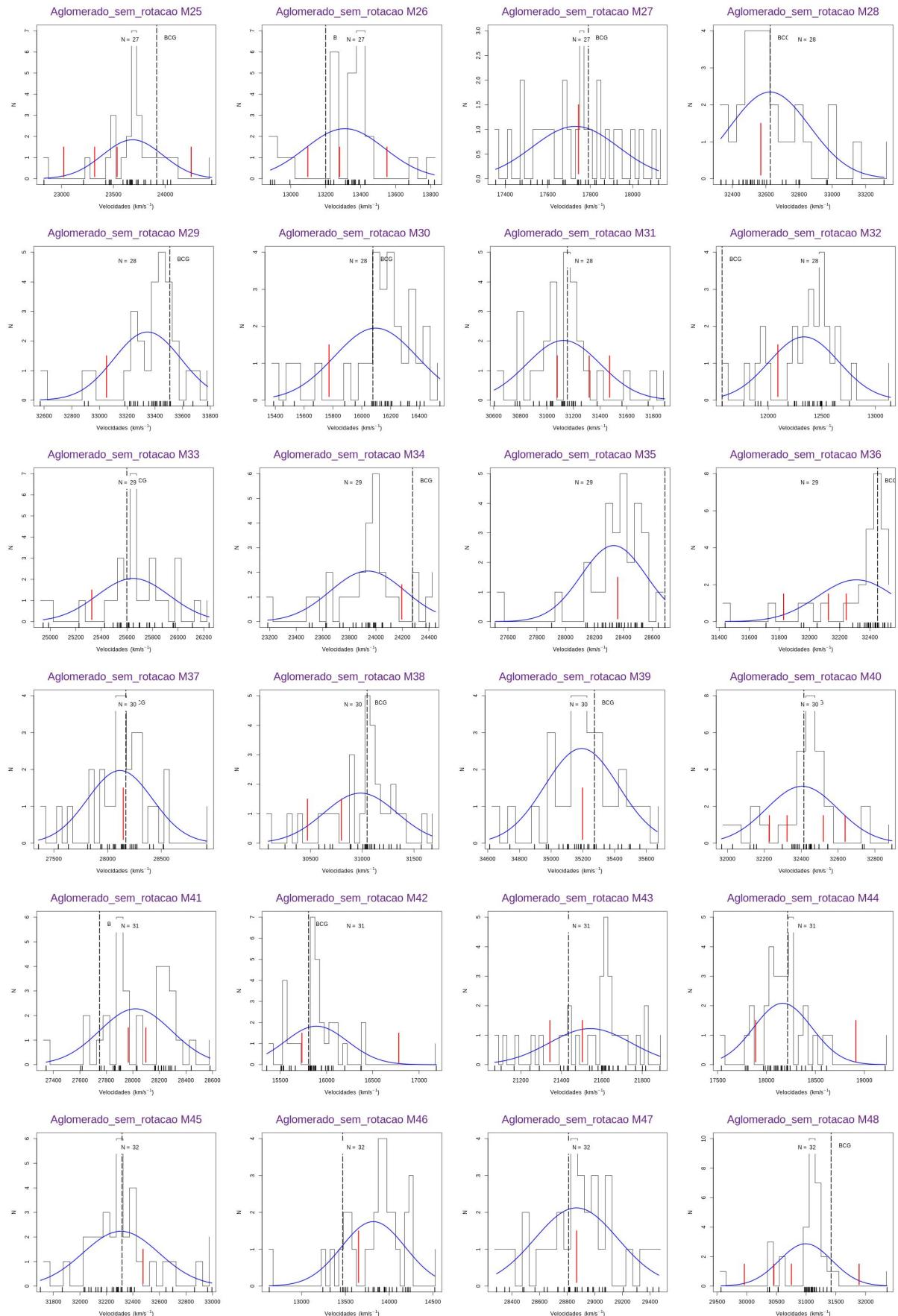


Figura 39 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte II.

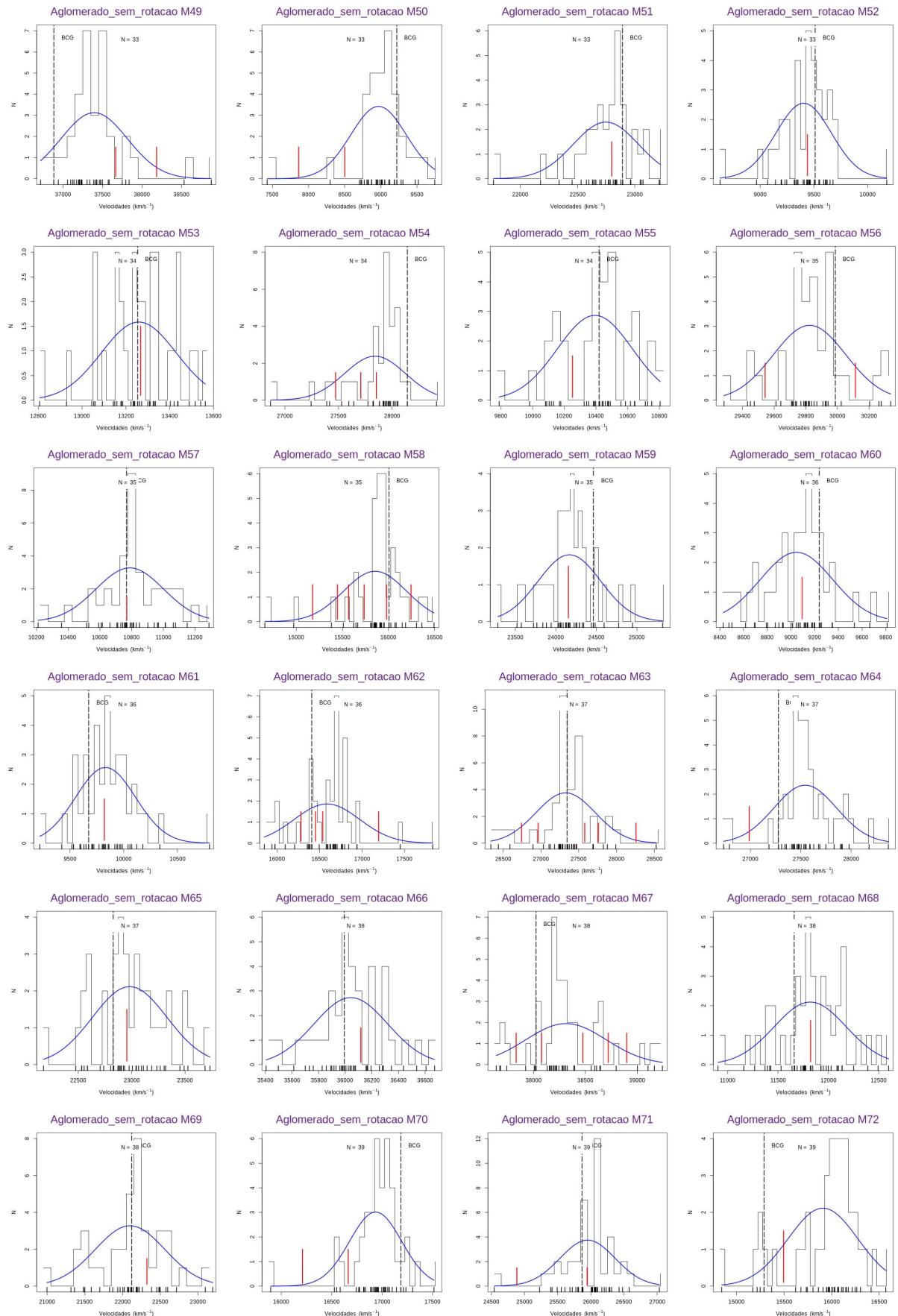


Figura 40 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte III.

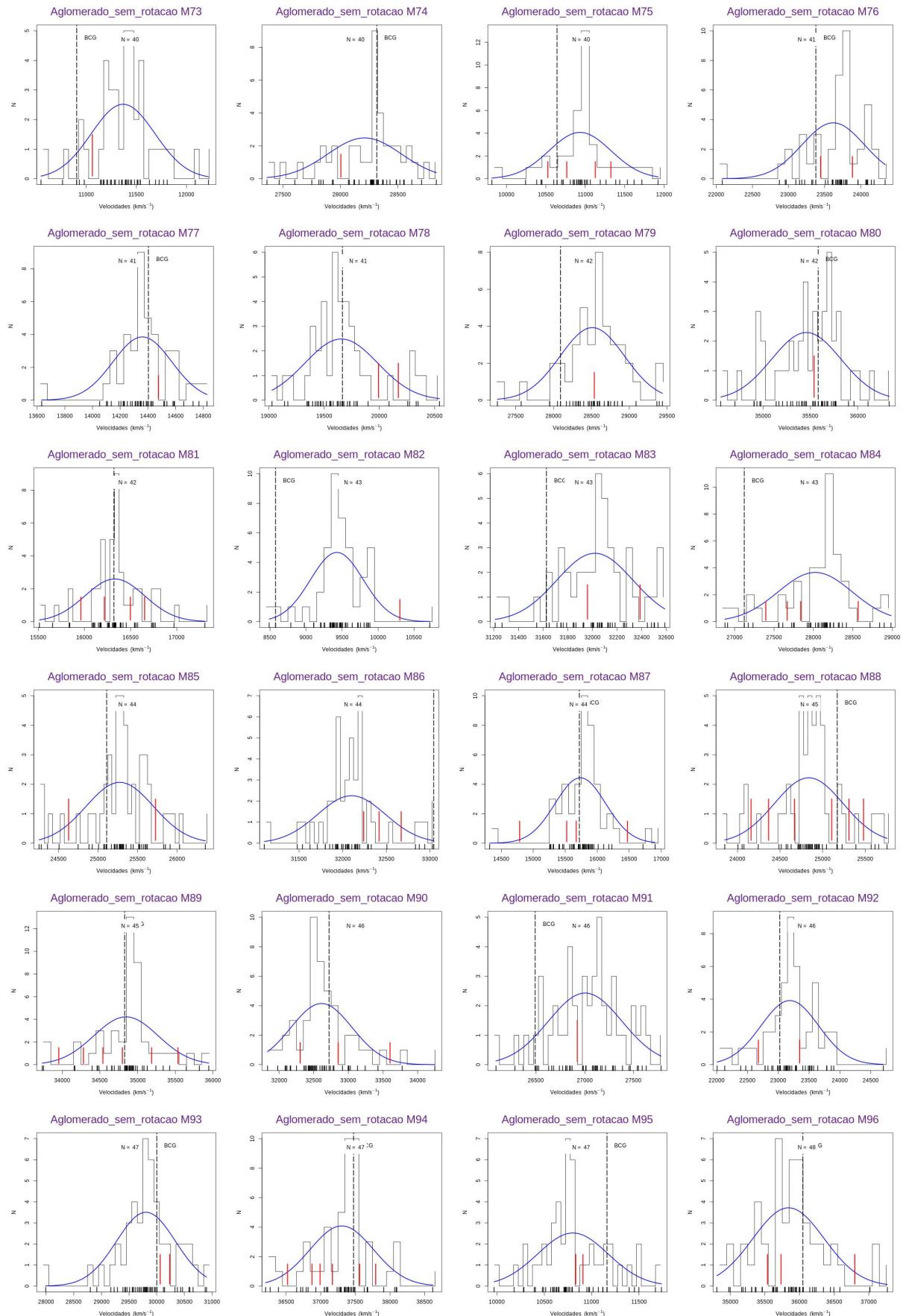


Figura 41 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte IV.

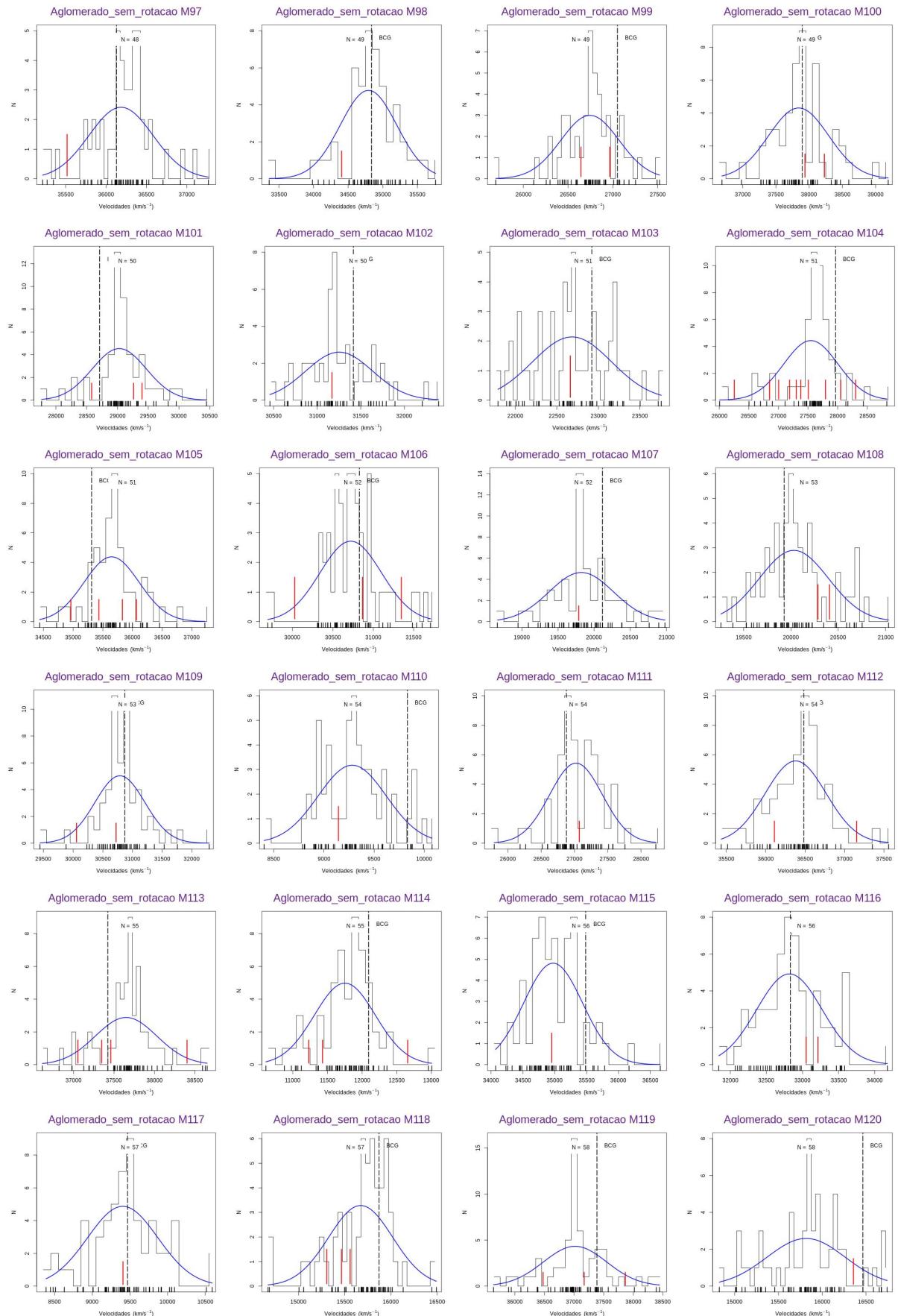


Figura 42 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte V.

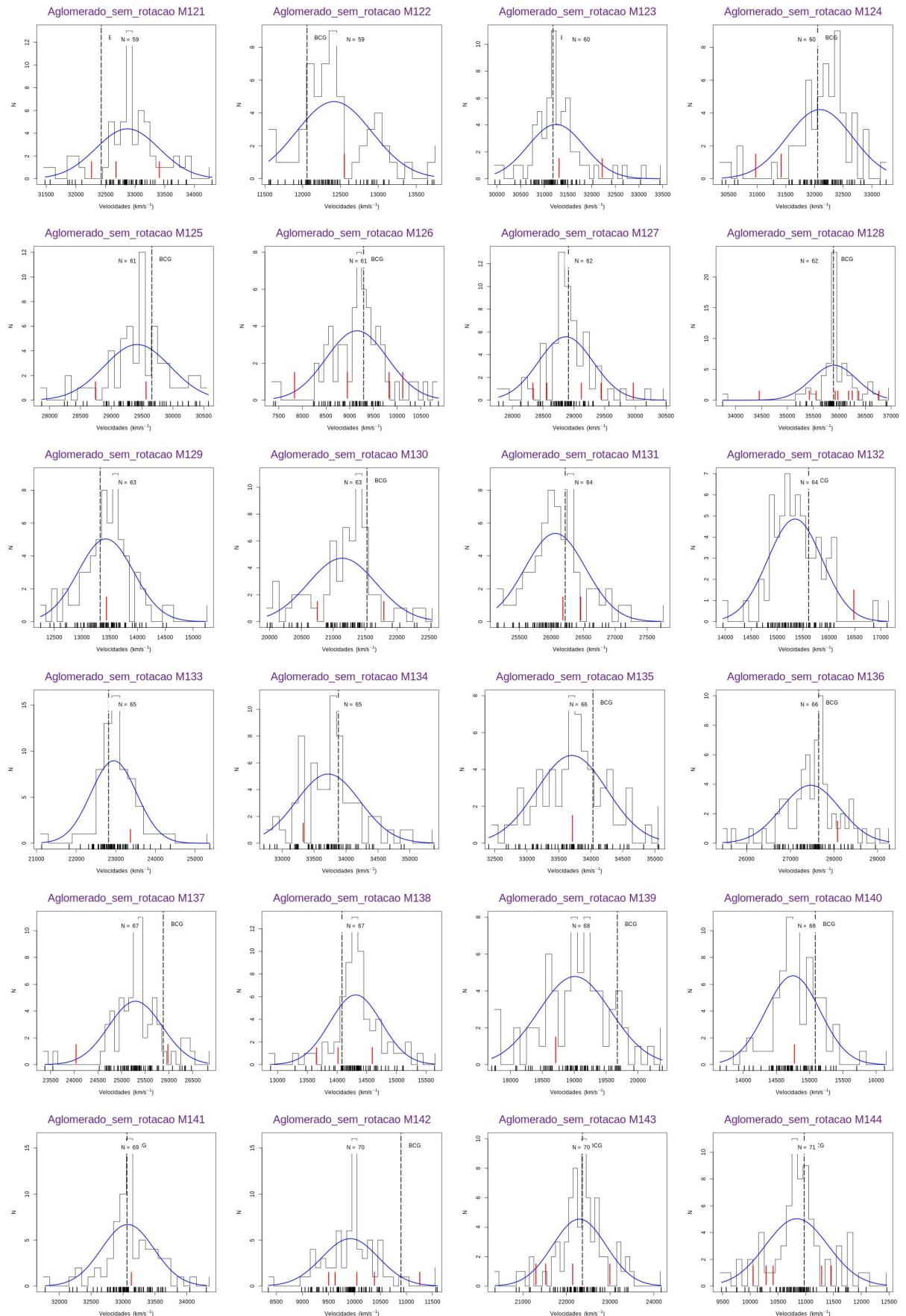


Figura 43 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte VI.

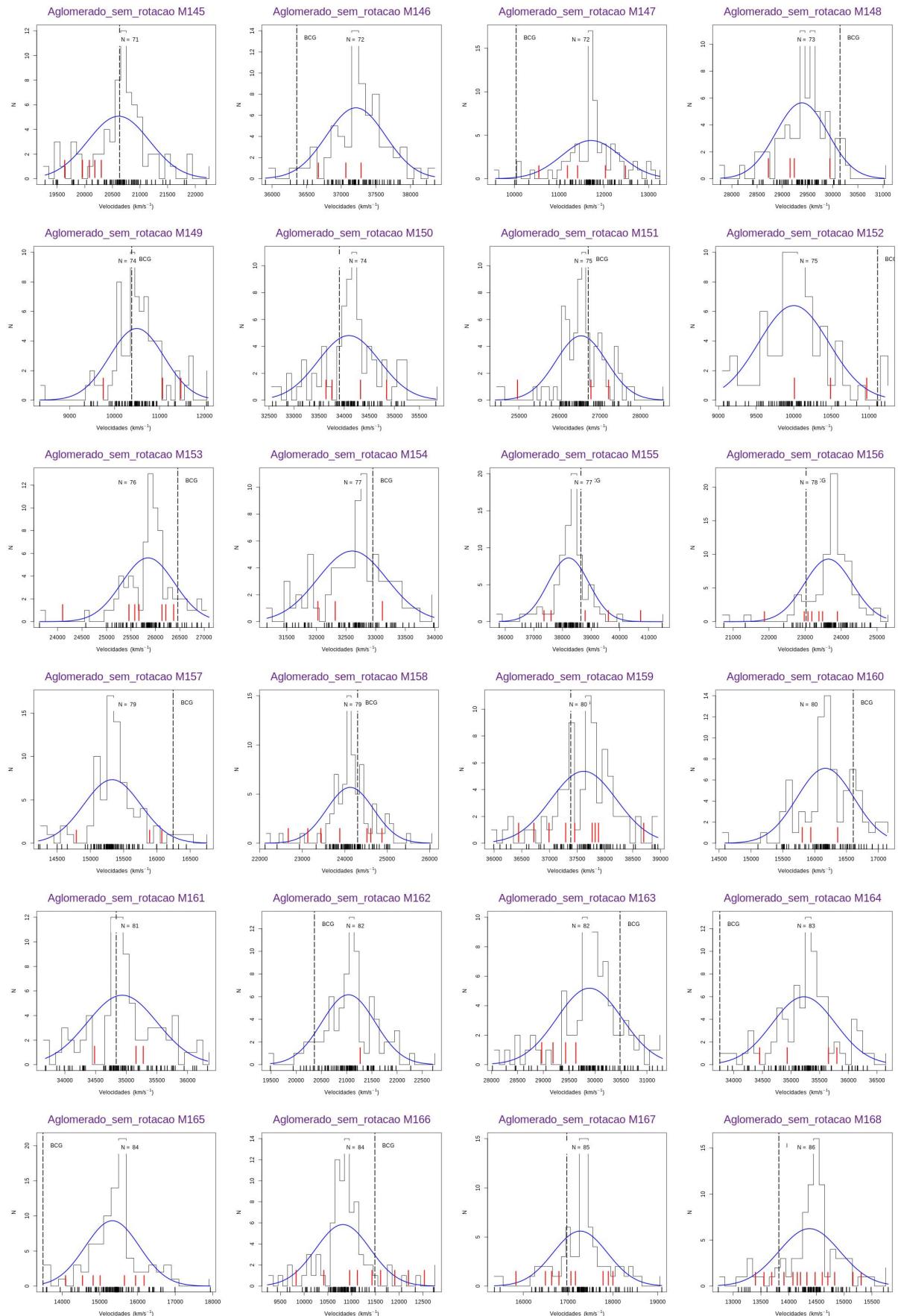


Figura 44 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte VII.

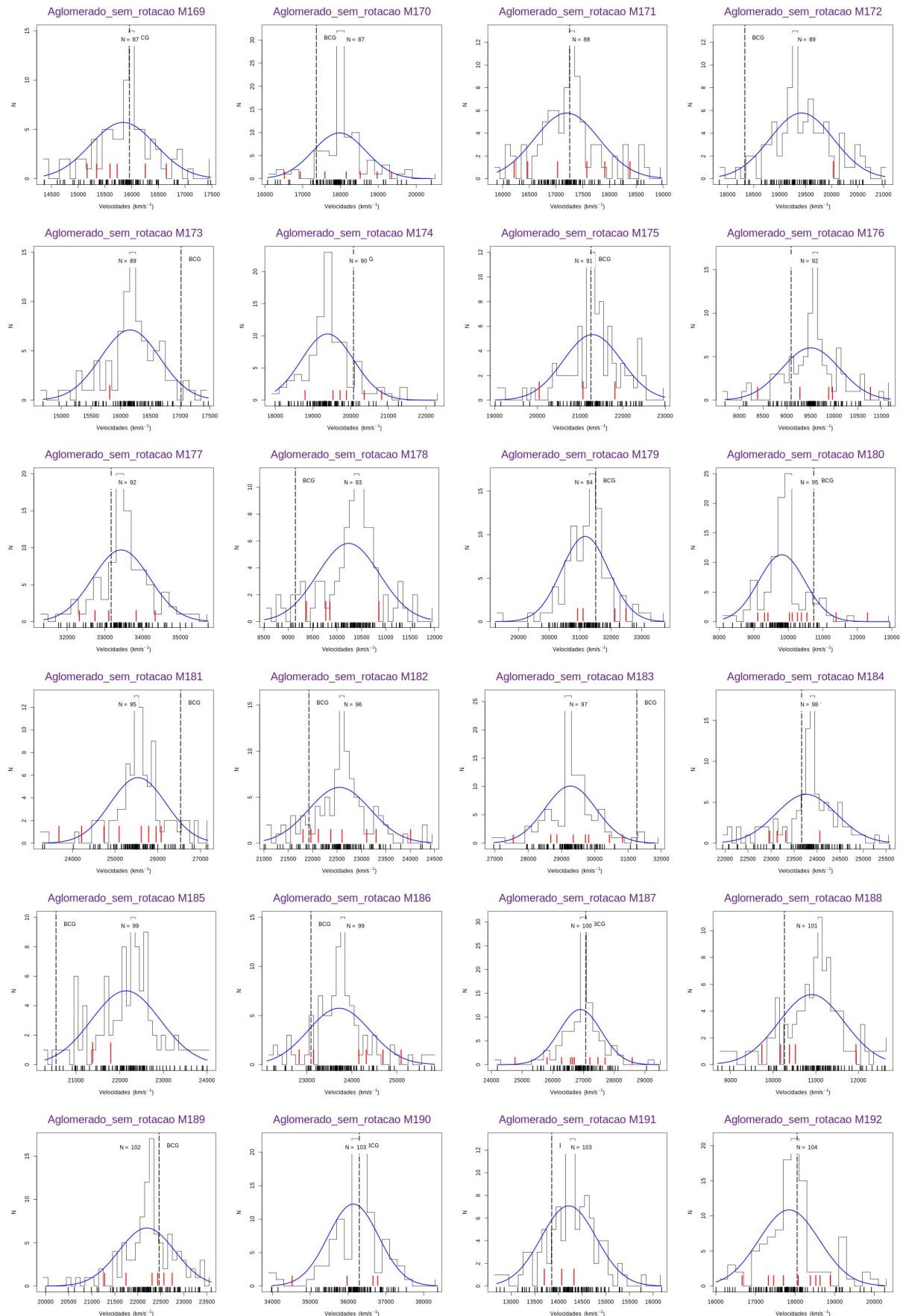


Figura 45 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte VIII.

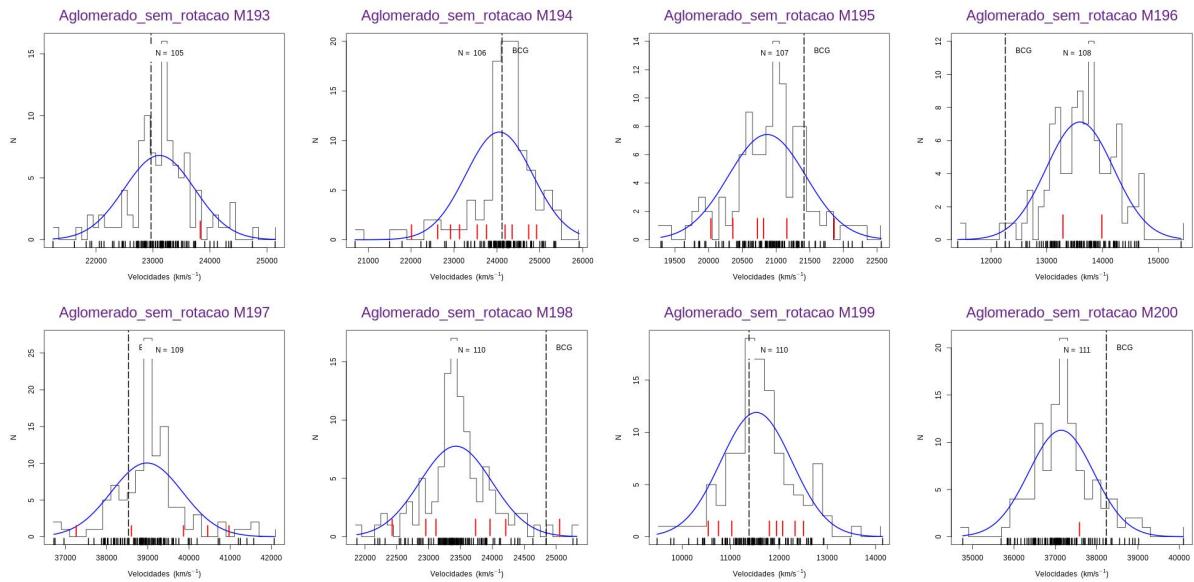


Figura 46 – Histograma Distribuição de Velocidade e Análise de Gaps - Catálogo Simulado Amostra II Parte IX.

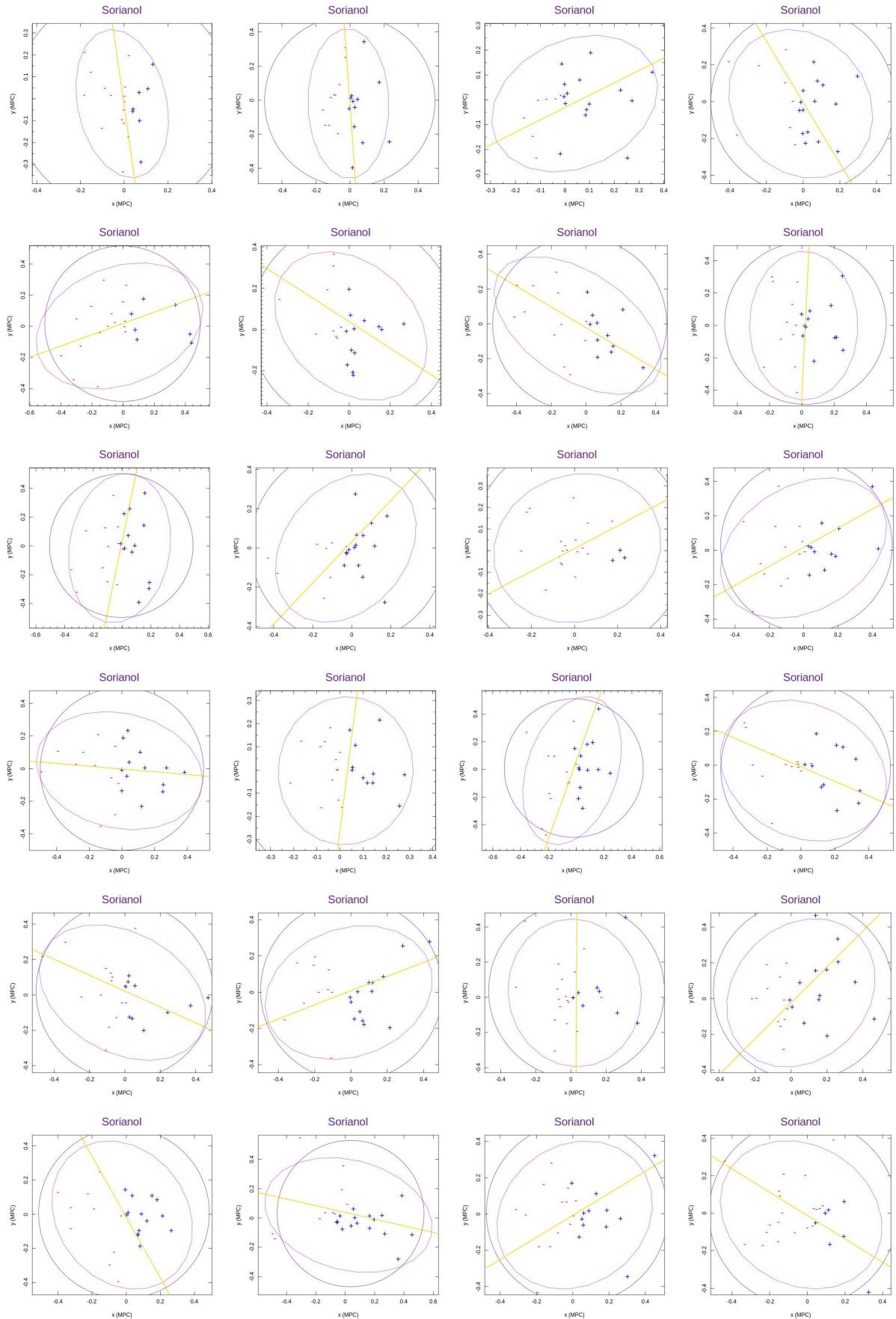


Figura 47 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte I.

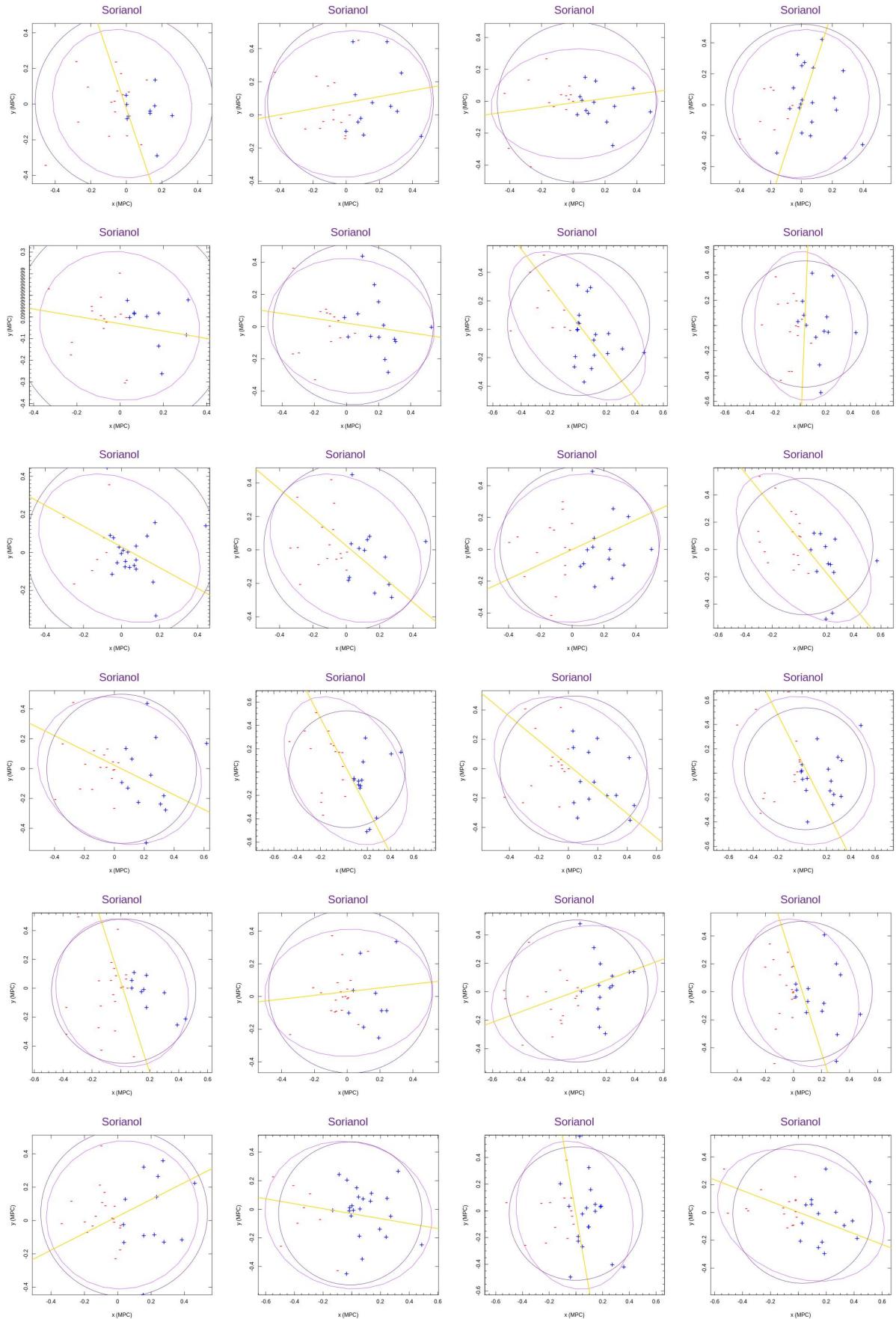


Figura 48 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte II.

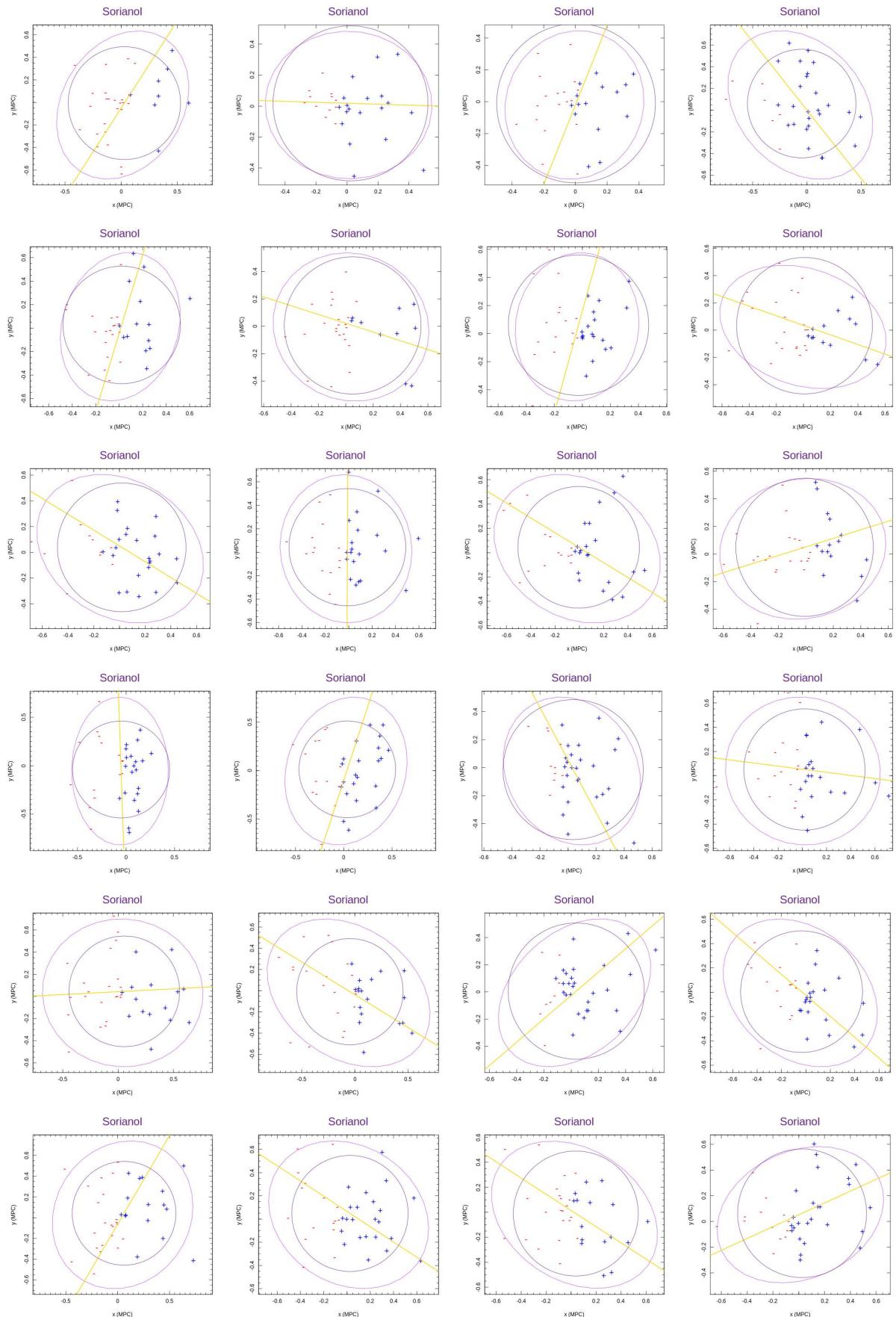


Figura 49 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte III.

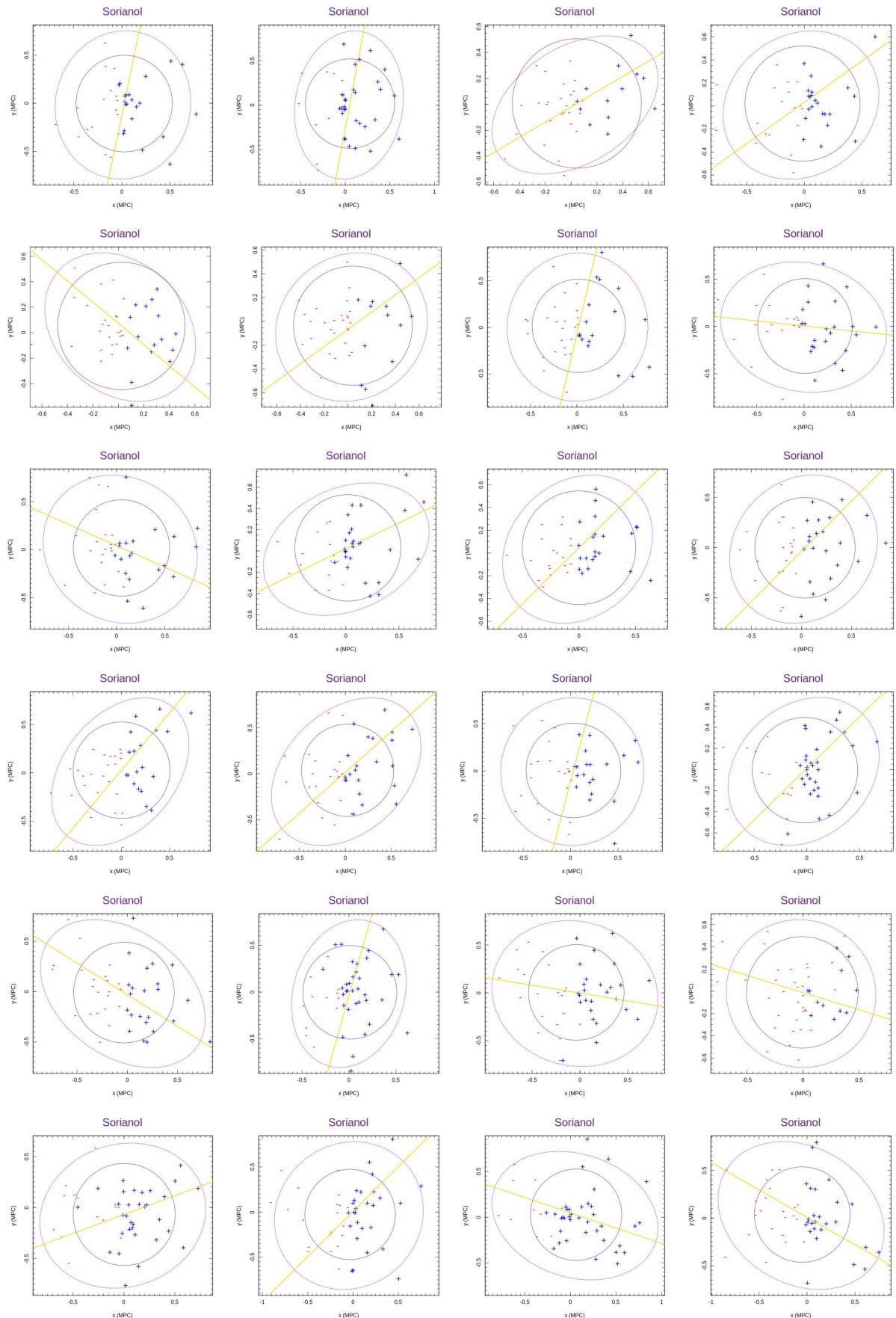


Figura 50 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte IV.

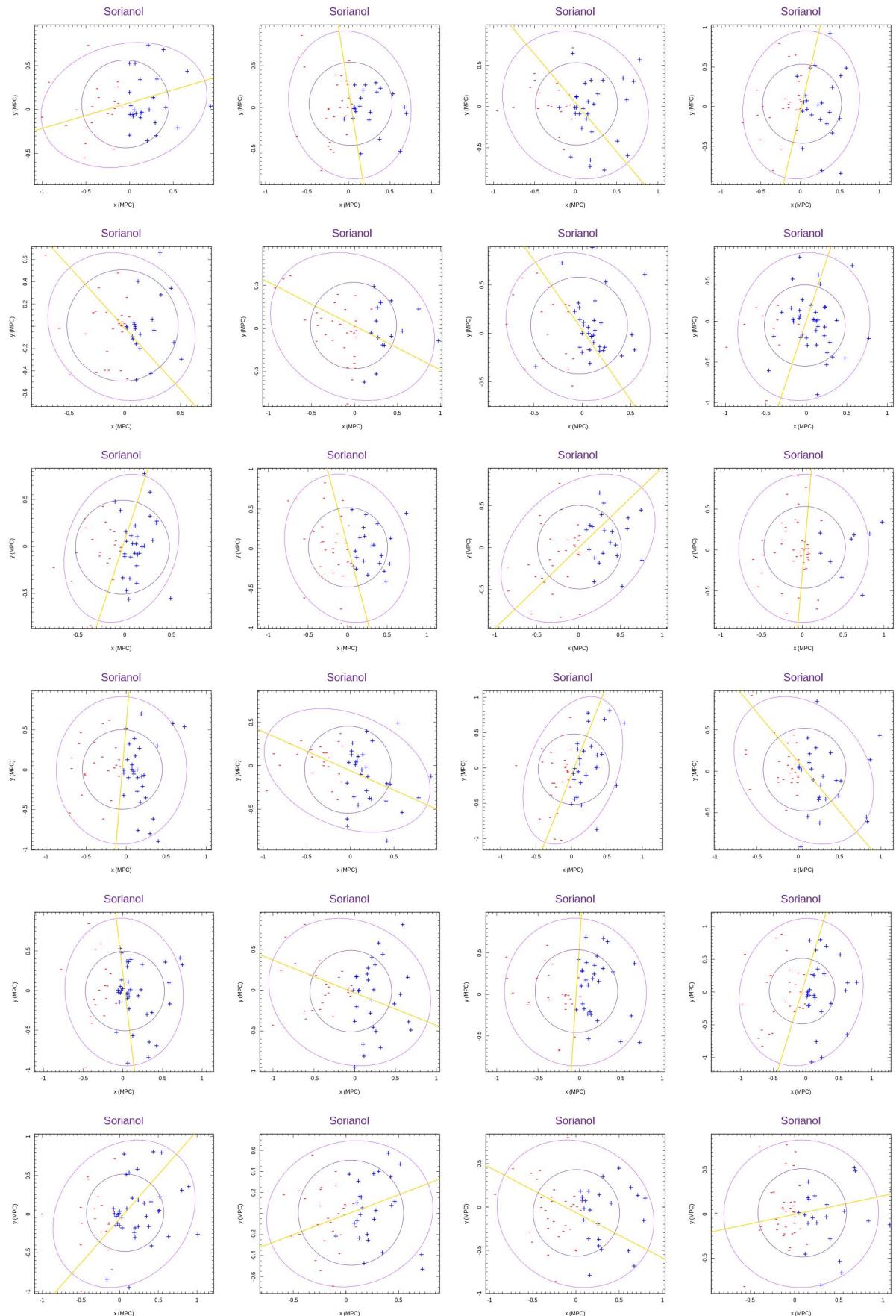


Figura 51 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte V.

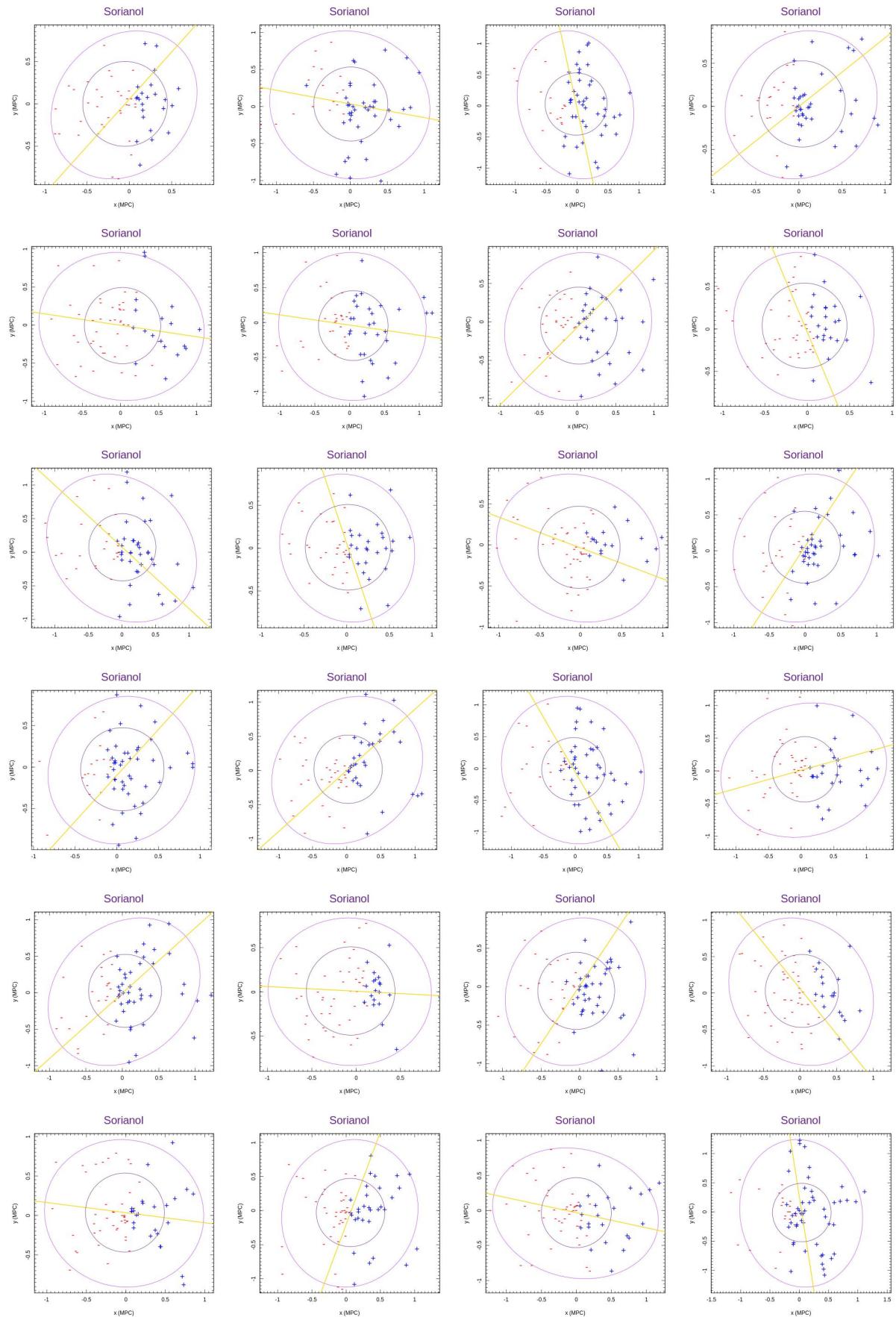


Figura 52 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte VI.

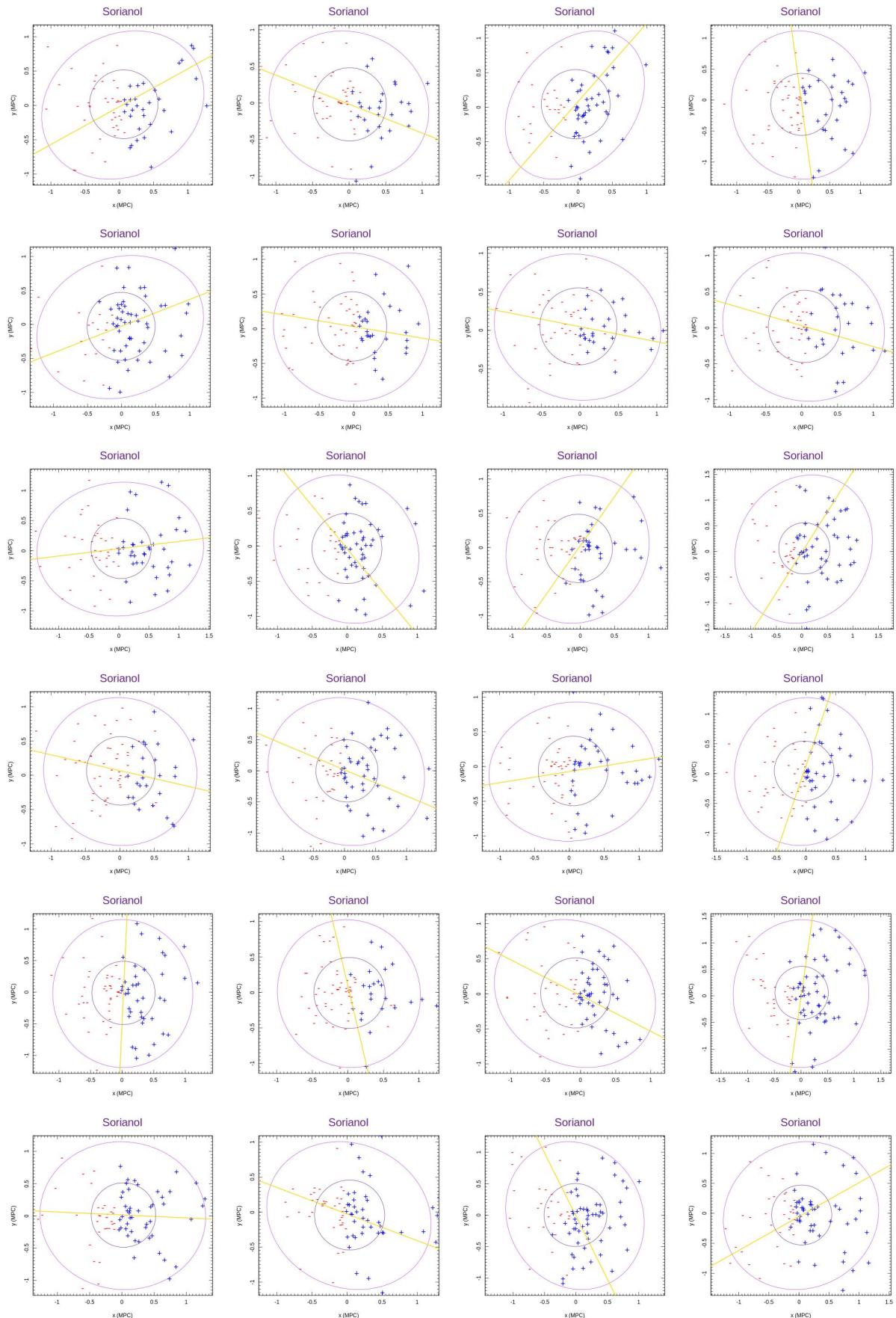


Figura 53 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte VII.

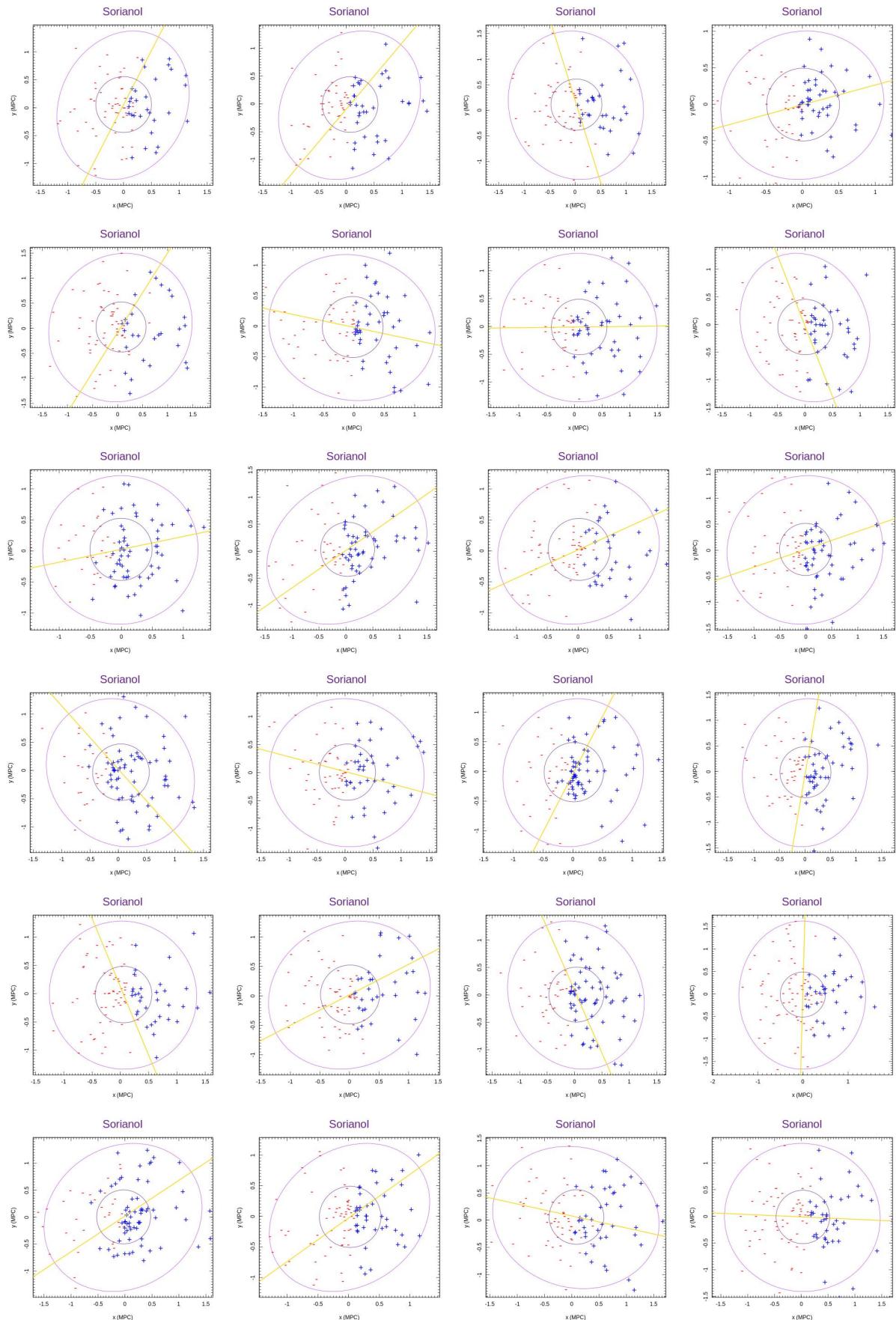


Figura 54 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte VIII.

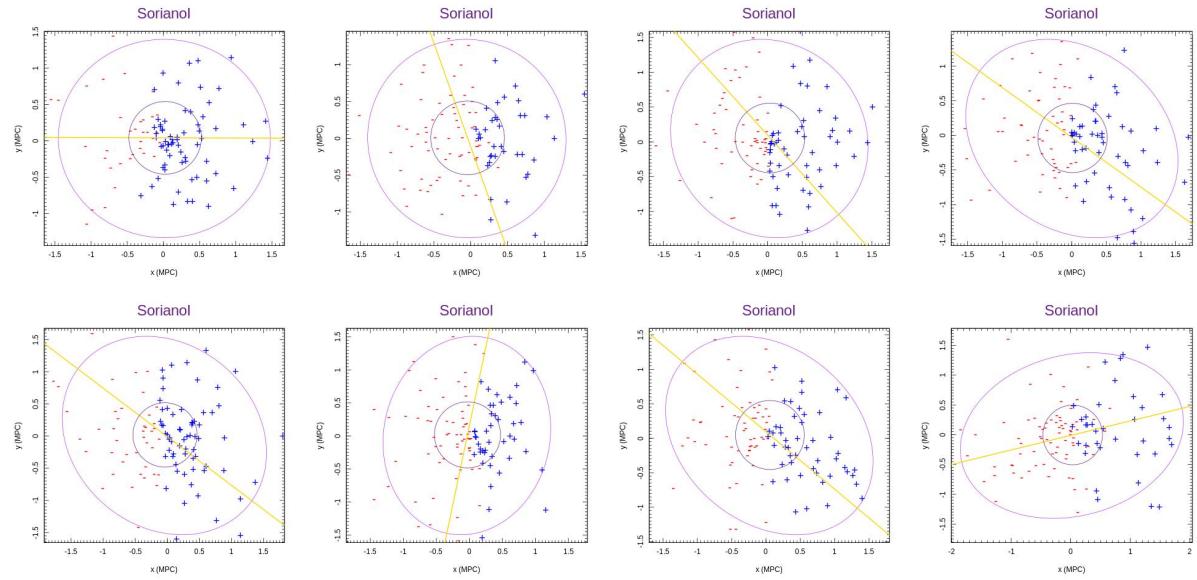


Figura 55 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra I Parte IX.

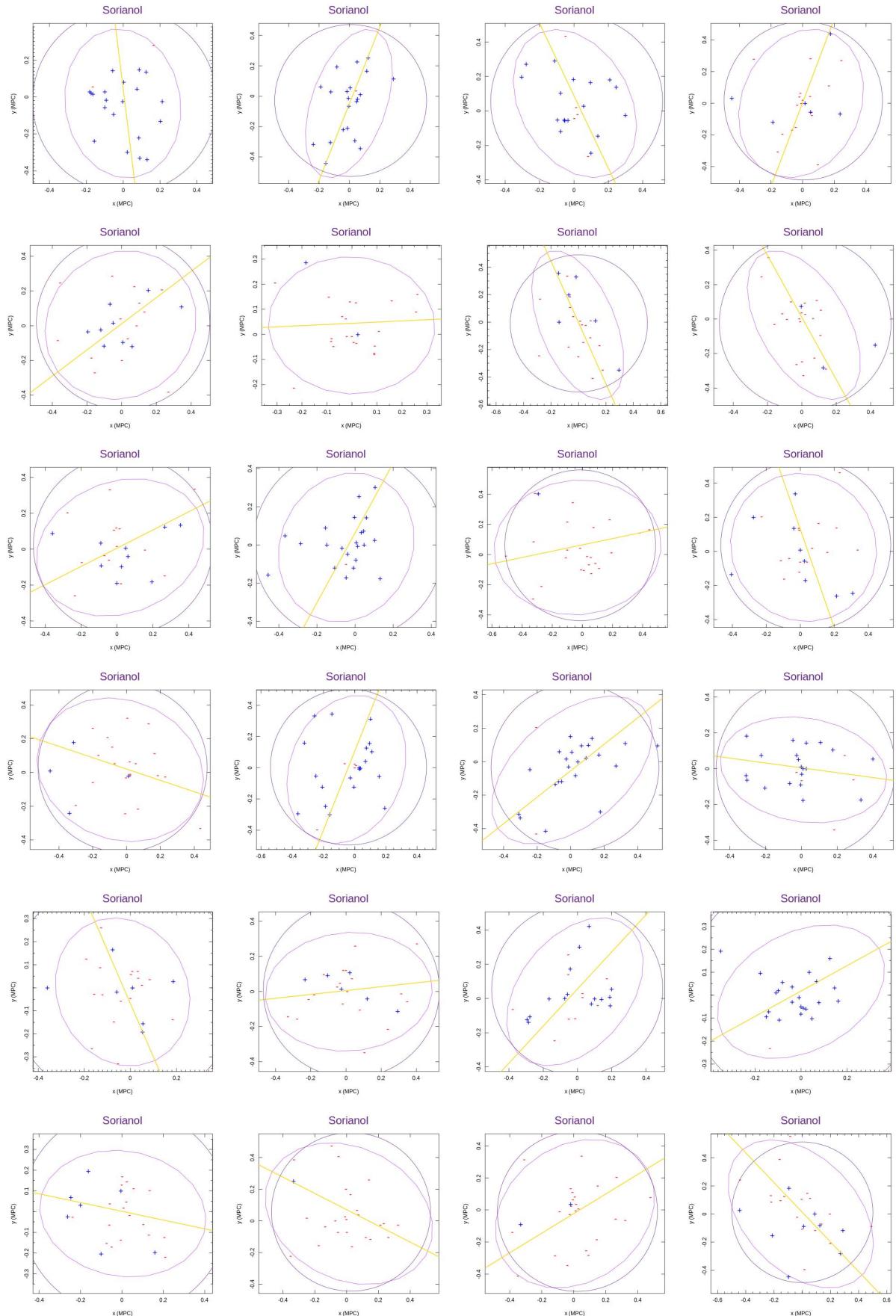


Figura 56 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte I.

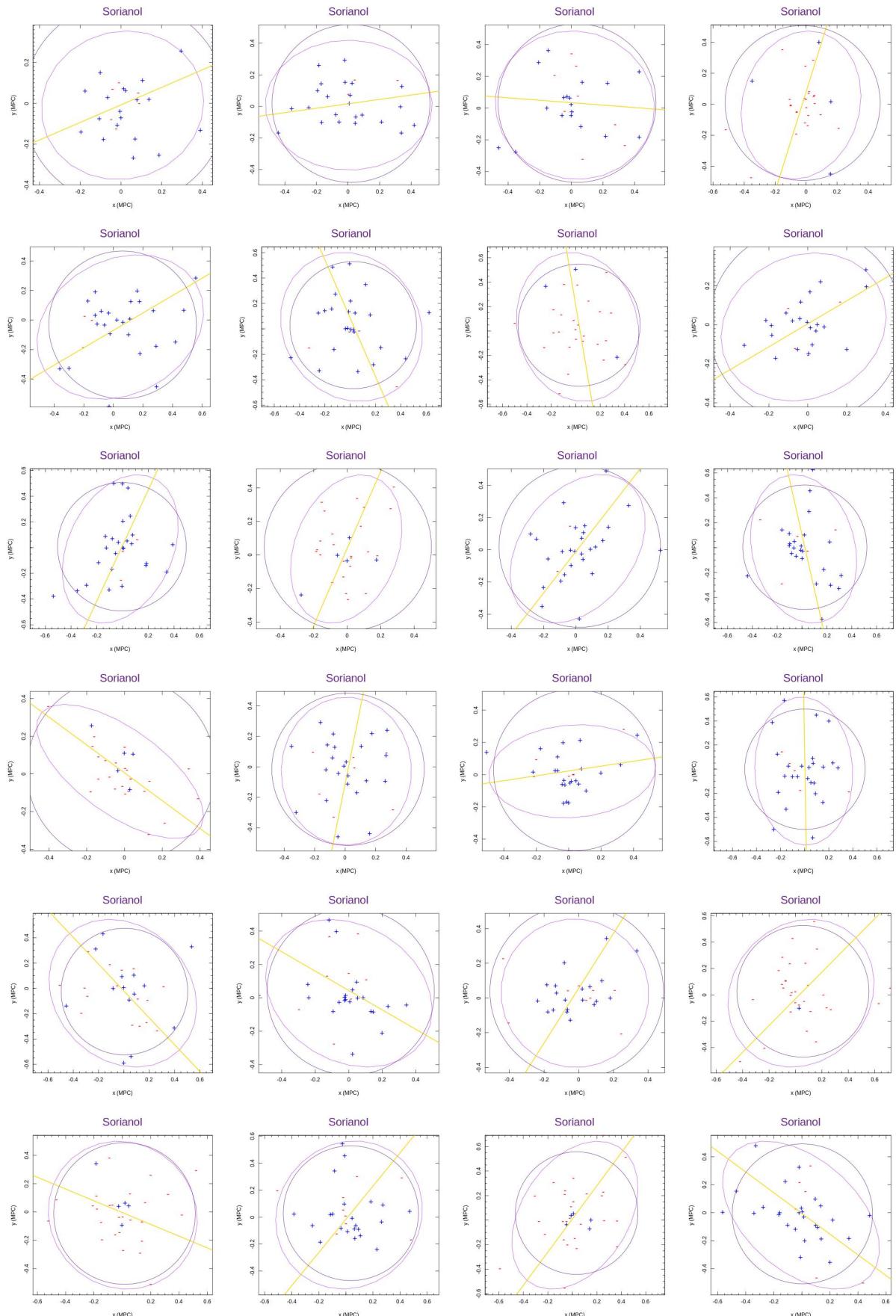


Figura 57 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte II.

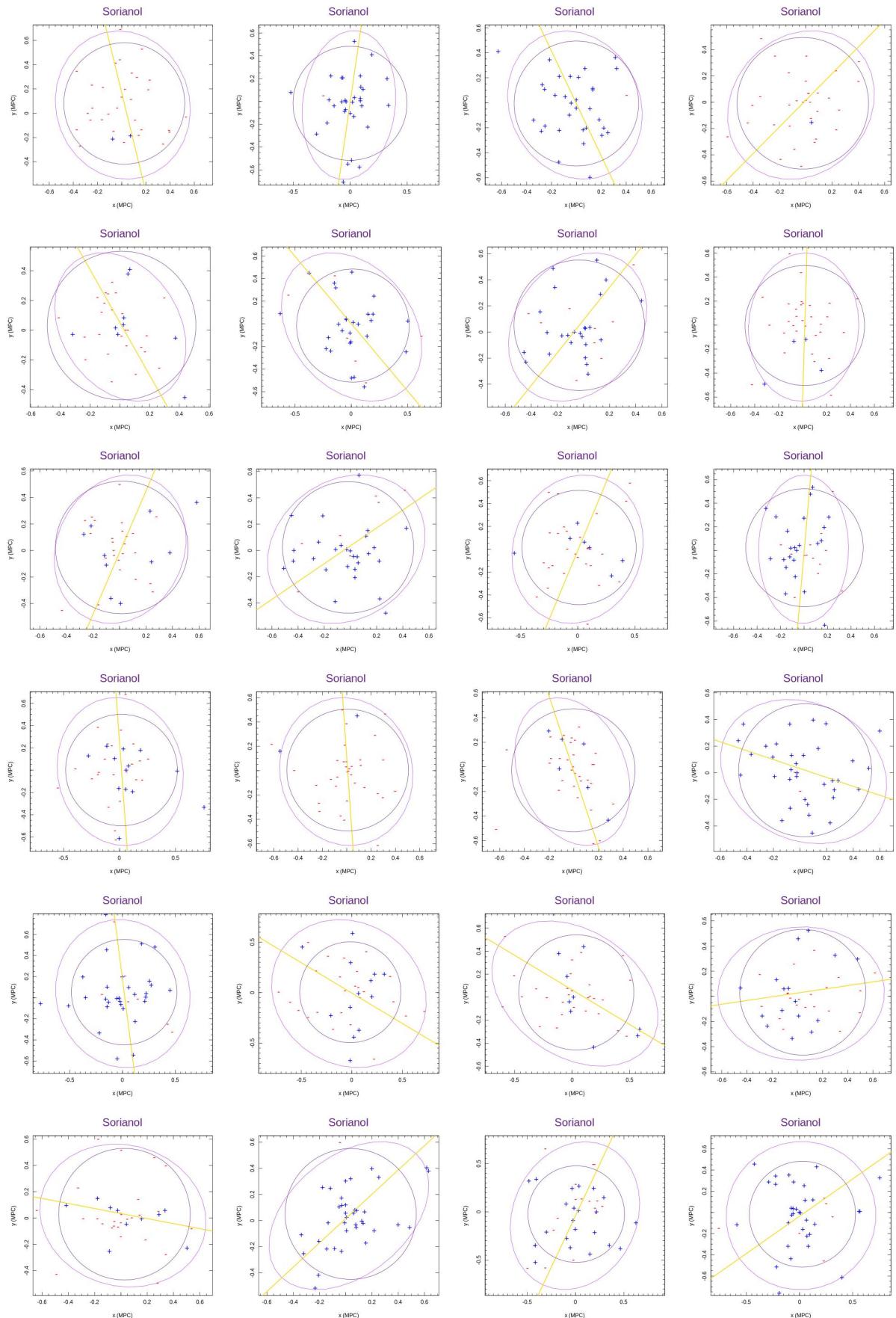


Figura 58 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte III.

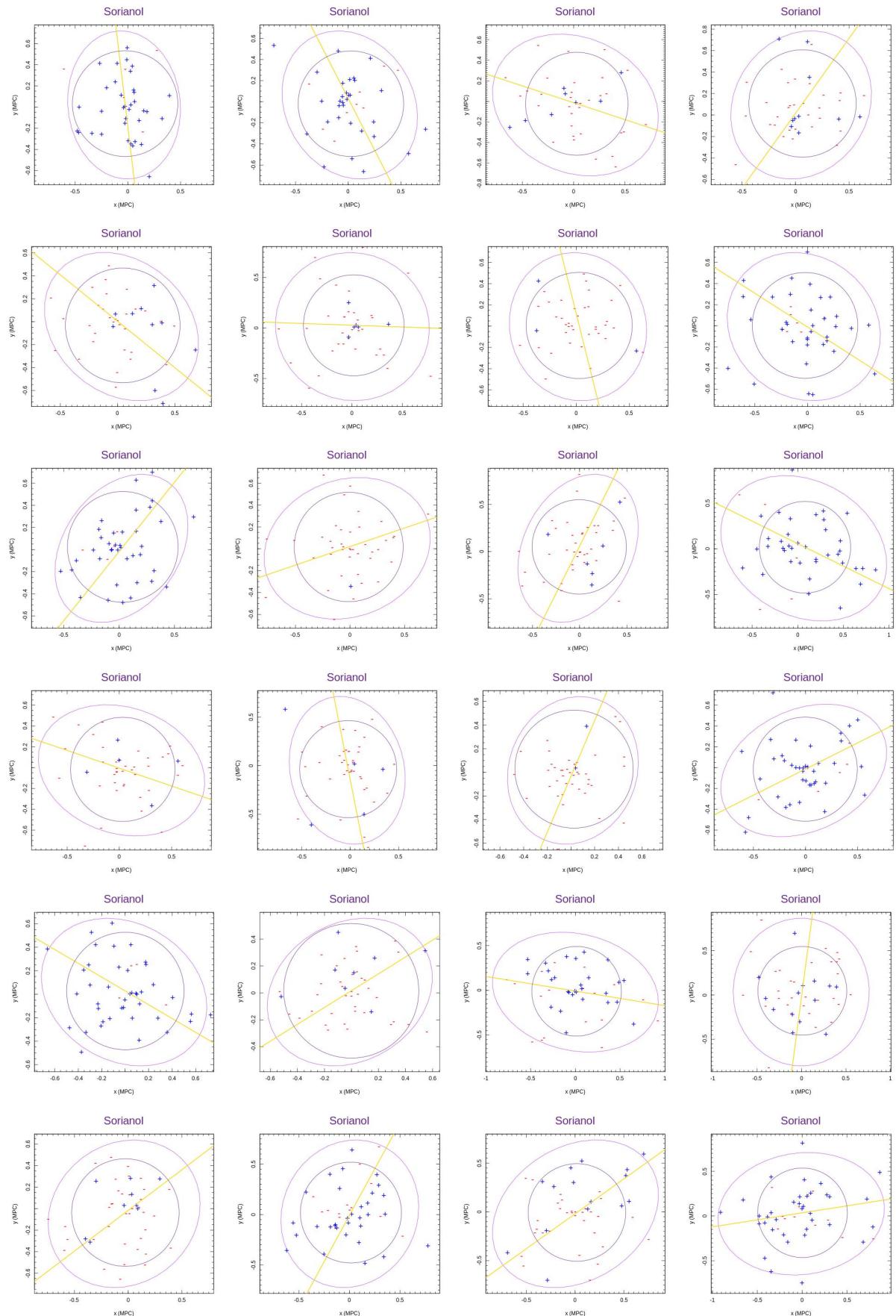


Figura 59 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte IV.

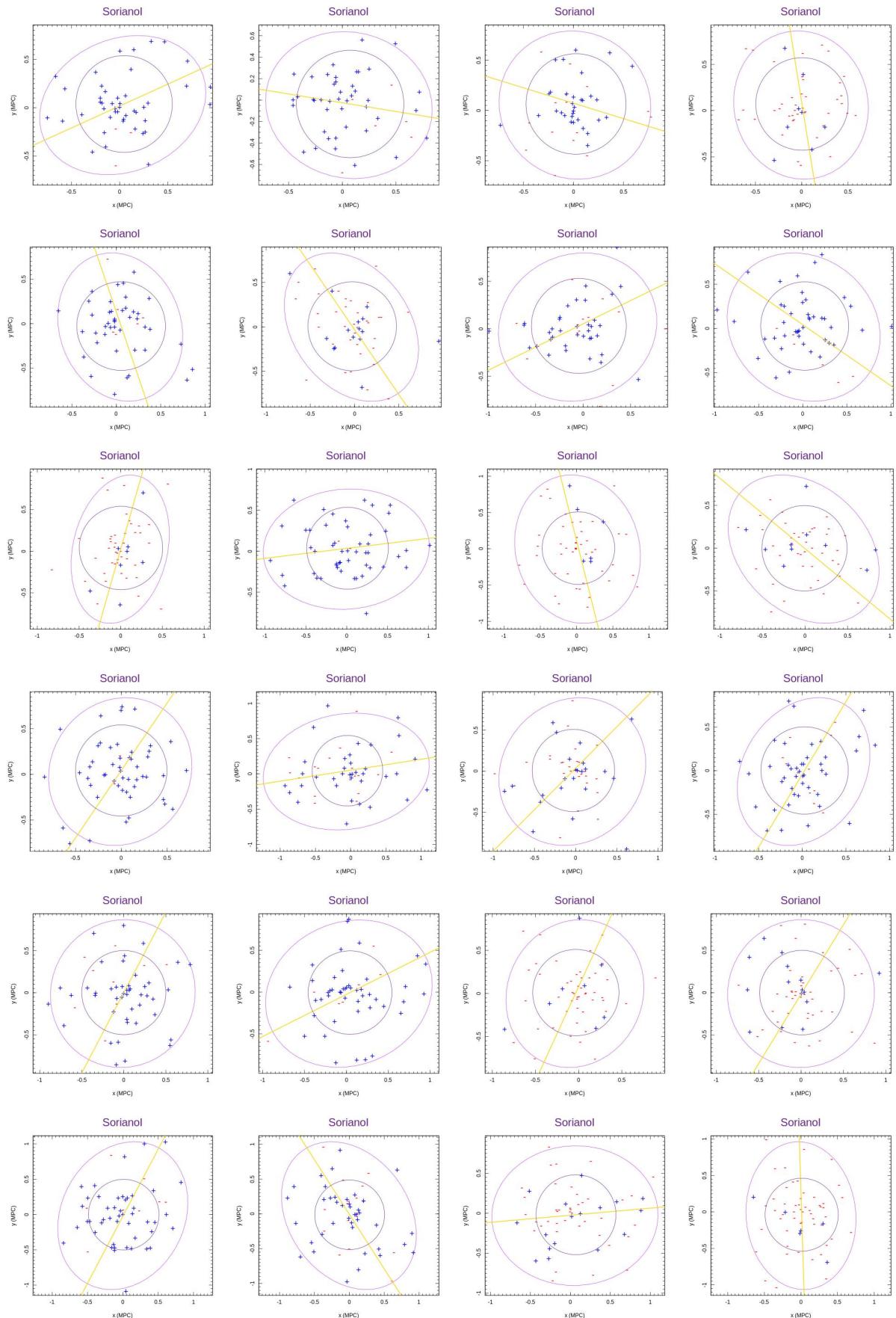


Figura 60 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte V.

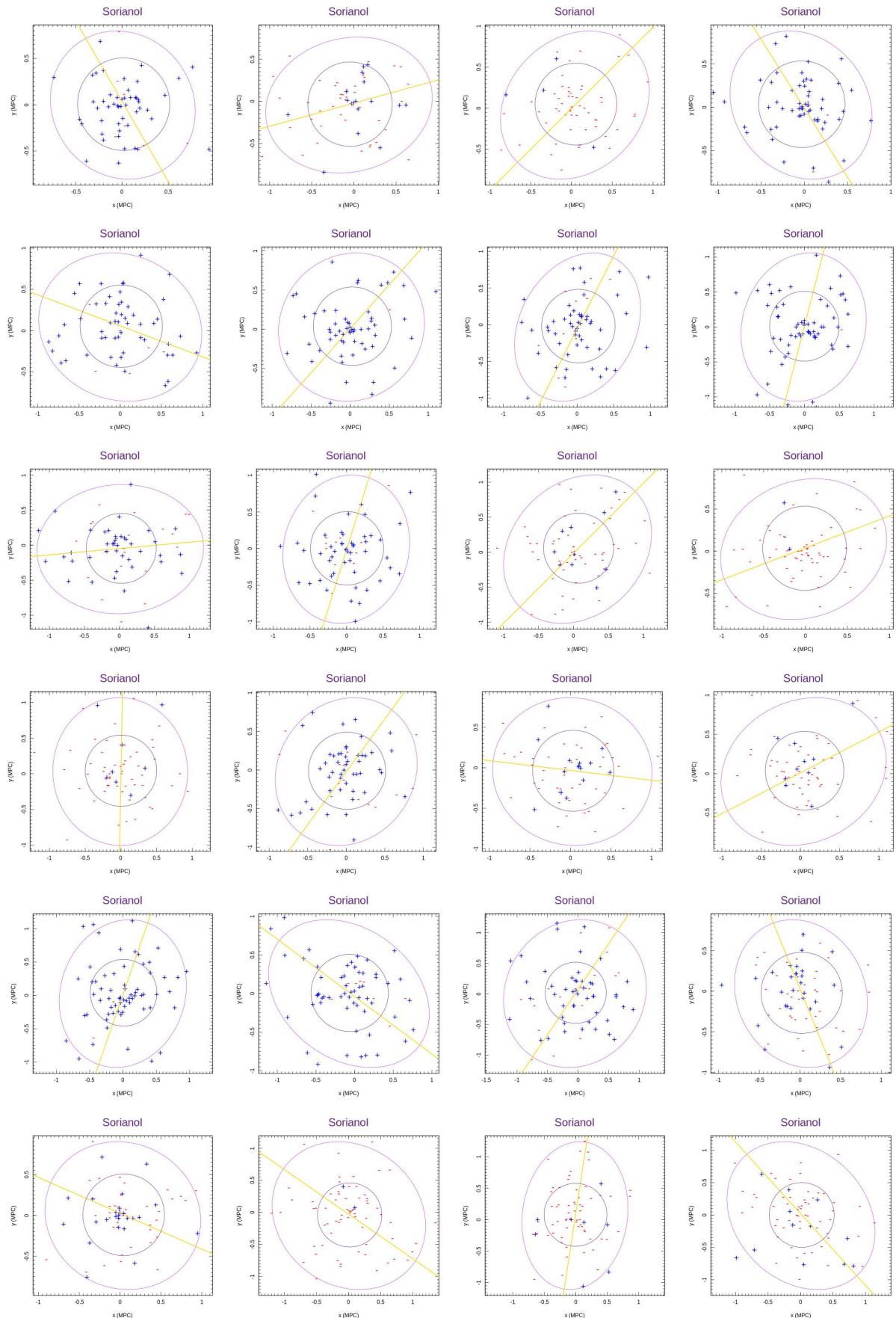


Figura 61 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte VI.

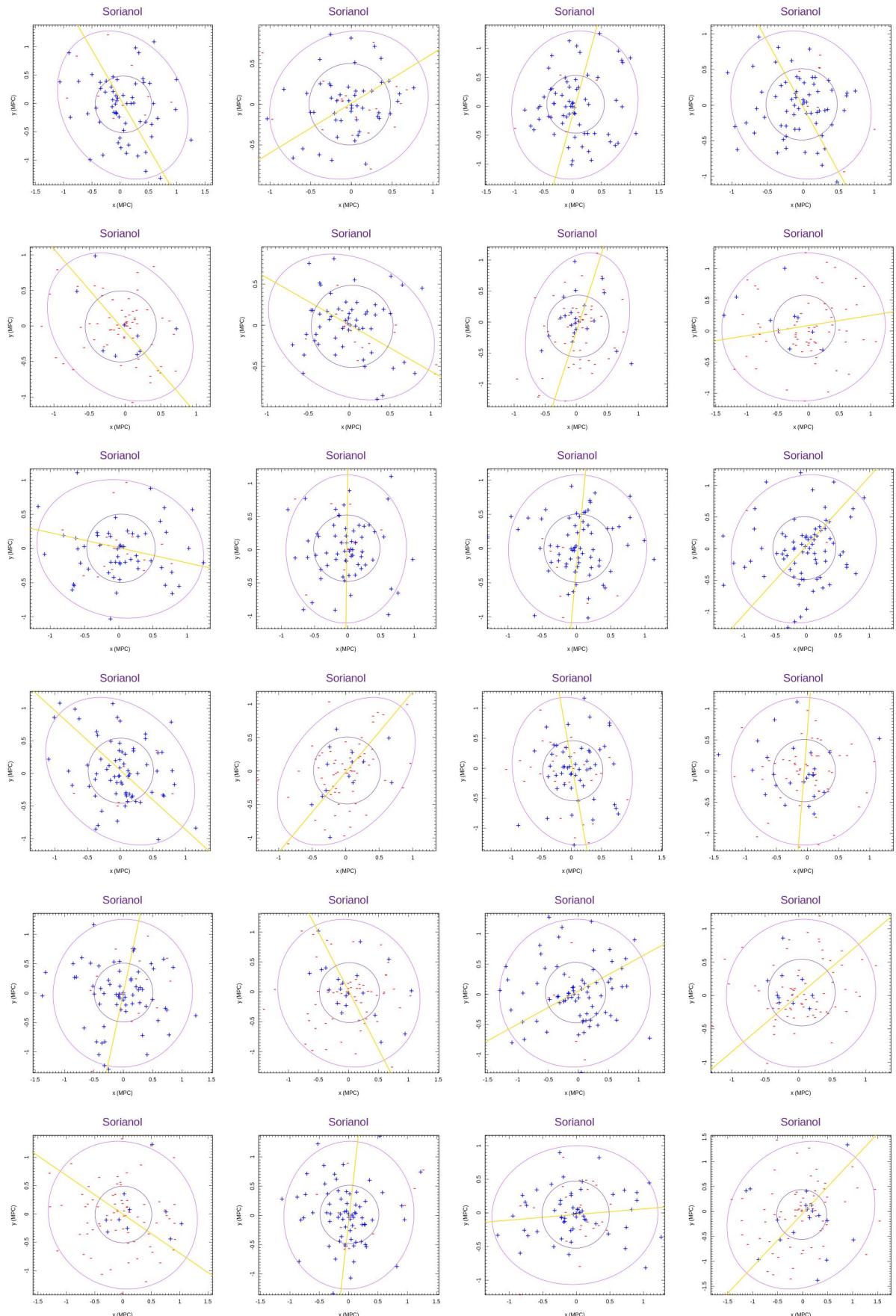


Figura 62 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte VII.

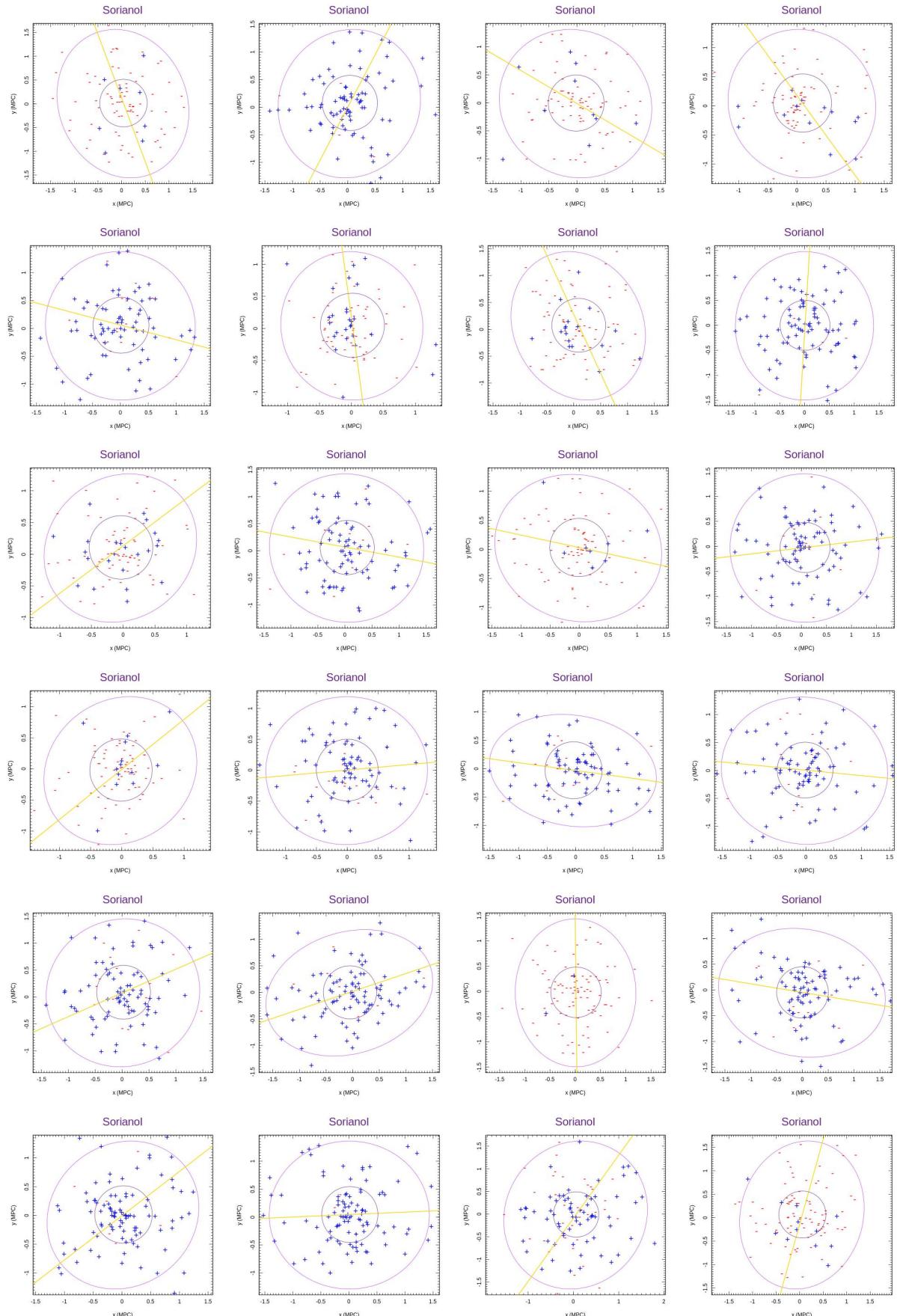


Figura 63 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte VIII.

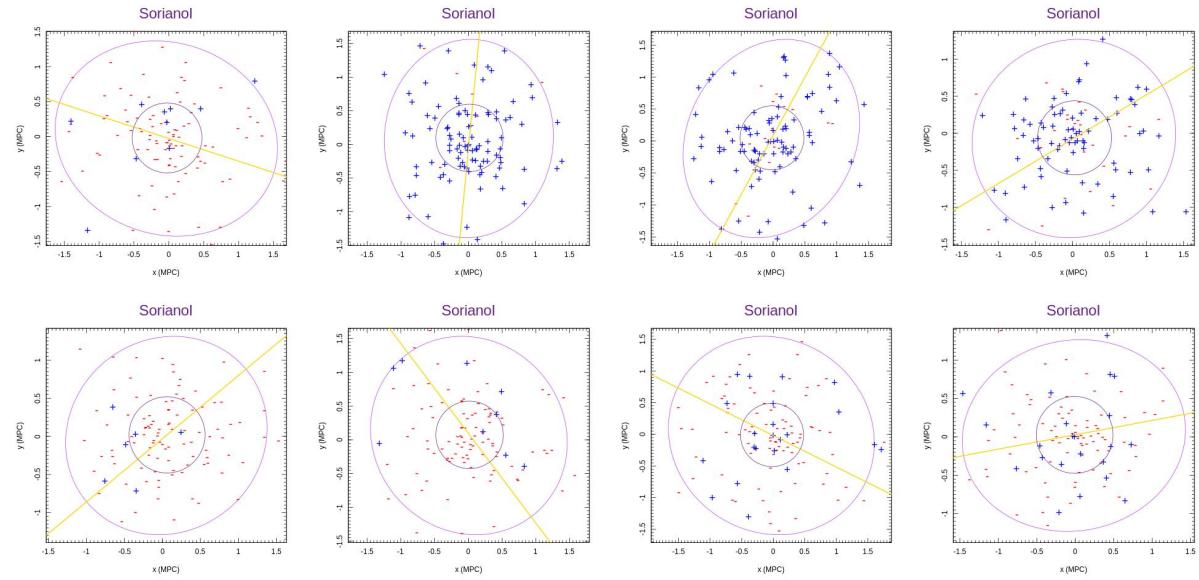


Figura 64 – Ajuste da elipse e eixo principal da distribuição projetada no plano do céu - Catálogo Simulado Amostra II Parte IX.

Tabela 22 – Teste Cramer e Hotelling aplicado na amostra II do catálogo III utilizando gap - sem indicação rotação.

Cluster	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3		Nº galáxias
	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	
200	0.5964	0.7358	0.1338	0.0715	0.7092	0.4974	111
002	0.7822	NA	-	-	0.6393	NA	
004	0.6843	0.7938	0.1018	0.0712	0.6303	0.7304	23
008	0.1458	0.0501	0.2157	0.3210	0.2357	NA	23
011	0.1048	NA	0.3836	NA	-	-	24
016	0.1048	0.0976	0.2567	NA	0.2457	0.3811	25
020	0.4735	0.4642	0.5244	NA	0.0839	NA	26
022	0.1488	NA	0.1638	NA	-	-	26
024	0.2807	0.1578	0.4745	0.2891	0.2867	0.1310	27
025	0.7112	0.9767	0.6123	0.5800	0.7272	0.6890	27
026	0.4505	0.6999	0.1868	0.2982	0.0779	NA	27
030	0.4015	0.2947	0.2207	0.2297	0.7982	0.8631	28
031	0.2007	0.3835	0.5684	0.9155	0.1508	NA	28
032	0.3626	0.3101	0.5364	0.5132	0.1018	0.1165	28
033	0.7752	0.7022	-	-	0.8461	0.8080	29
034	0.5874	0.6067	0.2037	0.2270	0.8671	0.9543	29
036	0.7302	0.7209	0.5854	0.9420	0.1498	0.5330	29
038	0.8421	0.6850	0.1778	0.3580	0.7432	0.8418	30
040	0.7572	0.9765	0.2147	NA	0.6913	0.5326	30
041	0.6633	0.6903	0.8401	0.7940	0.4415	0.4220	31
042	0.2277	0.3651	0.1898	0.4310	0.4685	0.3456	31
043	0.3016	0.3402	0.3866	0.5090	0.2947	0.1120	31
044	0.7512	NA	-	-	0.8041	NA	31
045	0.7062	0.9818	0.2647	0.4690	0.2687	0.2560	32
046	0.6773	0.6691	0.5344	0.9362	0.4395	0.6803	32
048	0.2457	0.4905	0.2597	0.4344	0.0749	0.1067	32
049	0.2067	0.3042	-	-	0.0679	0.1190	33
050	0.4225	NA	0.5534	NA	-	-	33
054	0.8161	0.9499	0.8491	0.5950	0.6123	0.9834	34

055	0.6913	0.7667	0.4725	0.5900	0.2097	0.3031	34
056	0.0549	0.0704	0.0579	0.1351	0.3106	0.4401	35
058	0.1308	0.2059	0.0559	0.1215	0.1288	0.1026	35
062	0.0649	0.0681	0.1308	NA	0.1118	NA	36
063	0.8351	0.7513	0.5134	0.5020	0.1908	0.2682	37
064	0.6963	0.8355	-	-	0.6763	0.8140	37
066	0.5344	0.7129	0.6543	0.4741	0.1068	0.2529	38
067	0.4095	0.4574	0.2667	0.7377	0.1898	0.2894	38
069	0.8541	0.8115	0.2937	0.2390	0.8001	0.8540	38
070	0.0969	NA	0.0949	NA	-	-	39
071	0.4375	0.5660	0.6583	0.7142	0.1798	0.5112	39
072	0.3616	0.7657	0.1258	0.4320	0.6023	0.8552	39
073	0.2967	0.2469	0.4255	0.4603	0.2887	0.2974	40
074	0.6133	0.8163	0.3346	0.5779	0.7392	0.7539	40
078	0.4575	0.8228	0.5634	0.5359	0.3166	0.2581	41
081	0.4545	0.4151	0.7132	0.8189	-	-	42
082	0.4055	NA	-	-	0.4355	NA	43
083	0.3996	0.3613	0.6433	NA	0.5114	0.4451	43
085	0.8941	0.7635	0.8471	0.8253	0.7332	0.9674	44
086	0.3436	0.6571	0.5384	0.5740	0.1088	0.1631	44
088	0.2127	0.3310	0.2267	NA	0.4885	0.8060	45
089	0.4785	0.4986	0.7182	0.9416	0.7392	NA	45
090	0.4835	0.6424	0.9260	0.6100	0.1258	0.9730	46
092	0.6943	0.7993	0.6943	0.5619	0.3936	0.4978	46
093	0.4925	0.4793	0.7532	0.5022	0.3886	0.2059	47
094	0.3036	0.3112	0.1128	0.1136	0.4695	0.4200	47
096	0.6613	0.7297	0.8281	0.9977	0.3786	0.2616	48
097	0.0819	0.0576	-	-	0.1698	0.1580	48
100	0.7442	0.6816	0.3866	0.2970	0.6903	0.5970	49
101	0.5364	0.4380	0.4265	0.4180	0.4705	0.6430	50
105	0.6193	0.5252	0.5444	0.5641	0.8061	0.7460	51
106	0.7402	0.9660	0.8151	NA	0.5944	NA	52
108	0.7172	0.6489	0.2467	0.0602	0.2097	0.3603	53
109	0.9290	0.9844	0.7582	NA	0.4965	NA	53
110	0.4275	0.3687	0.1538	0.2160	0.7442	0.9506	54
111	0.7412	0.9387	0.3156	0.6693	0.7592	0.8391	54
112	0.7182	0.7951	0.6223	0.8772	0.7222	0.8365	54
113	0.2077	0.2352	0.9070	0.9700	0.2647	0.5740	55
116	0.1938	0.1446	0.2957	0.2300	0.7032	0.7488	56
118	0.7782	0.6403	0.2487	0.3650	0.1828	0.1968	57
119	0.4935	0.5665	0.3846	0.4170	0.5044	0.8094	58
120	0.4845	0.6285	0.2587	0.4190	0.6593	0.9774	58
121	0.5984	0.6095	0.4125	0.9049	0.1138	0.2250	59
122	0.2727	0.3718	0.3796	0.5204	0.2347	0.3731	59
124	0.3676	0.3398	0.5054	0.5530	0.1018	NA	60
125	0.2877	0.2544	0.3196	NA	0.2697	0.4268	61
126	0.6663	0.6213	-	-	0.6193	0.5452	61
127	0.4825	0.7028	0.3466	0.562	0.2547	0.3400	62
128	0.3496	NA	-	-	0.4305	NA	62
130	0.4855	0.5749	0.6803	0.9140	0.5064	0.4111	63
131	0.8951	0.8414	0.6283	0.4980	0.7882	0.9887	64
132	0.3926	0.3545	0.9060	0.9540	-	-	64
133	0.8831	0.8292	0.5724	0.4860	0.4865	0.4245	65
134	0.1598	0.2917	0.3826	0.2300	0.1778	0.1819	65
136	0.6623	0.5202	0.6013	0.6000	0.8251	0.6011	66
137	0.2947	0.3027	0.4125	0.4400	-	-	67
138	0.1988	0.2212	0.4795	0.6410	0.6563	0.4398	67

139	0.5134	0.8694	0.3986	0.7720	0.1648	0.2235	68
140	0.2657	0.2962	0.0699	0.0620	0.8041	0.7374	68
141	0.4355	0.5868	0.8391	0.6790	0.1798	0.3405	69
142	0.6803	0.6767	0.8691	0.7740	-	-	70
143	0.2467	0.1929	0.3526	0.3000	0.2287	0.2384	70
144	0.2587	0.1549	0.3256	0.3870	0.6133	0.7316	71
145	0.2387	0.1849	0.6963	0.6900	0.2487	0.2727	71
146	0.8381	0.8277	0.5604	0.6680	0.3876	0.3139	72
147	0.6883	0.4742	0.2967	0.3900	0.4115	NA	72
149	0.6283	0.9548	0.6713	0.9640	0.5894	0.7336	74
150	0.1878	0.2299	0.1928	0.1490	0.1358	0.1137	74
151	0.2327	0.3025	0.3706	0.3290	0.1758	0.0750	75
153	0.5364	0.3573	0.5624	0.5690	0.7952	0.4885	76
154	0.5224	0.5531	0.8011	0.6990	0.2057	0.2335	77
156	0.4515	0.3770	0.2147	NA	0.7172	NA	78
157	0.5374	0.4851	0.4725	0.5240	0.4565	0.3472	79
158	0.9920	0.9746	0.5444	0.4280	0.8761	0.8666	79
159	0.1588	0.1018	0.2387	0.2172	0.1578	0.0837	80
160	0.3696	0.2701	0.1628	0.1239	0.2547	0.5160	80
161	0.4335	0.3296	0.9000	0.7591	0.3426	0.3367	81
163	0.5244	0.7457	0.4625	0.4931	0.2547	0.2462	82
164	0.4055	0.7391	0.4725	0.8465	0.5974	0.5225	83
165	0.3196	0.2002	0.2357	0.1965	0.3446	0.5459	84
166	0.2717	0.1013	0.9580	0.6630	0.3966	0.2851	84
167	0.5224	0.9914	0.5654	0.5986	0.1048	0.3310	85
168	0.8761	0.8334	0.6143	0.9483	0.5814	0.9663	86
169	0.9590	0.9078	0.9060	0.8832	0.8091	0.8991	87
170	0.3716	0.2645	0.7742	0.5246	0.2427	0.3070	87
171	0.7572	0.8585	0.2487	0.6825	0.7252	0.8345	88
172	0.1378	0.3389	0.0629	0.1935	0.6233	0.8873	89
173	0.8771	0.7787	0.9950	0.9821	0.5794	0.6205	89
174	0.2777	0.4757	0.2887	0.6237	0.0599	0.1145	90
175	0.5524	0.7625	0.9410	0.8513	0.2727	0.3865	91
176	0.4275	0.3164	0.2937	0.2511	0.5974	0.6822	92
177	0.8241	0.7074	0.7442	0.8467	0.7052	0.9108	92
178	0.7672	0.9360	0.4315	0.5610	0.0739	0.0533	93
179	0.3786	0.3794	0.4505	0.7174	0.3476	0.2742	94
180	0.9410	0.8979	0.8001	0.9526	0.8441	0.5897	95
181	0.6803	0.5041	0.6543	0.5709	0.7992	0.6801	95
183	0.1108	0.3062	0.3826	0.5811	0.1498	0.3150	97
184	0.6173	0.5895	0.5204	0.4570	0.5444	0.7380	98
185	0.9020	0.9182	0.8631	0.7982	0.5454	0.3990	99
186	0.9120	0.7598	0.5154	0.5913	0.5514	0.4860	99
187	0.8431	0.6754	-	-	0.969	0.9694	100
188	0.9630	0.9167	0.8811	0.8149	0.8211	0.8781	101
189	0.9370	0.6911	0.8511	0.6124	0.7892	0.9072	102
190	0.8551	0.9406	0.5684	0.6675	0.9640	NA	103
191	0.3426	0.3805	0.0799	0.2159	0.4525	0.3626	103
192	0.3016	0.4065	0.6343	0.7982	0.1098	0.0812	104
193	0.4885	0.5987	0.6463	0.7854	0.1578	0.1172	105
194	0.0519	0.0564	0.1588	0.1840	0.1488	0.2598	106
195	0.4015	0.8243	0.0899	0.0811	0.8781	0.7916	107
196	0.6703	0.7257	0.3526	0.7809	0.6493	0.4718	108
199	0.9260	0.9060	0.5244	0.5173	0.5914	0.6593	110

Tabela 23 – Teste Cramer e Hotelling aplicado na amostra II do catálogo III utilizando mediana - sem indicação rotação.

Cluster	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3		Nº galáxias
	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	Cramer	Hotelling	
001	0.1798	0.1926	0.0919	NA	0.4855	NA	22
005	0.6813	0.9746	0.3836	0.4239	0.5804	0.6394	23
006	0.3796	0.2697	0.1638	NA	0.6553	NA	23
007	0.1678	0.1865	0.2557	0.1220	0.6303	NA	23
009	0.6103	0.5987	0.3006	0.4954	0.4685	0.4718	24
010	0.6893	NA	-	-	0.4765	NA	24
012	0.4105	0.4654	0.1618	0.4472	0.6763	0.7361	24
014	0.4585	0.7826	0.4985	0.3483	0.1858	0.2517	25
017	0.3811	0.9801	0.5554	0.9260	0.6473	0.9939	25
018	0.9120	0.9029	0.3846	0.4653	0.3196	0.5234	25
023	0.4635	0.4245	0.2757	0.3784	-	-	26
027	0.7182	0.7264	0.4835	0.7811	0.3366	0.4322	27
035	0.8301	0.7511	0.8091	0.8270	-	-	29
037	0.5124	0.3231	0.5904	0.4486	0.8171	0.6327	30
047	0.3416	0.8134	0.2877	0.1540	0.5644	0.9801	32
051	0.1408	NA	0.2277	NA	-	-	33
052	0.7302	NA	-	-	0.8781	NA	33
053	0.4235	0.3447	0.4295	0.3132	0.7302	0.9725	34
057	0.3746	0.4784	0.4915	0.7557	0.1888	0.2218	35
059	0.6803	0.9147	0.5694	0.7955	0.6973	0.8804	35
060	0.1128	0.0617	0.5674	0.5780	0.1938	0.8075	36
061	0.3306	0.1387	0.2617	0.2740	0.8371	0.5782	36
065	0.5084	0.4213	0.2987	0.5282	0.2797	0.3101	37
068	0.4655	0.6406	0.7592	0.7866	0.1188	0.0657	38
079	0.3676	0.8527	0.1678	NA	0.1598	0.1098	42
080	0.1688	0.7544	0.4135	0.3614	0.1818	0.4292	42
102	0.8371	0.9473	0.6483	0.6158	0.7942	0.9513	50
103	0.4115	0.3947	0.3636	0.7052	0.1488	0.5716	51
107	0.2077	0.2272	0.3266	0.3007	-	-	52
115	0.9120	0.9597	0.6603	0.8362	0.8211	0.9364	56
117	0.4835	0.5432	0.7552	0.9034	0.1318	0.3685	57
129	0.4565	0.3993	0.1908	0.2095	0.7122	0.6375	63
135	0.3406	0.7904	0.3446	0.7821	0.6593	0.6759	66

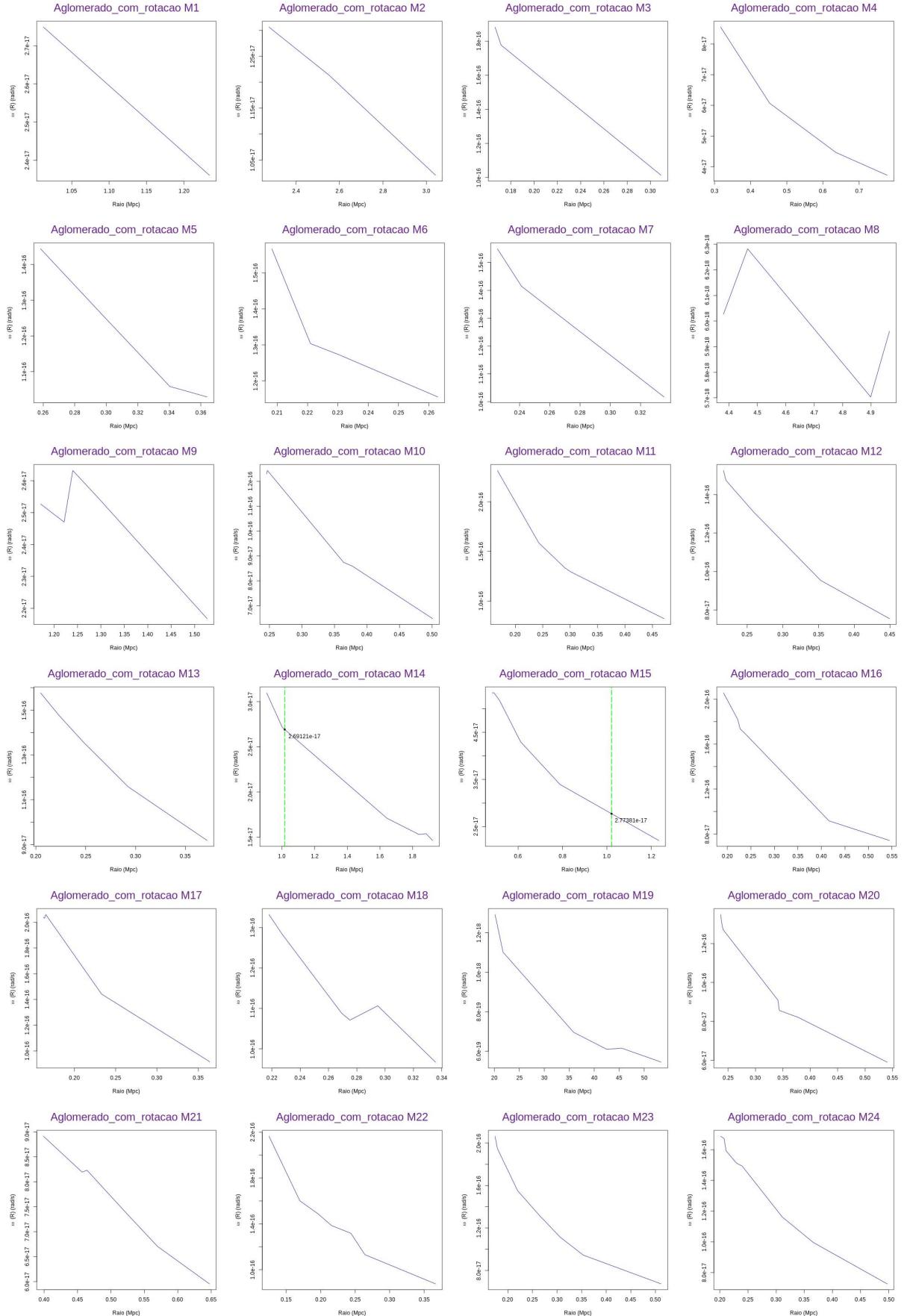


Figura 65 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte I.

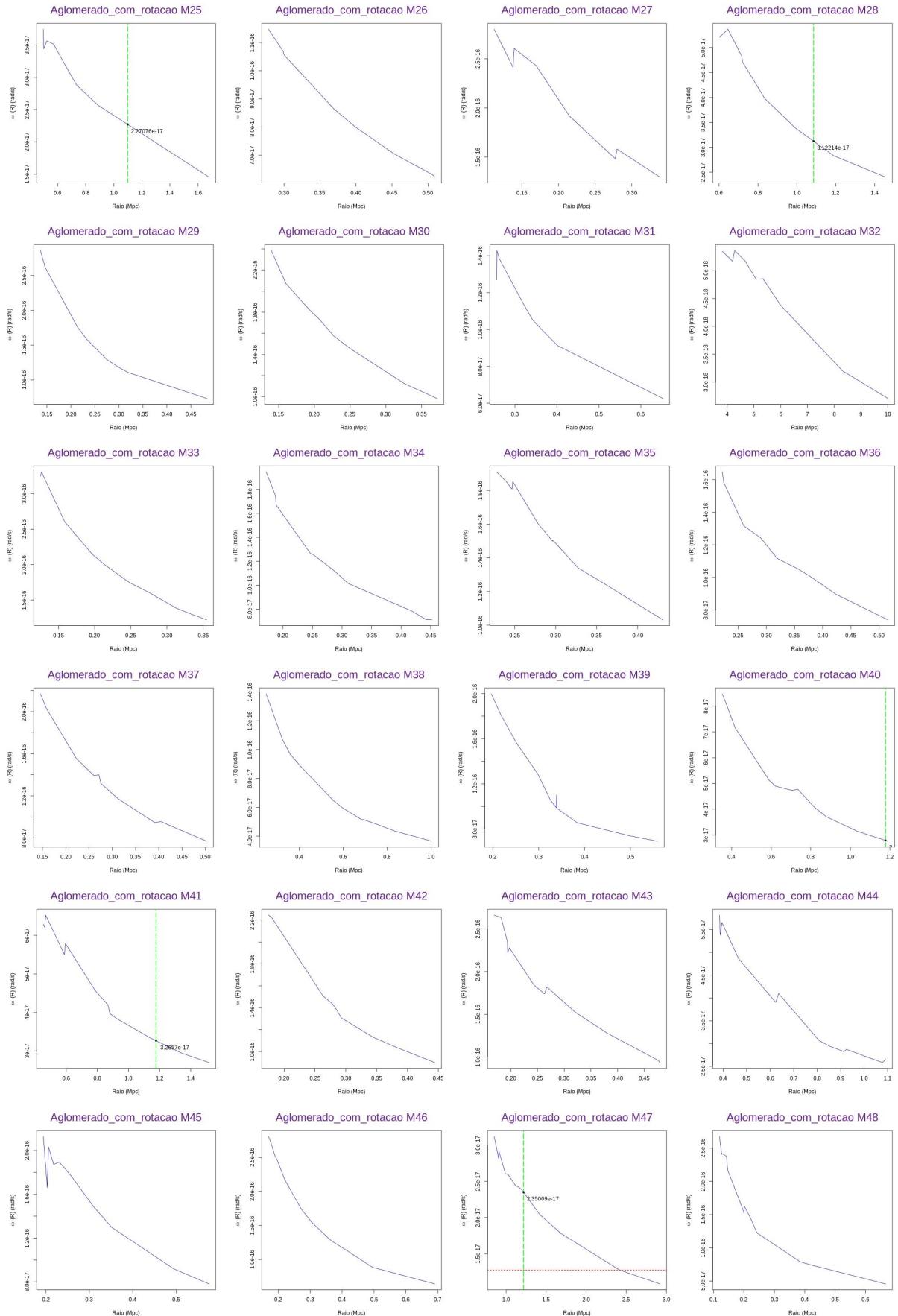


Figura 66 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte II.

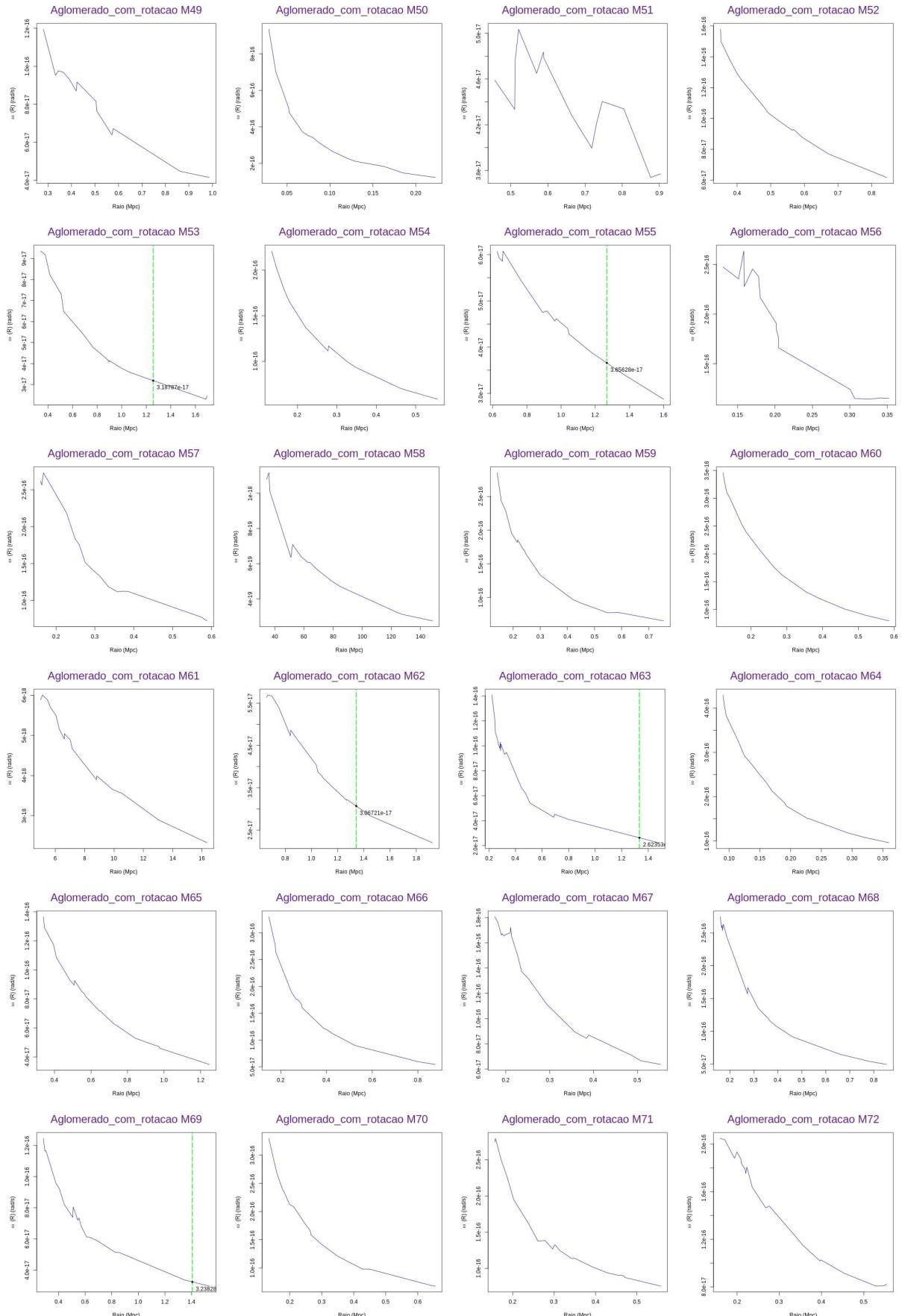


Figura 67 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte III.

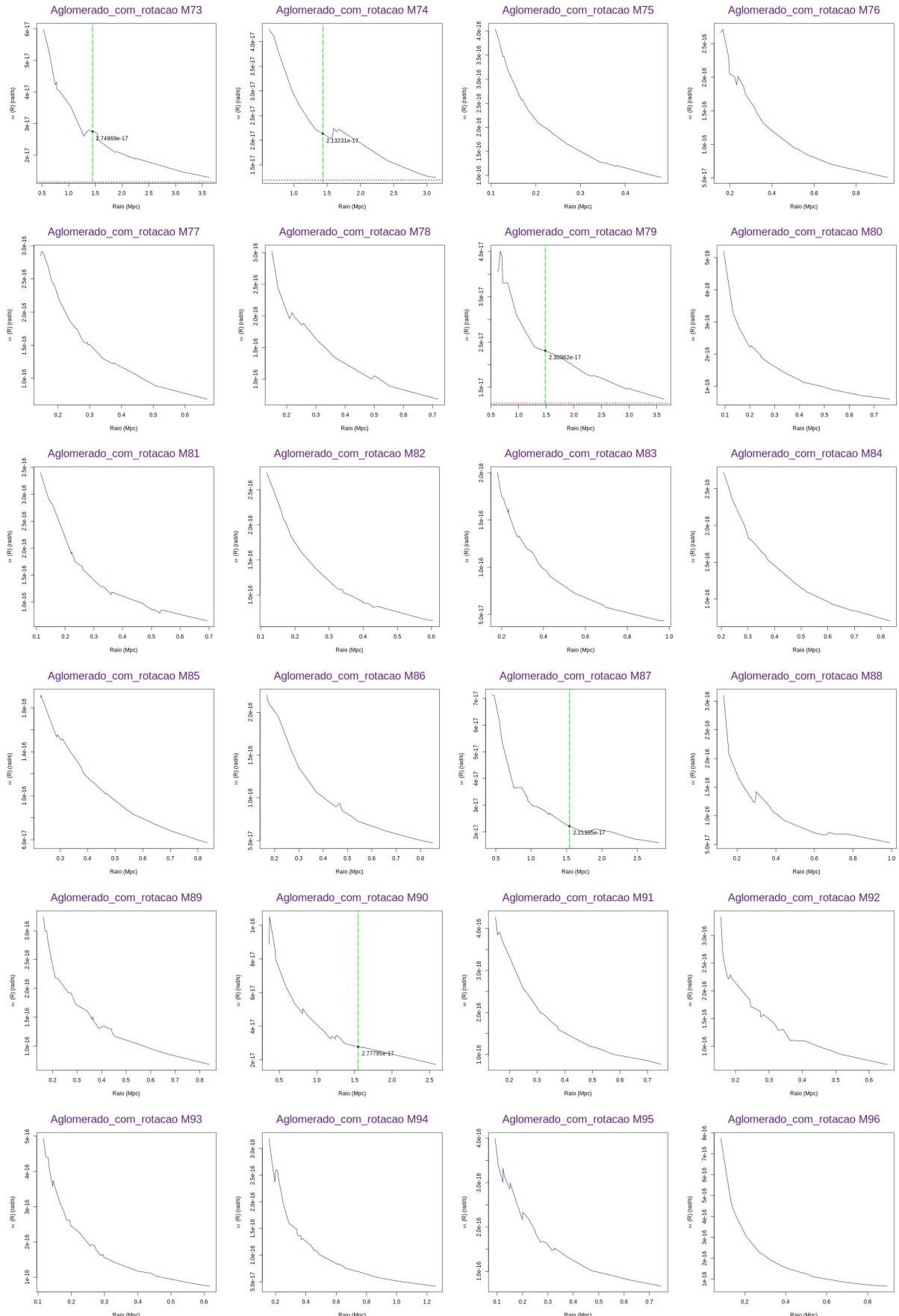


Figura 68 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte IV.

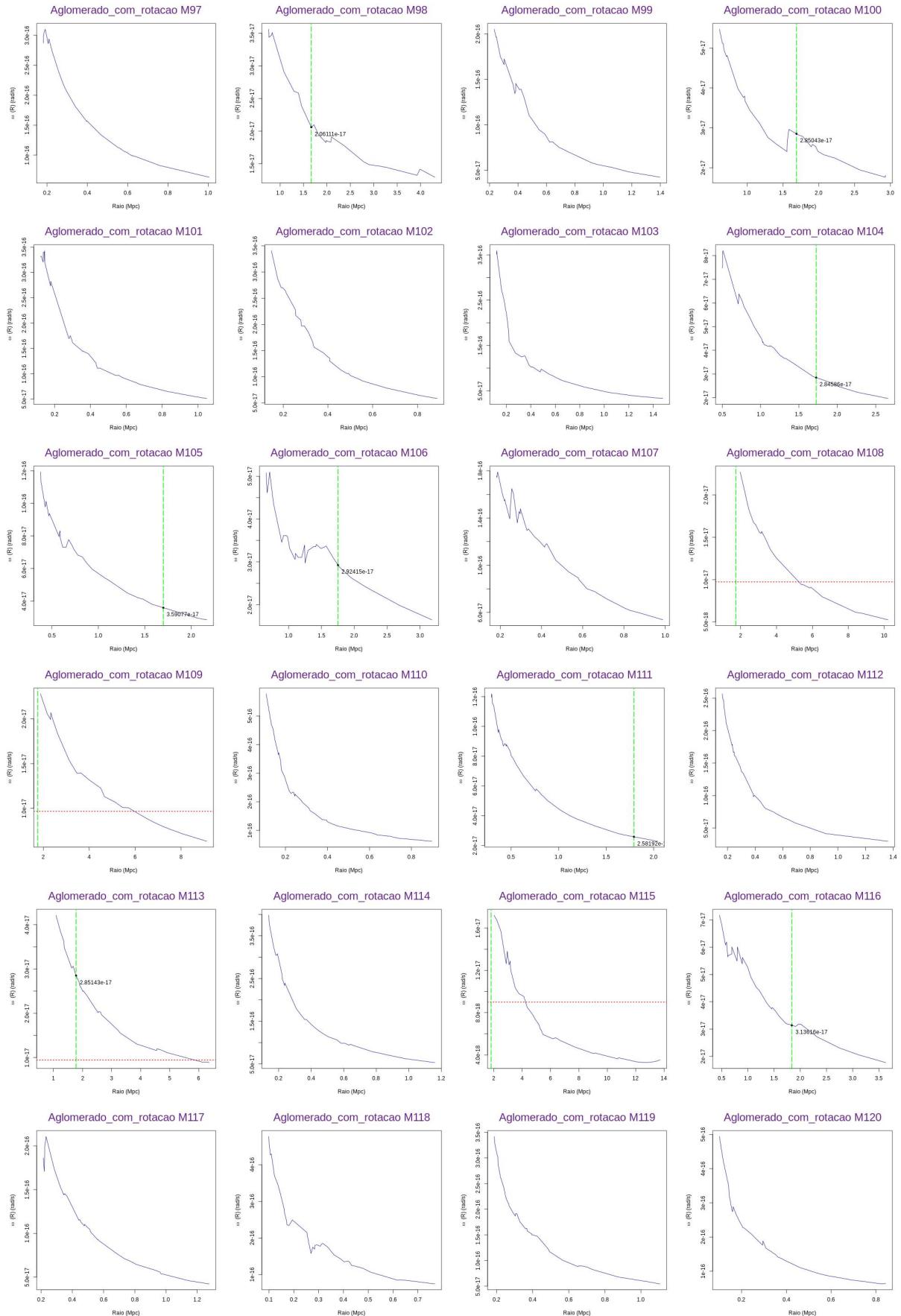


Figura 69 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte V.

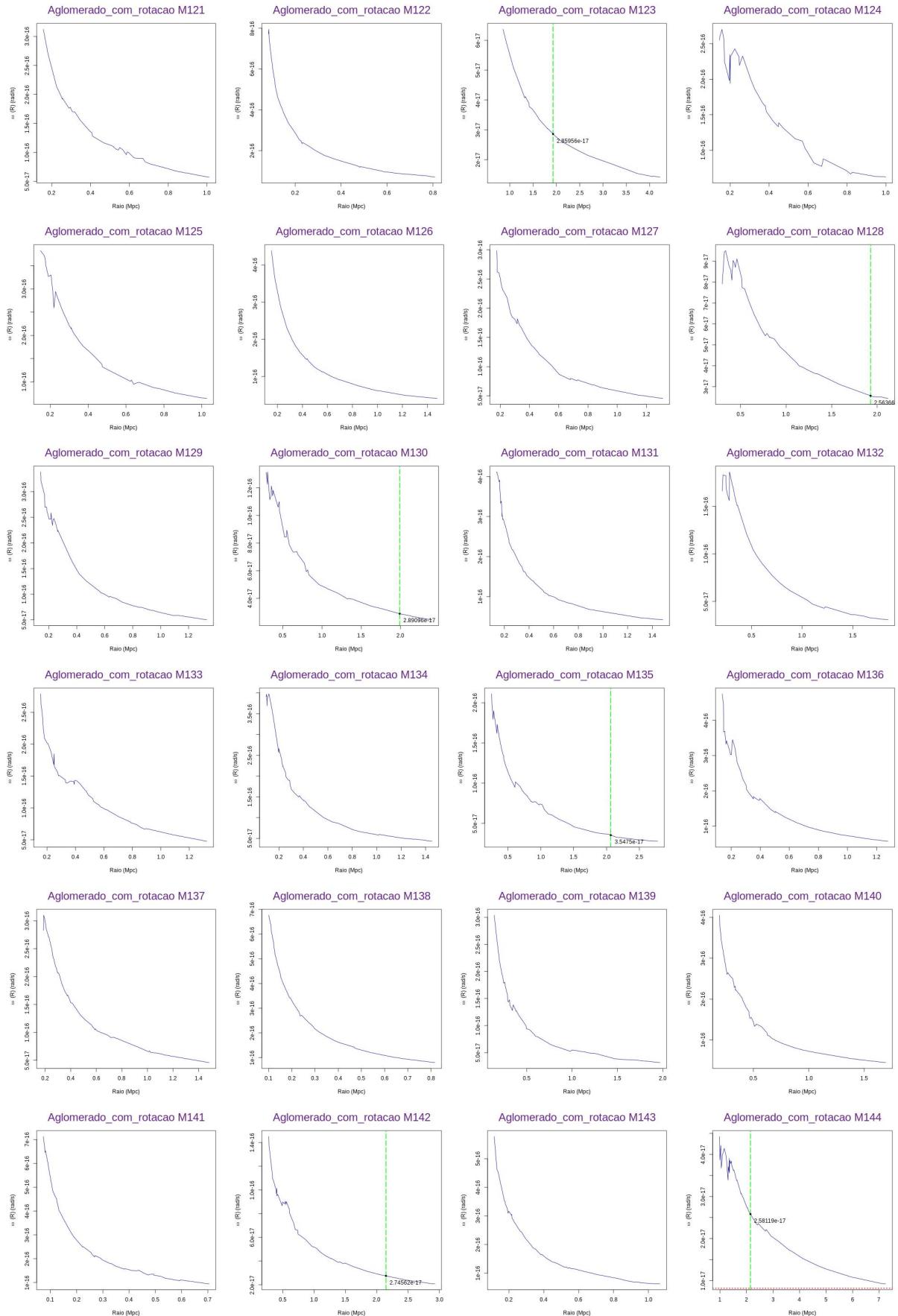


Figura 70 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte VI.

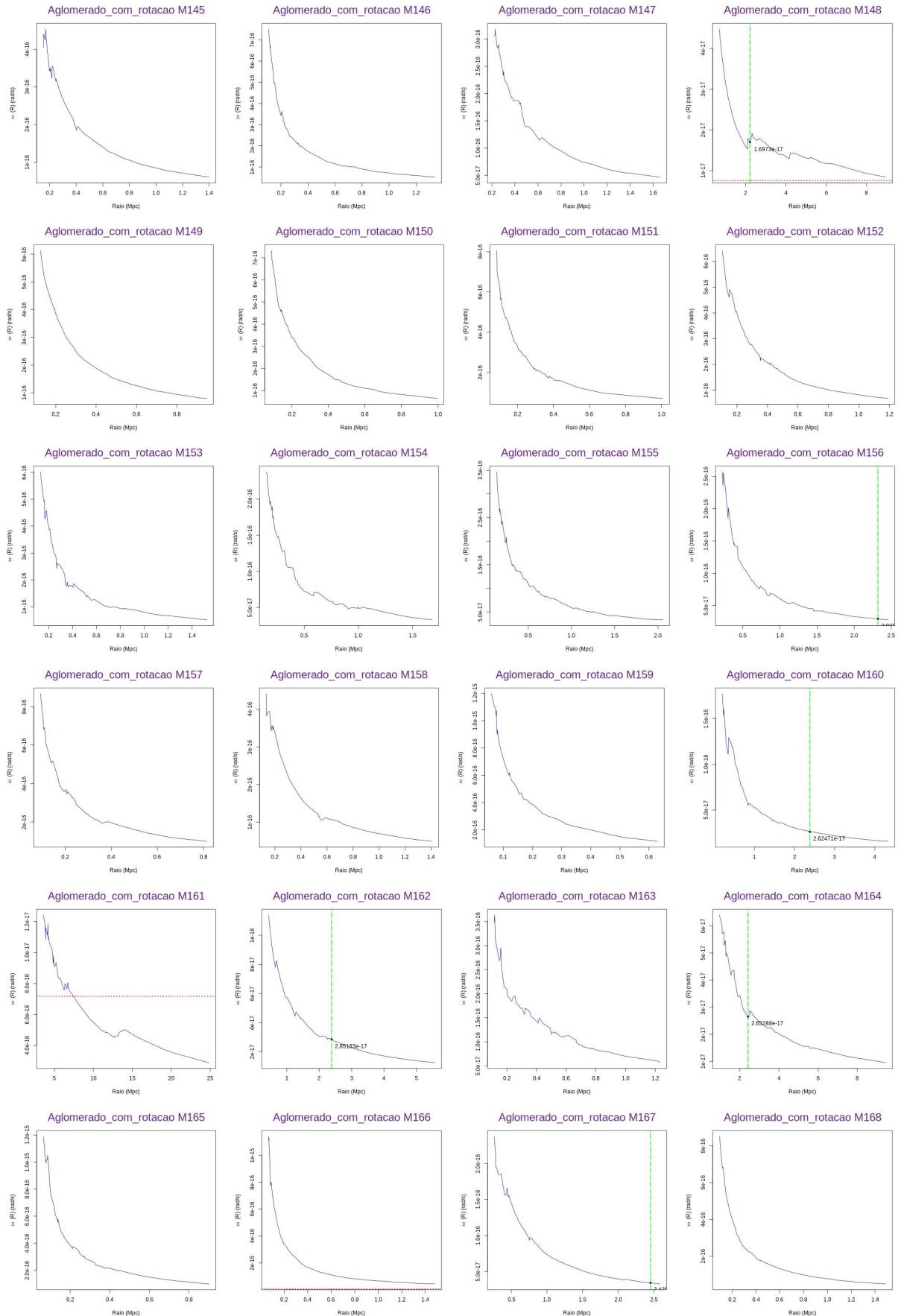


Figura 71 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte VII.

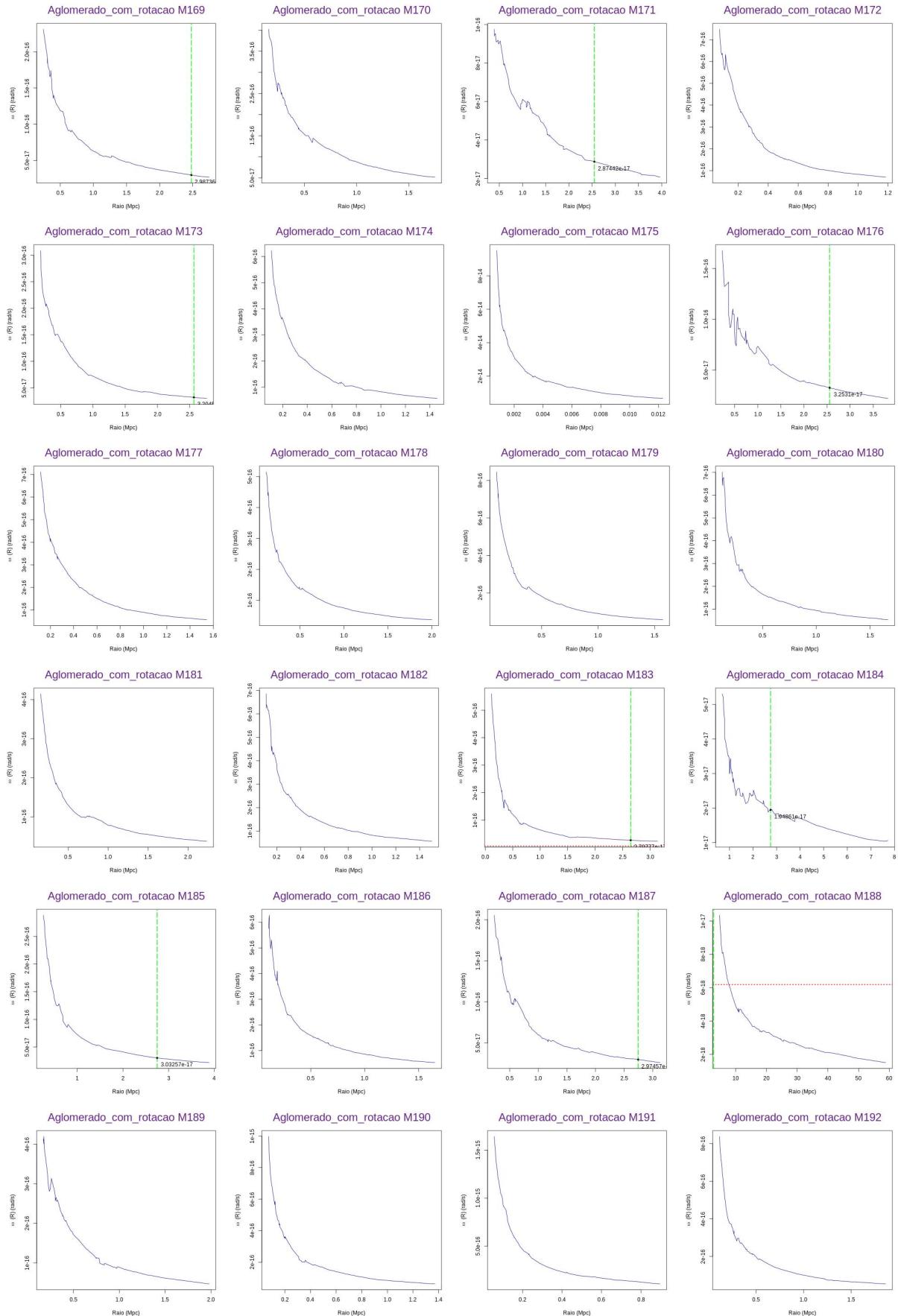


Figura 72 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte VIII.

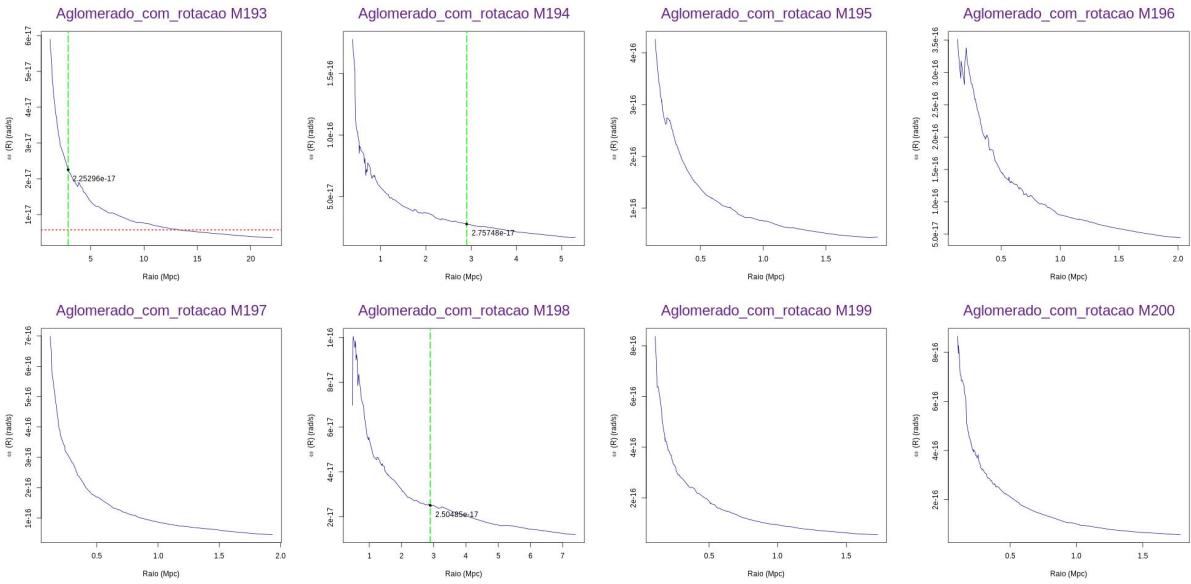


Figura 73 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra I Parte IX.

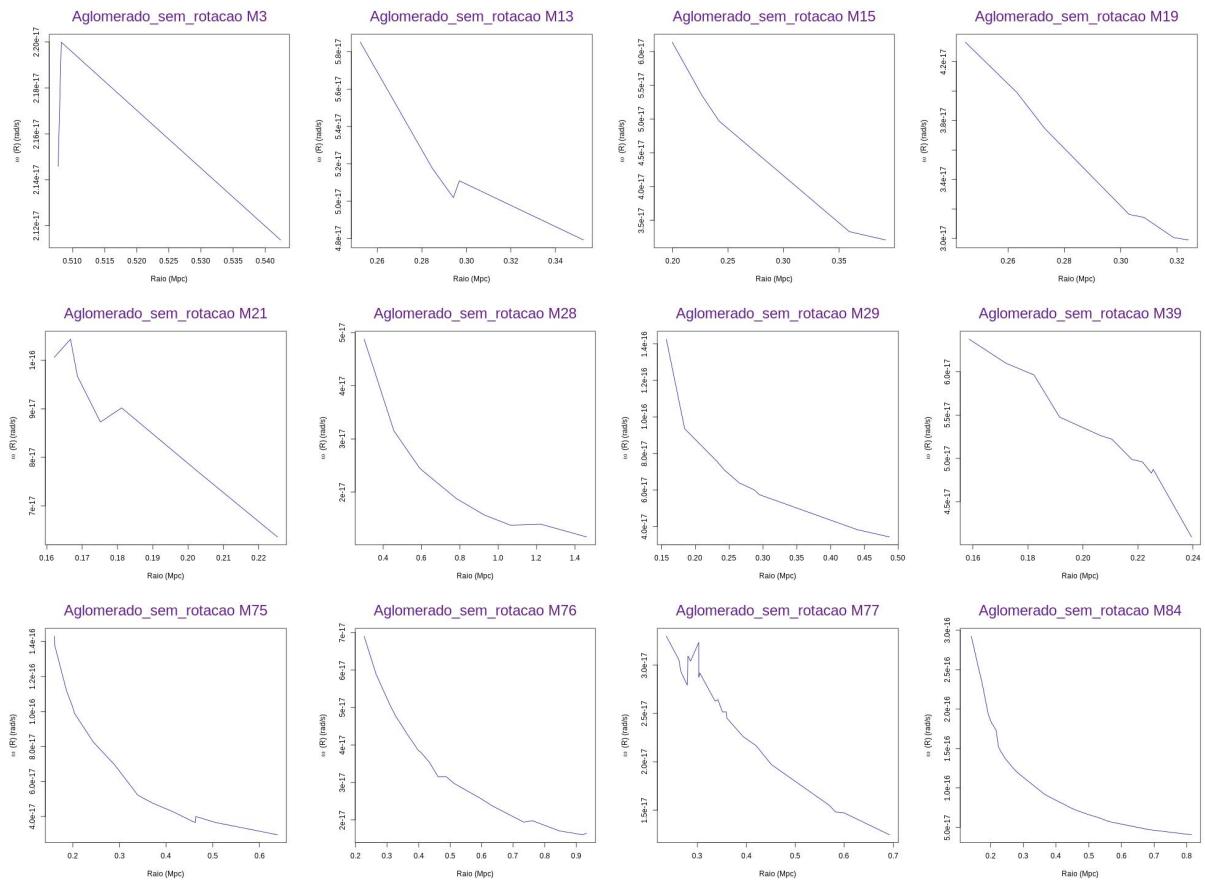


Figura 74 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra II Parte I.

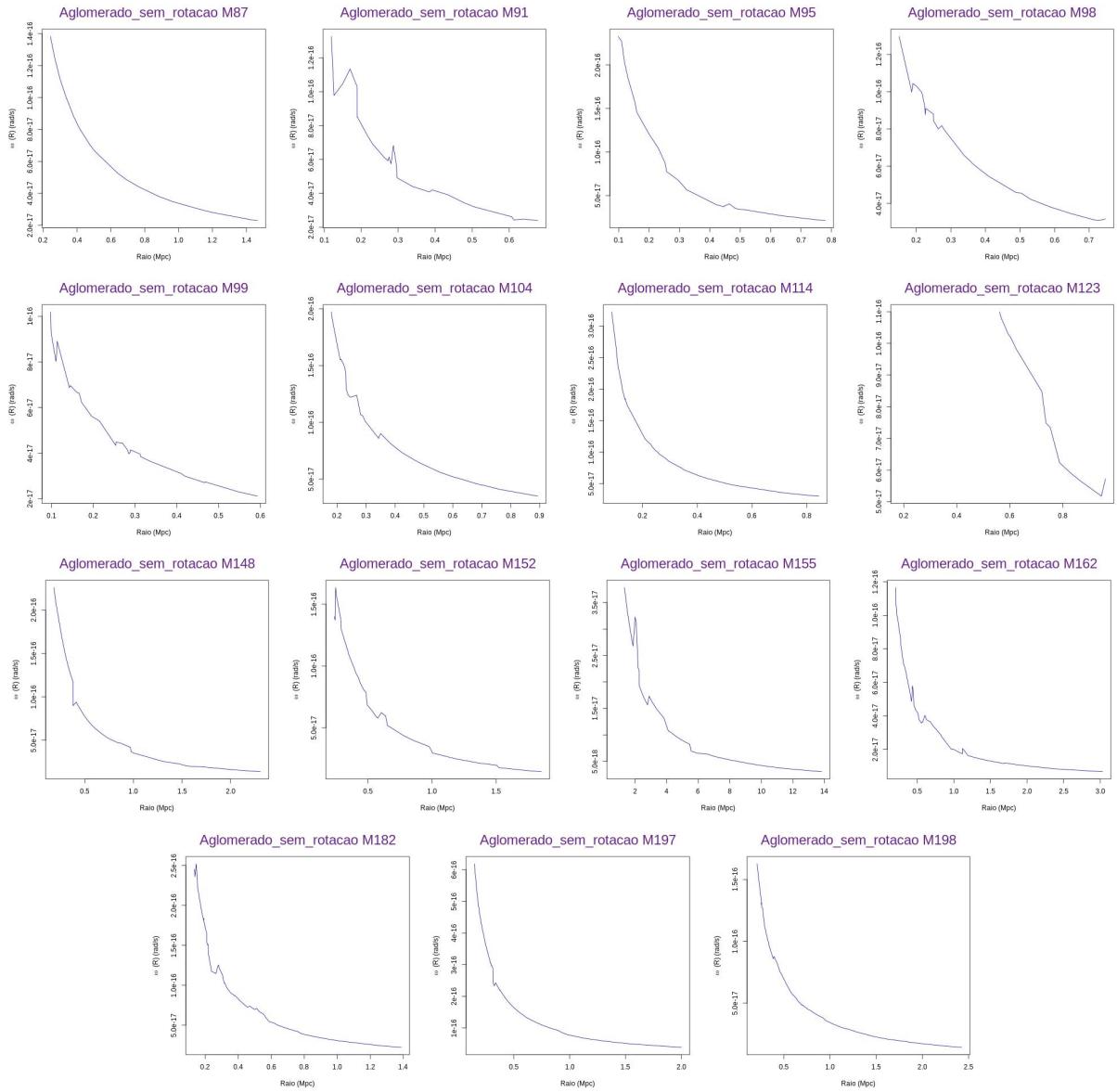


Figura 75 – Perfil de velocidade angular - Catálogo Simulado Amostra II Parte II.

Tabela 24 – Velocidades rotacionais de cada aglomerado do catálogo III amostra I encontradas em cada método.

Cluster	Velocidade Rotacional ( $km\ s^{-1}$ )	Velocidade Rotacional ( $km\ s^{-1}$ )
	Método Sousa & Ribeiro	Método Hwang & Lee
1	-	968.13
2	-	1076.21
3	-	761.15
4	-	462.12
5	-	358.95
6	-	1081.13
7	-	977.96
8	-	565.29
9	-	394.83
10	-	888.25
11	-	789.57
12	-	493.52

13	-	986.71
14	844.81	711.44
15	873.67	900.58
16	-	995.15
17	-	1089.72
18	-	801.68
19	-	722.24
20	-	268.30
21	-	903.82
22	-	1002.72
23	-	821.14
24	-	998.10
25	769.92	823.51
26	-	573.22
27	-	
28	1046.24	1016.17
29	-	511.79
30	-	848.04
31	-	595.85
32	-	412.89
33	-	761.15
34	-	1004.33
35	-	778.99
36	-	1022.17
37	-	714.70
38	-	714.70
39	-	850.60
40	1012.17	1007.13
41	1186.46	1009.74
42	-	579.04
43	-	1032.98
44	-	
45	-	1184.3
46	-	891.43
47	883.96	891.43
48	-	1085.40
49	-	758.73
50	-	943.54
51	-	943.54
52	-	900.58
53	1235.94	909.18
54	-	879.06
55	1430.23	1046.74
56	-	984.03
57	-	885.13
58	-	783.76
59	-	951.88
60	-	1119.45
61	-	1054.60
62	1270.69	730.36
63	1079.88	1022.35
64	-	1085.4
65	-	932.11
66	-	570.86
67	-	901.37
68	-	1184.3
69	1404.31	533.31

70	-	
71	-	467.55
72	-	965.94
73	1229.3	951.51
74	943.69	1184.3
75	-	1027.20
76	-	1070.81
77	-	
78	-	1085.4
79	1056.99	907.50
80	-	962.86
81	-	1085.4
82	-	977.31
83	-	1130.26
84	-	977.31
85	-	1131.51
86	-	1085.4
87	1051.61	973.16
88	-	
89	-	410.53
90	1328.09	1034.96
91	-	982.54
92	-	1184.3
93	-	1134.95
94	-	740.01
95	-	1134.95
96	-	1039.42
97	-	988.81
98	1058.56	707.11
99	-	947.87
100	1485.14	1085.4
101	-	1085.4
102	-	582.13
103	-	
104	1514.65	404.49
105	1884.19	858.43
106	1581.38	739.26
107	-	284.32
108	-	736.21
109	-	1009.70
110	-	956.92
111	1427.92	699.97
112	-	1098.65
113	1564.59	538.99
114	-	959.30
115	-	606.55
116	1778.92	1143.03
117	-	778.99
118	-	801.68
119	-	1104.66
120	-	1064.84
121	-	910.37
122	-	928.86
123	1702.39	1184.3
124	-	1030.42
125	-	843.84
126	-	881.67

127	-	626.17
128	1524.91	1072.67
129	-	829.14
130	1775.9	854.82
131	-	256.77
132	-	1184.3
133	-	794.19
134	-	
135	2259.56	1184.3
136	-	1079.54
137	-	810.28
138	-	977.96
139	-	543.38
140	-	1085.4
141	-	1050.78
142	1819.58	789.57
143	-	954.04
144	1710.17	924.90
145	-	663.88
146	-	1120.36
147	-	765.72
148	1162.24	896.25
149	-	997.74
150	-	1023.21
151	-	563.98
152	-	993.38
153	-	1002.72
154	-	816.62
155	-	846.48
156	2103.29	1085.4
157	-	794.41
158	-	1038.80
159	-	1126.83
160	1929.59	1027.93
161	-	1042.44
162	2097.63	1085.4
163	-	1184.3
164	1981.77	1101.26
165	-	811.94
166	-	1047.57
167	2593.04	923.27
168	-	1104.19
169	2285.37	1131.51
170	-	920.38
171	2260.4	954.95
172	-	1033.81
173	2537.07	591.08
174	-	1082.29
175	-	681.89
176	2566.57	984.76
177	-	1034.64
178	-	1134.95
179	-	940.24
180	-	1063.57
181	-	942.84
182	-	1061.50
183	2210.85	1113.37

184	1651.4	997.10
185	2572.07	1022.17
186	-	836.89
187	2518.29	725.77
188	-	994.61
189	-	1085.4
190	-	729.36
191	-	1117.54
192	-	765.61
193	1995.25	900.58
194	2467.91	622.27
195	-	1063.98
196	-	1042.97
197	-	595.85
198	2235.46	955.24
199	-	877.17
200	-	672.72