



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
PRO-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL
EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

VINICIUS NASCIMENTO RUFINO

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE UMA VARIÁVEL FUZZY NO PROBLEMA DOS
MÍNIMOS QUADRADOS
PPGMC – UESC

ILHÉUS-BA
2016

VINICIUS NASCIMENTO RUFINO

**ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE UMA VARIÁVEL FUZZY NO
PROBLEMA DOS MÍNIMOS QUADRADOS
PPGMC – UESC**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual de Santa Cruz, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira

Coorientador: Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus

ILHÉUS-BA
2016

R926

Rufino, Vinicius Nascimento.

Análise de influência de uma variável fuzzy no problema dos mínimos quadrados / Vinícius Nascimento Rufino. – Ilhéus, BA: UESC, 2016.
51f. : il.

Orientador: Eduardo Silva Palmeira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Inclui referências.

1. Mínimos quadrados. 2. Conjuntos difusos. 3. Análise de intervalos (Matemática). I. Título.

CDD 511.42

VINICIUS NASCIMENTO RUFINO

**ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE UMA VARIÁVEL FUZZY NO
PROBLEMA DOS MÍNIMOS QUADRADOS
PPGMC – UESC**

Ilhéus-BA, 08/03/2016

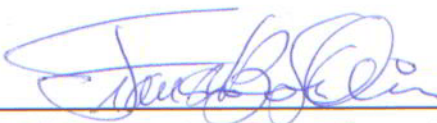
Comissão Examinadora



Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira
UESC
(Orientador)



Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus
UESC
(Coorientador)



Prof. Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira
UESC



Prof. Dr. Fabiolo Moraes Amaral
IFBA

Para meus pais,
Sonia e Jackson.

Nenhuma palavra ou ato meu
jamais será suficiente para expressar
o quanto sou grato simplesmente pela sua
existência.

Agradecimentos

- Inicialmente agradeço ao meu orientador, o Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira, que me presenteou com a oportunidade de construir esse trabalho de tamanha relevância e me guiou durante toda essa jornada de dois anos de pesquisa. Pela sua disponibilidade ininterrupta e conselhos preciosos que vou levar durante toda a minha trajetória acadêmica. Da mesma forma, também agradeço ao meu coorientador, o Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus, pelas suas imprescindíveis contribuições e também constante participação em todo o processo de construção desse trabalho.
- Agradeço à toda equipe do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual de Santa Cruz - PPGMC/UESC: coordenação, colegiado, professores, colegas estudantes e técnicos administrativos; pelas contribuições e disponibilidade para o desenvolvimento dessa importante etapa de minha formação acadêmica que culminou no desenvolvimento dessa dissertação. Agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB) pelo apoio financeiro fundamental para o desenvolvimento dessa pesquisa.
- Agradeço aos meus familiares e amigos que me acompanharam nessa jornada e mesmo que de forma indireta tiveram uma contribuição no desenvolvimento desse trabalho. À minha amada, Paola, pelo apoio e motivação incondicionais.
- Por fim, um agradecimento especial àqueles que são minhas maiores inspirações e incentivadores, meus pais Sonia Maria Ferreira Nascimento e Jackson Maciel Rufino, pois minha maior motivação no desenvolvimento desse trabalho e em tudo que já realizei e realizarei em minha vida é fazê-los orgulhosos e honrá-los por tudo que fizeram e ainda fazem por mim.

“A verdade pode ser intrigante. Pode dar algum trabalho lidar com ela. Pode ser contraintuitiva. Ela pode contradizer preconceitos profundamente enraizados. Pode não se coadunar com o que queremos desesperadamente que seja verdade. Mas nossas preferências não determinam o que é verdade.”

Carl Sagan

Resumo

O problema dos mínimos quadrados (PMQ) consiste em um método para estimação ótima de variáveis que satisfazem certas equações. O PMQ tem sido amplamente estudado por diversos autores na literatura, os quais levantaram diferentes abordagens sobre este assunto. Dentre estas abordagens podem-se destacar o PMQ determinístico, cuja variável a ser estimada é resultante de uma inconsistência de uma determinada equação; e o PMQ estocástico no qual a variável a ser estimada possui natureza aleatória. Neste trabalho pretende-se, a luz da teoria fuzzy e relacionando-a com a análise intervalar, formular e resolver um PMQ cuja variável a ser estimada é uma variável fuzzy, com o intuito de agregar no sistema, tanto a inconsistência quanto a aleatoriedade. Assim, objetivamos encontrar uma formulação mais geral do que as presentes na literatura para o PMQ, além de demonstrar uma validade analítica e numérica.

Palavras-chave: problema dos mínimos quadrados. otimização fuzzy. análise intervalar.

Abstract

The Least-Squares Problem (LSP) consists in a method for optimal estimation of variables that satisfy some equations. The LSP have been extensively studied by many authors in the literature, which raised different approaches to the subject. Among these approaches can be highlighted the deterministic LSP, whose variable to be estimated is the result of an inconsistency of a given equation; and the stochastic LSP, in which the variable to be estimated has random nature. In this work it is intended, using the fuzzy theory and relating it to the interval analysis, formulate and solve an LSP whose variable to be estimated is a fuzzy variable, in order to add to the system both the inconsistency as the randomness. Thus, we aimed to find a more general formulation than in the literature for the LSP, as well as demonstrate an analytical and numerical validity.

Keywords: least-squares problem. optimization fuzzy. interval analysis.

Lista de figuras

Figura 1 – Conjuntos fuzzy representando jovem (young) e muito jovem (very young).	17
Figura 2 – Representação gráfica do conjunto fuzzy F	18
Figura 3 – Números fuzzy: triangular, trapezoidal e gaussiano.	19
Figura 4 – Número fuzzy triangular $(m, a, b)_T$	20
Figura 5 – Comprimento do terreno representado por número fuzzy.	21
Figura 6 – Formulação geométrica do PMQ.	36

Lista de tabelas

Tabela 1 – Comparação entre as versões do PMQ (Caso 1).	41
Tabela 2 – Comparação entre os funcionais (Caso 1).	41
Tabela 3 – Comparação entre as versões do PMQ (Caso 2).	42
Tabela 4 – Comparação entre os funcionais (Caso 2).	43
Tabela 5 – Comparação entre os Casos 1 e 2.	43
Tabela 6 – Comparação entre as versões do PMQ (Caso 3).	44

Lista de símbolos

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos
\cong	Inconsistência
$C(A)$	Espaço Coluna da matriz A
$\ \cdot \ $	Norma Euclidiana
$v_{n \times 1}$	Vetor coluna de tamanho n
\hat{x}	Solução ótima
$\min_x f(x)$	Minimizar a função f em relação à variável x
\cdot^*	Transposição
\cdot^{-1}	Inversão
$\frac{\partial f}{\partial x}$	Derivada parcial de f em relação a variável x
I_n	Matriz identidade de ordem n
$u \perp v$	u é ortogonal a v
$\langle u, v \rangle$	Produto interno entre os vetores u e v
$:=$	Definição
$E\{x\}$	Esperança da variável x
$E\{x y\}$	Esperança de x dado y
χ_A	Função característica do conjunto A
$x \in A$	x pertence ao conjunto A
$x \notin A$	x não pertence ao conjunto A
μ_A	Função de pertinência do conjunto fuzzy A
$\text{supp } A$	Conjunto suporte de A
$\overline{\text{supp } A}$	Fecho do conjunto suporte de A
$\forall x$	Para todo x

Sumário

1 – Introdução	1
2 – Revisão de Literatura	3
3 – Preliminares	7
3.1 O Problema dos Mínimos Quadrados	7
3.1.1 PMQ Determinístico	7
3.1.2 PMQ Estocástico	12
3.2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy	16
3.3 Matemática Intervalar	22
4 – PMQ Fuzzy	28
5 – Implementação e Testes	39
5.1 Testes Numéricos	39
5.2 Estimação da frequência de sinais sinusoidais	46
6 – Conclusão	49
Referências	50

1 Introdução

O Problema dos Mínimos Quadrados (PMQ) tem sido amplamente aplicado em diversas áreas do conhecimento com o objetivo de encontrar estimativas ótimas de determinadas variáveis (SAKSELA et al., 2015; JIANG et al., 2016). A depender da natureza do problema, o PMQ pode ser formulado para dois casos distintos: o caso determinístico e o caso estocástico. Para o caso determinístico a formulação do problema consiste na estimativa ótima da solução de um sistema de equações inconsistente e sobredeterminado. Já no caso estocástico a formulação do problema está baseada na estimativa ótima de uma variável aleatória desconhecida, que está sendo monitorada por outra variável aleatória conhecida e relacionada ao problema. Apesar das inegáveis vantagens das abordagens aqui citadas, os estudos nesta área ainda persistem na busca de formulações alternativas que sejam mais abrangentes tanto do ponto de vista analítico quanto numérico para este problema.

Nesse contexto, a teoria dos conjuntos fuzzy tem se mostrado bastante útil na busca por solução de problemas com características imprecisas, incompletas e inconsistentes (MAKO, 2012; HUANG et al., 2011). A teoria dos conjuntos fuzzy relaciona determinados conceitos da teoria usual de conjuntos, considerando infinitos níveis ou graus de pertinência de um elemento, para assim incluir na teoria de conjuntos as incertezas e vaguezas que surgem ao se definir certos conjuntos. Fica então evidente que a abordagem do ponto de vista fuzzy do PMQ se torna uma alternativa viável para resolvê-lo considerando tanto sua natureza determinística quanto aleatória (estocástica), desde que essas são características intrínsecas do conceito de variável fuzzy. O objetivo principal desse trabalho é então investigar qual a implicação da utilização de variáveis fuzzy no PMQ, ou seja, quais vantagens e possíveis limitações são obtidas a partir dessa nova formulação do problema. Diante disso, buscamos desenvolver nesse trabalho uma formulação do PMQ a luz dessa teoria, utilizando números fuzzy, com o intuito de representar na modelagem matemática do problema suas características imprecisas.

Para isso, se faz necessário compreender de maneira efetiva o problema com o auxílio da teoria intervalar, dado que existe uma forte relação dessa teoria com os números fuzzy. Na análise intervalar os números são representados por intervalos para também carregar possíveis imprecisões. O tipo de variável fuzzy utilizada nesse trabalho, composta por números fuzzy triangulares, tem como característica principal o fato de que sua representação se dá através de seu valor principal e de seu conjunto suporte, que são dados por intervalos reais. Portanto, operar esses números se resume a operar intervalos reais com a adição da informação do valor principal do número fuzzy. Fez-se então necessária a construção de uma versão intervalar do PMQ para então os

resultados encontrados serem estendidos à versão fuzzy.

A partir dos números fuzzy que compõem as entradas e as variáveis do problema são obtidos os intervalos para formar a versão intervalar do PMQ. Nessa formulação, uma estrutura de espaço vetorial normado intervalar é construído para o desenvolvimento e solução do problema. Os resultados intervalares retornam então para a teoria fuzzy onde a análise da solução obtida pode ser feita. Com isso, as imprecisões presentes no problema e traduzidas na solução podem ser interpretadas pelo pesquisador através de seu conhecimento a priori do problema.

Este trabalho se estrutura da seguinte forma: o Capítulo 2 traz uma revisão da literatura sobre as principais teorias tratadas aqui. O Capítulo 3 apresenta os conceitos básicos das teorias que fundamentam essa dissertação: as formulações clássicas do PMQ, determinística e estocástica, com suas soluções; uma introdução a Teoria dos Conjuntos Fuzzy e a matemática intervalar. O Capítulo 4 é dedicado a construção e solução do PMQ fuzzy passando pela necessária construção da versão intervalar do problema. O Capítulo 5 discute a respeito do algoritmo implementado com a solução do PMQ fuzzy desenvolvida e a análise de testes numéricos da solução através dessa implementação com uma aplicação a estimação de frequências de sinais sinusoidais. No Capítulo 6 estão as conclusões, destacando a teoria desenvolvida nesse trabalho, e os próximos passos a serem tomados.

2 Revisão de Literatura

São vastas as aplicações em diversas áreas da ciência e engenharia que possuem modelos matemáticos como base. Estes modelos podem ser das mais variadas formas e se utilizam de um amplo arsenal de conhecimentos matemáticos já desenvolvidos. Dentre essas aplicações, muitas estão ligadas a necessidade de estimar valores de processos aleatórios dada a observação de outros processos relacionados. Estes problemas de estimação podem ser encontrados em áreas tais como: a economia, estatística, processamento de sinais, geofísica, astronomia, entre outras ([KAILATH et al., 2000](#)).

Dentre estes problemas de estimação, uma das classes mais estudadas e interessantes é a do Problema dos Mínimos Quadrados (PMQ). De forma geral, um método de estimação é necessário para qualquer problema com número suficiente de dados para sobre-determinar a sua solução e o PMQ é o método de aproximação mais escolhido frequentemente ([PINAR; ARIKAN, 2004](#); [SAYED; CHANDRASEKARAN, 2000](#); [ZAMIR; SUKHORUKOVA, 2016](#)). Um exemplo de aplicação que remete a origem desse tipo de problema é a estimação de tamanhos de astros e de sua trajetória. O PMQ tem sido amplamente aplicado em diversas áreas do conhecimento com o objetivo de encontrar estimativas ótimas de determinadas variáveis e possui diversas formulações que se adequam de acordo com a natureza do problema tratado.

Uma das mais antigas e elementares formulações desse problema é o PMQ determinístico, que consiste na estimativa ótima da solução de um sistema de equações inconsistente e sobre-determinado $Hx \cong y$ para estimar parâmetros em problemas de diversas naturezas. Nesse caso a solução ótima para o problema é aquela que minimiza o quadrado da norma do vetor resíduo adicionado para retirar a inconsistência do sistema. Essa formulação parte do princípio de que uma estimação é necessária devido a erros contidos em y , assumindo assim que H está livre de erros. Porém, em muitos casos essa é uma abordagem irreal, pois erros de diversas naturezas como: de modelagem, instrumentais e erros de amostragem podem implicar em erros também na matriz A ([HUFFEL; VANDEWALLE, 1991](#)).

Uma abordagem do PMQ que leva em conta incertezas nas variáveis é o PMQ estocástico. Nesse caso, a formulação do problema está baseada na estimativa ótima de uma variável aleatória desconhecida, que está sendo monitorada por outra variável aleatória conhecida e relacionada ao problema. O que se tem então são medidas ruidosas de uma variável obtidas a partir da outra. Com a formulação apropriada se obtém informações razoáveis da variável desconhecida a partir das medidas ruidosas da variável conhecida. Apesar das inegáveis vantagens das abordagens aqui citadas, os estudos nesta área ainda persistem na busca de formulações alternativas que sejam

mais abrangentes tanto do ponto de vista analítico quanto numérico para este problema. Uma alternativa para adicionar incertezas em ambas variáveis de entrada do problema com uma formulação determinística é com o uso da Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

A teoria dos conjuntos fuzzy proposta por [Zadeh \(1965\)](#), relaciona determinados conceitos da teoria usual de conjuntos, considerando infinitos níveis ou graus de pertinência de um elemento, para assim incluir na teoria de conjuntos as incertezas e vaguezas que surgem ao se definir certos conjuntos. Essa teoria tem-se mostrado uma ferramenta muito útil que, pela sua própria natureza, é adequada para desenvolver modelos matemáticos que lidam com imprecisões, ignorâncias e vaguezas presentes em problemas do mundo real. Assim, ao mudarmos do paradigma Aristotélico para o difuso (fuzzy), é natural que se tenha a necessidade de desenvolver uma teoria lógico-matemática que possa servir como pilar concreto das aplicações baseadas em modelos matemáticos dentro do escopo proporcionado por essa teoria ([DUBOIS; PRADE, 1997](#); [DUBOIS; PRADE, 2000](#); [LEE, 2005](#); [WANG, 1997](#)).

De fato, o sucesso de aplicações consideradas dentro do ambiente proporcionado pela matemática difusa, tem despertado o interesse de pesquisadores, nas mais diversas áreas do conhecimento (economia, medicina, agricultura, engenharia, robótica, etc.), a desenvolverem modelos dentro desse escopo. Problemas que envolvem tomadas de decisão por exemplo, que são comuns na robótica, onde movimentos devem ser feitos a partir de dados coletados do ambiente têm se desenvolvido utilizando os fundamentos dessa teoria ([FATEH; FATEH, 2013](#)). A continuidade necessária aos movimentos exige uma modelagem que contemple esse aspecto e a teoria fuzzy tem em sua natureza características próprias para isso.

Como contrapartida, surge a necessidade da construção de uma forte fundamentação teórica visando dar um suporte matemático para o desenvolvimento de novas técnicas e de formas de usá-las, impulsionando um aprofundamento de pesquisas no campo teórico que visam generalizar construções matemáticas usuais tais como integrais, derivadas, topologias, álgebras, sistemas de equações diferenciais, otimização, etc. ([BARROS; BASSANEZI, 2006](#); [DIAMOND, 1990](#); [KOSKO, 1992](#)). Porém, o nível de maturidade matemática ainda está muito longe de atingir o nível que existe hoje na matemática convencional.

Nesse framework gerado pela matemática fuzzy, a otimização fuzzy, assim como no caso clássico, busca encontrar uma solução ótima para uma determinada função custo, considerando prováveis incertezas, flexibilidades e aproximações inerentes aos modelos considerados. Além disso, a otimização fuzzy permite tratar problemas com múltiplos objetivos. Por exemplo, no caso das incertezas, a teoria dos conjuntos fuzzy propicia uma formulação generalizada de certos intervalos manipulados através de um conjunto de regras denominado α -cortes. Já a flexibilização, pode ser modelada

de maneira fuzzy, levando-se em consideração o grau de satisfação das restrições, que pode ser determinado de acordo com a necessidade do problema.

Fica então evidente que a abordagem do ponto de vista fuzzy do Problema dos Mínimos Quadrados se torna uma alternativa viável para resolvê-lo considerando tanto sua natureza determinística quanto aleatória (estocástica), desde que essas são características intrínsecas do conceito de variável fuzzy. Na literatura, podemos encontrar alguns trabalhos que lidam com Problema dos Mínimos Quadrados baseado na teoria dos conjuntos fuzzy. [Diamond \(1988\)](#) traz uma versão fuzzy da regressão por mínimos quadrados, onde a partir de uma estrutura de espaço métrico de números fuzzy triangulares são estimados dois parâmetros a e b para satisfazer um conjunto de n equações. [Ming et al. \(1997\)](#) generalizou o trabalho anterior para números fuzzy representados por funções contínuas por partes com único máximo e suporte compacto. Entretanto, nenhum deles considera o problema do ponto de vista que desejamos tratar.

A aritmética, as funções de extensão, a análise fuzzy e diversas outras partes da teoria dos conjuntos fuzzy é desenvolvida sobre os já citados α -cortes, que são intervalos ([CHALCO-CANO et al., 2013](#)). Por isso, a análise intervalar é uma área que está totalmente relacionada à teoria dos conjuntos fuzzy e fundamenta muito do que é desenvolvido nela. Grande parte das teorias e aplicações que utilizam fuzzy partem da extensão de sua versão intervalar, assim como os eventuais problemas que surgem na definição de um conceito dentro do universo fuzzy podem estar ligados ao não (total) desenvolvimento desse conceito na análise intervalar ([LODWICK; DUBOIS, 2015](#)).

A análise intervalar, assim como a teoria dos conjuntos fuzzy, surgiu como área de pesquisa ativa no final da década de 50, início dos anos 60 e partiu da ideia de que se você toma um número qualquer a e um certo limite de erro b em a , como aproximação para um número qualquer x , não importa como você calcule a e b , terá sempre a certeza de que x estará no intervalo $[a - b, a + b]$ ([MOORE, 2003](#)). A partir da ideia então de que um intervalo pode representar tanto um conjunto quanto um número desenvolveu-se toda a matemática intervalar, aritmética e análise, tendo como motivação principal o tratamento, na maioria das vezes computacional, de variáveis associadas a erros de diversas origens, o que recai sobre sua ligação com a teoria dos conjuntos fuzzy.

Assim como na teoria dos conjuntos fuzzy, aplicações de diversas áreas foram trazidas para o universo da matemática intervalar, levando ao desenvolvimento de toda a fundamentação teórica necessária para resolução desses problemas. Surgiram então diversas versões intervalares de conceitos matemáticos já existentes para variáveis reais ou complexas, tais como: espaços vetoriais, equações diferenciais, entre outros ([MOORE et al., 2009](#)). Dentre as mais recentes aplicações da análise intervalar, está a solução de problemas de otimização que contém incertezas em seus coeficientes devido à arredondamentos ou informações incompletas, que também trazem a necessidade

do desenvolvimento de toda uma estrutura algébrica tal como um espaço vetorial com operações bem definidas e relações de ordem ([COSTA et al., 2015](#)). O problema objeto de estudo dessa dissertação recai sobre esse tipo de otimização, o que reafirma a relação entre a matemática fuzzy e a intervalar.

3 Preliminares

Como teoria base desse trabalho temos as formulações clássicas do PMQ, determinísticas e estocástica, fundamentadas nos conceitos básicos de álgebra linear, otimização e probabilidade; e também a teoria dos conjuntos fuzzy, relacionada excepcionalmente com a análise intervalar.

3.1 O Problema dos Mínimos Quadrados

O problema dos mínimos quadrados é um dos mais antigos problemas de estimação e já foi estudado por diversos autores. Muitas abordagens desse problema são conhecidas e ainda exploradas. [Kailath et al. \(2000\)](#) fazem um apanhado desses estudos destacando a riqueza desse problema com suas diversas versões e aplicações. As abordagens determinística e estocástica são a base para a versão do PMQ desenvolvida nesse trabalho, segue então embaixo uma rápida explanação sobre essas abordagens como tratadas na obra citada acima.

3.1.1 PMQ Determinístico

Considere um conjunto de equações lineares sobredeterminado (tem mais equações do que incógnitas) e inconsistente (não possui solução):

$$Hx \cong y, \quad (1)$$

onde H é uma matriz $m \times n$ conhecida, $m \geq n$ (sobredeterminado), y um vetor $m \times 1$ dado e x um vetor $n \times 1$ desconhecido. Sendo o sistema inconsistente, então y não pertence a $C(H)$ (espaço coluna de H). Isto significa que

$$y = Hx + v \quad (2)$$

para algum vetor $v_{m \times 1}$, que é chamado de resíduo. Uma solução mínimos quadrados \hat{x} , é uma solução que minimiza o comprimento do vetor resíduo, ou seja, que satisfaz a seguinte propriedade:

$$\|y - H\hat{x}\|^2 \leq \|y - Hx\|^2, \quad (3)$$

para todo x , onde $\|\cdot\|^2$ é o quadrado da norma Euclideana. A solução do PMQ determinístico consiste na solução do seguinte problema

$$\min_x J(x) \quad (4)$$

onde a função custo $J(x)$ é definida como

$$J(x) = \|y - Hx\|^2. \quad (5)$$

Sendo H^*, x^*, y^* a matriz e os vetores transpostos de H, x, y , a partir de uma das propriedades da norma euclidiana chegamos a:

$$J(x) = \|y - Hx\|^2 = x^* H^* H x - x^* H^* y - y^* H x + y^* y. \quad (6)$$

A solução mínimos quadrados é descrita no lema a seguir:

Lema 3.1 (As Equações Normais). (KAILATH et al., 2000) Um vetor \hat{x} é o minimizador da função custo $J(x)$ se, e somente se, satisfaz as equações normais (sempre consistentes):

$$H^* H \hat{x} = H^* y. \quad (7)$$

O valor mínimo resultante da função custo $J(x)$ pode ser reescrito como

$$J(\hat{x}) = \|y - H\hat{x}\|^2 = \|y\|^2 - y^* H \hat{x} = \|y\|^2 - \|H\hat{x}\|^2. \quad (8)$$

Demonstração. Diferenciando a equação (6) em x e igualando a zero, obtemos

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} (x^* H^* H x - x^* H^* y - y^* H x + y^* y) \Big|_{x=\hat{x}} = \hat{x}^* H^* H - y^* H \quad (9)$$

que mostra que toda solução \hat{x} deve satisfazer as equações normais

$$H^* H \hat{x} = H^* y. \quad (10)$$

O fato de \hat{x} minimizar a função custo $J(x)$ pode ser visto notando que a matriz Hermitiana é semidefinida positiva,

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial x^* \partial x} \|y - Hx\|^2 = H^* H \geq 0. \quad (11)$$

O valor de J no mínimo pode ser expresso com

$$\begin{aligned} J(\hat{x}) &= \|y - H\hat{x}\|^2 \\ &= (y - H\hat{x})^* (y - H\hat{x}) \\ &= y^* (y - H\hat{x}) \\ &= \|y\|^2 - y^* H \hat{x} \\ &= \|y\|^2 - (H^* y)^* \hat{x} \\ &= \|y\|^2 - (H^* H \hat{x})^* \hat{x} \\ &= \|y\|^2 - \|H\hat{x}\|^2. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2 (Soluções Únicas). (KAILATH et al., 2000) Quando H tem posto coluna completo n , existe um único \hat{x} satisfazendo

$$\|y - H\hat{x}\|^2 \leq \|y - Hx\|^2, \quad (12)$$

que pode ser expresso como

$$\hat{x} = (H^* H)^{-1} H^* y. \quad (13)$$

Além do mais, o valor mínimo resultante do custo pode ser reescrito como

$$J(\hat{x}) = \|y - H\hat{x}\|^2 = y^*(I - H(H^*H)^{-1}H^*)y. \quad (14)$$

Demonstração. (H tem posto completo $\Rightarrow H^*H$ não-singular) Suponha que H^*H é singular então existe um vetor $c \neq 0$ tal que

$$H^*Hc = 0 \rightarrow c^*H^*Hc = 0 = \|Hc\|^2. \quad (15)$$

Logo,

$$Hc = 0. \quad (16)$$

Isto significa que os vetores colunas de H são linearmente dependentes. Portanto, H não é posto completo. \square

Dado um espaço vetorial V qualquer sobre um corpo \mathbb{K} com produto interno \langle, \rangle e sendo $u, v \in V$, dizemos que u e v são ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$ e denotamos por $u \perp v$. Temos ainda que dado $S \subseteq V$ um subconjunto de V , chamamos de ortogonal a S ao conjunto $S^\perp = \{v \in V; \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in S\}$. É facilmente verificado que S^\perp é um subespaço vetorial de V . Agora, se tomarmos $W \subseteq V$ um subespaço de V e dado $v \in V$, se existir $w \in W$ tal que $v - w \in W^\perp$, chamamos o vetor w de projeção ortogonal de v sobre W e denotamos por $w = \text{proj}_W v$. Visto isso, o Lema 3.1 pode ser reformulado geometricamente. Da solução

$$H^*H\hat{x} = H^*y \quad (17)$$

podemos dizer que $y - H\hat{x}$ é ortogonal aos vetores definidos pelas colunas de H . Ou seja, a solução mínimos quadrados é obtida quando $y - \hat{y} \perp C(H)$, sendo $C(H)$ o espaço coluna de H . Considere os seguintes resultados:

Lema 3.3 (Existência e Unicidade da Projeção). (KAILATH et al., 2000) Seja \mathcal{L} um subespaço linear de um espaço vetorial \mathcal{V} com produto interno e seja y qualquer elemento de \mathcal{V} . A projeção de y em \mathcal{L} , denotado por $\hat{y}_{\mathcal{L}}$, ou apenas \hat{y} , existe e é o único elemento de \mathcal{L} , tal que

$$\langle y - \hat{y}, a \rangle = 0, \quad (18)$$

para qualquer $a \in \mathcal{L}$.

Demonstração. Sejam $\{v_i\}_{i=1}^N$ os vetores da base ortonormal de \mathcal{V} sendo que os primeiros M vetores base ($M \leq N$), $\{v_i\}_{i=1}^M$, formam uma base ortonormal para o subespaço \mathcal{L} . Podemos então escrever y como uma combinação linear dos vetores base $\{v_i\}_{i=1}^N$, digamos $y = \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i$. Fazemos também $\hat{y} = \sum_{i=1}^M \alpha_i v_i$ e assim é imediato que $\hat{y} \in \mathcal{L}$. Podemos observar também que, para qualquer $a \in \mathcal{L}$, $\langle y - \hat{y}, a \rangle = 0$, pois a é uma combinação linear dos primeiros M vetores base, enquanto $(y - \hat{y})$ é uma combinação linear dos vetores base restantes e por definição os vetores base são ortogonais entre sim.

Para estabelecer a unicidade, assumimos que existem dois elementos de \mathcal{L} , digamos \hat{y}_1 e \hat{y}_2 , tais que

$$\langle y - \hat{y}_1, a \rangle = 0 \text{ e } \langle y - \hat{y}_2, a \rangle = 0, \text{ para todo } a \in \mathcal{L}. \quad (19)$$

Mas sendo $\hat{y}_1 \in \mathcal{L}$ e $\hat{y}_2 \in \mathcal{L}$, então $(\hat{y}_1 - \hat{y}_2) \in \mathcal{L}$ e obtemos

$$\begin{aligned} \langle \hat{y}_1 - \hat{y}_2, \hat{y}_1 - \hat{y}_2 \rangle &= \langle \hat{y}_1 - \hat{y}_2, (\hat{y}_1 - y) + (y - \hat{y}_2) \rangle, \\ &= \langle \hat{y}_1 - \hat{y}_2, \hat{y}_1 - y \rangle + \langle \hat{y}_1 - \hat{y}_2, y - \hat{y}_2 \rangle = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\hat{y}_1 - \hat{y}_2\|^2 = 0$ e concluímos que devemos ter $\hat{y}_1 = \hat{y}_2$. \square

Lema 3.4 (Ortogonalidade e Aproximação). (KAILATH et al., 2000) Seja \mathcal{L} um subespaço linear de um espaço vetorial \mathcal{V} com produto interno e seja y qualquer elemento de \mathcal{V} . Então a projeção $\hat{y}_{\mathcal{L}}$, tem a propriedade que

$$\|y - \hat{y}_{\mathcal{L}}\|^2 \leq \|y - a\|^2, \quad (20)$$

para qualquer $a \in \mathcal{L}$.

Demonstração. Seja

$$\|y - a\|^2 = \|y - \hat{y}_{\mathcal{L}} + \hat{y}_{\mathcal{L}} - a\|^2, \quad (21)$$

o que implica em

$$\|y - a\|^2 = \|y - \hat{y}_{\mathcal{L}}\|^2 + \|\hat{y}_{\mathcal{L}} - a\|^2 + \langle y - \hat{y}_{\mathcal{L}}, \hat{y}_{\mathcal{L}} - a \rangle + \langle \hat{y}_{\mathcal{L}} - a, y - \hat{y}_{\mathcal{L}} \rangle \quad (22)$$

ou,

$$\|y - a\|^2 - \|\hat{y}_{\mathcal{L}} - a\|^2 = \|y - \hat{y}_{\mathcal{L}}\|^2 + \langle y - \hat{y}_{\mathcal{L}}, \hat{y}_{\mathcal{L}} - a \rangle + \langle \hat{y}_{\mathcal{L}} - a, y - \hat{y}_{\mathcal{L}} \rangle. \quad (23)$$

Mas, dado que $\hat{y}_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$ e $a \in \mathcal{L}$, $(\hat{y}_{\mathcal{L}} - a) \in \mathcal{L}$ e, por definição, $(y - \hat{y}_{\mathcal{L}})$ é ortogonal a $(\hat{y}_{\mathcal{L}} - a)$. Consequentemente,

$$\langle y - \hat{y}_{\mathcal{L}}, \hat{y}_{\mathcal{L}} - a \rangle + \langle \hat{y}_{\mathcal{L}} - a, y - \hat{y}_{\mathcal{L}} \rangle = 0 \quad (24)$$

e

$$\|y - \hat{y}_{\mathcal{L}}\|^2 = \|y - a\|^2 - \|\hat{y}_{\mathcal{L}} - a\|^2 \leq \|y - a\|^2. \quad (25)$$

\square

Os Lemas 3.3 e 3.4 justificam a formulação geométrica para o problema dos mínimos quadrados. Basta considerar o subespaço linear \mathcal{L} como sendo $C(H)$ o espaço gerado pelas colunas de H . A solução dos mínimos quadrados \hat{x} é caracterizada pelo fato do vetor residual $y - H\hat{x}$ ser ortogonal a $C(H)$, ou equivalentemente, $\hat{y} = H\hat{x}$ é a única projeção de y sobre $C(H)$.

Em muitas aplicações é mais apropriado o uso do problema dos mínimos quadrados ponderados, que tem a seguinte formulação:

$$J(x) = \|y - H\hat{x}\|_W^2 := (y - H\hat{x})^* W (y - H\hat{x}), \quad (26)$$

onde W é qualquer matriz definida positiva Hermitiana. O lema seguinte traz a solução para este caso.

Lema 3.5 (Solução do Problema dos Mínimos Quadrados Ponderados). (KAILATH et al., 2000) A solução dos mínimos quadrados ponderados \hat{x}_W , das equações inconsistentes $Hx \cong y$ satisfazem a propriedade

$$\|y - H\hat{x}\|_W^2 \leq \|y - Hx\|_W^2, \quad (27)$$

para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Elas são dadas por qualquer solução do sistemas consistente (normal) de equações

$$H^* W H \hat{x} = H^* W y \quad (28)$$

O correspondente valor mínimo de $\|y - H\hat{x}\|_W^2$ é

$$\|y - H\hat{x}\|_W^2 = y^* W y - y^* W H \hat{x}, \quad (29)$$

que em caso de um H com posto completo, pode ser escrito como

$$\|y - H\hat{x}\|_W^2 = y^* (W - W H (H^* W H)^{-1} H^* W) y. \quad (30)$$

Demonstração. A prova segue as mesmas diretrizes do Lema 3.1. □

Uma função custo mais geral comumente usada é

$$J(x) = (x - x_0)^* \Pi_0^{-1} (x - x_0) + \|y - Hx\|_W^2. \quad (31)$$

Uma razão para usar a última $J(x)$ é que com esta função custo vamos sempre adquirir uma única solução \hat{x} , mesmo quando a matriz H não é posto completo. E quando H é posto completo, este termo extra pode melhorar o condicionamento dos números da matriz que aparece nas equações normais, e assim resultando num melhor comportamento numérico. Um outro ponto é a disponibilidade de parâmetros extras $\{\Pi_0, x_0\}$ permiti-nos incorporar conhecimento a priori na declaração do problema, diferentes escolhas para indicará quão confiante estamos a respeito da proximidade da solução ótima \hat{x} para um dado vetor x_0 . Ou seja, se nós escolhermos Π_0 “pequeno” reflete uma alta confiança que x_0 é uma boa escolha para a solução ótima, enquanto em Π_0 “grande” indica um alto grau de incerteza na condição inicial x_0 .

O problema de mínimos quadrados regularizados pode ser escrito como

$$\min_{(x-x_0)} \left[(x - x_0)^* \Pi_0^{-1} (x - x_0) + \|(y - Hx_0) - H(x - x_0)\|_W^2 \right], \quad (32)$$

que pode ser escrito como

$$\min_{(x-x_0)} \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ y - Hx_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Pi_0^{-1/2} \\ H \end{bmatrix} (x - x_0) \right\|_{(I \oplus W)}^2$$

$$I \oplus W := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Fazendo $x' = x - x_0$ e $y' = y - Hx_0$, temos

$$\min_{x'} \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Pi_0^{-1/2} \\ H \end{bmatrix} x' \right\|_{(I \oplus W)}^2. \quad (34)$$

Observe que o último funcional tem a mesma forma do problema dos mínimos quadrados sem o termo de regularização, logo a solução \hat{x} é dada por

$$\begin{bmatrix} \Pi_0^{-1/2} \\ H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Pi_0^{-1/2} \\ H \end{bmatrix} \hat{x}' \right) = 0, \quad (35)$$

que pode ser reduzido ao sistema de equações lineares

$$\left[\Pi_0^{-1} + H^*WH \right] (\hat{x} - x_0) = H^*W(y - Hx_0). \quad (36)$$

Como mencionado anteriormente ao invés de requerermos a invertibilidade de H^*WH , nós requeremos a invertibilidade de $\left[\Pi_0^{-1} + H^*WH \right]$, que é garantida pela declaração que $\Pi_0 > 0$. O valor mínimo pode ser calculado por

$$J(\hat{x}) = (y - Hx_0)^* \left[W^{-1} + H\Pi_0 H^* \right]^{-1} (y - Hx_0) \quad (37)$$

e também escrito como

$$\hat{x} = x_0 + \left[\Pi_0^{-1} + H^*WH \right]^{-1} H^*W(y - Hx_0). \quad (38)$$

3.1.2 PMQ Estocástico

Há também uma versão estocástica do problema dos mínimos quadrados. Considere as variáveis aleatórias dependentes x e y , com função densidade de probabilidade conjunta $f_{x,y}(\bullet, \bullet)$. Tal questão surge quando a quantidade de interesse não é diretamente observada ou diretamente medida mas é possível monitorar uma outra quantidade relacionada. Por exemplo, pode-se ter disponível somente medidas ruidosas y de x , dizemos $y = x + v$, onde a variável aleatória v representa um ruído aditivo. Ou seja, informações razoáveis de x podem ser extraídas da medida ruidosa y .

Uma estimativa para o valor assumido por x pode ser descrito como uma função do valor assumido por y ,

$$\hat{x} = h(y). \quad (39)$$

A escolha da função $h(\bullet)$ que satisfaz a estimativa \hat{x} , deve satisfazer a um critério de otimalidade desejado. O critério usado aqui é o mínimo médio quadrático (equivalente ao mínimo quadrado determinístico para o caso estocástico). O estimador ótimo é dado por

$$\hat{x} = E\{x|y\}, \quad (40)$$

ou seja, o valor condicional de x dado y . Para calcular esta esperança é necessário ter conhecimento completo da função densidade de probabilidade conjunta de $\{x, y\}$ que é difícil de ser obtida. Condicionando então a função $h(\bullet)$ para ser uma função linear das observações y , verifica-se que é necessário o conhecimento das esperanças de primeira e segunda ordem $E\{x\}$, $E\{y\}$, $E\{xx^*\}$, $E\{yy^*\}$. Se considerarmos $\{x, y\}$ conjuntamente Gaussianas, que é uma condição razoável, então o estimador mínimo médio quadrático é linear. Será então tratado aqui o problema de estimação mínimo médio quadrático linear que é a contra partida estocástica do problema dos mínimos quadráticos.

Considere uma variável aleatória $x \in \mathbb{C}^n$ de dimensão n com média zero e um conjunto de variáveis aleatórias $\bar{y} = \text{col}[y_0, y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{C}^{n,1}$ de média zero, onde cada y_i tem dimensão p . O objetivo é estimar x dados as variáveis $\{y_i\}$. Assume-se que \hat{x} é construído como uma combinação linear da forma

$$\hat{x} = K_0 y, \quad (41)$$

onde K_0 é uma matriz de coeficientes que deseja-se determinar, assim como minimizar a matriz de covariância do erro

$$P(K_0) := E\{x - \hat{x}\}\{x - \hat{x}\}^* = \text{mínimo}. \quad (42)$$

Isto é, deve-se encontrar K_0 tal que para todo k , obtém-se

$$P(K) = E\{x - Ky\}\{x - Ky\}^* \geq P(K_0). \quad (43)$$

Isto é equivalente a requerer que

$$aP(K)a^* \geq aP(K_0)a^* \quad (44)$$

para todo k e para todo o vetor linha a . A solução do problema acima é dado pelo seguinte Teorema.

Teorema 3.1 (Estimador Linear Mínimo Médio Quadrático (ELMMQ)). ([KAILATH et al., 2000](#)) Dado duas variáveis aleatórias x e y , o ELMMQ de x dado y dado por

$$\hat{x} = K_0 y$$

$$P(K_0) := E\{x - \hat{x}\}\{x - \hat{x}\}^* = \text{mínimo} \quad (45)$$

é dado por qualquer solução K_0 das equações normais

$$K_0 R_y = R_{xy}, \quad (46)$$

onde $R_y = E\{yy^*\}$ e $R_{xy} = E\{xy^*\} = R_{yx}^*$. A correspondente matriz do erro mínimo médio quadrático (ou matriz de covariância do erro) é

$$P(K_0) = R_x - K_0 R_{yx} = R_x - R_{xy} K_0^*. \quad (47)$$

Demonstração. Seja K_0 a solução que minimiza o problema

$$\hat{x} = K_0 y$$

$$P(K_0) := E\{x - \hat{x}\}\{x - \hat{x}\}^* = \text{mínimo} \quad (48)$$

se, e somente se, para todos os vetores de a , aK_0 é o mínimo de $aP(K)a^*$, onde

$$\begin{aligned} aP(K)a^* &= aE\{(x - Ky)(x - Ky)^*\}a^* = \\ &= a\{R_x - R_{xy}K^* - KR_{yx} + KR_yK^*\}a^* = aR_xa^* - aR_{xy}(aK)^* - aKR_{yx}a^* + aKR_y(aK)^*. \end{aligned}$$

Note que $aP(K)a^*$ é uma função do vetor aK . Então, diferenciando $aP(K)a^*$ com respeito a aK e igualando a derivada à zero, temos

$$\begin{aligned} -aR_{xy} - aR_{yx}^* + 2aKR_y &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -aR_{xy} - aR_{xy} + 2aKR_y &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -R_{xy} + KR_y &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow K_0R_y &= R_{xy}. \end{aligned}$$

A correspondente matriz do erro mínimo médio quadrático é

$$\begin{aligned} P(K_0) &= E\{x - \hat{x}\}\{x - \hat{x}\}^* = E\{(x - \hat{x})x^*\} - E\{(x - \hat{x})\hat{x}^*\} \\ &= E\{(x - K_0y)x^*\} - E\{(x - K_0y)\hat{x}^*\} \\ &= E\{(x - K_0y)x^*\} - E\{(x - K_0y)y^*K_0^*\} \\ &= R_x - K_0R_{yx} - (R_{xy} - K_0R_y)K_0^* \\ &= R_x - K_0R_{yx}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2 (Solução Única). (KAILATH et al., 2000) Assuma que $R_y > 0$. Então a escolha ótima K_0 que minimiza $P(K) = E\{(x - Ky)(x - Ky)^*\}$ é dado por

$$K_0 = R_{xy}R_y^{-1} \quad (49)$$

e o erro mínimo médio quadrático pode ser escrito como

$$P(K_0) = R_x - R_{xy}R_y^{-1}R_{yx} = R_{\tilde{x}}. \quad (50)$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} P(K) &= E\{(x - Ky)(x - Ky)^*\} \\ &= R_x - R_{xy}K^* - KR_{yx} + K_0R_yK_0^* \\ &= \begin{bmatrix} I & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_x & R_{xy} \\ R_{yx} & R_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -K^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dado que $R_y > 0$, podemos usar uma fatoração triangular inferior

$$\begin{bmatrix} R_x & R_{xy} \\ R_{yx} & R_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & R_{xy}R_y^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\tilde{x}} & 0 \\ 0 & R_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ R_y^{-1}R_{yx} & I \end{bmatrix} \quad (51)$$

onde é definido que $R_{\tilde{x}} = R_x - R_{xy}R_y^{-1}R_{yx}$. Podemos escrever então

$$P(K) = R_x - R_{xy}R_y^{-1}R_{yx} + (R_{xy}R_y^{-1} - K)R_y(R_{xy}R_y^{-1} - K)^*. \quad (52)$$

O termo quadrático envolvendo K é sempre não-negativo por causa de $R_y > 0$, assim o menor valor que este termo pode ter é zero, que é alcançado quando fazemos $K = R_{xy}R_y^{-1} = K_0$. Portanto $P(K_0) = R_{\tilde{x}}$, quando $K_0 = R_{xy}R_y^{-1}$. \square

Um caso especial que sempre surge é quando as variáveis x e y estão linearmente relacionadas, ou seja

$$y = Hx + v, \quad (53)$$

sendo $H \in \mathbb{C}^{p \times n}$ uma matriz conhecida e v um ruído aleatório de média zero e não correlacionado com a variável x . Assumindo que $R_x = E\{xx^*\}$ e $R_v = E\{vv^*\}$ são conhecidos e que $R_y = HR_xH^* + R_v > 0$, então o estimador linear mínimo médio quadrático e o correspondente erro mínimo médio quadrático podem ser escritos como

$$\hat{x} = K_0y, \quad (54)$$

sendo,

$$K_0 = R_xH^*(HR_xH^* + R_v)^{-1} \quad (55)$$

e

$$P_x := R_{\tilde{x}} = R_x - R_xH^*(HR_xH^* + R_v)^{-1}HR_x. \quad (56)$$

3.2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi proposta por [Zadeh \(1965\)](#) em seu artigo *Fuzzy Sets* e desde então muito foi pesquisado e desenvolvido dentro dessa área. Zadeh partiu da ideia de que muitos conjuntos de elementos do mundo real não possui uma fronteira totalmente definida, ou seja, nem sempre é possível se ter certeza de que um dado elemento realmente está totalmente contido nesse conjunto. Esses conjuntos em sua maioria possuem em sua definição conceitos que indicam uma certa vagueza. Por exemplo: se tomarmos o conjunto de números muito próximos de 7, podemos afirmar que os números 6,9 e 10 estão contidos nesse conjunto? Não há uma resposta exata para essa pergunta, pois não existe uma definição precisa do que é um número ser muito próximo a outro. A única coisa que podemos afirmar é que 6,9 está mais próximo de 7 do que 10.

Relacionando então essa ideia de imprecisão com a de função característica de um conjunto, cuja definição é:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}, \quad (57)$$

Zadeh construiu a definição matemática de um Conjunto Fuzzy. Pensando numa função característica contínua onde cada elemento possui um grau de pertinência que varia entre 0 e 1, conceitos que indicam imprecisões poderiam então ser representados matematicamente. A definição em que chegou foi então a seguinte:

Seja U o conjunto universo de discurso, um conjunto fuzzy A em U é caracterizado por uma função

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1], \quad (58)$$

pré fixada, chamada função de pertinência do conjunto fuzzy A . O valor de $\mu_A(x) \in [0, 1]$ indica o grau com que o elemento x de U pertence ao conjunto fuzzy A . Dois conjuntos fuzzy A e B são iguais, $A = B$, se $\mu_A = \mu_B$.

Voltando ao conjunto dos números muito próximos de 7, este pode ser definido como um conjunto fuzzy F com a seguinte função de pertinência:

$$\mu_F(x) = \begin{cases} (1 - |x - 7|) & \text{se } x \in [6, 8] \\ 0 & \text{se } x \notin [6, 8] \end{cases}, \quad (59)$$

dessa forma temos que $\mu_F(6,9) = 0,9$ e $\mu_F(10) = 0$. O que significa que a partir dessa definição 6,9 é muito próximo de 7 com grau 0,9 e 10 não é muito próximo de 7. Outras diversas funções de pertinência poderiam ser criadas para representar esse conjunto de acordo com o que se pensa do conceito de “muito próximo”. Essa é uma das maiores vantagens da teoria de conjuntos fuzzy: a sua mobilidade para atender a cada situação de forma diferente.

Muitos outros contextos onde conceitos que indicam imprecisões e vaguezas são utilizados também podem ser modelados por conjuntos fuzzy. Diversas variáveis linguísticas podem determinar conjuntos sem uma fronteira totalmente definida tais como: alto, médio, baixo, velho, bom, excelente, etc. Um exemplo a ser citado é um conjunto definido pela variável linguística *jovem*. A classificação de pessoas como jovens a partir de sua idade não é feita de forma totalmente definida devido a vagueza indicada por essa variável linguística. Podemos dizer que uma pessoa de 27 anos é jovem mas não tanto quanto uma de 18. Pensando no conceito de *muito jovem*, podemos pensar também outro conjunto fuzzy onde as idades de 18 e 27 anos já teriam graus de pertinência menores do que no conjunto *jovem*. As representações desses dois conjuntos fuzzy podem ser dadas de acordo como temos na Figura 1.

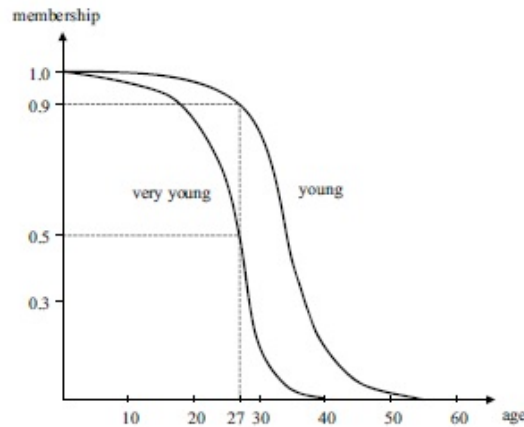


Figura 1 – Conjuntos fuzzy representando jovem (young) e muito jovem (very young).

Fonte: [Lee \(2005\)](#)

Assim, uma pessoa é jovem com grau 1 de pertinência até por volta dos 10 anos e a partir dos 60 anos já possui grau 0 de pertinência. Já para o conjunto *muito jovem* pessoas com mais de 40 anos possuem grau 0. Dessa forma, uma pessoa de 27 anos é jovem com grau 0.9 de pertinência e muito jovem com grau 0.5. Podemos observar então a imprecisão contida nesses conceitos obtidos de variáveis linguísticas e como eles podem ser modelados por conjuntos fuzzy.

Um conjunto fuzzy pode ser dividido em conjuntos clássicos usando como critério de separação o grau de pertinência dos elementos dentro desse conjunto. Elementos com um mesmo grau de pertinência $\alpha \in (0, 1]$ fazem parte de uma mesma coleção e a esse conjunto clássico é dado o nome de α -corte do conjunto fuzzy. Esse conceito é definido a seguir.

Definição 3.1. Seja A um conjunto fuzzy em U e $\alpha \in (0, 1]$. O α -corte de A é o subconjunto clássico de U definido por

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \mu_A(x) \geq \alpha\}. \quad (60)$$

Os α -cortes fazem então a ligação de um conjunto fuzzy com a teoria de conjuntos clássica. Dentro da teoria de conjuntos fuzzy os conjuntos clássicos são comumente denominados conjuntos *crisp*. Dado o conjunto fuzzy F de números muito próximos de 7 definido anteriormente, temos que $[F]^{0,5} = [6,5, 7, 5]$, como podemos observar na Figura 2. Temos também que dados $\alpha, \beta \in (0, 1]$ e um conjunto fuzzy A , tais que $\alpha \leq \beta$

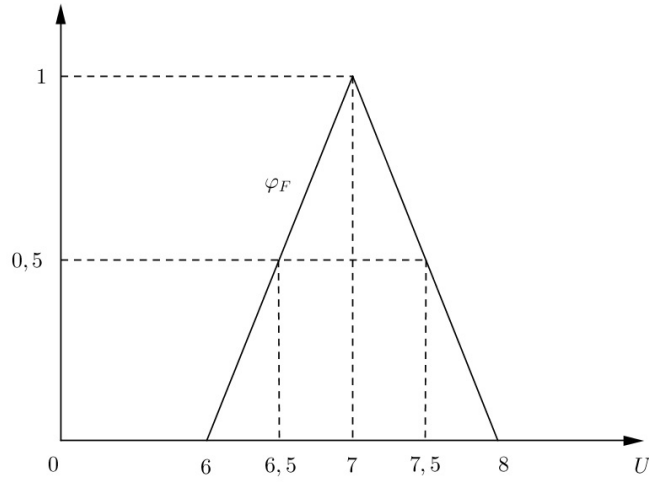


Figura 2 – Representação gráfica do conjunto fuzzy F .

então $[A]^\alpha \subset [A]^\beta$.

Um outro conceito importante relativo a conjuntos fuzzy é o de conjunto suporte. Sua definição segue abaixo.

Definição 3.2. Seja A um conjunto fuzzy com função de pertinência $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$. O conjunto suporte de A é definido como

$$\text{supp } A = \{x \in U : \mu_A(x) > 0\}. \quad (61)$$

Ainda citando o conjunto fuzzy F já definido, o seu conjunto suporte é dado por $\text{supp } F =]6, 8[$. Podemos definir também o nível zero de um conjunto fuzzy $[A]^0$ dado como o fecho de seu suporte indicado por $\overline{\text{supp}} A$. Temos então para esse exemplo que $[F]^0 = \overline{\text{supp}} F = [6, 8]$.

Muitas definições dentro do universo dos conjuntos fuzzy procuram seguir a mesma ideia que representam na teoria de conjuntos clássica. Os α -cortes são o principal meio de ligação entre esses dois universos e por isso muitas definições são feitas a partir deles. Um exemplo desse tipo de definição é trazido a seguir.

Definição 3.3. Um conjunto fuzzy A em U é convexo se seus α -cortes são convexos. Isso é equivalente a: A é convexo se

$$\forall x_1 \in U, \forall x_2 \in U, \forall \lambda \in [0, 1],$$

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)). \quad (62)$$

Um conceito muito importante para o tema desse trabalho é o de número fuzzy. A base para construção da versão Fuzzy do PMQ é a mudança das variáveis e constantes clássicas para fuzzy, fazendo assim com que as possíveis imprecisões contidas no problema sejam tratadas desde o início e sua presença possa ser ponderada na solução, pois a motivação para criação do conceito de número fuzzy está justamente nisso: representações numéricas que carregam imprecisões.

Definição 3.4. Se A é um conjunto fuzzy convexo e normalizado, cuja função de pertinência μ_A tenha como domínio \mathbb{R} e é contínua por partes, então A é dito ser um número fuzzy.

Os números reais podem ser considerados um caso particular de número fuzzy, onde a sua função de pertinência tem como contra-domínio o conjunto $\{0, 1\}$. Os tipos mais comuns de números fuzzy são os triangulares, trapezoidais e gaussianos. Suas representações podem seguir os modelos apresentados na Figura 3.

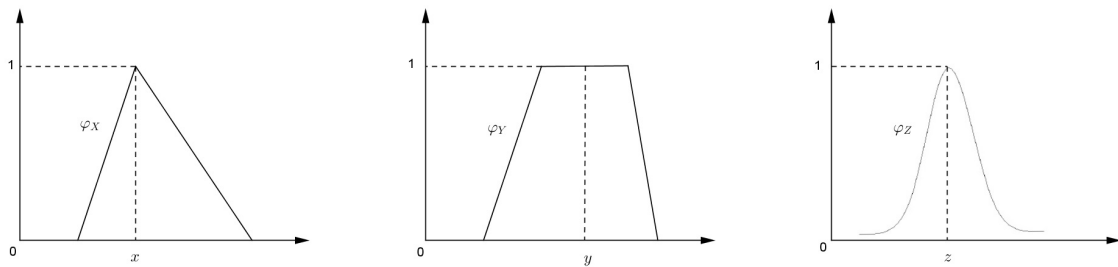


Figura 3 – Números fuzzy: triangular, trapezoidal e gaussiano.

Diamond (1988), ao trabalhar com uma versão fuzzy da regressão por mínimos quadrados, traz um tipo de número fuzzy com propriedades muito úteis em aplicações. Sendo L, R funções reais pares, não-crescentes em $[0, \infty)$, satisfazendo $L(0) = R(0) = 1$. Números fuzzy da forma

$$X(u) = \begin{cases} L\left(\frac{m-u}{a}\right) & \text{para } u \leq m, a > 0, \\ R\left(\frac{u-m}{b}\right) & \text{para } u \geq m, b > 0 \end{cases} \quad (63)$$

são chamados de números- L , R e denotados por $X = (m, a, b)_{LR}$. Se L, R são da forma

$$T(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{demais casos,} \end{cases} \quad (64)$$

então $X = (m, a, b)_T$ é dito ser triangular. Pode-se observar facilmente através da Figura

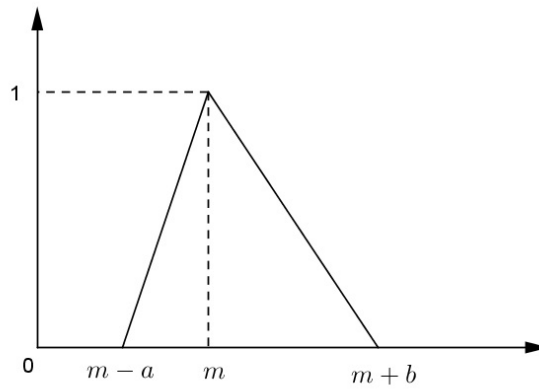


Figura 4 – Número fuzzy triangular $(m, a, b)_T$.

4 que o fecho do conjunto suporte de um número triangular $(m, a, b)_T$ é o intervalo real $[m - a, m + b]$.

A necessidade de definição de um número fuzzy pode vir de diversas origens. Um caso típico é o de medidas instrumentais não precisas. Por exemplo, se pensarmos na medida do comprimento de um terreno feito com uma trena, o valor encontrado possivelmente carrega imprecisões. Pode-se pensar nesse valor, dito c metros, como o valor principal de um número fuzzy e definir que o valor real da medida é algo em torno de c , por isso outros valores podem ser admitidos como possíveis para o comprimento do terreno. Esse erro pode ser definido como de 1 metro para mais e para menos. Chegamos então na representação do comprimento do terreno dada pelo número triangular fuzzy $(c, 1, 1)_T$ onde sua representação gráfica é dada na Figura 5.

Denominando C esse número fuzzy, sua função de pertinência é dada da seguinte forma:

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq c - 1 \\ x - (c - 1) & \text{se } c - 1 < x \leq c \\ -x + (c + 1) & \text{se } c < x \leq c + 1 \\ 0 & \text{se } x \geq c + 1 \end{cases}. \quad (65)$$

A expressão “em torno de” indica a necessidade do número triangular fuzzy ser simétrico, por isso os erros definidos de forma igual. Temos então c como único valor atingindo o grau 1 de pertinência e os valores em torno dele com graus cada vez menores a medida que se distanciam tanto para a direita como para a esquerda. Dessa

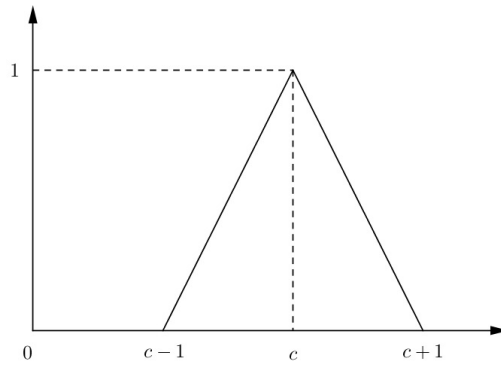


Figura 5 – Comprimento do terreno representado por número fuzzy.

forma, a incerteza contida na medida obtida pela trena para o comprimento do terreno pode ser interpretada através dessa modelagem por número triangular fuzzy. Esse exemplo apenas ilustra o que acontece em diversas pesquisas e experimentos dentro da ciência onde instrumentos são utilizados, acabam ocasionando possíveis erros de medição e a utilização de números fuzzy se mostra uma alternativa para interpretá-los.

Todo conjunto fuzzy, e por consequência todo número fuzzy, pode ser definido a partir de seus α -cortes, ou seja, assim como os α -cortes são obtidos a partir do conjunto fuzzy, o processo contrário também pode ser feito. Assim, os α -cortes são a ligação de um conjunto fuzzy com a teoria de conjuntos clássica (*crisp*). O Teorema e o Corolário a seguir tratam desses conceitos.

Teorema 3.3. (BARROS; BASSANEZI, 2006) Sejam A e B conjuntos fuzzy em U . Uma condição necessária e suficiente para que $A = B$ é que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Demonstração. Pode-se observar facilmente que $A = B \Rightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Suponhamos então que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Se $A \neq B$, então existe $x \in U$ tal que $\mu_A(x) \neq \mu_B(x)$. Logo, temos que $\mu_A(x) > \mu_B(x)$ ou $\mu_A(x) < \mu_B(x)$. Supondo $\mu_A(x) > \mu_B(x)$, podemos concluir que $x \in [A]^{\mu_A(x)}$ e $x \notin [B]^{\mu_A(x)}$ e, portanto, $[A]^{\mu_A(x)} \neq [B]^{\mu_A(x)}$, o que é uma contradição dada a hipótese adotada. De maneira análoga, chegamos a uma contradição tomando $\mu_A(x) < \mu_B(x)$. \square

Como consequência desse Teorema temos o seguinte corolário que trata da relação existente entre a função de pertinência de um conjunto fuzzy e as funções características de seus α -cortes.

Corolário 3.1. (BARROS; BASSANEZI, 2006) Dado um conjunto fuzzy A , sua função de pertinência μ_A pode ser expressa em termos das funções características de seus α -cortes,

ou seja,

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min[\alpha, \chi_{[A]^\alpha}(x)], \text{ onde } \chi_{[A]^\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [A]^\alpha \\ 0 & \text{se } x \notin [A]^\alpha \end{cases}. \quad (66)$$

Logo, todo conjunto fuzzy pode ser totalmente caracterizado através de seus α -cortes e por consequência o mesmo acontece com números fuzzy.

3.3 Matemática Intervalar

Na utilização de números fuzzy, em muitos casos é interessante olhar para o conjunto suporte do número para compreender o que ele representa no problema. No caso dos números triangulares fuzzy $X = (m, a, b)_T$, que tem o fecho do conjunto suporte dado pelo intervalo $[m - a, m + b]$, o conjunto suporte carrega praticamente toda informação relativa ao número fuzzy, pois seus α -cortes são todos intervalos reais contidos no fecho do conjunto suporte. Muito do que é desenvolvido dentro da teoria dos conjuntos fuzzy se baseia na ideia de transpor o problema para a teoria clássica através dos α -cortes, resolvê-lo e em seguida retornar essa informação para o universo fuzzy.

Optou-se então nesse trabalho por resolver uma versão intervalar do PMQ com os intervalos que são obtidos a partir dos fechos dos conjuntos suportes dos números triangulares fuzzy, sem perda de informação, para em seguida transpor os resultados para o caso fuzzy. Devido a isso, faz-se necessário o estudo da análise intervalar e a construção de uma estrutura de Espaço Vetorial Normado com este tipo de variável.

Assim como a teoria dos conjuntos fuzzy, a análise intervalar surgiu para representar matematicamente imprecisões das mais diversas origens. Um intervalo passou então a possuir dois significados quanto a sua representação: um conjunto numérico ou um único número que carrega uma imprecisão quanto ao seu valor real.

Em um trabalho recente [Costa et al. \(2015\)](#), tomaram o espaço dos intervalos reais dado por $M = I(\mathbb{R}) \cup \overline{I(\mathbb{R})}$, onde $I(\mathbb{R}) = \{[\underline{a}, \bar{a}] : \underline{a} \leq \bar{a} \text{ e } \underline{a}, \bar{a} \in \mathbb{R}\}$ e $\overline{I(\mathbb{R})} = \{[\underline{a}, \bar{a}] : [\bar{a}, \underline{a}] \in I(\mathbb{R})\}$; e o induziram com uma estrutura de espaço vetorial a partir da estrutura do espaço vetorial Euclidiano $(\mathbb{R}^{2n}, +, \cdot)$, com suas operações usuais e usando uma bijeção entre esse espaço e \mathbb{R}^{2n} da seguinte forma:

Dado o espaço vetorial usual $(\mathbb{R}^{2n}, +, \cdot)$ e uma função bijetora $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, é denotado por $(M^n, +_\varphi, \cdot_\varphi)$ o espaço com as operações $+_\varphi : M^n \times M^n \rightarrow M^n$ e $\cdot_\varphi : \mathbb{R} \times M^n \rightarrow M^n$, dadas por

$$\begin{aligned} & ([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) +_\varphi ([b_1, b_2], \dots, [b_{2n-1}, b_{2n}]) = \\ & = \varphi^{-1}(\varphi([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) + \varphi([b_1, b_2], \dots, [b_{2n-1}, b_{2n}])) \end{aligned} \quad (67)$$

e

$$\alpha \cdot_{\varphi} ([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) = \varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}])). \quad (68)$$

Teorema 3.4. Seja $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ uma bijeção. Então o espaço $(M^n, +_{\varphi}, \cdot_{\varphi})$ é um espaço vetorial.

Demonstração. Sejam $a, b, c \in M^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Da definição das operações $+_{\varphi}$ e \cdot_{φ} e do fato de \mathbb{R}^{2n} ser um espaço vetorial segue que:

$$A_1) \quad a +_{\varphi} b = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(b)) = \varphi^{-1}(\varphi(b) + \varphi(a)) = b +_{\varphi} a;$$

$$\begin{aligned} A_2) \quad (a +_{\varphi} b) +_{\varphi} c &= (\varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(b))) +_{\varphi} c = \varphi^{-1}[\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(b))) + \varphi(c)] = \\ &= \varphi^{-1}([\varphi(a) + \varphi(b)] + \varphi(c)) = \varphi^{-1}(\varphi(a) + [\varphi(b) + \varphi(c)]) = \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(b) + \varphi(c)))) = a +_{\varphi} \varphi^{-1}(\varphi(b) + \varphi(c)) = a +_{\varphi} (b +_{\varphi} c); \end{aligned}$$

$A_3)$ Seja o vetor nulo n , tal que $\varphi(n) = (0, 0, \dots, 0)$. Temos que:

$$a +_{\varphi} n = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(n)) = \varphi^{-1}(\varphi(a) + (0, 0, \dots, 0)) = \varphi^{-1}(\varphi(a)) = a;$$

$A_4)$ Dado um vetor $a \in M^n$, seu simétrico é o vetor $-a \in M^n$ tal que $\varphi(-a) = -\varphi(a)$, pois

$$a +_{\varphi} (-a) = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(-a)) = \varphi^{-1}(\varphi(a) + (-\varphi(a))) = \varphi^{-1}((0, 0, \dots, 0)) = n;$$

$M_1)$ Sejam $a \in M^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos que:

$$(\alpha\beta) \cdot_{\varphi} a = \varphi^{-1}((\alpha\beta) \cdot \varphi(a)) = \varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(\beta a)) = \alpha \cdot_{\varphi} (\beta a);$$

$M_2)$ Temos que 1 é o elemento identidade, pois

$$1 \cdot_{\varphi} a = \varphi^{-1}(1 \cdot \varphi(a)) = \varphi^{-1}(\varphi(a)) = a;$$

$D_1)$ Sejam $a, b \in M^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot_{\varphi} (a +_{\varphi} b) &= \varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(a +_{\varphi} b)) = \varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(b)))) = \\ &= \varphi^{-1}(\alpha \cdot (\varphi(a) + \varphi(b))) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a)) + \varphi^{-1}(\alpha\varphi(b)) = \alpha \cdot_{\varphi} a + \alpha \cdot_{\varphi} b; \end{aligned}$$

$D_2)$ Sejam $a \in M^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot_{\varphi} a &= \varphi^{-1}((\alpha + \beta) \cdot \varphi(a)) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(a)) = \\ &= \varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(a)) + \varphi^{-1}(\beta \cdot \varphi(a)) = \alpha \cdot_{\varphi} a + \beta \cdot_{\varphi} a. \end{aligned}$$

Logo, M^n é um \mathbb{R} -espaço vetorial. □

Através da definição acima, pode-se observar que as operações $+_{\varphi}$ e \cdot_{φ} variam de acordo com a bijeção φ escolhida. O exemplo mais prático de bijeção entre M^n e \mathbb{R}^{2n} é dada por $\overline{\varphi} \equiv (\varphi \times \varphi \times \dots \times \varphi)$, onde φ é uma função de M em \mathbb{R}^2 dada por $\varphi([a_1, a_2]) = (a_1, a_2)$, que leva a

$$\overline{\varphi}([a_1, a_2], [a_3, a_4], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) = (\varphi \times \varphi \times \dots \times \varphi)([a_1, a_2], [a_3, a_4], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) =$$

$$= (\varphi([a_1, a_2]), \varphi([a_3, a_4]), \dots, \varphi([a_{2n-1}, a_{2n}])) = (a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}), \quad (69)$$

para todo $([a_1, a_2], [a_3, a_4], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) \in M^n$. Tomando $A = ([a_1, a_2], [a_3, a_4], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}])$ e $B = ([b_1, b_2], [b_3, b_4], \dots, [b_{2n-1}, b_{2n}])$ dois elementos de M^n e $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} A +_{\overline{\varphi}} B &= ([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) +_{\overline{\varphi}} ([b_1, b_2], \dots, [b_{2n-1}, b_{2n}]) = \\ &= ([a_1 + b_1, a_2 + b_2], \dots, [a_{2n-1} + b_{2n-1}, a_{2n} + b_{2n}]), \end{aligned} \quad (70)$$

e

$$\alpha \cdot_{\overline{\varphi}} A = \alpha \cdot_{\overline{\varphi}} ([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) = ([\alpha a_1, \alpha a_2], \dots, [\alpha a_{2n-1}, \alpha a_{2n}]). \quad (71)$$

Definindo φ dessa forma, operar intervalos e vetores de intervalos se resume então em operar o seus extremos. A partir dessas operações definidas podemos concluir que dado o espaço vetorial $(M^n, +_{\overline{\varphi}}, \cdot_{\overline{\varphi}})$, então $(I(\mathbb{R}))^n$ é um cone convexo em M^n , ou seja, para todos $a, b \in M^n$ e $\alpha, \beta > 0$, temos que $\alpha \cdot a + \beta \cdot b \in M^n$. Dessa forma, mesmo com a extensão feita em $(I(\mathbb{R}))^n$ adicionando o seu complementar para formação de M^n , as operações definidas continuam fechadas dentro desse espaço.

Dependendo da escolha da bijeção entre M^n e \mathbb{R}^{2n} , essa conclusão pode não ser garantida e $(I(\mathbb{R}))^n$ não ser um cone convexo em M^n . Por exemplo, considerando a bijeção $\varphi_1 : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi_1([a_1, a_2]) = (a_1, a_2^3), \quad (72)$$

temos então que

$$\alpha \cdot_{\varphi_1} [a_1, a_2] = [\alpha a_1, \sqrt[3]{\alpha} a_2]. \quad (73)$$

Dado o intervalo $[2, 3] \in I(\mathbb{R})$ e $\alpha = 2$, segue que

$$\alpha \cdot_{\varphi_1} [2, 3] = [4, 3\sqrt[3]{2}] \notin I(\mathbb{R}). \quad (74)$$

Logo, para essa operação e por consequência para a $\overline{\varphi}$ definida a partir dela temos que $(I(\mathbb{R}))^n$ não é um cone convexo.

Teorema 3.5. (COSTA et al., 2015) Seja $\varphi : (M^n, +_{\varphi}, \cdot_{\varphi}) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, +, \cdot)$ um isomorfismo. Então $(I(\mathbb{R}))^n$ é um cone convexo em M^n se, e somente se, $\varphi((I(\mathbb{R}))^n)$ é um cone convexo em \mathbb{R}^{2n} .

Demonstração. Sendo $\varphi : (M^n, +_{\varphi}, \cdot_{\varphi}) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, +, \cdot)$ um isomorfismo, então para cada $([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) \in M^n$, existe $((b_1, b_2), \dots, (b_{2n-1}, b_{2n})) \in \mathbb{R}^{2n}$ tais que

$$\varphi([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) = ((b_1, b_2), \dots, (b_{2n-1}, b_{2n})).$$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \geq 0$ e $([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) \in (I(\mathbb{R}))^n$, suponha que $\varphi((I(\mathbb{R}))^n)$ é um cone convexo em \mathbb{R}^{2n} . Temos então que

$$\alpha \cdot ((b_1, b_2), \dots, (b_{2n-1}, b_{2n})) = \alpha \cdot \varphi([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) \in \varphi((I(\mathbb{R}))^n).$$

Consequentemente,

$$\varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}])) = \alpha \cdot \varphi([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) \in (I(\mathbb{R}))^n.$$

Logo, $(I(\mathbb{R}))^n$ é um cone convexo em M^n .

De forma recíproca, seja $(I(\mathbb{R}))^n$ um cone convexo em M^n , $\alpha \geq 0$ e $((b_1, b_2), \dots, (b_{2n-1}, b_{2n})) \in \varphi((I(\mathbb{R}))^n)$. Existe $([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) \in (I(\mathbb{R}))^n$ tal que

$$((b_1, b_2), \dots, (b_{2n-1}, b_{2n})) = \varphi([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]).$$

Então,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\alpha((b_1, b_2), \dots, (b_{2n-1}, b_{2n}))) &= \varphi^{-1}(\alpha\varphi([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}])) = \\ &= \alpha \cdot \varphi([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) \in (I(\mathbb{R}))^n. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\alpha((b_1, b_2), \dots, (b_{2n-1}, b_{2n})) \in \varphi((I(\mathbb{R}))^n)$ e portanto $\varphi((I(\mathbb{R}))^n)$ é um cone convexo em \mathbb{R}^{2n} . \square

Vale ressaltar que essa estrutura de espaço vetorial intervalar induzida a partir do \mathbb{R}^{2n} faz dele um espaço vetorial sobre o corpo dos reais, onde a multiplicação é definida a partir de um escalar real. A estrutura necessária para desenvolvimento desse trabalho necessita de um espaço vetorial intervalar sobre o próprio M com uma multiplicação entre intervalos definida. Mais resultados a respeito disso serão apresentados no capítulo seguinte.

Seguindo esse mesmo raciocínio ao qual empregaram para induziram uma estrutura de espaço vetorial em M^n , [Costa et al. \(2015\)](#) também induziram uma forma de obter relações de ordem em M^n a partir da estrutura de \mathbb{R}^{2n} . Para isso, vamos denotar por $\leq_{\mathbb{R}^{2n}}$ uma relação de ordem parcial ou total em \mathbb{R}^{2n} . Com isso, dada uma relação de ordem parcial (total) $\leq_{\mathbb{R}^{2n}}$ em \mathbb{R}^{2n} e uma bijeção $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, denotamos por \leq_{φ} a relação binária definida em M^n que é dada por

$$A \leq_{\varphi} B \iff \varphi(A) \leq_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(B), \quad (75)$$

para todos $A, B \in M^n$.

Teorema 3.6. Seja $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ uma bijeção. Dada uma relação de ordem parcial (total) $\leq_{\mathbb{R}^{2n}}$ em \mathbb{R}^{2n} , a relação \leq_{φ} dada por (75) é uma relação de ordem parcial (total) em M^n .

Demonstração. Do fato de $\leq_{\mathbb{R}^{2n}}$ ser uma relação de ordem parcial (total) de \mathbb{R}^{2n} , obtemos:

i) (Reflexividade) Dado $a \in M^n$, temos que $a \leq_{\varphi} a$, pois

$$\varphi(a) \leq_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(a) \iff a \leq_{\varphi} a; \quad (76)$$

ii) (Antissimetria) Dados $a, b \in M^n$, temos que

$$a \leq_{\varphi} b \iff \varphi(a) \leq_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(b) \quad (77)$$

e

$$b \leq_{\varphi} a \iff \varphi(b) \leq_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(a). \quad (78)$$

De (77) e (78), obtemos

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b;$$

iii) (Transitividade) Dados $a, b, c \in M^n$, temos que:

$$a \leq_{\varphi} b \iff \varphi(a) \leq_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(b) \quad (79)$$

e

$$b \leq_{\varphi} c \iff \varphi(b) \leq_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(c). \quad (80)$$

De (79) e (80), obtemos

$$\varphi(a) \leq_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(c) \iff a \leq_{\varphi} c;$$

iv) (Dicotomia) Dados $a, b \in M^n$ e sendo $\leq_{\mathbb{R}^{2n}}$ uma relação de ordem total em \mathbb{R}^{2n} , temos que

$$\varphi(a) \leq_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(b) \text{ ou } \varphi(b) \leq_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(a) \iff a \leq_{\varphi} b \text{ ou } b \leq_{\varphi} a.$$

Logo, \leq_{φ} é uma relação de ordem parcial (total) em M^n . □

Se tomarmos a bijeção $\varphi_1 : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi_1([a_1, a_2]) = (a_1, a_2)$ e a relação de ordem usual de \mathbb{R}^2 , obtemos a relação de ordem \leq_{φ_1} definida por

$$\begin{aligned} [a_1, a_2] \leq_{\varphi_1} [b_1, b_2] &\iff \varphi_1([a_1, a_2]) \leq \varphi_1([b_1, b_2]) \\ &\iff (a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \\ &\iff a_1 \leq b_1 \text{ e } a_2 \leq b_2. \end{aligned}$$

Esta relação, que é a relação adotada para os resultados posteriores dessa dissertação, é uma relação quantitativa, onde são comparados apenas os extremos inferior e superior do intervalos. Assim como nas operações, outras relações de ordem podem ser obtidas em M^n a partir de outras bijeções. Um exemplo que possui propriedades quantitativas e qualitativas é dado através da bijeção $\varphi_2 : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi_2([a_1, a_2]) = (a_1, a_2 - a_1)$. Também considerando a relação usual de \mathbb{R}^2 , a relação obtida é dada por

$$\begin{aligned}
[a_1, a_2] \leq_{\varphi_2} [b_1, b_2] &\iff \varphi_2([a_1, a_2]) \leq \varphi_2([b_1, b_2]) \\
&\iff (a_1, a_2 - a_1) \leq (b_1, b_2 - b_1) \\
&\iff a_1 \leq b_1 \text{ e } a_2 - a_1 \leq b_2 - b_1.
\end{aligned}$$

Essa relação é quantitativa, pois compara os extremos inferiores dos intervalos, mas também qualitativa por comparar a sua amplitude. Esses dois casos apenas exemplificam que várias relações de ordem podem ser obtidas a depender da bijeção definida, estando de acordo com a intenção pretendida.

4 PMQ Fuzzy

Como já visto, o PMQ determinístico surge de um sistema de equações lineares sobredeterminado e inconsistente $Hx \cong y$, onde a matriz H de números reais e os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ tem a seguinte forma:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1} & H_{m2} & \dots & H_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad e \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad (81)$$

sendo H, y conhecidos e x a variável a ser estimada. O problema então se resume em encontrar x tal que o quadrado da norma do vetor resíduo $v = y - Hx$ seja mínimo. A versão fuzzy desse problema proposta nesse trabalho tem o intuito de adicionar à versão determinística do PMQ a inconsistência presente nas entradas H e y , com possível origem em diversos fatores (erros de modelagem, instrumentais, erros de amostragem, etc.), relacionando-o assim com a versão estocástica. Essa inconsistência é adicionada transformando os números que compõem H, x e y em números fuzzy.

Assim como fez [Diamond \(1988\)](#), um tipo específico de número fuzzy foi escolhido para compor H, x e y : os números fuzzy triangulares, dados em (63) e (64), que são representados pelo trio $(m, a, b)_T$, onde m é o valor principal do número (aquele que tem grau de pertinência 1) e a, b são os incrementos que definem o seu intervalo suporte. Para simplificar a notação, utilizaremos a partir daqui nesse trabalho a representação $X = (x, \underline{x}, \bar{x})_T$ para os números triangulares fuzzy, sendo $[\underline{x}, \bar{x}]$ o fecho do conjunto suporte de X . Uma das principais vantagens desse tipo de número é operá-lo utilizando apenas esses três valores principais sem nenhuma perda de representação e significado.

A partir disso, o PMQ passa a ter uma nova formulação onde \tilde{H} é uma matriz e \tilde{x}, \tilde{y} são vetores de números fuzzy triangulares definidos a partir de reais,

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} (H_{11}, \underline{h}_{11}, \bar{h}_{11})_T & (H_{12}, \underline{h}_{12}, \bar{h}_{12})_T & \dots & (H_{1n}, \underline{h}_{1n}, \bar{h}_{1n})_T \\ (H_{21}, \underline{h}_{21}, \bar{h}_{21})_T & (H_{22}, \underline{h}_{22}, \bar{h}_{22})_T & \dots & (H_{2n}, \underline{h}_{2n}, \bar{h}_{2n})_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (H_{m1}, \underline{h}_{m1}, \bar{h}_{m1})_T & (H_{m2}, \underline{h}_{m2}, \bar{h}_{m2})_T & \dots & (H_{mn}, \underline{h}_{mn}, \bar{h}_{mn})_T \end{bmatrix},$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} (x_1, \underline{x}_1, \bar{x}_1)_T \\ (x_2, \underline{x}_2, \bar{x}_2)_T \\ \vdots \\ (x_n, \underline{x}_n, \bar{x}_n)_T \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} (y_1, \underline{y}_1, \bar{y}_1)_T \\ (y_2, \underline{y}_2, \bar{y}_2)_T \\ \vdots \\ (y_m, \underline{y}_m, \bar{y}_m)_T \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Em muitas aplicações dos conceitos da teoria dos conjuntos fuzzy, um caminho interessante a ser seguido é olhar para os α -cortes dos conjuntos fuzzy para utilização de conceitos já desenvolvidos com a teoria clássica ou da matemática intervalar e em seguida recuperar a informação fuzzy. Como visto através do Teorema 3.3 e do Corolário 3.1, toda a informação de um número fuzzy pode ser obtida através de seus α -cortes. Com base nisso, definimos o seguinte:

Definição 4.1. Sejam \tilde{H} uma matriz e \tilde{x}, \tilde{y} vetores de números fuzzy triangulares. A solução ótima para o PMQ fuzzy dado por $\tilde{H}\tilde{x} \cong \tilde{y}$ é o vetor \hat{x} tal que para todo $\alpha \in (0, 1]$, $[\hat{x}]^\alpha$ é solução da versão intervalar do problema dada por $[\tilde{H}]^\alpha [\hat{x}]^\alpha \cong [\tilde{y}]^\alpha$.

Como já visto através das definições dadas, o conjunto suporte de um número fuzzy é a união de seus α -cortes e para o caso dos números triangulares fuzzy esses conjuntos são dados por intervalos reais. Logo, uma maneira plausível de encontrar uma solução para o PMQ fuzzy é transformá-lo em um problema intervalar e, em seguida, recuperar a informação fuzzy a partir dos conjuntos suporte. Dada a natureza desse problema, para a construção dessa versão é necessária uma estrutura de espaço vetorial intervalar normado sobre M^n , assim como temos em \mathbb{R}^{2n} no caso determinístico. Munindo então M das operações $+_M$ e \cdot_M dadas por

$$[a_1, a_2] +_M [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \quad (83)$$

e

$$[a_1, a_2] \cdot_M [b_1, b_2] = [a_1 b_1, a_2 b_2] \quad (84)$$

é facilmente verificado que $(M, +_M, \cdot_M)$ possui uma estrutura de corpo. Sendo $a, b, c \in M$ tais que $a = [a_1, a_2]$, $b = [b_1, b_2]$ e $c = [c_1, c_2]$, tem-se que

$$A_1) \quad a + b = b + a, \quad \forall a, b \in M;$$

$$\begin{aligned} a + b &= [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] = [b_1 + a_1, b_2 + a_2] = \\ &= [b_1, b_2] + [a_1, a_2] = b + a. \end{aligned}$$

$$A_2) \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \quad \forall a, b, c \in M;$$

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= [a_1, a_2] + ([b_1, b_2] + [c_1, c_2]) = [a_1, a_2] + [(b_1 + c_1), (b_2 + c_2)] = \\ &= [a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)] = [(a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2] = [(a_1 + b_1), (a_2 + b_2)] + [c_1, c_2] = \\ &= ([a_1, a_2] + [b_1, b_2]) + [c_1, c_2] = (a + b) + c. \end{aligned}$$

$$A_3) \quad \text{Seja } 0 = [0, 0] \text{ o elemento neutro da adição que satisfaz}$$

$$a + 0 = [a_1, a_2] + [0, 0] = [a_1 + 0, a_2 + 0] = [a_1, a_2] = a.$$

$A_4)$ Seja $[-a_1, -a_2]$ o inverso aditivo de $[a_1, a_2]$ que satisfaz

$$[a_1, a_2] + [-a_1, -a_2] = [a_1 - a_1, a_2 - a_2] = [0, 0].$$

$M_1)$ $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in M;$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [a_1 b_1, a_2 b_2] = [b_1 a_1, b_2 a_2] = \\ &= [b_1, b_2] \cdot [a_1, a_2] = b \cdot a. \end{aligned}$$

$M_2)$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in M;$

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot c) &= [a_1, a_2] \cdot ([b_1, b_2] \cdot [c_1, c_2]) = [a_1, a_2] \cdot [(b_1 c_1), (b_2 c_2)] = \\ &= [a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)] = [(a_1 b_1) c_1, (a_2 b_2) c_2] = [(a_1 b_1), (a_2 b_2)] \cdot [c_1, c_2] = \\ &= ([a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2]) \cdot [c_1, c_2] = (a \cdot b) \cdot c. \end{aligned}$$

$M_3)$ Seja $1 = [1, 1]$ o elemento neutro multiplicativo que satisfaz

$$a \cdot 1 = [a_1, a_2] \cdot [1, 1] = [a_1 1, a_2 1] = [a_1, a_2] = a.$$

$M_4)$ Seja $a^{-1} = [a_1^{-1}, a_2^{-1}]$ o inverso multiplicativo de $a = [a_1, a_2]$ que satisfaz

$$a \cdot a^{-1} = [a_1, a_2] \cdot [a_1^{-1}, a_2^{-1}] = [a_1 a_1^{-1}, a_2 a_2^{-1}] = [1, 1].$$

$D)$ $(a + b)c = ac + bc, \forall a, b, c \in M;$

$$\begin{aligned} (a + b)c &= ([a_1, a_2] + [b_1, b_2]) \cdot [c_1, c_2] = [(a_1 + b_1), (a_2 + b_2)] \cdot [c_1, c_2] = \\ &= [(a_1 + b_1)c_1, (a_2 + b_2)c_2] = [a_1 c_1 + b_1 c_1, a_2 c_2 + b_2 c_2] = [a_1 c_1, a_2 c_2] + [b_1 c_1, b_2 c_2] = \\ &= [a_1, a_2] \cdot [c_1, c_2] + [b_1, b_2] \cdot [c_1, c_2] = ac + bc. \end{aligned}$$

Logo, M é corpo. Generalizando essas operações para M^n , de forma que

$$\begin{aligned} ([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) +_{\overline{M}} ([b_1, b_2], \dots, [b_{2n-1}, b_{2n}]) &= \\ = ([a_1 + b_1, a_2 + b_2], \dots, [a_{2n-1} + b_{2n-1}, a_{2n} + b_{2n}]) \end{aligned} \quad (85)$$

e

$$[\alpha_1, \alpha_2] \cdot_{\overline{M}} ([b_1, b_2], \dots, [b_{2n-1}, b_{2n}]) = ([\alpha_1 b_1, \alpha_2 b_2], \dots, [\alpha_1 b_{2n-1}, \alpha_2 b_{2n}]) \quad (86)$$

chega-se ao fato de que $(M^n, +_{\overline{M}}, \cdot_{\overline{M}})$ é um M -espaço vetorial. Pois, sendo $a, b, c \in M^n$ tais que $a = ([a_1, a_2], [a_3, a_4], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}])$, $b = ([b_1, b_2], [b_3, b_4], \dots, [b_{2n-1}, b_{2n}])$ e $c = ([c_1, c_2], [c_3, c_4], \dots, [c_{2n-1}, c_{2n}])$, tem-se que

$A_1)$ $a + b = b + a, \forall a, b \in M^n;$

$$\begin{aligned} a + b &= ([a_1, a_2], [a_3, a_4], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) + ([b_1, b_2], [b_3, b_4], \dots, [b_{2n-1}, b_{2n}]) = \\ &= ([a_1 + b_1, a_2 + b_2], [a_3 + b_3, a_4 + b_4], \dots, [a_{2n-1} + b_{2n-1}, a_{2n} + b_{2n}]) = \\ &= ([b_1 + a_1, b_2 + a_2], [b_3 + a_3, b_4 + a_4], \dots, [b_{2n-1} + a_{2n-1}, b_{2n} + a_{2n}]) = \\ &= ([b_1, b_2], [b_3, b_4], \dots, [b_{2n-1}, b_{2n}]) + ([a_1, a_2], [a_3, a_4], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) = b + a. \end{aligned}$$

$A_2)$ $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in M^n;$

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= ([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) + ([b_1, b_2], \dots, [b_{2n-1}, b_{2n}]) + ([c_1, c_2], \dots, [c_{2n-1}, c_{2n}]) = \\ &= ([a_1 + b_1, a_2 + b_2], \dots, [a_{2n-1} + b_{2n-1}, a_{2n} + b_{2n}]) + ([c_1, c_2], \dots, [c_{2n-1}, c_{2n}]) = \\ &= ([a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2], \dots, [a_{2n-1} + b_{2n-1} + c_{2n-1}, a_{2n} + b_{2n} + c_{2n}]) = \\ &= ([a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)], \dots, [a_{2n-1} + (b_{2n-1} + c_{2n-1}), a_{2n} + (b_{2n} + c_{2n})]) = \\ &= ([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) + ([b_1 + c_1, b_2 + c_2], \dots, [b_{2n-1} + c_{2n-1}, b_{2n} + c_{2n}]) = \\ &= ([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) + ([b_1, b_2], \dots, [b_{2n-1}, b_{2n}]) + ([c_1, c_2], \dots, [c_{2n-1}, c_{2n}]) = a + (b + c). \end{aligned}$$

$A_3)$ Seja o vetor nulo dado por $0 = ([0, 0], \dots, [0, 0])$ tal que

$$\begin{aligned} a + 0 &= ([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) + ([0, 0], \dots, [0, 0]) = \\ &= ([a_1 + 0, a_2 + 0], \dots, [a_{2n-1} + 0, a_{2n} + 0]) = ([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) = a. \end{aligned}$$

$A_4)$ Para cada vetor $a \in M^n$ existe um vetor em M^n dado por $-a = ([-a_1, -a_2], \dots, [-a_{2n-1}, -a_{2n}])$ tal que

$$\begin{aligned} a + (-a) &= ([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) + ([-a_1, -a_2], \dots, [-a_{2n-1}, -a_{2n}]) = \\ &= ([a_1 - a_1, a_2 - a_2], \dots, [a_{2n-1} - a_{2n-1}, a_{2n} - a_{2n}]) = ([0, 0], \dots, [0, 0]). \end{aligned}$$

$M_1)$ $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a), \forall \alpha, \beta \in M \text{ e } \forall a \in M^n;$

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)a &= ([\alpha_1, \alpha_2] \cdot [\beta_1, \beta_2])([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) = \\ &= [(\alpha_1\beta_1), (\alpha_2\beta_2)]([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) = \\ &= ([(\alpha_1\beta_1)a_1, (\alpha_2\beta_2)a_2], \dots, [(\alpha_1\beta_1)a_{2n-1}, (\alpha_2\beta_2)a_{2n}]) = \\ &= ([\alpha_1(\beta_1a_1), \alpha_2(\beta_2a_2)], \dots, [\alpha_1(\beta_1a_{2n-1}), \alpha_2(\beta_2a_{2n})]) = \\ &= [\alpha_1, \alpha_2]([\beta_1a_1, \beta_2a_2], \dots, [\beta_1a_{2n-1}, \beta_2a_{2n}]) = \\ &= [\alpha_1, \alpha_2](\beta a) = \alpha(\beta a). \end{aligned}$$

M_2) Seja $1 = [1, 1]$ o elemento identidade, tal que

$$\begin{aligned} 1 \cdot a &= [1, 1]([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) = \\ &= ([1, 1] \cdot [a_1, a_2], \dots, [1, 1] \cdot [a_{2n-1}, a_{2n}]) = ([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) = a. \end{aligned}$$

D_1) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \forall \alpha \in M \text{ e } a, b \in M^n;$

$$\begin{aligned} \alpha(a + b) &= [\alpha_1, \alpha_2]([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) + ([b_1, b_2], \dots, [b_{2n-1}, b_{2n}]) = \\ &= [\alpha_1, \alpha_2]([(a_1 + b_1), (a_2 + b_2)], \dots, [(a_{2n-1} + b_{2n-1}), (a_{2n} + b_{2n})]) = \\ &= ([\alpha_1(a_1 + b_1), \alpha_2(a_2 + b_2)], \dots, [\alpha_1(a_{2n-1} + b_{2n-1}), \alpha_2(a_{2n} + b_{2n})]) = \\ &= ([\alpha_1 a_1 + \alpha_1 b_1, \alpha_2 a_2 + \alpha_2 b_2], \dots, [\alpha_1 a_{2n-1} + \alpha_1 b_{2n-1}, \alpha_2 a_{2n} + \alpha_2 b_{2n}]) = \\ &= ([\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2], \dots, [\alpha_1 a_{2n-1}, \alpha_2 a_{2n}]) + ([\alpha_1 b_1, \alpha_2 b_2], \dots, [\alpha_1 b_{2n-1}, \alpha_2 b_{2n}]) = \\ &= [\alpha_1, \alpha_2]([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) + [\alpha_1, \alpha_2]([b_1, b_2], \dots, [b_{2n-1}, b_{2n}]) = \alpha a + \alpha b. \end{aligned}$$

D_2) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \forall \alpha, \beta \in M \text{ e } \forall a \in M^n;$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)a &= ([\alpha_1, \alpha_2] + [\beta_1, \beta_2])([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) = \\ &= [(\alpha_1 + \beta_1), (\alpha_2 + \beta_2)]([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) = \\ &= ([(\alpha_1 + \beta_1)a_1, (\alpha_2 + \beta_2)a_2], \dots, [(\alpha_1 + \beta_1)a_{2n-1}, (\alpha_2 + \beta_2)a_{2n}]) = \\ &= ([\alpha_1 a_1 + \beta_1 a_1, \alpha_2 a_2 + \beta_2 a_2], \dots, [\alpha_1 a_{2n-1} + \beta_1 a_{2n-1}, \alpha_2 a_{2n} + \beta_2 a_{2n}]) = \\ &= ([\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2], \dots, [\alpha_1 a_{2n-1}, \alpha_2 a_{2n}]) + ([\beta_1 a_1, \beta_2 a_2], \dots, [\beta_1 a_{2n-1}, \beta_2 a_{2n}]) = \\ &= [\alpha_1, \alpha_2]([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) + [\beta_1, \beta_2]([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]) = \alpha a + \beta a. \end{aligned}$$

Logo, M^n é um M -espaço vetorial. Existem alguns outros exemplos de multiplicações intervalares que podem ser definidas em M . A mais usual dentro da literatura é dada da seguinte forma (MOORE et al., 2009):

$$[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}, \max \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}]. \quad (87)$$

Essa multiplicação, apesar de caracterizar bem o produto entre intervalos não determina uma estrutura de espaço vetorial sobre M^n . Se pensarmos nas propriedades distributivas, um contra-exemplo de que esse produto não as cumpri é facilmente encontrado. Vejamos:

$$\begin{aligned} [-1, 2] \cdot ([4, 6] + [-3, 1]) &= [-1, 2] \cdot [1, 7] = \\ &= [\min \{-1 \cdot 1, -1 \cdot 7, 2 \cdot 1, 2 \cdot 7\}, \max \{-1 \cdot 1, -1 \cdot 7, 2 \cdot 1, 2 \cdot 7\}] = [-7, 14] \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$[-1, 2] \cdot [4, 6] + [-1, 2] \cdot [-3, 1] =$$

$$= [\min S_1, \max S_1] + [\min S_2, \max S_2] = [-6, 12] + [-6, 3] = [-12, 15],$$

sendo $S_1 = \{-1 \cdot 4, -1 \cdot 6, 2 \cdot 4, 2 \cdot 6\}$ e $S_2 = \{(-1) \cdot (-3), -1 \cdot 1, 2 \cdot (-3), 2 \cdot 1\}$. Logo, dada a diferença entre esses resultados, temos que essa multiplicação não define uma estrutura de espaço vetorial em M^n . Por isso a conveniência da multiplicação definida nesse trabalho.

Sejam $A, B \in M^n$ tais que $A = ([\underline{a}_1, \bar{a}_1], [\underline{a}_2, \bar{a}_2], \dots, [\underline{a}_n, \bar{a}_n])$ e $B = ([\underline{b}_1, \bar{b}_1], [\underline{b}_2, \bar{b}_2], \dots, [\underline{b}_n, \bar{b}_n])$. Procurando munir M^n de um produto interno, considere a seguinte operação:

$$\langle A, B \rangle_I = \left[\sum_{i=1}^n \underline{a}_i \underline{b}_i, \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \bar{b}_i \right]. \quad (88)$$

Verificando se esta operação satisfaz as propriedades de produto interno, tem-se que:

$$P_1) \langle A + B, C \rangle_I = \langle A, C \rangle_I + \langle B, C \rangle_I, \forall A, B, C \in M^n;$$

$$\begin{aligned} \langle A + B, C \rangle_I &= \left[\sum_{i=1}^n (\underline{a}_i + \underline{b}_i) \underline{c}_i, \sum_{i=1}^n (\bar{a}_i + \bar{b}_i) \bar{c}_i \right] = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n (\underline{a}_i \underline{c}_i + \underline{b}_i \underline{c}_i), \sum_{i=1}^n (\bar{a}_i \bar{c}_i + \bar{b}_i \bar{c}_i) \right] = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \underline{a}_i \underline{c}_i + \sum_{i=1}^n \underline{b}_i \underline{c}_i, \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \bar{c}_i + \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \bar{c}_i \right] = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \underline{a}_i \underline{c}_i, \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \bar{c}_i \right] + \left[\sum_{i=1}^n \underline{b}_i \underline{c}_i, \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \bar{c}_i \right] = \\ &= \langle A, C \rangle_I + \langle B, C \rangle_I. \end{aligned}$$

$$P_2) \langle \lambda A, B \rangle_I = \lambda \langle A, B \rangle_I, \forall A, B \in M^n \text{ e } \lambda \in M;$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda A, B \rangle_I &= \left[\sum_{i=1}^n (\lambda \underline{a}_i) \underline{b}_i, \sum_{i=1}^n (\lambda \bar{a}_i) \bar{b}_i \right] = \\ &= \left[\lambda \sum_{i=1}^n \underline{a}_i \underline{b}_i, \lambda \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \bar{b}_i \right] = \\ &= [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \left[\sum_{i=1}^n \underline{a}_i \underline{b}_i, \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \bar{b}_i \right] = \\ &= \lambda \langle A, B \rangle_I. \end{aligned}$$

$$P_3) \langle A, B \rangle_I = \langle B, A \rangle_I, \forall A, B \in M^n;$$

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle_I &= \left[\sum_{i=1}^n \underline{a}_i \underline{b}_i, \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \bar{b}_i \right] = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \underline{b}_i \underline{a}_i, \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \bar{a}_i \right] = \\ &= \langle B, A \rangle_I. \end{aligned}$$

$P_4) \langle A, A \rangle_I >_{\varphi_1} [0, 0]$, se $A \neq 0$, $\forall A \in M^n$;

$$\langle A, A \rangle_I = \left[\sum_{i=1}^n \underline{a_i} \underline{a_i}, \sum_{i=1}^n \bar{a_i} \bar{a_i} \right] = \left[\sum_{i=1}^n \underline{a_i}^2, \sum_{i=1}^n \bar{a_i}^2 \right].$$

Se $A \neq 0$, então existe pelo menos um $\underline{a_i}$ ou $\bar{a_i}$ ($i = 1, \dots, n$) diferente de zero e consequentemente $\langle A, A \rangle_I = [\sum_{i=1}^n \underline{a_i}^2, \sum_{i=1}^n \bar{a_i}^2] >_{\varphi_1} [0, 0]$.

Logo, $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$ é um produto interno em M^n . A partir do produto interno intervalar define-se uma norma em M^n da seguinte forma:

$$\|A\|_I = \sqrt{\langle A, A \rangle_I}, \quad (89)$$

onde $\sqrt{[a_1, a_2]} = [\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}]$.

Faz-se necessário também definir como são aplicadas as operações básicas às matrizes intervalares:

Definição 4.2 (Soma de Matrizes). Dadas duas matrizes $A_{m \times n}, B_{m \times n}$ com entradas em M , definimos um elemento $(A + B)_{ij}$ ($0 < i \leq m$ e $0 < j \leq n$) da soma de A com B como

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = [\underline{a_{ij}}, \bar{a_{ij}}] + [\underline{b_{ij}}, \bar{b_{ij}}] = [\underline{a_{ij}} + \underline{b_{ij}}, \bar{a_{ij}} + \bar{b_{ij}}]. \quad (90)$$

Definição 4.3 (Produto de Matrizes). Dadas duas matrizes $A_{m \times n}, B_{n \times p}$ com entradas em M , a matriz produto $A \cdot B$ existe e seus elementos $(A \cdot B)_{ij}$ ($0 < i \leq m$ e $0 < j \leq p$) são dados por

$$\begin{aligned} (A \cdot B)_{ij} &= \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \\ &= [\underline{a_{i1}}, \bar{a_{i1}}] \cdot [\underline{b_{1j}}, \bar{b_{1j}}] + [\underline{a_{i2}}, \bar{a_{i2}}] \cdot [\underline{b_{2j}}, \bar{b_{2j}}] + \dots + [\underline{a_{in}}, \bar{a_{in}}] \cdot [\underline{b_{nj}}, \bar{b_{nj}}] = \\ &= [\underline{a_{i1}} \underline{b_{1j}}, \bar{a_{i1}} \bar{b_{1j}}] + [\underline{a_{i2}} \underline{b_{2j}}, \bar{a_{i2}} \bar{b_{2j}}] + \dots + [\underline{a_{in}} \underline{b_{nj}}, \bar{a_{in}} \bar{b_{nj}}] = \\ &= [\underline{a_{i1}} \underline{b_{1j}} + \underline{a_{i2}} \underline{b_{2j}} + \dots + \underline{a_{in}} \underline{b_{nj}}, \bar{a_{i1}} \bar{b_{1j}} + \bar{a_{i2}} \bar{b_{2j}} + \dots + \bar{a_{in}} \bar{b_{nj}}] = \\ &= \left[\sum_{r=1}^n \underline{a_{ir}} \underline{b_{rj}}, \sum_{r=1}^n \bar{a_{ir}} \bar{b_{rj}} \right]. \end{aligned} \quad (91)$$

Definição 4.4 (Matriz Identidade Intervalar). Seja A uma matriz quadrada de ordem n com entradas em M . Procurando definir a matriz identidade intervalar de ordem n , temos que ela deve satisfazer $A \cdot I = A$. Assim, para qualquer a_{ij} ($0 < i \leq n$ e $0 < j \leq n$) devemos ter

$$\begin{aligned} (A \cdot I)_{ij} &= a_{ij} \Rightarrow \left[\sum_{r=1}^n \underline{a_{ir}} \underline{I_{rj}}, \sum_{r=1}^n \bar{a_{ir}} \bar{I_{rj}} \right] = [\underline{a_{ij}}, \bar{a_{ij}}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\underline{a_{i1}} \underline{I_{1j}} + \dots + \underline{a_{ij}} \underline{I_{jj}} + \dots + \underline{a_{in}} \underline{I_{nj}}, \bar{a_{i1}} \bar{I_{1j}} + \dots + \bar{a_{ij}} \bar{I_{jj}} + \dots + \bar{a_{in}} \bar{I_{nj}}] = [\underline{a_{ij}}, \bar{a_{ij}}]. \end{aligned}$$

Logo, $\underline{I}_{rj} = \bar{I}_{rj} = 0$ para $r \neq j$, $\underline{I}_{jj} = \bar{I}_{jj} = 1$ e

$$I = \begin{bmatrix} [1, 1] & [0, 0] & \dots & [0, 0] \\ [0, 0] & [1, 1] & \dots & [0, 0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, 0] & [0, 0] & \dots & [1, 1] \end{bmatrix}. \quad (92)$$

Definição 4.5 (Matriz Inversa Intervalar). Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n com entradas em M . Sendo $B = A^{-1}$ a matriz inversa de A , deve então satisfazer $A \cdot B = I$. Assim,

$$\begin{aligned} \begin{cases} (A \cdot B)_{ij} = [1, 1], \text{ para } i = j, \\ (A \cdot B)_{ij} = [0, 0], \text{ para } i \neq j \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} [\sum_{r=1}^n \underline{a}_{ir} \underline{b}_{rj}, \sum_{r=1}^n \bar{a}_{ir} \bar{b}_{rj}] = [1, 1], \text{ para } i = j, \\ [\sum_{r=1}^n \underline{a}_{ir} \underline{b}_{rj}, \sum_{r=1}^n \bar{a}_{ir} \bar{b}_{rj}] = [0, 0], \text{ para } i \neq j \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \sum_{r=1}^n \underline{a}_{ir} \underline{b}_{rj} = \sum_{r=1}^n \bar{a}_{ir} \bar{b}_{rj} = 1, \text{ para } i = j, \\ \sum_{r=1}^n \underline{a}_{ir} \underline{b}_{rj} = \sum_{r=1}^n \bar{a}_{ir} \bar{b}_{rj} = 0, \text{ para } i \neq j \end{cases}. \end{aligned} \quad (93)$$

A partir de A e B , definem-se as matrizes \underline{A} , \bar{A} , \underline{B} , e \bar{B} também de ordem n , porém com entradas reais, dadas por

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} & \dots & \underline{a}_{1n} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} & \dots & \underline{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{a}_{n1} & \underline{a}_{n2} & \dots & \underline{a}_{nn} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{b}_{11} & \underline{b}_{12} & \dots & \underline{b}_{1n} \\ \underline{b}_{21} & \underline{b}_{22} & \dots & \underline{b}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{b}_{n1} & \underline{b}_{n2} & \dots & \underline{b}_{nn} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} & \dots & \bar{b}_{1n} \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} & \dots & \bar{b}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{b}_{n1} & \bar{b}_{n2} & \dots & \bar{b}_{nn} \end{bmatrix}.$$

De (93), temos que $\underline{A} \cdot \underline{B} = I$ e $\bar{A} \cdot \bar{B} = I$. Logo, se $B = A^{-1}$ então $\underline{B} = \underline{A}^{-1}$ e $\bar{B} = \bar{A}^{-1}$.

Com o suporte dessa teoria desenvolvida, a solução do PMQ fuzzy é obtida então a partir da solução de sua versão intervalar, dando origem assim a uma nova formulação do problema onde

$$H_I = \begin{bmatrix} [\underline{h}_{11}, \bar{h}_{11}] & [\underline{h}_{12}, \bar{h}_{12}] & \dots & [\underline{h}_{1n}, \bar{h}_{1n}] \\ [\underline{h}_{21}, \bar{h}_{21}] & [\underline{h}_{22}, \bar{h}_{22}] & \dots & [\underline{h}_{2n}, \bar{h}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{h}_{m1}, \bar{h}_{m1}] & [\underline{h}_{m2}, \bar{h}_{m2}] & \dots & [\underline{h}_{mn}, \bar{h}_{mn}] \end{bmatrix},$$

$$x_I = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1, \bar{x}_1] \\ [\underline{x}_2, \bar{x}_2] \\ \vdots \\ [\underline{x}_n, \bar{x}_n] \end{bmatrix} \text{ e } y_I = \begin{bmatrix} [\underline{y}_1, \bar{y}_1] \\ [\underline{y}_2, \bar{y}_2] \\ \vdots \\ [\underline{y}_m, \bar{y}_m] \end{bmatrix}. \quad (94)$$

A função custo J é agora dada por

$$J(x) = \|y_I - H_I x_I\|_I^2, \quad (95)$$

sendo $\|\cdot\|_I$ é a norma intervalar.

Essa versão do PMQ também pode ter uma formulação geométrica, representada na Figura 6, dado que o espaço vetorial M^n foi construído com propriedades muito próximas a de \mathbb{R}^{2n} . Sendo o sistema inconsistente, temos que y_I não é um elemento de $C(H_I)$, o espaço coluna de H_I , ou seja, $C(H_I) = \{b; b = H_I a \text{ para algum } a \in M^n\}$. Devemos então encontrar um vetor \hat{x}_I que torne $H_I \hat{x}_I$ o mais próximo possível de y_I , ou seja, minimizar $\|H_I \hat{x}_I - y_I\|_I^2$. O Lema 3.3 nos garante que existe e é único o $\hat{x}_I \in M^n$, tal que $y_I - H_I \hat{x}_I \in C(H_I)^\perp$. Assim,

$$H_I \hat{x}_I = \text{proj}_{C(H_I)} y_I. \quad (96)$$

Através do Lema 3.4, podemos concluir que

$$\|H_I \hat{x}_I - y_I\|_I < \|H_I x_I - y_I\|_I, \quad \forall x \in M^n \text{ e } x_I \neq \hat{x}_I. \quad (97)$$

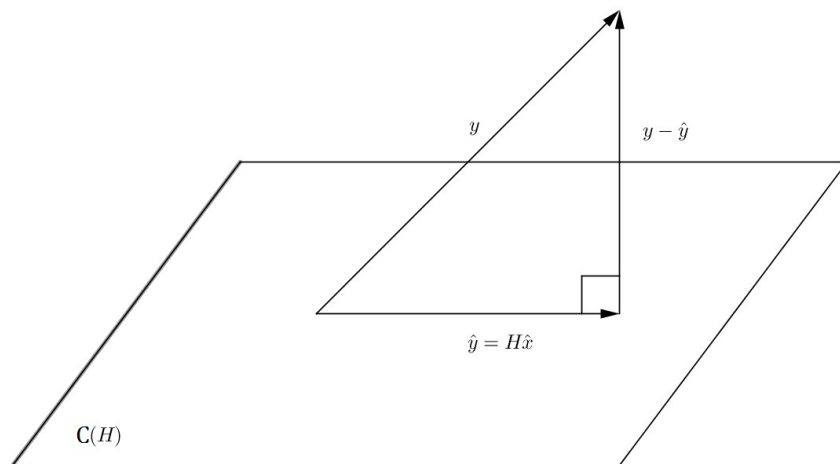


Figura 6 – Formulação geométrica do PMQ.

Temos também que $C(H_I)^\perp = N(H_I^*)$ (COELHO, 2005), sendo $N(H_I^*)$ o espaço nulo da transposta de H_I . De (96), obtemos

$$\begin{aligned}
H_I \hat{x}_I &= \text{proj}_{C(H_I)} y \Rightarrow \\
\Rightarrow H_I \hat{x}_I - y_I &\in C(H_I)^\perp \Rightarrow \\
\Rightarrow H_I \hat{x}_I - y_I &\in N(H_I^*) \Rightarrow \\
\Rightarrow H_I^* (H_I \hat{x}_I - y_I) &= 0.
\end{aligned}$$

Logo, o vetor ótimo \hat{x}_I procurado é o vetor que satisfaz

$$H_I^* H_I \hat{x}_I = H_I^* y_I. \quad (98)$$

Temos então que a solução para o PMQ intervalar segue o mesmo formato da solução determinística, fato já esperado devido a forma como foi construído o espaço vetorial intervalar, porém trazendo as vantagens desse tipo de variável. O \hat{x}_I ótimo então que minimiza o quadrado da norma do vetor resíduo $y_I - H_I x_I$, sendo H_I matriz intervalar e x_I, y_I vetores intervalares, é dado por:

$$\hat{x}_I = (H_I^* H_I)^{-1} H_I^* y_I, \quad (99)$$

quando H_I tem posto coluna completo n .

Sintetizando o método desenvolvido para solução do PMQ fuzzy, inicialmente temos a formulação clássica do PMQ que é *fuzzyficada* transformando os números que compõem H, x e y em números fuzzy triangulares. A partir disso é obtida a versão intervalar do problema transformando as entradas de \tilde{H}, \tilde{x} e \tilde{y} em intervalos obtidos dos conjuntos suportes dos números fuzzy. Através de (99) é encontrada a solução para o PMQ intervalar para então retornar esse resultado para o universo fuzzy. O tratamento final da solução, transformando-o ou não em constantes do tipo clássicas (reais) já está relacionado com a origem do problema, possível aplicação e assim o tipo de solução que se procura.

Para exemplificar, tomemos a matriz \tilde{H} e os vetores \tilde{x}, \tilde{y} já compostos por números fuzzy triangulares do tipo $F = (f, \underline{x}, \bar{x})_T$, onde f é o valor principal do número e $[\underline{f}, \bar{f}]$ o fecho de seu intervalo suporte:

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= \begin{bmatrix} (2, 1, 3)_T & (6.5, 6, 7)_T \\ (3, 2, 4)_T & (-5.5, -6, -5)_T \\ (5.5, 5, 6)_T & (1.5, 1, 2)_T \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} (x_1, \underline{x}_1, \bar{x}_1)_T \\ (x_2, \underline{x}_2, \bar{x}_2)_T \end{bmatrix} e \\
\tilde{y} &= \begin{bmatrix} (-4, -5, -3)_T \\ (8.5, 8, 9)_T \\ (3, 2, 4)_T \end{bmatrix} \quad (100)
\end{aligned}$$

Tomando os fechos dos conjuntos suportes dos números fuzzy e transformando a matriz \tilde{H} e os vetores \tilde{x}, \tilde{y} em intervalares, obtemos:

$$H_I = \begin{bmatrix} [1, 3] & [6, 7] \\ [2, 4] & [-6, -5] \\ [5, 6] & [1, 2] \end{bmatrix}, \quad x_I = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1, \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2, \overline{x}_2] \end{bmatrix} \quad e \quad y_I = \begin{bmatrix} [-5, -3] \\ [8, 9] \\ [2, 4] \end{bmatrix}. \quad (101)$$

A partir de (99), temos então que o vetor \hat{x}_I ótimo procurado é dado por

$$\hat{x}_I = (H_I^* H_I)^{-1} H_I^* y_I.$$

Utilizando as operações com matrizes intervalares já definidas, chegamos a:

$$\hat{x}_I = \begin{bmatrix} [0.6656, 1.0312] \\ [-1.0320, -0.9154] \end{bmatrix}. \quad (102)$$

E para esta solução, o funcional $J(x)$, dado por

$$J(x) = \|y_I - H_I x_I\|_I^2$$

é igual a $J(x) = [0.3146, 0.5920]$. Retornando a solução para a versão fuzzy do problema, tomamos os intervalos que compõem o vetor intervalar \hat{x}_I encontrado como os fechos dos conjuntos suportes da solução fuzzy, com o ponto médio dos intervalos como valor principal dos números triangulares fuzzy, pois a partir dos testes numéricos apresentados no próximo capítulo chega-se ao fato de que a solução clássica se aproxima muito dos pontos médios da solução intervalar, assim:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} (0.8484, 0.6656, 1.0312)_T \\ (-0.9737, -1.0320, -0.9154)_T \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Temos então uma solução ótima para o PMQ onde em cada componente do vetor solução um valor principal pode ser apontado, os pontos médios dos intervalos, porém cada um deles possui uma margem de incerteza para outros possíveis valores. Dentro dessa margem, cada valor possui um grau de pertinência diferente e a forma como esses dados são interpretados dependem da natureza da origem do problema. A vantagem encontrada aqui é adequar esse resultado a valores esperados obtidos de conhecimentos a priori do problema.

Essa versão do PMQ desenvolvida se destaca então por além de carregar essas possíveis incertezas contidas no problema, apresenta uma interpretação para elas em sua solução. Dessa forma, as informações que se possui no início da formulação do problema não são perdidas durante o seu desenvolvimento, obtendo-se assim uma solução mais completa para o problema.

5 Implementação e Testes

5.1 Testes Numéricos

Apesar da validação matemática encontrada para a solução do PMQ Fuzzy, é preciso também investigar como se comporta esse resultado para diferentes aplicações com valores numéricos. Para testes numéricos da solução encontrada para esta versão do PMQ desenvolvida foi implementado um algoritmo na linguagem de programação C, onde a partir das entradas do problema (a matriz H e o vetor y) a solução é obtida. O algoritmo segue o modelo descrito abaixo:

Algoritmo 1: PMQ Fuzzy

Entrada: H, y
Saída: \hat{x}

```

1 início
2   Entrada dos valores que compõem  $H, y$ 
3   Transformação dos números fuzzy para intervalos
4   Cálculo da solução do PMQ Intervalar:  $\hat{x} = (H^*H)^{-1}H^*y$ 
5   Volta da solução para números fuzzy triangulares
6 fim
7 retorna  $\hat{x}$  fuzzy

```

O código do programa implementado foi escrito com o software Dev-C++ 5.6.1. O programa foi executado num computador com processador Intel Core i3-3217-U CPU 1.8 GHz, 4 GB de memória RAM e HD de 500 GB com um SSD de 30 GB utilizando a tecnologia Intel® Rapid. O sistema operacional utilizado foi o Windows 8.1 64 bits. O tempo de execução do programa foi em média menor do que 1 s para as ordens de matrizes testadas e apresentadas nesse trabalho.

Uma forma padrão de fuzzyficar os números e transformá-los em triangulares fuzzy não foi definida dentro do algoritmo e também na proposta desse trabalho, pois essa já é uma questão singular de cada problema de acordo com sua origem. A seguir temos exemplos de diferentes soluções encontradas através do programa implementado para verificação da funcionalidade dessa versão do PMQ desenvolvida.

Seja $Hx \cong y$ um sistema de equações sobredeterminado e inconsistente, onde

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 9 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} e y = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad (104)$$

A solução do PMQ determinístico, que consiste em minimizar o quadrado da norma do vetor resíduo $v = y - Hx$, aponta como vetor ótimo para este sistema o seguinte vetor:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.240290 \\ 0.150707 \\ 0.733158 \\ -0.307831 \end{bmatrix}. \quad (105)$$

O vetor $H\hat{x}$ obtido a partir dessa solução é dado por:

$$H\hat{x} = \begin{bmatrix} 5.626648 \\ 2.004396 \\ 8.274039 \\ 5.477058 \\ 5.389696 \end{bmatrix} \quad (106)$$

e o quadrado da norma do vetor resíduo minimizado tem valor $J(x) = 3.816479$.

Tomando uma versão fuzzy desse problema, os valores de entrada e as variáveis serão transformadas em números fuzzy triangulares representados por $(a, \underline{a}, \bar{a})_T$, onde a é o valor principal (que tem grau de pertinência 1) e $[\underline{a}, \bar{a}]$ é o fecho do conjunto suporte do número. Para os valores de entrada o intervalo suporte será formado com um erro de 1 para esquerda e para a direita. O problema então passa a ter a seguinte formulação:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} (2, 1, 3)_T & (7, 6, 8)_T & (6, 5, 7)_T & (1, 0, 2)_T \\ (3, 2, 4)_T & (9, 8, 10)_T & (2, 1, 3)_T & (5, 4, 6)_T \\ (7, 6, 8)_T & (2, 1, 3)_T & (9, 8, 10)_T & (1, 0, 2)_T \\ (1, 0, 2)_T & (4, 3, 5)_T & (8, 7, 9)_T & (4, 3, 5)_T \\ (6, 5, 7)_T & (8, 7, 9)_T & (5, 4, 6)_T & (3, 2, 4)_T \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} (x_1, \underline{x}_1, \bar{x}_1)_T \\ (x_2, \underline{x}_2, \bar{x}_2)_T \\ (x_3, \underline{x}_3, \bar{x}_3)_T \\ (x_4, \underline{x}_4, \bar{x}_4)_T \end{bmatrix} e$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} (6, 5, 7)_T \\ (3, 2, 4)_T \\ (9, 8, 10)_T \\ (5, 4, 6)_T \\ (4, 3, 5)_T \end{bmatrix}. \quad (107)$$

Para a versão intervalar, como já definido, tomamos os conjuntos suportes dos números fuzzy triangulares para compor H , x e y . Encontrando a solução intervalar dada por 99, obtemos:

$$\hat{x}_I = \begin{bmatrix} [0.231083, 0.246429] \\ [0.142279, 0.155167] \\ [0.716945, 0.742745] \\ [-0.332553, -0.291306] \end{bmatrix} \quad (108)$$

e o funcional intervalar minimizado tem valor $J(x) = [3.710295, 3.885572]$. Usando o resultado do PMQ clássico como forma de validação, temos a seguinte comparação na tabela abaixo:

Tabela 1 – Comparação entre as versões do PMQ (Caso 1).

	$\underline{\hat{x}}$	$\hat{x}_{classico}$	$\overline{\hat{x}}$
\hat{x}_1	0.231083	0.240290	0.246429
\hat{x}_2	0.142279	0.150707	0.155167
\hat{x}_3	0.716945	0.733158	0.742745
\hat{x}_4	-0.332553	-0.307831	-0.291306

Podemos observar que todos os valores do \hat{x} clássico estão nos intervalos suporte do \hat{x} fuzzy, o que mostra um comportamento adequado para o solução dessa nova versão do PMQ nesse caso analisado. Comparando os funcionais $J(x)$ minimizados, obtemos o seguinte:

Tabela 2 – Comparação entre os funcionais (Caso 1).

$\underline{J(x)}$	Clássico	$\overline{J(x)}$
3.710295	3.816479	3.885572

O que reafirma o comportamento adequado dessa solução já verificado na comparação anterior. Esse intervalo para o funcional $J(x)$ também demonstra a vantagem dessa solução em relação ao caso clássico. O valor mínimo para o funcional agora está contido num intervalo, sendo seu extremo direito menor que o valor do funcional minimizado no caso determinístico. Isso demonstra então que de acordo com os valores da formulação intervalar onde os possíveis erros das variáveis de entrada já estão embutidos, uma formulação clássica com menor erro do que a definida pode ser extraída.

Partindo do mesmo sistema sobredeterminado e inconsistente, agora formamos um sistema com os números fuzzy triangulares onde as entradas da versão clássica

ainda são os valores principais dos números fuzzy. Porém, os erros adicionados para formar os intervalos suportes não são necessariamente iguais, respeitando somente a regra de que o erro para a esquerda é igual ao erro para a direita. O sistema passa então a ter a seguinte formação:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} (2, 1, 3)_T & (7, 5, 9)_T & (6, 5, 7)_T & (1, 0.5, 1.5)_T \\ (3, 2.5, 3.5)_T & (9, 8, 10)_T & (2, 1, 3)_T & (5, 4.5, 5.5)_T \\ (7, 5, 9)_T & (2, 1, 3)_T & (9, 8.5, 9.5)_T & (1, 0, 2)_T \\ (1, 0, 2)_T & (4, 3, 5)_T & (8, 7.5, 8.5)_T & (4, 3, 5)_T \\ (6, 5.5, 6.5)_T & (8, 7, 9)_T & (5, 3, 7)_T & (3, 2, 4)_T \end{bmatrix}, e \tilde{y} = \begin{bmatrix} (6, 5, 7)_T \\ (3, 1, 5)_T \\ (9, 8, 10)_T \\ (5, 4.5, 5.5)_T \\ (4, 3.5, 4.5)_T \end{bmatrix}. \quad (109)$$

A solução intervalar encontrada para esse caso é dada por:

$$\hat{x}_I = \begin{bmatrix} [0.209221, 0.339760] \\ [0.146210, 0.223059] \\ [0.603771, 0.761166] \\ [-0.537293, -0.168605] \end{bmatrix} \quad (110)$$

e o funcional intervalar minimizado tem valor $J(x) = [0.457153, 10.521491]$. Comparando a solução dessa formulação com a versão clássica do PMQ, obtemos o seguinte:

Tabela 3 – Comparação entre as versões do PMQ (Caso 2).

	\hat{x}	$\hat{x}_{classico}$	$\bar{\hat{x}}$
\hat{x}_1	0.209221	0.240290	0.339760
\hat{x}_2	0.146210	0.150707	0.223059
\hat{x}_3	0.603771	0.733158	0.761166
\hat{x}_4	-0.537293	-0.307831	-0.1686056

E mais uma vez um comportamento adequado para a solução é observado onde todos os intervalos suporte da solução fuzzy contém os valores da solução clássica. De forma análoga, com os funcionais $J(x)$ temos o mesmo comportamento:

O valor mínimo desse novo funcional mostra mais uma vez como ajustes nos valores de entrada do problema podem oferecer melhores soluções e como isso está embutido nessa nova formulação proposta nesse trabalho.

Tabela 4 – Comparação entre os funcionais (Caso 2).

$\underline{J(x)}$	Clássico	$\overline{J(x)}$
0.457153	3.816479	10.521491

A partir desses dois casos podemos sugerir que quando os incrementos adicionados para formação dos números fuzzy triangulares são iguais tanto para esquerda quanto para a direita, a solução do PMQ apresenta um comportamento dentro do esperado e válido. Comparando a solução dos dois casos analisados, obtemos o seguinte:

Tabela 5 – Comparação entre os Casos 1 e 2.

	$\underline{\hat{x}}_1$	$\overline{\hat{x}}_1$	$\underline{\hat{x}}_2$	$\overline{\hat{x}}_2$	$\underline{\hat{x}}_3$	$\overline{\hat{x}}_3$	$\underline{\hat{x}}_4$	$\overline{\hat{x}}_4$
Caso 1	0.2311	0.2464	0.1423	0.1552	0.7169	0.7427	-0.3326	-0.2913
Caso 2	0.2092	0.3397	0.1462	0.2231	0.6038	0.7612	-0.5373	-0.1686

Como já citado, nos dois casos os intervalos suportes das soluções contém os valores da solução clássica. A diferença se dá no diâmetro dos intervalos, ou seja, no valor da diferença $\overline{\hat{x}}_i - \underline{\hat{x}}_i$. Os intervalos do segundo caso possuem diâmetro maior que os do primeiro e a diferença da formação dos dois casos se dá justamente nisso, nos diâmetros dos valores de entrada do problema.

Analisando o comportamento da solução de mais um caso, tomemos agora uma nova formulação para o PMQ fuzzy partindo do mesmo problema clássico já apresentado. Nesse caso, os incrementos usados para definição dos intervalos suportes dos números triangulares fuzzy são totalmente aleatórios possuindo nenhuma regra ou restrição. Os valores de entrada são então os seguintes:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} (2, 1, 4)_T & (7, 5.5, 9)_T & (6, 5.5, 7)_T & (1, -0.5, 1.5)_T \\ (3, 2, 3.5)_T & (9, 8, 11)_T & (2, 1.5, 4)_T & (5, 4.5, 6)_T \\ (7, 6, 9)_T & (2, -1, 3)_T & (9, 8.5, 9.5)_T & (1, -0.5, 2)_T \\ (1, -1, 2.5)_T & (4, 2, 5)_T & (8, 7.5, 9.5)_T & (4, 3, 5.5)_T \\ (6, 5, 6.5)_T & (8, 7.5, 9)_T & (5, 4, 7)_T & (3, 2.5, 4)_T \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{y} = \begin{bmatrix} (6, 5.5, 7)_T \\ (3, -0.5, 4)_T \\ (9, 7, 10)_T \\ (5, 4, 5.5)_T \\ (4, 2.5, 4.5)_T \end{bmatrix}. \quad (111)$$

Para este caso, a solução intervalar obtida é dada por:

$$\hat{x}_I = \begin{bmatrix} [0.025430, 0.361302] \\ [0.112136, 0.149821] \\ [0.663898, 0.775302] \\ [-0.677763, -0.377118] \end{bmatrix} \quad (112)$$

e o funcional minimizado por $J(x) = [0.053784, 6.208047]$. Analisando como essa solução se comporta em relação a solução clássica, obtemos o seguinte:

Tabela 6 – Comparação entre as versões do PMQ (Caso 3).

	$\underline{\hat{x}}$	$\hat{x}_{classico}$	$\overline{\hat{x}}$
\hat{x}_1	0.025430	0.240290	0.361302
\hat{x}_2	0.112136	0.150707	0.149821
\hat{x}_3	0.663898	0.733158	0.775302
\hat{x}_4	-0.677763	-0.307831	-0.377118

Nesse caso, podemos observar que dois dos quatro valores que compõem a solução clássica não estão contidos nos intervalos suporte da solução fuzzy. Ressaltando a diferença da formação das entradas nesse caso em relação aos dois anteriores, os intervalos suporte possuem incrementos adicionados ao valor principal aleatórios.

Para procurar uma possível causa para esse comportamento, vamos analisar o desenvolvimento da solução a partir de cada operação efetuada. A obtenção do vetor solução intervalar \hat{x} passa inicialmente pela formação da transposta de H_I e multiplicação da mesma pelo vetor y_I e pela matriz H_I . Em seguida temos a obtenção da inversa desse produto de H_I por sua transposta e o último produto entre essa inversa e $H_I^* y_I$. O vetor $H_I^* y_I$ obtido para esse caso é o seguinte:

$$H_I^* y_I = \begin{bmatrix} [53.5, 175] \\ [43.75, 205] \\ [127.8, 243.75] \\ [9, 102.75] \end{bmatrix} \quad (113)$$

Sendo o resultado do produto de vetores com a maioria dos valores positivos, esse

resultado está dentro do esperado para esse vetor. A matriz $H_I^* H_I$ obtida é a seguinte:

$$H_I^* H_I = \begin{bmatrix} [67, 157.75] & [51, 172.5] & [72, 196.75] & [15, 84.75] \\ [51, 172.5] & [155.5, 317] & [78.75, 246] & [58.5, 149] \\ [72, 196.75] & [78.75, 246] & [177, 294.5] & [32.25, 133.75] \\ [15, 84.75] & [58.5, 149] & [32.25, 133.75] & [36, 88.5] \end{bmatrix} \quad (114)$$

Seguindo o mesmo raciocínio anterior, temos mais uma vez um resultado para essa operação dentro do esperado.

A operação mais complexa dentre essas necessárias para obtenção de \hat{x} é a inversão da matriz $H_I^* H_I$, pois é sabido que o cálculo da inversa de uma matriz é feito a partir de várias etapas e a ordem da quantidade de operações necessárias aumenta de acordo com a ordem da matriz. Para este caso, a inversa obtida foi:

$$(H_I^* H_I)^{-1} = \begin{bmatrix} [0.030, 0.045] & [-0.008, -0.010] & [-0.010, -0.031] & [0.011, 0.022] \\ [-0.008, -0.011] & [0.021, 0.019] & [-0.001, 0.003] & [-0.029, -0.027] \\ [-0.011, -0.031] & [-0.001, 0.004] & [0.011, 0.033] & [-0.005, -0.026] \\ [0.011, 0.022] & [-0.029, -0.027] & [-0.005, -0.026] & [0.076, 0.076] \end{bmatrix}.$$

Nessa etapa o resultado parcial obtido já foge do esperado em partes devido a aparição de intervalos impróprios, ou seja, aqueles onde o limite inferior é maior que o limite superior. Um comportamento esperado dentro do cálculo da inversa de uma matriz, mas que deve ser destacado é a aparição de diversos valores negativos nos intervalos. A partir disso, o comportamento diferente da solução desse caso pode ser explicado pela multiplicação entre intervalos definida. Relembrando, temos que dados dois intervalos $a, b \in M$ tais que $a = [\underline{a}, \bar{a}]$ e $b = [\underline{b}, \bar{b}]$, o seu produto é dado por:

$$a \cdot b = [\underline{a}, \bar{a}] \cdot [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} \cdot \underline{b}, \bar{b} \cdot \bar{b}].$$

Tomando como exemplo os intervalos $a = [-1, 1]$ e $b = [-6, 4]$, obtemos o seguinte:

$$a \cdot b = [-1, 1] \cdot [-6, 4] = [6, -4], \quad (115)$$

ou seja, um intervalo impróprio. Vale ressaltar que esse tipo de resultado não é considerado inválido nesse trabalho devido a forma como foi definido o espaço vetorial intervalar M^n . Essa definição de produto intervalar se mostrou conveniente para este

trabalho devido a estrutura de espaço vetorial normado que devia ser construído, o que poderia não ser possível ou grandemente dificultado se outras definições fossem tomadas. Porém, implicações como a deste caso analisado acontecem devido ao fato desse produto não representar em alguns casos o mesmo significado do produto entre números reais.

Podemos concluir então a partir desses casos analisados que a forma como o problema é montado inicialmente com a definição dos números triangulares fuzzy e seus conjuntos suporte influenciam diretamente no comportamento da solução obtida. Com isso, esse modelo se mostra adequado para casos onde os erros acrescentados aos valores de entrada não são totalmente aleatórios, exigindo assim um controle inicial dos mesmos.

Erros adicionados de maneira uniforme oferecem um controle adequado da solução. Isso pode ser explicado pela maneira como se definiu a solução do PMQ fuzzy, ou seja, a partir de α -cortes. Pois, um mesmo α -corte aplicado a todo o sistema implica numa igualdade nos erros dos intervalos em relação ao valor do problema original determinístico. Logo, essa ideia de uniformidade deve estar presente desde a formação inicial do problema com a transformação das variáveis reais em fuzzy.

5.2 Estimação da frequência de sinais sinusoidais

A estimação da frequência de sinais sinusoidais com ruídos é um problema muito frequente no processamento de sinais devido as diversas aplicações que possui, tais como: a análise da fala, engenharia biomédica, comunicações, entre outras (CHAN et al., 2011). Existem na literatura diversos algoritmos desenvolvidos para a estimação de frequências, com diferentes abordagens. Entre eles, as abordagens baseadas na propriedade da predição linear são as mais comuns (LAVOIE et al., 1981; SO et al., 2005).

Dadas M sinusoidais de amplitudes A_i , fase ϕ_i e frequências ω_i , $i = 1, \dots, M$. A soma dessas senoides, em um instante n , é dada por

$$S(n) = \sum_{i=1}^M A_i \sin[\omega_i n + \phi_i]. \quad (116)$$

A partir da predição linear, podemos afirmar que existe e é único o vetor de dimensão $2M$

$$a^T = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{2M}] \quad (117)$$

tal que para qualquer n

$$S(n) = \sum_{l=1}^{2M} a_l \sum_{i=1}^M A_i \sin[\omega_i(n-l) + \phi_i] = \sum_{l=1}^{2M} a_l S(n-l). \quad (118)$$

Expandindo a função seno em (118) e reordenando os somatórios, obtemos

$$S(n) = \sum_{i=1}^M A_i \sin(\omega_i n + \phi_i) \sum_{l=1}^{2M} a_l \cos \omega_i l - \sum_{i=1}^M A_i \cos(\omega_i n + \phi_i) \sum_{l=1}^{2M} a_l \sin \omega_i l. \quad (119)$$

Como (116) e (119) são iguais para todos A_i , ϕ_i e ω_i , segue então que para $i = 1, \dots, M$

$$\sum_{l=1}^{2M} a_l \cos \omega_i l = 1 \quad (120)$$

e

$$\sum_{l=1}^{2M} a_l \sin \omega_i l = 0 \quad (121)$$

que podem ser colocados na forma complexa como

$$\sum_{l=1}^{2M} a_l e^{-j\omega_i l} - 1 = 0 \quad (122)$$

e

$$\sum_{l=1}^{2M} a_l e^{j\omega_i l} - 1 = 0. \quad (123)$$

A estimação das frequências se dá então estimando os valores de a_l inicialmente, para então encontrar as raízes ($e^{\pm j\omega_i}$) do polinômio

$$\sum_{l=1}^{2M} a_l \lambda^l = 1, \quad (124)$$

com $\lambda = e^{j\omega_i}$.

Com a adição de ruídos em (116), a representação do sinal passa a ser

$$x_n = S(n) + \psi_n, \quad (125)$$

onde ψ_n é um ruído branco gaussiano aditivo. Substituindo (118) em (125), obtemos

$$x_n = \sum_{l=1}^{2M} a_l x_{n-1} - \sum_{l=1}^{2M} a_l \psi_{n-1} + \psi_n. \quad (126)$$

Dadas N medidas de x_n , com $N > 2M$, a equação matricial para estimação do parâmetro a , a partir de (126), é dada por

$$y = Xa + E, \quad (127)$$

onde

$$y = \begin{bmatrix} x_{2M+1} \\ x_{2M+2} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{2M} & \dots & x_1 \\ x_{2M+1} & \dots & x_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N-1} & \dots & x_{N-2M} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -\sum_{l=1}^{2M} a_l \psi_{2M+1-l} + \psi_{2M+1} \\ \vdots \\ -\sum_{l=1}^{2M} a_l \psi_{N-l} + \psi_N \end{bmatrix} \quad (128)$$

justificando então uma solução do PMQ para esse problema de estimação.

Simulando a estimação através da solução do PMQ Fuzzy, tomamos o caso de uma senoide ($M=1$), com amplitude $A = 3$, frequência $\omega = 1$ e fase $\phi = \pi$. A razão entre o sinal e o ruído (SNR) foi de 5 dB. A construção da versão fuzzy do problema foi formada tomando os valores da formação clássica do problema como os valores centrais dos números fuzzy em X e y . Os intervalos suporte foram formados com a soma e subtração de valores aleatórios para cada um dos valores centrais, porém seguindo uma distribuição normal, assim como o ruído que foi adicionado ao sinal. Seguiu-se também a condição de somar e subtrair o mesmo valor para cada número fuzzy formado, ou seja, os extremos de cada número fuzzy triangular se mantinham equidistantes ao valor principal.

Os testes se iniciaram com o valor de $N = 5$. A solução clássica para cada valor de N era obtida tomando-se o ponto médio do intervalo suporte da solução fuzzy. O erro relativo de tolerância definido foi de 0,01. Para essa simulação chegou-se então a estimação da frequência com o valor de $N = 88$. Nesse ponto, a matriz X era de ordem 85×2 e o vetor y consequentemente de ordem 85×1 . O vetor a intervalar estimado foi o seguinte

$$a = \begin{bmatrix} [1.0370, 1.0922] \\ [-0.8277, -0.7671] \end{bmatrix} \quad (129)$$

Com isso, o valor da frequência estimada foi $\hat{\omega} = 1.009453$.

Numa outra simulação, foi tomado mais uma vez um sinal com uma sinusoidal, agora com amplitude $A = 5$, frequência $\omega = \pi/2$ e fase $\phi = 3\pi/2$. O mesmo valor de SNR = 5dB foi tomado. A formação da versão fuzzy do problema a partir da clássica seguiu o mesmo formato da simulação anterior. Nessa simulação, o erro mínimo tolerado (0,01) foi atingido para o valor de $N = 16$. A matriz X e o vetor y tinham então ordens 13×2 e 13×1 respectivamente. O vetor a estimado foi

$$a = \begin{bmatrix} [-0.0949, 0.1005] \\ [-0.8473, -0.8379] \end{bmatrix} \quad (130)$$

e a estimação da frequência obtida foi $\hat{\omega} = 1.569391$. Estes dois casos exemplificam então que boas estimações para a frequência de um sinal ruidoso podem ser obtidas a partir do PMQ fuzzy aplicado a predição linear.

6 Conclusão

Muito do que é desenvolvido dentro da teoria dos conjuntos fuzzy parte de uma reformulação de problemas já resolvidos com a matemática dita clássica. E isso acaba por ser a criação de toda uma nova matemática onde a mudança de princípios básicos, tal como a definição de um conjunto, implica numa mudança total de campos e teorias. Esse trabalho possui esse caráter de ineditismo e inovação, pois dentro da literatura específica não se encontra uma formulação desse tipo para o problema tratado aqui. Devido a isso, muito da base teórica teve que ser desenvolvida para fundamentar a construção dessa versão do PMQ. E a partir disso, há toda uma cadeia de teorias e problemas que podem ser desenvolvidos partindo do que foi feito nesse trabalho. Pois mesmo o PMQ sendo um problema já estudado a muitos anos, acaba por se mostrar como uma área quase que inesgotável de pesquisa.

A versão do PMQ desenvolvida nesse trabalho se mostra muito útil para casos onde incertezas estão contidas nos valores de entrada do problema. Devido a maneabilidade do número fuzzy, o pesquisador que necessitar estimar variáveis em problemas desse tipo terá em suas mãos um controle maior sobre a formulação do problema assim como da solução encontrada. A utilização de variáveis fuzzy permite que as informações referentes a possíveis incertezas contidas no problema sejam carregadas durante o desenvolvimento do problema e possam ser interpretadas a partir da solução. Essa é uma das principais vantagens de se trabalhar com esse tipo de variável, a formulação e solução do problema se adaptam as suas características de acordo com as necessidades e vontade do pesquisador.

Os próximos passos a serem tomados serão o desenvolvimento de um modelo mais robusto, partindo da definição de uma outra multiplicação intervalar. Desse forma, o modelo desenvolvido poderá ser aplicado a uma variedade maior de casos, com um controle menos restrito dos valores de entrada do problema. Também a formulação e solução de novas versões dos outros casos de PMQ determinístico, o problema dos mínimos quadrados ponderados e o problema dos mínimos quadrados regularizados, que tiveram suas versões clássicas trazidas nas preliminares do trabalho. Para o desenvolvimento dessas versões surge a necessidade de definição de uma derivada intervalar, onde a partir dela esses problemas poderão ser tratados de forma semelhante a versão clássica, porém mais uma vez com a adição dos ganhos relacionados a utilização de variáveis fuzzy.

Referências

- BARROS, L.; BASSANEZI, R. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. Campinas: UNICAMP/IMECC, 2006. 392 p.
- CHALCO-CANO, Y.; RUFIÁN-LIZANA, a.; ROMÁN-FLORES, H.; JIMÉNEZ-GAMERO, M. Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier, v. 219, p. 49–67, 2013.
- CHAN, F. K. W.; SO, H. C.; LAU, W. H.; CHAN, C. F. Structured total least squares approach for efficient frequency estimation. **Signal Processing**, v. 91, n. 4, p. 1043–1047, 2011. ISSN 01651684.
- COELHO, F. U. **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo: EDUSP, 2005.
- COSTA, T.; CHALCO-CANO, Y.; LODWICK, W.; SILVA, G. Generalized interval vector spaces and interval optimization. **Information Sciences**, Elsevier Inc., v. 311, p. 74–85, 2015.
- DIAMOND, P. Fuzzy Least Squares. **Information Sciences**, v. 46, p. 141–157, 1988.
- DIAMOND, P. Higher Level Fuzzy Numbers Arising From Fuzzy Regression Models. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 36, p. 265–275, 1990.
- DUBOIS, D.; PRADÉ, H. **Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications**. Orlando: Academic Press, 1997.
- DUBOIS, D.; PRADÉ, H. (Ed.). **Fundamentals of Fuzzy Sets**. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2000.
- FATEH, M. M.; FATEH, S. Fine-tuning fuzzy control of robots. **Journal of Intelligent & Fuzzy Systems**, v. 25, p. 977–987, 2013.
- HUANG, S. R.; LIN, C. Y.; WU, C. Y.; WU, C. C.; CHU, C. Y.; CHEN, H. T.; WANG, S. H. Fuzzy control of a bio-hydrogen internal combustion engine generating system. **International Journal of Hydrogen Energy**, Elsevier Ltd, v. 36, n. 14, p. 8774–8778, 2011.
- HUFFEL, S. V.; VANDEWALLE, J. **The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis**. Philadelphia: SIAM, 1991. 300 p.
- JIANG, T.; CHENG, X.; LING, S. An algebraic technique for total least squares problem in quaternionic quantum theory. **Applied Mathematics Letters**, Elsevier Ltd, v. 52, n. 2015, p. 58–63, 2016.
- KAILATH, T.; SAYED, A.; HASSIBI, B. **Linear Estimation**. New Jersey: Prentice Hall, 2000. 854 p.
- KOSKO, B. **Neural Networks and Fuzzy Systems: a dynamical systems approach to machine intelligence**. New Jersey: Prentice-Hall, 1992.

- LAVOIE, M.; LAVOIE, J. M. M.; LAVOIE, J. M. M. A Parameter Estimation Approach to Estimation of Frequencies of Sinusoids. **Ieee Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing**, ASSP-28, n. 2, p. 214–219, 1981.
- LEE, K. H. **First Course on Fuzzy Theory and Applications**. Berlin: Springer, 2005.
- LODWICK, W. a.; DUBOIS, D. Interval linear systems as a necessary step in fuzzy linear systems. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier B.V., v. 281, p. 227–251, 2015.
- MAKO, Z. Real vector space of LR-fuzzy intervals with respect to the shape-preserving t-norm-based addition. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier, v. 200, p. 136–149, 2012.
- MING, M.; FRIEDMAN, M.; KANDEL, A. General fuzzy least squares. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 88, n. 1, p. 107–118, 1997.
- MOORE, R. Interval analysis and fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 135, n. 1, p. 5—9, 2003.
- MOORE, R. E.; KEARFOTT, R. B.; CLOUD, M. J. **Introduction to Interval Analysis**. 1. ed. Philadelphia: SIAM, 2009. 235 p.
- PINAR, M. C.; ARIKAN, O. On robust solutions to linear least squares problems affected by data uncertainty and implementation errors with application to stochastic signal modeling. **Linear Algebra and Its Applications**, v. 391, n. 1-3 SPEC. ISS., p. 223–243, 2004.
- SAKSELA, K.; BOTTS, J.; SAVIOJA, L. Optimization of absorption placement using geometrical acoustic models and least squares. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 137, n. 4, p. 274–280, 2015.
- SAYED, A. H.; CHANDRASEKARAN, S. Parameter estimation with multiple sources and levels of uncertainties. **IEEE Transactions On Signal Processing**, v. 48, n. 3, p. 680–692, 2000.
- SO, H. C.; CHAN, K. W.; CHAN, Y. T.; HO, K. C. Linear prediction approach for efficient frequency estimation of multiple real sinusoids: Algorithms and analyses. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 53, n. 7, p. 2290–2305, 2005. ISSN 1053587X.
- WANG, L.-X. **A Course in Fuzzy Systems and Control**. New Jersey: Prentice Hall, 1997. 424 p.
- ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and Control**, Berkeley, v. 8, p. 338–353, 1965.
- ZAMIR, Z. R.; SUKHORUKOVA, N. Linear least squares problems involving fixed knots polynomial splines and their singularity study. **Applied Mathematics and Computation**, v. 282, n. Model 2, p. 204–215, 2016.