



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
PRO-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL
EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

BRUNO MARTINS CALAZANS SILVA

FILTRAGEM ROBUSTA PARA SISTEMAS LINEARES NUM CENÁRIO DE FUSÃO DE
DADOS
PPGMC – UESC

ILHÉUS-BA
2018

BRUNO MARTINS CALAZANS SILVA

**FILTRAGEM ROBUSTA PARA SISTEMAS LINEARES NUM
CENÁRIO DE FUSÃO DE DADOS
PPGMC – UESC**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual de Santa Cruz, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus

Coorientador: Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira

ILHÉUS-BA
2018

S586

Silva, Bruno Martins Calazans.

Filtragem robusta para sistemas lineares num cenário de fusão de dados. / Bruno Martins Calazans Silva – Ilhéus, BA: UESC, 2018.

144f. : il.

Orientador: Gildson Queiroz de Jesus

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Inclui referências e apêndices.

1. Filtros de Kalman. 2. Sistemas lineares. 3. Processos de Markov - Soluções numéricas. 4. Multisensor para fusão de dados. I. Título.


CDD 621.3815324

BRUNO MARTINS CALAZANS SILVA

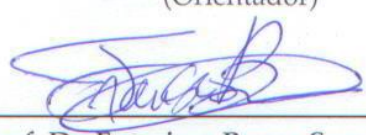
**FILTRAGEM ROBUSTA PARA SISTEMAS LINEARES NUM
CENÁRIO DE FUSÃO DE DADOS
PPGMC – UESC**

Ilhéus-BA, 28/02/2018 .

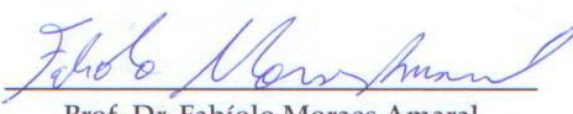
Comissão Examinadora



Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus
UESC
(Orientador)



Prof. Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira
UESC



Prof. Dr. Fabíolo Moraes Amaral
IFBA - Campus Eunápolis

À Jovelina Martins Calazans Silva, minha mãe, pela sua compreensão, amor e grande apoio. Aos meus tios, Renato Nunes da Silva (in memorian) e Geraldo Sebastião Silva (in memorian).

Agradecimentos

- À minha mãe, que sempre me apoiou, principalmente no momento da realização deste trabalho.
- Ao Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus, meu orientador, pela atenção, paciência e oportunidade de aprendizado que me foi dada.
- Aos amigos Eric Adan, Joangelo Souza, Wtila Porto, Elaine Santos, Cristiane Gamarra, Luiz Junior e Eder Rodrigues , pelo apoio dado para a realização deste trabalho.
- Aos colegas do programa pelo companheirismo, principalmente Allan Alves, Uebert Moreira, Messias Novaes e Romilson Souza.
- À CAPES pelo apoio financeiro fornecido a este trabalho, me dando a oportunidade de imersão na pesquisa do meu projeto.
- Aos professores do programa pela atenção e aprendizado.
- Ao PPGMC e à UESC pela oportunidade de cursar o mestrado.

*“Vivo aos pés de minhas alturas: Quão alto são
as minhas cimeiras? Ninguém me disse ainda.
Mas conheço bem os meus vales.”*

Friedrich Nietzsche

Resumo

Esta dissertação trata da filtragem robusta para sistemas lineares num cenário de fusão dados, para o caso ponderado e probabilístico. Foram desenvolvidos filtros robustos recursivos para sistemas no espaços de estados, sistemas singulares e sistemas sujeitos a saltos Markovianos, ampliando algoritmos existentes para situações em que se considera mais de um modelo de medidas. Para todos os tipos de sistemas abordados aqui, foram desenvolvidos filtros de Kalman na forma de estimativa filtrada e preditora. Serão feitas simulações para mostrar a possibilidade dos algoritmos propostos funcionarem em situações de falhas.

Palavras-chave: Filtro de Kalman, Sistemas no Espaço de Estados, Sistemas Singulares, Saltos Markovianos, Filtragem Robusta, Fusão de Dados.

Robust Filtering For Linear Systems In A Data Fusion Scenario

PPGMC - UESC

Abstract

This dissertation deals with robust filtering for linear systems in a data fusion scenario, for weighted and probabilistic cases. Were developed robust recursive filters for state-space systems, descriptor systems and Markovian jump systems, expanding existing algorithms for situations where is considered more than one measurement model. For all types of systems presented here, Kalman filters were developed in the form of filtered and predicted estimates. Simulations will be done to show the possibility of the proposed algorithms work in situations of failure.

Keywords: Kalman Filter, State-space systems, Descriptor Systems, Markovian Jumps, Robust Filtering, Data Fusion.

Lista de figuras

Figura 1 – As medidas b_k surgem de diferentes fontes, e juntas dão origem a \hat{x} .	5
Figura 2 – Uma única medida, formada pelas mudanças das diversas fontes, feitas pela cadeia de Markov, com distribuição de probabilidade π_k . .	8
Figura 3 – Comparação entre o filtro robusto com um único modelo de medida e o filtro robusto no cenário da fusão de dados ponderada.	67
Figura 4 – Comparação entre o filtro robusto com um único modelo de medida e o filtro robusto no cenário da fusão de dados probabilística.	68
Figura 5 – Comparação entre o filtro robusto singular com um único modelo de medida e o filtro robusto singular no cenário da fusão de dados ponderada.	118
Figura 6 – Comparação entre o filtro robusto singular com um único modelo de medida e o filtro robusto singular no cenário da fusão de dados probabilística.	119
Figura 7 – Comparação entre o filtro robusto SLSM com um único modelo de medida e o filtro robusto SLSM no cenário da fusão de dados ponderada.	136
Figura 8 – Comparação entre o filtro robusto SLSM com um único modelo de medida e o filtro robusto SLSM no cenário da fusão de dados probabilística.	137

Sumário

1 – Introdução	1
1.1 Organização do Texto	3
1.2 Artigos Publicados	3
2 – Preliminares	4
2.1 O Método dos Mínimos Quadrados Regularizados com Incertezas (MMQRI) num Cenário de Fusão de Dados	4
2.1.1 MMQRI com Fusão de Dados Ponderada	4
2.1.2 MMQRI com Fusão de Dados Probabilística	7
2.2 Sistemas Lineares no Espaço de Estados	10
2.3 Sistemas Singulares ou Descritores	12
2.4 Sistemas Sujeitos a Saltos Markovianos	13
3 – Filtragem Robusta para Sistemas no Espaço de Estados num Cenário de Fusão de Dados	18
3.1 Fusão Ponderada	18
3.1.1 Estimativa Filtrada Nominal	18
3.1.2 Estimativa Filtrada Robusta	24
3.1.3 Estimativa Preditora Nominal	33
3.1.4 Estimativa Preditora Robusta	39
3.2 Fusão Probabilística	49
3.2.1 Estimativa Filtrada Nominal	49
3.2.2 Estimativa Filtrada Robusta	56
3.3 Exemplos Numéricos	65
4 – Filtragem Robusta Para Sistemas Singulares Num Cenário De Fusão De Dados	69
4.1 Fusão Ponderada	69
4.1.1 Estimativa Filtrada Nominal	69
4.1.2 Estimativa Filtrada Robusta	75
4.1.3 Estimativa Preditora Nominal	84
4.1.4 Estimativa Preditora Robusta	90
4.2 Fusão Probabilística	100
4.2.1 Estimativa Filtrada Nominal	100
4.2.2 Estimativa Filtrada Robusta	106
4.3 Exemplos Numéricos	116

5 – Filtragem Robusta Para SLSM Num Cenário de Fusão de Dados	120
5.1 Fusão Ponderada	120
5.1.1 Estimativa Filtrada Nominal	120
5.1.2 Estimativa Filtrada Robusta	122
5.1.3 Estimativa Preditora Nominal	126
5.1.4 Estimativa Preditora Robusta	127
5.2 Fusão Probabilística	129
5.2.1 Estimativa Filtrada Nominal	129
5.2.2 Estimativa Filtrada Robusta	131
5.3 Exemplos Numéricos	134
6 – Conclusão e Trabalhos Futuros	138
6.1 Trabalhos Futuros	138
Referências	139
 Apêndices	 141
APÊNDICE A – Resultados Auxiliares	142
A.1 Lemas de Inversão de Matrizes	142
APÊNDICE B – Modelagem SVD para Sistemas Singulares	143

1 Introdução

Proposto por Rudolf Emil Kalman em 1960, o filtro de Kalman ([KALMAN, 1960](#)) é um algoritmo matemático que dá estimativas do estado de sistemas dinâmicos, buscando reduzir seus erros, sendo estes ocasionados por problemas de modelagem, interferências ambientais, etc. O filtro de Kalman calcula estimativas filtrada e preditora para o estado do sistema " x_i ", conforme quantidade de medidas " y_i " disponíveis. Ou seja,

$$\hat{x}_{i|i} := \text{uma estimativa de } x_i \text{ dado } \{y_0, y_1, \dots, y_{i-1}, y_i\}, \quad (1)$$

$$\hat{x}_{i|i-1} := \text{uma estimativa de } x_i \text{ dado } \{y_0, y_1, \dots, y_{i-1}\}. \quad (2)$$

Inicialmente, esse algoritmo foi desenvolvido para sistemas lineares discretos no tempo, mas em 1961, Kalman com o auxílio de Richard S. Bucy, torna seu filtro contínuo no tempo ([KALMAN; BUCY, 1961](#)). Assim, com o passar dos anos, o filtro de Kalman passou a ser utilizado em diversos problemas e tomou várias formas, dependendo da natureza dessas aplicações. Neste trabalho, serão desenvolvidos filtros de Kalman para três classes de sistemas lineares discretos no tempo: Sistemas no Espaço de Estados, Sistemas Singulares e Sistemas Sujeito a Saltos Markovianos, ambos num cenário de fusão de dados, ou seja, considerando L modelos de medida.

Os sistemas no espaço de estados são amplamente utilizados na teoria de filtragem, sendo a formulação mais simples de ser modelada. Nesta dissertação, esse tipo de sistema será inicialmente apresentado no Capítulo 2, onde serão mostradas suas principais características, de forma preliminar e, por fim, no Capítulo 3 teremos o desenvolvimento de filtros robustos para os sistemas em espaço de estados num cenário de fusão de dados.

Uma outra classe de sistemas utilizada neste trabalho, são os sistemas singulares, que surgem em processos de modelagem em áreas como: economia ([LUENBERGER, 1977](#)), processamento de imagem ([HASAN; AZIMI-SADJADI, 1995](#)), robótica ([MILLS; GOLDENBERG, 1989](#)), dentre outras. Na literatura de filtragem de sistemas dinâmicos existem diversos trabalhos que abordam os sistemas singulares (veja, por exemplo, [Souza e Barbosa \(2007\)](#), [Hsieh \(2013\)](#), [Bianco et al. \(2005\)](#), [Nikoukhah et al. \(1992\)](#)). Sua formulação traz algumas dificuldades, pois nela existe uma matriz singular que acompanha a variável de estado do sistema, dificultando a sua recursividade, sendo necessária a utilização da decomposição em valores singulares na matriz não invertível, para obter os valores dos estados para o sistema. Além disso, um fato curioso sobre os sistemas singulares é que estes são uma generalização dos sistemas no espaço de

estados. Suas principais características poderão ser vistas no Capítulo 2, além disso, no Capítulo 4 serão apresentados os algoritmos de filtragem propostos para estes sistemas.

Da mesma forma, existe uma formulação para lidar com o problema de mudanças abruptas nos parâmetros de sistemas lineares, que tem sido largamente abordada na literatura de filtragem de sistemas dinâmicos (veja, por exemplo, [Costa \(1994\)](#), [Costa e Guerra \(2002b\)](#), [Costa e Guerra \(2002a\)](#), [Han e Wang \(2017\)](#) e [Costa e Saporta \(2017\)](#)). O modelo criado para esses sistemas tem, como principal característica, parâmetros que sofrem mudanças no tempo, controladas por uma cadeia de Markov. Essa classe de sistemas é conhecida como Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSM). Assim como os outros tipos de sistemas citados anteriormente, os SLSM terão uma introdução preliminar no Capítulo 2, para posteriormente serem demonstrados os seus algoritmos de estimativa de estado no Capítulo 5.

Os principais algoritmos desenvolvidos nesta dissertação, são baseados nos sistemas citados anteriormente, considerando incertezas em seus parâmetros (perturbações paramétricas). A ideia central para modelar esse tipo de situação em um sistema é que, para cada variação do tempo, seus parâmetros sofrem perturbações, o que traz dificuldades em reduzir seus erros. Em vários casos é possível modelar essas perturbações ou incertezas, através de matrizes denominadas contrações cujo o módulo varia em um intervalo limitado. Os algoritmos de filtragem para sistemas dinâmicos que possuem essa característica, são conhecidos como filtros robustos, sendo amplamente estudados na literatura (veja, por exemplo [Sayed \(2001\)](#) para sistemas no espaço de estados, [Ishihara et al. \(2006\)](#) e [Ishihara e Terra \(2008\)](#) para sistemas singulares e [Terra et al. \(2013\)](#) para SLSM).

No contexto da filtragem robusta, a estimação de estados num cenário de fusão de dados é a técnica de estimação onde são considerados no sistema diversos modelos de medidas. Essa técnica possui fundamental importância no desenvolvimento de algoritmos de filtragem, visto que, envolve aplicações onde sistemas podem operar em diferentes condições de falhas. Existem diversos trabalhos na literatura que tratam sobre este tema, como pode ser visto em ([YING, 2007](#)), ([QI et al., 2014](#)) e ([LEI; DONG-MEI, 2015](#)). .

Levando isso em consideração, nesta dissertação é proposto o desenvolvimento de filtros robustos, tipo Kalman, num cenário de fusão de dados ponderada e probabilística, para sistemas no espaço de estados, sistemas singulares e SLSM. Para o desenvolvimento destes filtros foi utilizada a técnica dos mínimos quadrados regularizados com incertezas num cenário de fusão de dados descrita em ([SAYED et al., 2000](#)).

1.1 Organização do Texto

A seguir um breve resumo sobre a organização dos próximos capítulos.

- Capítulo 2: É o capítulo preliminar deste trabalho. Nele será abordada inicialmente a técnica utilizada para desenvolver os filtros de Kalman, que é o Método dos Mínimos Quadrados Regularizados com Incertezas num Cenário de Fusão de Dados, apresentando as suas duas formas: ponderada e probabilística. Além disso, buscando familiarizar o leitor ao assunto tratado nesta dissertação, será feita uma apresentação dos tipos de sistemas utilizados para desenvolver os filtros, que são: Sistemas no Espaço de Estados, Sistemas Singulares e Sistemas com Saltos Markovianos.
- Capítulo 3: Este capítulo traz o desenvolvimento de filtros de Kalman na forma de estimativas filtrada e preditora, para sistemas no espaço de estados num cenário de fusão de dados. As estimativas filtradas e preditoras desenvolvidas aqui, além de ampliarem os algoritmos que consideram um único modelo de medida, também servirão para mostrar que estas são um caso particular dos algoritmos desenvolvidos para sistemas singulares.
- Capítulo 4: Neste capítulo são desenvolvidos os filtros de Kalman para sistemas singulares, na forma de estimativas filtrada e preditora, num cenário de fusão de dados. Uma observação interessante é que os algoritmos desenvolvidos neste capítulo contém os seus algoritmos correspondentes apresentados no Capítulo 3.
- Capítulo 5: Este capítulo trata do desenvolvimento das estimativas filtrada e preditora para os sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos num cenário de fusão de dados. Estes algoritmos consideram mudanças abruptas nos parâmetros de seus sistemas de origem, e agora terão a possibilidade de operar em condições de falha.

1.2 Artigos Publicados

- SILVA, B. M. C.; JESUS, G. Q. . Discrete-Time Descriptor Kalman Filter in Data Fusion Scenario. In: Conferência Brasileira de Controle, Dinâmica e Aplicações - DINCON, 2017, São José do Rio Preto - SP. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, 2017.
- JESUS, G. Q. ; SILVA, B. M. C. . Filtering for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems in Data Fusion Scenario. In: Conferência Brasileira de Controle, Dinâmica e Aplicações - DINCON, 2017, São José do Rio Preto - SP. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, 2017.

2 Preliminares

Neste Capítulo serão abordados tópicos necessários para o desenvolvimento e entendimento do trabalho, a saber a técnica utilizada para a dedução dos filtros e as classes de sistemas que foram utilizadas nesta dissertação.

2.1 O Método dos Mínimos Quadrados Regularizados com Incertezas (MMQRI) num Cenário de Fusão de Dados

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) é um método de otimização amplamente conhecido e utilizado para a solução de diversos problemas, sendo uma boa ferramenta para estimação por ser baseado na derivação do erro quadrático. Neste contexto, o filtro de Kalman, que é um algoritmo matemático de estimativa de estados de sistemas dinâmicos, pode ser deduzido a partir de técnicas baseadas no MMQ.

Nesta Seção, serão abordadas as técnicas utilizadas para a obtenção dos filtros apresentados no presente trabalho a saber, o MMQRI num Cenário de Fusão de Dados, para os dois casos, tanto a fusão de dados ponderada, quanto a fusão de dados probabilística, propostos por ([SAYED, 2001](#)).

2.1.1 MMQRI com Fusão de Dados Ponderada

O objetivo de processos de filtragem é reduzir significativamente os ruídos dos sistemas dinâmicos, oferecendo estimativas ótimas ou subótimas para o estado do fenômeno. Para isso, além de um modelo que descreve o comportamento a ser estudado, é necessária a utilização de um modelo de medida, que coleta dados observados do fenômeno.

Podem existir situações em que o modelo de medida, utilizado no processo de filtragem, esteja sujeito a falhas, podendo causar problemas na estimação do estado do sistema. Tendo em vista isso, uma estratégia para contornar esse tipo de problema, é a técnica de fusão de dados, que utiliza diversos modelos de medida, proporcionando ao sistema funcionar em condições de falhas individuais de modelos de medidas.

Nesta Seção será apresentada a técnica do MMQRI com Fusão de Dados Ponderada, que utiliza a variância dos ruídos dos modelos de medida como ponderação das várias medidas envolvidas no problema de estimação. Para desenvolver a ideia da Fusão de Dados Ponderada, matematicamente, considere o seguinte modelo de medida:

$$b_k = (A_k + \delta A_k)x + v_k, k = 1, \dots, L. \quad (3)$$

Onde, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é um vetor desconhecido, $A_k, \delta A_k \in \mathbb{R}^{N \times n}$ são parâmetros conhecidos do problema e suas incertezas paramétricas, respectivamente, $b_k \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ são vetores de medida e $v_k \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ os ruídos ou erros de medida. A Figura 1 ilustra o processo da fusão ponderada das várias medidas b_k .

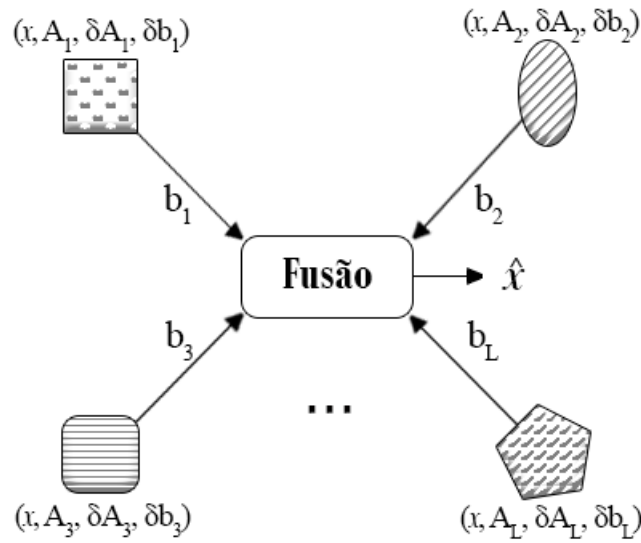


Figura 1 – As medidas b_k surgem de diferentes fontes, e juntas dão origem a \hat{x}

Sendo assim, é definido $J(x, \delta A_k, \delta b_k)$, o funcional do custo quadrático de (3), explicitado abaixo:

$$J(x, \delta A_k, \delta b_k) = \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|(A_k + \delta A_k)x - (b_k + \delta b_k)\|_{W_k}^2. \quad (4)$$

Observe que, no Funcional (4) surge o vetor δb , que representa possíveis perturbações geradas ao modelo b . Portanto, para obter o valor ótimo de x que minimiza funcional $J(x, \delta A_k, \delta b_k)$, é preciso solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\hat{x} = \arg \min_x \max_{\substack{\{\delta A_k\} \\ \{\delta b_k\}}} \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|(A_k + \delta A_k)x - (b_k + \delta b_k)\|_{W_k}^2 \right]. \quad (5)$$

Sendo, $\|\alpha\|_\Sigma^2 = \alpha^T \Sigma \alpha$, a norma ponderada. Além disso, as incertezas paramétricas δA_k e δb_k são modeladas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \delta A_k & \delta b_k \end{bmatrix} = G_k \Delta \begin{bmatrix} N_{a,k} & N_{b,k} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Onde, $Q > 0$ a matriz de ponderação do termo de regularização $\|x\|_Q^2$, $W_k \geq 0$ a matriz de ponderação do resíduo v_k ; G_k , $N_{a,k}$ e $N_{b,k}$ matrizes de dimensões apropriadas conhecidas no problema e Δ uma matriz de contração arbitrária, tal que $\|\Delta\| \leq 1$. A solução do Problema (5) é dada no resultado a seguir:

Lema 2.1.1. (SAYED et al., 2000) O único mínimo global \hat{x} que satisfaz o problema (5) é dado por:

$$\hat{x} = \left[\hat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b_k + \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}]. \quad (7)$$

Sendo as matrizes de ponderação modificadas $\{\hat{Q}, \hat{W}_k\}$ computadas a partir das matrizes de ponderação dadas $\{Q, W_k\}$ em termos dos escalares $\{\hat{\lambda}_k\}$, como segue:

$$\hat{Q} := Q + \sum_{k=1}^L \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}, \quad (8)$$

$$\hat{W}_k := W_k + W_k G_k (\hat{\lambda}_k I - G_k^T W_k G_k)^\dagger G_k^T W_k. \quad (9)$$

Para isso, é preciso determinar os escalares $\{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_L\}$ que minimizam a função

$$G(\lambda_k) := \left[\|x^o\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L C_k(x^o, \lambda_k) \right], \quad k \in \{1, \dots, L\} \quad (10)$$

ao longo do intervalo $\lambda_k \geq \|G_k^T W_k G_k\|$, sendo λ_k um número não negativo. Onde,

$$C_k(x^o, \lambda_k) := \|A_k x^o - b_k\|_{W_k(\lambda_k)}^2 + \lambda_k \|N_{a,k} x^o - N_{b,k}\|^2, \quad (11)$$

$$x^o := \left[\sum_{k=1}^L [M_k(\lambda_k) + \lambda_k N_{a,k}^T N_{b,k}] \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T W_k(\lambda_k) b_k + \lambda_k N_{a,k}^T N_{b,k}], \quad (12)$$

$$M_k(\lambda_k) := \frac{1}{L} Q + A_k^T W_k(\lambda_k) A_k, \quad (13)$$

$$W_k(\lambda_k) := W_k + W_k G_k (\lambda_k I - G_k^T W_k G_k)^\dagger G_k^T W_k. \quad (14)$$

Demonstração. A prova do Lema 2.1.1 pode ser vista em (SAYED, 2001). \square

Observação 2.1.1. Um caso particular do Lema 2.1.1, pode ser obtido quando o modelo da Equação (3) não sofre influência de incertezas. Neste caso, o problema apresentado na Equação (5) é reduzido ao Método dos Mínimos Quadrados Regularizados num Cenário de Fusão de Dados padrão, dado por:

$$\hat{x} = \arg \min_x \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_k x - b_k\|_{W_k}^2 \right], \quad (15)$$

o qual possui uma única solução, dada por:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T W_k b_k]. \quad (16)$$

2.1.2 MMQRI com Fusão de Dados Probabilística

Nesta seção será apresentada a técnica MMQRI com Fusão de Dados Probabilística, que consiste na utilização de um único modelo de medida, baseada na probabilidade de diversos modelos de medidas serem utilizados. Isso pode ajudar em situações em que é necessário escolher quais dos modelos de medidas disponíveis devem possuir maior influência no processo de filtragem, dando uma probabilidade para cada um destes serem utilizados.

Baseado na técnica MMQRI com fusão de dados probabilística proposta em (SAYED, 2001), este trabalho utiliza uma abordagem onde a escolha dos modelos de medida é feita a partir da mobilidade de uma cadeia de Markov dada. Para desenvolver a ideia da fusão de dados probabilística, matematicamente, considere o modelo a seguir:

$$b = (A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x + v, \quad \Theta_i = k, \quad k = 1, \dots, L, \quad i = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Onde, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é um vetor desconhecido, $A_{\Theta_i}, \delta A_{\Theta_i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um parâmetro conhecido do problema e sua incerteza paramétrica, escolhidos dentre as matrizes e incertezas $A_k, \delta A_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, respectivamente, por uma cadeia de Markov $\Theta_i = k$ variante no tempo $i = 1, \dots, N$ e com distribuição de probabilidade π_k , onde $k = 1, \dots, L$; $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ é vetor de medida formado pelos diversos modelos de medida e $v \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ o ruído ou erro de medida. A Figura 2 ilustra o processo da fusão probabilística.

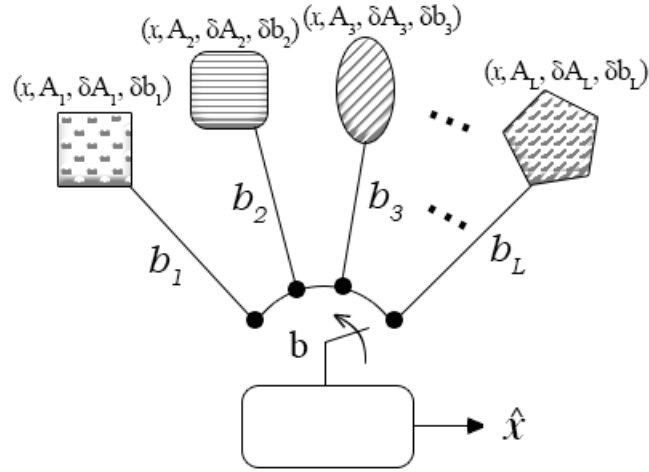


Figura 2 – Uma única medida, formada pelas mudanças das diversas fontes, feitas pela cadeia de Markov, com distribuição de probabilidade π_k .

Sendo assim, é definido $J(x, \delta A_k, \delta b_k)$, o funcional do custo quadrático de (17), explicitado abaixo:

$$J(x, \delta A_k, \delta b_k) = \mathbb{E} \left[\|x\|_Q^2 + \|(A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i})\|_W^2 \right]. \quad (18)$$

Sendo, $Q > 0$ a matriz de ponderação do termo de regularização $\|x\|_Q^2$, $W \geq 0$ a matriz de ponderação do resíduo v e δb as possíveis perturbações geradas ao modelo b .

O Funcional (18) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$J(x, \delta A_k, \delta b_k) = \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|(A_k + \delta A_k)x - (b + \delta b_k)\|_{W\pi_k}^2 \right]. \quad (19)$$

Sendo, π_k a distribuição de probabilidade da cadeia de Markov $\Theta_i = k$. De fato, aplicando o valor esperado em (18), tem-se:

$$\left[\|x\|_Q^2 + \mathbb{E} \{ \|(A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i})\|_W^2 \} \right]. \quad (20)$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\{\|(A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i})\|_W^2\} \\
&= \mathbb{E}\{((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i}))^T W ((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i}))1\} \\
&= \mathbb{E}\{((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i}))^T W ((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i}))1_{\Omega}\} \\
&= \mathbb{E}\{((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i}))^T W ((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i}))1_{\{\Theta_i=1\} \cup \dots \cup \{\Theta_i=L\}}\}.
\end{aligned}$$

Como $\{\Theta_i = 1\}, \dots, \{\Theta_i = L\}$ são disjuntos, então tem-se que:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\{\|(A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i})\|_W^2\} \\
&= \mathbb{E}\{((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i}))^T W ((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i})) \\
&\quad \times (1_{\{\Theta_i=1\}} + \dots + 1_{\{\Theta_i=L\}})\} \\
&= ((A_1 + \delta A_1)x - (b + \delta b_1))^T W ((A_1 + \delta A_1)x - (b + \delta b_1))\mathbb{E}\{1_{\{\Theta_i=1\}}\} + \dots \\
&\quad + ((A_L + \delta A_L)x - (b + \delta b_L))^T W ((A_L + \delta A_L)x - (b + \delta b_L))\mathbb{E}\{1_{\{\Theta_i=L\}}\} \\
&= ((A_1 + \delta A_1)x - (b + \delta b_1))^T W ((A_1 + \delta A_1)x - (b + \delta b_1))\pi_1 + \dots \\
&\quad + ((A_L + \delta A_L)x - (b + \delta b_L))^T W ((A_L + \delta A_L)x - (b + \delta b_L))\pi_L \\
&= \sum_{k=1}^L \left[((A_k + \delta A_k)x - (b + \delta b_k))^T W \pi_k ((A_k + \delta A_k)x - (b + \delta b_k)) \right] \\
&= \sum_{k=1}^L \|(A_k + \delta A_k)x - (b + \delta b_k)\|_{W\pi_k}^2.
\end{aligned}$$

Portanto, o Funcional (18) pode ser reescrito como o Funcional (19).

Para obter o valor ótimo de x que minimiza o funcional $J(x, \delta A_k, \delta b_k)$, é preciso solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\hat{x} = \arg \min_x \max_{\substack{\{\delta A_k\} \\ \{\delta b_k\}}} \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|(A_k + \delta A_k)x - (b + \delta b_k)\|_{W\pi_k}^2 \right]. \quad (21)$$

A solução do Problema (21) é dada no Lema a seguir.

Lema 2.1.2. O único mínimo global \hat{x} , que satisfaz o Problema (21) é dado por:

$$\hat{x} = \left[\widehat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \widehat{W}_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T \widehat{W}_k b + \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}]. \quad (22)$$

Sendo as matrizes de ponderação modificadas $\{\widehat{Q}, \widehat{W}_k\}$ computadas a partir das matrizes de ponderação dadas $\{Q, W\pi_k\}$ em termos dos escalares $\{\hat{\lambda}_k\}$, como segue:

$$\widehat{Q} := Q + \sum_{k=1}^L \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}, \quad (23)$$

$$\widehat{W}_k := W_k + W_k H_k (\hat{\lambda}_k I - H_k^T W_k H_k)^\dagger H_k^T W_k. \quad (24)$$

É fácil perceber que a Solução (22) é um caso particular do Lema 2.1.1. Mas vale ressaltar que a passagem do Funcional (18) para o Funcional (19) é proposta neste trabalho.

Observação 2.1.2. Assim como na Observação 2.1.1, é possível obter uma solução particular para o modelo da Equação (17) quando não há influência de incertezas. Neste caso, o Problema (21) é reduzido ao Método dos Mínimos Quadrados Regularizados num Cenário de Fusão de Dados padrão, dado por:

$$\hat{x} = \arg \min_x \mathbb{E} \left[\|x\|_Q^2 + \|A_{\theta_i} x - b\|_W^2 \right]. \quad (25)$$

Ou seja,

$$\hat{x} = \arg \min_x \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_k x - b\|_{W_{\pi_k}}^2 \right], \quad (26)$$

o qual possui uma única solução, dada por:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T W_k b]. \quad (27)$$

2.2 Sistemas Lineares no Espaço de Estados

Nesta seção será apresentada a formulação padrão e as principais características dos sistemas lineares no espaço de estados, os quais são o ponto de partida para a derivação do filtro de Kalman. Essa é uma representação muito conhecida e utilizada na teoria de filtragem, por modelar diversos tipos de fenômenos. Assim, considere o seguinte sistema de equações:

$$x_{i+1} = F_i x_i + w_i, \quad (28)$$

$$z_i = H_i x_i + v_i, \quad i \geq 0. \quad (29)$$

Como pode ser observado, essa representação é composta por duas equações matriciais que variam no tempo discreto $i = 1, \dots, N$. Inicialmente tem-se a Equação (28), que representa o modelo de um fenômeno, sendo conhecida como *equação de estado* e, além disso, funciona de maneira recursiva, ou seja, cada valor obtido depende de seus valores anteriores. A Equação (29) representa o modelo de observação ou medida do fenômeno, sendo conhecida como *equação de saída* ou *equação de sinal*.

Identificando cada parâmetro e variável das Equações (28) e (29), tem-se o vetor de estado $x_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$; o vetor de saída $z_i \in \mathbb{R}^{p \times 1}$; $w_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $v_i \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ os ruídos de estado e das medidas, respectivamente; $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $H_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são parâmetros conhecidos. Sendo $\{x_0, w_i, v_i\}$, condição inicial e os vetores de ruído de estado e medidas, respectivamente, são variáveis aleatórias sem correlação e com média zero, possuindo estatística de segunda ordem, tais que:

$$\text{cov} \left(\begin{bmatrix} x_0^T & w_i^T & v_i^T \end{bmatrix}^T \right) = \text{diag}(P_0, Q_i \delta_{l,j}, R_i \delta_{l,j}) > 0, \quad (30)$$

onde, $\delta_{l,j} = 1$, se $l = j$ e $\delta_{l,j} = 0$, caso contrário.

A obtenção das equações de estado e saída em um processo de modelagem, em muitos casos, está ligada ao tipo de problema em que se quer abordar, portanto, não é possível mostrar esse processo aqui, de maneira geral. Em casos em que o problema não oferece equações lineares, é possível obter as Equações (28) e (29) através de procedimentos de linearização (KAILATH et al., 2000).

Uma outra abordagem dos sistemas no espaços de estados é quando são consideradas incertezas nos parâmetros F_i e H_i das Equações (28) e (29), como é mostrado no sistema a seguir:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i)x_i + w_i, \\ z_i &= (H_i + \delta H_i)x_i + v_i, \quad i \geq 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Observe que o Sistema (31) possui as mesmas características apresentadas no sistema formado pelas Equações (28) e (29), com exceção das incertezas paramétricas $\delta F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\delta H_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, que serão modeladas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta F_i &= M_{f,i} \Delta_{1,i} N_{f,i}, \\ \delta H_i &= M_{h,i} \Delta_{2,i} N_{h,i}. \end{aligned} \quad (32)$$

Sendo $M_{f,i}$, $M_{h,i}$, $N_{f,i}$ e $N_{h,i}$ matrizes conhecidas de dimensões apropriadas, e $\Delta_{1,i}$ e $\Delta_{2,i}$ matrizes arbitrárias, que satisfazem as seguintes condições $\|\Delta_{1,i}\| \leq 1$ e $\|\Delta_{2,i}\| \leq 1$.

Na próxima Seção serão apresentados os Sistemas Singulares, que são considerados uma generalização dos Sistemas no Espaço de Estados.

2.3 Sistemas Singulares ou Descritores

Como foi visto na Seção anterior, os sistemas no espaço de estados possuem grande importância na modelagem de fenômenos, sendo amplamente utilizados. Mas ainda assim, deixam uma lacuna. Existe um tipo de sistema, que surge em alguns processos de modelagem, que não se encaixa na representação espaço de estados. São os chamados *sistemas singulares* ou *sistemas descritores*.

Esse tipo de sistema é semelhante à formulação no espaço de estados, com uma diferença sutil: possui uma matriz singular (não invertível) pré-multiplicando a variável de estado x_{i+1} .

Considere o seguinte sistema:

$$E_{i+1}x_{i+1} = F_i x_i + w_i, \quad (33)$$

$$z_i = H_i x_i + v_i, \quad i \geq 0. \quad (34)$$

Identificando cada parâmetro e variável das Equações (33) e (34), tem-se o vetor de estado $x_i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, a matriz singular $E_{i+1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, as matrizes $F_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $H_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$, os vetores de saída ou sinal $z_i \in \mathbb{R}^{p \times 1}$, os vetores de ruído com média zero $w_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $v_i \in \mathbb{R}^{p \times 1}$. Assim, como no caso do Sistema no Espaço de Estados, dados $\{x_0, w_i, v_i\}$, condição inicial e os vetores de ruído de estado e medidas, respectivamente, são variáveis aleatórias sem correlação e com média zero, possuindo estatística de segunda ordem, tais que:

$$\text{cov} \left(\begin{bmatrix} x_0^T & w_i^T & v_i^T \end{bmatrix}^T \right) = \text{diag}(P_0, Q_i \delta_{l,j}, R_i \delta_{l,j}) > 0. \quad (35)$$

Uma característica interessante desse tipo de sistema é que ele amplia a formulação espaço de estados, dando a possibilidade de se obter um modelo com dimensões mais variadas. Mas isso traz um problema para obtenção dos valores de estado do sistema, pois é impossível obter os valores da variável x_{i+1} invertendo a matriz E_{i+1} , afinal, ela é singular. Assim, é necessário a utilização da técnica chamada de SVD, sigla em inglês de Decomposição em Valores Singulares.

Assim, é fácil perceber que quando $E_{i+1} = I$, o sistema formado pelas Equações (33) e (34), retorna ao sistema no espaços de estados, ou seja, a formulação singular contém a representação no espaços de estados.

Da mesma forma como foi apresentado na Seção (2.2), é possível modificar o sistema formado pelas Equações (33) e (34) para que os parâmetros E_{i+1} , F_i e H_i estejam sujeitos a incertezas. Para isso, considere o seguinte sistema

$$\begin{aligned}(E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i)x_i + w_i, \\ z_i &= (H_i + \delta H_i)x_i + v_i, \quad i \geq 0.\end{aligned}\tag{36}$$

Observe que o Sistema (36) possui as mesmas características apresentadas no sistema formado pelas Equações (33) e (34), com exceção das incertezas paramétricas $\delta E_{i+1}, \delta F_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\delta H_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$, que serão modeladas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\delta E_{i+1} &= M_{f,i} \Delta_{1,i} N_{e,i+1}, \\ \delta F_i &= M_{f,i} \Delta_{1,i} N_{f,i}, \\ \delta H_i &= M_{h,i} \Delta_{2,i} N_{h,i}.\end{aligned}\tag{37}$$

Sendo $M_{f,i}, M_{h,i}, N_{e,i+1}, N_{f,i}$ e $N_{h,i}$ matrizes conhecidas de dimensões apropriadas, e $\Delta_{1,i}$ e $\Delta_{2,i}$ matrizes arbitrárias, que satisfazem as seguintes condições $\|\Delta_{1,i}\| \leq 1$ e $\|\Delta_{2,i}\| \leq 1$.

Na próxima Seção será apresentada uma classe de sistemas que possuem parâmetros sujeitos a mudanças abruptas, que podem ser modeladas por uma cadeia de Markov.

2.4 Sistemas Sujeitos a Saltos Markovianos

Um dos grandes problemas encontrados ao modelar determinados tipos de sistemas dinâmicos é a característica que alguns destes possuem de estarem sujeitos a mudanças abruptas. Tais mudanças podem ocorrer devido a várias situações, como distúrbios do ambiente, falhas de componentes e/ou interconexões, entre outras coisas. Em diversos casos é possível representar essa classe de sistemas dinâmicos através de um modelo discreto no tempo, capaz de fazer a transição de seus parâmetros no tempo, por meio de uma cadeia de Markov. Estes sistemas recebem o nome de Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos (SLSM) (COSTA et al., 2006).

Considere o seguinte sistema, sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$:

$$x_{i+1} = F_{i,\theta_i} x_i + G_{i,\theta_i} u_i, \tag{38}$$

$$y_i = H_{i,\theta_i} x_i + D_{i,\theta_i} w_i, \quad i \geq 0. \tag{39}$$

Identificando cada parâmetro e variável das Equações (38) e (39), tem-se o vetor de estado $x_i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, o vetor de saída ou sinal $y_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, os vetores de ruído de estado e medida $u_i \in \mathbb{R}^{q_1 \times 1}$ e $w_i \in \mathbb{R}^{q_2 \times 1}$ com média média zero e variâncias U_i e W_i respectivamente, sendo θ_i uma cadeia de Markov discreta no tempo, com espaço de estado finito $\{1, \dots, N\}$ e matriz probabilidade de transição $P = [p_{jr}]$, onde $p_{jr} = \mathcal{P}(\theta_{i+1} = r | \theta_i = j)$ e $\bar{\pi}_{i,j} = P(\theta_i = j)$ é a distribuição de probabilidade, dadas as matrizes $F_{i,r} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $G_{i,r} \in \mathbb{R}^{m \times q_1}$, $H_{i,r} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $D_{i,r} \in \mathbb{R}^{n \times q_2}$, para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $j, r \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$.

Para desenvolver os filtros de Kalman encontrados em (JESUS, 2011), é necessário transformar o sistema formado pelas Equações (38) e (39) para uma forma aumentada, que não possui a cadeia de Markov. (COSTA; GUERRA, 2002b) considera o seguinte estado aumentado:

$$z_{i,r} = x_i 1_{\{\theta_i=r\}}, \quad (40)$$

$$z_i = \begin{bmatrix} z_{i,1} \\ \vdots \\ z_{i,\mathcal{N}} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Onde, $1_{\{\cdot\}}$ é a medida de Dirac, $z_{i,r} \in \mathbb{R}^m$ e $z_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}m}$.

De acordo com (COSTA; GUERRA, 2002b) o sistema aumentado terá a seguinte representação:

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= \mathcal{F}_i z_i + \psi_i, \\ y_i &= \mathcal{H}_i z_i + \varphi_i, \quad i \geq 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Sendo definidos os seus parâmetros como

$$\mathcal{F}_i = \begin{bmatrix} p_{11}F_{i,1} & \cdots & p_{N1}F_{i,\mathcal{N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1\mathcal{N}}F_{i,1} & \cdots & p_{N\mathcal{N}}F_{i,\mathcal{N}} \end{bmatrix}, \mathcal{H}_i = \begin{bmatrix} H_{i,1} & \cdots & H_{i,\mathcal{N}} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Além disso, os ruídos de estado e medida serão definidos como

$$\psi_i = \mathcal{M}_{i+1} z_i + \vartheta_i, \quad (44)$$

$$\varphi_i = D_{i,\theta_i} w_i, \quad (45)$$

onde,

$$\mathcal{M}_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{1,r} \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{\mathcal{N},r} \end{bmatrix}, \mathcal{M}_{i+1,r} = \begin{bmatrix} (1_{\{\theta_{i+1}=r\}} - p_{1r})F_{i,1}^T \\ \vdots \\ (1_{\{\theta_{i+1}=r\}} - p_{\mathcal{N}r})F_{i,\mathcal{N}}^T \end{bmatrix}^T, \vartheta_i = \begin{bmatrix} 1_{\{\theta_{i+1}=1\}}G_{i,\theta_i}u_i \\ \vdots \\ 1_{\{\theta_{i+1}=\mathcal{N}\}}G_{i,\theta_i}u_i \end{bmatrix}. \quad (46)$$

As covariâncias de $z_{i,r}$ e z_i , serão definidas respectivamente por

$$Z_{i,r} = \mathbb{E}\{z_{i,r}z_{i,r}^T\} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \\ Z_i = \mathbb{E}\{z_i z_i^T\} = \text{diag}[Z_{i,r}] \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}m \times \mathcal{N}m},$$

onde $Z_{i,r}$ é dada pela seguinte equação recursiva:

$$Z_{i+1,r} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_{jr} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_{jr} \bar{\pi}_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T, \quad (47)$$

$$Z_{0,r} = V_r. \quad (48)$$

As variâncias das variáveis de ruídos aumentadas ψ_i e φ_i serão dadas respectivamente por

$$\Pi_i = \text{diag} \left[\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_{jr} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T \right] - \mathcal{F}_i Z_i \mathcal{F}^T + \text{diag} \left[\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_{jr} \bar{\pi}_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T \right], \quad (49)$$

$$R_i = \mathbb{E}\{\varphi_i \varphi_i^T\} = \mathcal{D}_i \mathcal{D}_i^T, \quad (50)$$

sendo,

$$\mathcal{D}_i = \begin{bmatrix} D_{i,1} \bar{\pi}_{i,1}^{1/2} W_i^{1/2} & \cdots & D_{i,\mathcal{N}} \bar{\pi}_{i,\mathcal{N}}^{1/2} W_i^{1/2} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Considerando o sistema formado pelas Equações (38) e (39) em um caso onde os parâmetros F_{i,θ_i} e H_{i,θ_i} sofrem perturbações, pode-se definir o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F_{i,\theta_i} + \delta F_{i,\theta_i})x_i + G_{i,\theta_i}u_i, \\ y_i &= (H_{i,\theta_i} + \delta H_{i,\theta_i})x_i + D_{i,\theta_i}w_i, \quad i \geq 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Observe que o Sistema (52) possui características semelhantes às apresentadas no sistema formado pelas Equações (38) e (39), com exceção das incertezas paramétricas $\delta F_{i,\theta_i} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\delta H_{i,\theta_i} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, que serão modeladas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\delta F_{i,\theta_i} &= M_{i,\theta_i}^f \Delta_{i,\theta_i}^1 N_{i,\theta_i}^f, \\ \delta H_{i,\theta_i} &= M_{i,\theta_i}^h \Delta_{i,\theta_i}^2 N_{i,\theta_i}^h.\end{aligned}\tag{53}$$

Sendo, $M_{i,\theta_i}^f, N_{i,\theta_i}^f, M_{i,\theta_i}^h, N_{i,\theta_i}^h$, matrizes conhecidas de dimensões apropriadas, e, Δ_{i,θ_i}^1 e Δ_{i,θ_i}^2 matrizes arbitrárias, que satisfazem as condições $\|\Delta_{i,\theta_i}^1\| \leq 1$ e $\|\Delta_{i,\theta_i}^2\| \leq 1$. Considerando o estado aumentado definido em (40) e (41), de acordo com (JESUS, 2011), a forma aumentada do Sistema (52) é dada por:

$$\begin{aligned}z_{i+1} &= (\mathcal{F}_i + \delta \mathcal{F}_i) z_i + \psi_i, \\ y_i &= (\mathcal{H}_i + \delta \mathcal{H}_i) z_i + \varphi_i, \quad i \geq 0.\end{aligned}\tag{54}$$

Sendo definidos os seus parâmetros e incertezas como

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i &:= \begin{bmatrix} p_{11}F_{i,1} & \cdots & p_{N1}F_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}F_{i,1} & \cdots & p_{NN}F_{i,N} \end{bmatrix}, \delta \mathcal{F}_i := \begin{bmatrix} p_{11}\delta F_{i,1} & \cdots & p_{N1}\delta F_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}\delta F_{i,1} & \cdots & p_{NN}\delta F_{i,N} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11}M_{i,1}^f & \cdots & p_{N1}M_{i,N}^f \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}M_{i,1}^f & \cdots & p_{NN}M_{i,N}^f \end{bmatrix}}_{M_{f,i}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{i,1}^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta_{i,N}^1 \end{bmatrix}}_{\Delta_{1,i}} \underbrace{\begin{bmatrix} N_{i,1}^f & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N_{i,N}^f \end{bmatrix}}_{N_{f,i}},\end{aligned}\tag{55}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_i &:= \begin{bmatrix} H_{i,1} & \cdots & H_{i,N} \end{bmatrix}, \delta \mathcal{H}_i := \begin{bmatrix} \delta H_{i,1} & \cdots & \delta H_{i,N} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} M_{i,1}^h & \cdots & M_{i,N}^h \end{bmatrix}}_{M_{h,i}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{i,1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta_{i,N}^2 \end{bmatrix}}_{\Delta_{2,i}} \underbrace{\begin{bmatrix} N_{i,1}^h & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N_{i,N}^h \end{bmatrix}}_{N_{h,i}}.\end{aligned}\tag{56}$$

Além disso, as variâncias dos ruídos de estado e medida aumentados ψ_i e φ_i são dadas por:

$$R_i = \mathbb{E}\{\varphi_i \varphi_i^T\} = \sum_{j=1}^N \bar{\pi}_{i,j} D_{i,j} W_i D_{i,j}^T.\tag{57}$$

$$\Pi_i = \mathbb{E}\{\psi_i \psi_i^T\} = \text{diag}\{Z_r^U\} - Z_i^{L'} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} + \text{diag}\left[\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_{jr} \bar{\pi}_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T\right], \quad (58)$$

onde os sobrescritos U e L significam "upper" e "lower", para identificar as cotas superior e inferior. O primeiro termo Z_r^U pode ser calculado através do seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} & \min \text{tr}(Z_r^U) \\ & s.t. \begin{bmatrix} Z_r^U - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_{jr} F_j Z_j^U F_j^T - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_{jr} \epsilon_j M_j^f M_j^{fT} - \mathcal{U}_j & p_{1r}^{1/2} F_1 Z_1^U N_1^{fT} & \cdots & p_{\mathcal{N}r}^{1/2} F_{\mathcal{N}} Z_{\mathcal{N}}^U N_{\mathcal{N}}^{fT} \\ p_{1r}^{1/2} N_1^f Z_1^U F_1^T & \epsilon_1 I - N_1^f Z_1^U N_1^{fT} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{\mathcal{N}r}^{1/2} N_{\mathcal{N}}^f Z_{\mathcal{N}}^U F_{\mathcal{N}}^T & 0 & \cdots & \epsilon_{\mathcal{N}} I - N_{\mathcal{N}}^f Z_{\mathcal{N}}^U N_{\mathcal{N}}^{fT} \end{bmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (59)$$

onde $\mathcal{U}_{i,r} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_{jr} \bar{\pi}_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T$. O segundo termo $Z_i^{L'}$ pode ser computado recursivamente por:

$$Z_{i+1}^{L'} := \mathcal{F}_{i,j}(Z_i^{L'-1} + \gamma_{2,i}^{-1} N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} \mathcal{F}_i^T - \gamma_{2,i} M_{f,i}^T M_{f,i} + \text{diag}\left[\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_{jr} \bar{\pi}_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T\right], \quad (60)$$

onde o parâmetro escalar $\gamma_{2,i}$ é dado por:

$$\gamma_{2,i} = \tau_i \sigma_{\min}\left(p_{jr} \bar{\pi}_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T\right) \sigma_{\max}(M_{f,i} M_{f,i}^T)^{-1}, \text{ com } 0 < \tau_i < 1. \quad (61)$$

É fácil perceber que o SLSM é um tipo de sistema baseado na formulação Espaço de Estados (Seção 2.2), que considera mudanças abruptas dos parâmetros.

Nos próximos Capítulos serão apresentadas as técnica de Filtragem Robusta num Cenário de Fusão de Dados para os Sistemas no Espaço de Estados, Singulares e SLSM, respectivamente.

3 Filtragem Robusta para Sistemas no Espaço de Estados num Cenário de Fusão de Dados

Neste Capítulo, serão apresentados os filtros tipo Kalman, nominal (sem incertezas paramétricas) e robusto (com incertezas paramétricas) para sistemas no espaço de estados num cenário de fusão de dados. Os teoremas que dão origem aos filtros para sistemas no espaços de estados, apresentados neste capítulo, são contribuições deste trabalho para a teoria de filtragem.

3.1 Fusão Ponderada

Nesta seção serão desenvolvidos filtros de Kalman para Sistemas no Espaços de Estados utilizando a técnica MMQRI com fusão de dados ponderada, apresentada na Subseção 2.1.1.

3.1.1 Estimativa Filtrada Nominal

Considerando o sistema formado pelas Equações (28) e (29), agora com vários modelos de medida, ou seja,

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F_i x_i + w_i, & i \geq 0, \\ z_{i,k} &= H_{i,k} x_i + v_{i,k}, & k = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (62)$$

Será proposta a solução do problema de otimização que dá origem a um algoritmo recursivo de estimação de estado, que oferece uma estimativa ótima ao computar a mesma quantidade de medidas e estados, para um sistema no espaço de estados, no cenário da fusão de dados ponderada.

Seja $J(x_i, x_{i+1})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (62), denotado por

$$J(x_i, x_{i+1}) = \|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}}^2 + \|x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1,k} - H_{i+1,k} x_{i+1}\|_{R_{i+1,k}}^2. \quad (63)$$

Para atualizar a estimativa filtrada de x_i , dada por $\hat{x}_{i|i}$, para $\hat{x}_{i+1|i+1}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{x_i, x_{i+1}} \left[\|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}}^2 + \|x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1,k} - H_{i+1,k} x_{i+1}\|_{R_{i+1,k}}^2 \right]. \quad (64)$$

Definido o Problema (64), o próximo passo é demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 3.1.1. *Seja $k = 1 \dots L$ a quantidade de modelos de medida para todo $i \geq 0$. A estimativa ótima filtrada de x_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{x}_{i|i}$, pode ser obtida através do seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$\begin{aligned} P_{0|0} &:= (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{H}_0)^{-1}, \\ \hat{x}_{0|0} &:= P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0. \end{aligned} \quad (65)$$

Passo 1: Atualize $\{\hat{x}_{i|i}, P_{i|i}\}$ para $\{\hat{x}_{i+1|i+1}, P_{i+1|i+1}\}$, da seguinte forma:

$$P_{i+1|i+1} := \left(\begin{bmatrix} I \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (66)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} I \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Onde,

$$\bar{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_{i+1} := \begin{bmatrix} R_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1,1} \\ z_{i+1,2} \\ \vdots \\ z_{i+1,L} \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Demonstração. Pode-se reescrever o Funcional (63), na forma de blocos matriciais:

$$\begin{aligned} J(x_i, x_{i+1}) &= \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{k=1}^L \left(\begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \\ &\times \left(\begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (69)$$

Comparando a Equação (15) com o Funcional (69), são obtidas as seguintes identificações:

$$\begin{aligned} x &\leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, A_k \leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix}, b_k \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix}, \\ Q &\leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (70)$$

Como foi visto no Lema 2.1.1, a solução única para o Problema (64) será encontrada ao substituir as matrizes identificadas em (70) na seguinte equação:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k. \quad (71)$$

Assim, calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ I & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i & -F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} \\ -\frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i & \frac{1}{L} Q_i^{-1} + H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (72)$$

Calculando $Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k$, tem-se:

$$Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k = \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1}] \\ \sum_{k=1}^L [-\frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} Q_i^{-1} + H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Da mesma forma, calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ I & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (74)$$

Como $x := \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, então tem-se que $\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix}$. Assim, a Equação (71) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1}] \\ \sum_{k=1}^L [-\frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} Q_i^{-1} + H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i}] \\ \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}] \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (75) por $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i & -F_i^T Q_i^{-1} \\ -Q_i^{-1} F_i & Q_i^{-1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ Q_i^{-1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (76)$$

Definindo $A = P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i$, $B = -F_i^T Q_i^{-1}$, $C = -Q_i^{-1} F_i$ e $D = Q_i^{-1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}]$, e aplicando o Lema A.1.3 na Equação (76), tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}] \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= (D - CA^{-1}B)^{-1}(CA^{-1}F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ &+ \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}]). \end{aligned} \quad (78)$$

Onde,

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} \\ &+ \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}])^{-1}. \end{aligned} \quad (79)$$

Observe que, $Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} = (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1}$, pelo Lema A.1.1. Portanto,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = ((Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}])^{-1}. \quad (80)$$

Observe também que,

$$\sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i+1,1}^T & H_{i+1,2}^T & \cdots & H_{i+1,L}^T \end{bmatrix}}_{\bar{H}_{i+1}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} R_{i+1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i+1,2}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i+1,L}^{-1} \end{bmatrix}}_{\bar{R}_{i+1}^{-1}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}}_{\bar{H}_{i+1}}. \quad (81)$$

A partir da expressão (81), pode-se reescrever a Equação (80) da seguinte forma:

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = ((Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} + \bar{H}_{i+1}^T \bar{R}_{i+1}^{-1} \bar{H}_{i+1})^{-1}. \quad (82)$$

Definindo $P_{i+1|i+1} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$ e reescrevendo a Equação (82) na forma de blocos matriciais, teremos:

$$P_{i+1|i+1} = \left(\begin{bmatrix} I \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (83)$$

Retomando o cálculo da Equação (78), tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} (-Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ &\quad + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}]). \end{aligned} \quad (84)$$

Onde,

$$\sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}] = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i+1,1}^T & H_{i+1,2}^T & \cdots & H_{i+1,L}^T \end{bmatrix}}_{\bar{H}_{i+1}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} R_{i+1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i+1,2}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i+1,L}^{-1} \end{bmatrix}}_{\bar{R}_{i+1}^{-1}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} z_{i+1,1} \\ z_{i+1,2} \\ \vdots \\ z_{i+1,L} \end{bmatrix}}_{\bar{z}_{i+1}}. \quad (85)$$

Da expressão (85), pode-se reescrever a Equação (84) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1}) F_i \hat{x}_{i|i} \\ &+ P_{i+1|i+1} \bar{H}_{i+1}^T \bar{R}_{i+1}^{-1} \bar{z}_{i+1}. \end{aligned} \quad (86)$$

Aplicando novamente o Lema A.1.1, pode-se reescrever a Equação (86) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ &+ P_{i+1|i+1} \bar{H}_{i+1}^T \bar{R}_{i+1}^{-1} \bar{z}_{i+1}. \end{aligned} \quad (87)$$

Ou ainda, na forma de blocos matriciais,

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} I \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (88)$$

Para obter a condição inicial é necessário calcular a derivada parcial do funcional a seguir. De fato,

$$J(x_0) = \|x_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{0,k} - H_{0,k} x_0\|_{R_{0,k}^{-1}}^2, \quad (89)$$

ou,

$$J(x_0) = x_0^T P_0^{-1} x_0 + \sum_{k=1}^L (z_{0,k} - H_{0,k} x_0)^T R_{0,k}^{-1} (z_{0,k} - H_{0,k} x_0). \quad (90)$$

Sendo sua derivada parcial dada por:

$$\frac{\partial J(x_0)}{\partial x_0} = x_0^T P_0^{-1} + \sum_{k=1}^L [-z_{0,k}^T R_{0,k}^{-1} H_{0,k} + x_0^T H_{0,k}^T R_{0,k}^{-1} H_{0,k}]. \quad (91)$$

Fazendo $\frac{\partial J(x_0)}{\partial x_0} = 0$, é obtida a solução mínima para o Funcional (89), dada por:

$$\hat{x}_{0|0} = (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{H}_0)^{-1} \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0, \quad (92)$$

onde,

$$\bar{H}_0 := \begin{bmatrix} H_{0,1} \\ H_{0,2} \\ \vdots \\ H_{0,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_0 := \begin{bmatrix} R_{0,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{0,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{0,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_0 := \begin{bmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \\ \vdots \\ z_{0,L} \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Definindo $P_{0|0} := P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{H}_0$, tem-se:

$$\hat{x}_{0|0} = P_{0|0}^{-1} \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0. \quad (94)$$

□

3.1.2 Estimativa Filtrada Robusta

Considere o Sistema (31), agora com mais de uma equação de medida, ou seja,

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i) x_i + w_i, & i &\geq 0, \\ z_{i,k} &= (H_{i,k} + \delta H_{i,k}) x_i + v_{i,k}, & k &= 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (95)$$

Onde a incerteza das matrizes $H_{i,k}$ são modeladas da seguinte forma:

$$\delta H_{i,k} = M_{h,i}^{(k)} \Delta_{2,i} N_{h,i}^{(k)}. \quad (96)$$

Sendo $M_{h,i}^{(k)}$ e $N_{h,i}^{(k)}$ matrizes conhecidas, e $\Delta_{2,i}$ matriz arbitrária, que satisfaz a seguinte condição $\|\Delta_{2,i}\| \leq 1$.

Seja $J(x_i, x_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (95), denotado por:

$$\begin{aligned} J(x_i, x_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k}) &= \|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 \|x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 \\ &+ \sum_{k=1}^L \|z_{i+1,k} - (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k})x_{i+1}\|_{R_{i+1,k}^{-1}}^2. \end{aligned} \quad (97)$$

Para atualizar a estimativa filtrada robusta de x_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{x}_{i|i}$, para $\hat{x}_{i+1|i+1}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{\{x_i, x_{i+1}\}} \max_{\{\delta F_i, \delta H_{i+1,k}\}} &\left[\|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1,k} - (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k})x_{i+1}\|_{R_{i+1,k}^{-1}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (98)$$

Estabelecido o Problema (98), a seguir é proposto o seguinte teorema.

Teorema 3.1.2. *Seja $k = 1 \dots L$ a quantidade de modelos de medida para todo $i \geq 0$. A estimativa filtrada robusta de x_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{x}_{i|i}$, pode ser obtida pelo seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais) Se $M_{h,0}^{(k)} = 0$, então:

$$\begin{aligned} P_{0|0} &:= (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{H}_0)^{-1}, \\ \hat{x}_{0|0} &:= P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0. \end{aligned} \quad (99)$$

Onde,

$$\bar{R}_0 := \text{diag} [R_{0,k}]. \quad (100)$$

Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{-1,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, dada pelo Lema 2.1.1, no intervalo $\lambda_{-1,k} > \|M_{h,0}^{(k)T} R_{0,k}^{-1} M_{h,0}^{(k)}\|$, sendo:

$$\hat{R}_{0,k} := R_{0,k} - \hat{\lambda}_{-1,k}^{-1} M_{h,0}^{(k)} M_{h,0}^{(k)T}, \quad (101)$$

$$\bar{R}_0 := \text{diag} [\hat{R}_{0,k}], \quad (102)$$

$$\bar{N}_{h,0} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,1}} N_{h,0}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,2}} N_{h,0}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,L}} N_{h,0}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad (103)$$

$$P_{0|0} := (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{H}_0 + \bar{N}_{h,0}^T \bar{N}_{h,0})^{-1}, \quad (104)$$

$$\hat{x}_{0|0} := P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0. \quad (105)$$

Passo 1: Se $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i+1}^{(k)} = 0$, então $\hat{\lambda}_{i,k} := 0$. Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{i,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, dada pelo Lema 2.1.1, no intervalo:

$$\hat{\lambda}_{i,k} > \lambda_{n,i}^{(k)} := \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{L} M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{L} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \right\|. \quad (106)$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_{i,k} \neq 0$, substitua os parâmetros $\{Q_i, R_{i+1,k}, F_i, \bar{H}_{i+1}, I\}$, pelos parâmetros corrigidos:

$$\hat{Q}_i := \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } Q_i := \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} \text{ e } \hat{Q}_{i,k} := Q_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T, \quad (107)$$

$$\hat{R}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{R}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{R}_{i+1} := \text{diag} [\hat{R}_{i+1,k}] \text{ e} \\ \hat{R}_{i+1,k} := R_{i+1,k} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T}, \quad (108)$$

$$\hat{F}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad (109)$$

$$\hat{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{H}_{i+1} \\ \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix} \text{ e } \bar{N}_{h,i+1} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i+1}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i+1}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad (110)$$

$$\hat{I} := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (111)$$

Passo 3: Atualize $\{P_{i|i}, \hat{x}_{i|i}\}$ para $\{P_{i+1|i+1}, \hat{x}_{i+1|i+1}\}$, sendo:

$$P_{i+1|i+1} := \left(\begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\bar{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (112)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\bar{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{Z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (113)$$

Onde,

$$Z_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{z}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1,1} \\ z_{i+1,2} \\ \vdots \\ z_{i+1,L} \end{bmatrix}. \quad (114)$$

Demonstração. Reescrevendo o Funcional (97) em forma de blocos matriciais, tem-se:

$$\begin{aligned} J(x_i, x_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k}) &= \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{k=1}^L \left[\left(\begin{bmatrix} -(F_i + \delta F_i) & I \\ 0 & (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i) \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix} \right)^T \right. \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \left. \left(\begin{bmatrix} -(F_i + \delta F_i) & I \\ 0 & (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i) \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix} \right) \right]. \end{aligned} \quad (115)$$

Comparando o Funcional (115) com os parâmetros dados pelo Lema 2.1.1 são

obtidas as seguintes identificações:

$$\begin{aligned}
 x &\leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, Q \leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L}Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix}, b_k \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix}, \\
 \delta b_k &\leftarrow \begin{bmatrix} \delta F_i \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \delta A_k &\leftarrow \begin{bmatrix} -\delta F_i & 0 \\ 0 & \delta H_{i+1,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_{f,i} & 0 \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, \\
 A_k &\leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix}, G_k \leftarrow \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, \\
 N_{a,k} &\leftarrow \begin{bmatrix} -N_{f,i} & 0 \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, N_{b,k} \leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \Delta &\leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{116}$$

Como foi visto no Lema 2.1.1, a solução do Problema (98) será dada por:

$$\hat{x} = \left[\hat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b_k + \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}]. \tag{117}$$

Sendo $\hat{Q} = Q + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{a,k}]$ e $\hat{W}_k = W_k + W_k G_k (\hat{\lambda}_{i,k} I - G_k^T W_k G_k)^\dagger G_k^T W_k$. Pelo Lema da Inversão de Matrizes tem-se que $\hat{W}_k^{-1} = W_k^{-1} - G_k \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k^T = W_k^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k G_k^T$. Daí, segue que:

$$\begin{aligned}
 \hat{Q} &= Q + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{a,k}], \\
 \hat{Q} &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^L \left[\hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T & 0 \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_{f,i} & 0 \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \right], \\
 \hat{Q} &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{f,i}] & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)}] \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{118}$$

Além disso, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \hat{W}_k &= (W_k^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k G_k^T)^{-1}, \\
 \hat{W}_k &= \left(\begin{bmatrix} Q_i L & 0 \\ 0 & R_{i+1,k} \end{bmatrix} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} \begin{bmatrix} M_{f,i} M_{f,i}^T L & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \\
 \hat{W}_k &= \begin{bmatrix} (Q_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T) L & 0 \\ 0 & R_{i+1,k} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix}^{-1}, \\
 \hat{W}_k &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{119}$$

Calculando $\sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k A_k]$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k A_k] &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ I & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & -F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} \\ -\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} + H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{120}$$

Daí, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \hat{Q} + \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k A_k] &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{f,i} & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)}] \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & -F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] \\ -\sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{121}$$

Calculando $A_k^T \hat{W}_k b_k$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 A_k^T \hat{W}_k b_k &= \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ I & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{122}$$

Da mesma forma, calculando $\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k} &= \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T & 0 \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (123)$$

A partir dos resultados de (122) e (123), tem-se:

$$\sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b_k + \hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k}] = \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k} \\ + \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (124)$$

Observe que $x := \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, então tem-se que $\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix}$. Assim, pode-se reescrever a Equação (117) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{f,i} & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)}] \end{bmatrix} \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & -F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] \\ -\sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\times \left(\begin{bmatrix} -F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i \hat{x}_{i|i} \\ \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i \hat{x}_{i|i} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}] \end{bmatrix} \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (125)$$

Pode-se reescrever a Equação (125) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \bar{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i} & 0 \\ 0 & \bar{N}_{h,i+1}^T \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} F_i^T \mathcal{Q}_i F_i & -F_i^T \mathcal{Q}_i \\ -\mathcal{Q}_i F_i & \mathcal{Q}_i + \bar{H}_{i+1}^T \bar{R}_{i+1}^{-1} \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \end{pmatrix}^{-1} \\
&\times \left(\begin{bmatrix} -F_i^T \mathcal{Q}_i F_i \hat{x}_{i|i} \\ \mathcal{Q}_i F_i \hat{x}_{i|i} + \bar{H}_{i+1}^T \bar{R}_{i+1}^{-1} \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix} + \bar{\lambda}_i \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \right). \quad (126)
\end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_i &:= \sum_{k=1}^L \left[\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} \right] \quad \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad \bar{N}_{h,i+1} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i+1}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i+1}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}, \\
\bar{R}_{i+1} &:= \begin{bmatrix} \hat{R}_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{R}_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1,1} \\ z_{i+1,2} \\ \vdots \\ z_{i+1,L} \end{bmatrix}. \quad (127)
\end{aligned}$$

Considere as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{Q}}_i &:= \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathcal{R}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{R}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{I} := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\hat{F}_i &:= \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{H}_{i+1} \\ \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix}, \quad Z_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{z}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (128)
\end{aligned}$$

Assim, pode-se reescrever a Equação (126) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} \\ -\hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (129)
\end{aligned}$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (129) por $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i & -\hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{I} \\ -\hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i & \hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (130)$$

Substituindo $A = P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i$, $B = -\hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{I}$, $C = -\hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i$ e $D = \hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1}$, na Equação (130) e, aplicando o Lema da Inversão de blocos matriciais, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (131)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = (D - CA^{-1}B)^{-1}(CA^{-1}\hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1}). \quad (132)$$

Onde,

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (\hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{I} - \hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1})^{-1} \\ &= (\hat{I}^T (\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i) \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (133)$$

Observe que, $\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i = (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1}$, pelo Lema A.1.1. Portanto,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (\hat{I}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1})^{-1}. \quad (134)$$

Definindo $P_{i+1|i+1} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$ e reescrevendo a Equação (134) na forma de blocos matriciais, tem-se:

$$P_{i+1|i+1} = \left(\begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (135)$$

Retomando o cálculo da Equação (132), tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1}(-\hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (\bar{P}_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ &+ \hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1}).\end{aligned}\quad (136)$$

Aplicando novamente o Lema A.1.1, segue que a Equação (136) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} \hat{I}^T (\bar{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ &+ P_{i+1|i+1} \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1}.\end{aligned}\quad (137)$$

Ou ainda,

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{R}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ Z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (138)$$

Como as equações desenvolvidas nesta seção, tanto do filtro, como da covariância do erro de estimação, são semelhantes às do caso padrão (com uma equação de medida), a condição inicial segue a mesma de (CAMPOS, 2004), considerando as matrizes e vetor aumentados $\bar{N}_{h,i+1}$, \bar{H}_{i+1} , \bar{R}_{i+1} e \bar{z}_{i+1} .

□

3.1.3 Estimativa Preditora Nominal

Considerando o Sistema (62), nesta subseção será proposta a solução do problema de otimização que dá origem ao algoritmo recursivo de predição, que oferece uma estimativa ótima ao computar uma medida a menos que a quantidade de estados, para um sistema no espaço de estados, no cenário da fusão ponderada.

Seja $J(x_i, x_{i+1})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (62), denotado por

$$J(x_i, x_{i+1}) = \|x_i - \hat{x}_{i|i-1}\|_{P_{i|i-1}^{-1}}^2 + \|x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i,k} - H_{i,k} x_i\|_{R_{i,k}^{-1}}^2. \quad (139)$$

Para atualizar a estimativa preditora de x_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{x}_{i|i-1}$, para $\hat{x}_{i+1|i}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{x_i, x_{i+1}} \left[\|x_i - \hat{x}_{i|i-1}\|_{P_{i|i-1}^{-1}}^2 + \|x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i,k} - H_{i,k} x_i\|_{R_{i,k}^{-1}}^2 \right]. \quad (140)$$

Estabelecido o Problema (140), pode-se enunciar o teorema a seguir.

Teorema 3.1.3. *Seja $k = 1 \dots L$ a quantidade de modelos de medida para todo $i \geq 0$. A estimativa preditora ótima de x_i no cenário da fusão ponderada, dada por $\hat{x}_{i|i-1}$, pode ser obtida pelo seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$\begin{aligned} P_{0|-1} &:= P_0, \\ \hat{x}_{0|-1} &:= 0. \end{aligned} \quad (141)$$

Passo 1:

$$P_{i+1|i} := \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T & -F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \\ -\bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T & \bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (142)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &:= P_{i+1|i} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T & -F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \\ -\bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T & \bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (143)$$

Onde,

$$\hat{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_{i+1} := \begin{bmatrix} R_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1,1} \\ z_{i+1,2} \\ \vdots \\ z_{i+1,L} \end{bmatrix}. \quad (144)$$

Demonstração. Pode-se reescrever o Funcional (139) na forma de blocos matriciais:

$$\begin{aligned} J(x_i, x_{i+1}) &= \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{k=1}^L \left[\left(\begin{bmatrix} -F_i & I \\ H_{i,k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_{i,k} - H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \right. \\ &\times \left. \left(\begin{bmatrix} -F_i & I \\ H_{i,k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_{i,k} - H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right) \right]. \end{aligned} \quad (145)$$

Comparando a Equação (15) com o Funcional (145), são obtidas as seguintes identificações:

$$\begin{aligned} x &\leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, A_k \leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & I \\ H_{i,k} & 0 \end{bmatrix}, b_k \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_{i,k} - H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}, \\ Q &\leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (146)$$

Como foi visto no Lema 2.1.1, a solução do Problema (140) será encontrada ao substituir as matrizes identificadas em (146) na seguinte equação:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k. \quad (147)$$

Assim, calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & H_{i,k}^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i & I \\ H_{i,k} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i + H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k} & -F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} \\ -\frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i & \frac{1}{L} Q_i^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (148)$$

Assim, calculando $Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k$ tem-se:

$$Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k = \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i + H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}] & \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1}] \\ \sum_{k=1}^L [-\frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} Q_i^{-1}] \end{bmatrix}. \quad (149)$$

Da mesma forma, calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & H_{i,k}^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_{i,k} - H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} - (F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i + H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}) \hat{x}_{i|i-1} \\ \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (150)$$

Como $x := \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, então tem-se que $\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} - \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix}$. Assim, a Equação (147) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} - \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i + H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}] & \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1}] \\ \sum_{k=1}^L [-\frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} Q_i^{-1}] \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} - F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} - H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1}] \\ \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}] \end{bmatrix}. \quad (151)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (151) por $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}] & -F_i^T Q_i^{-1} \\ -Q_i^{-1} F_i & Q_i^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} - H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1}] - F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (152)$$

Substituindo $A = P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}]$, $B = -F_i^T Q_i^{-1}$, $C = -Q_i^{-1} F_i$ e $D = Q_i^{-1}$, em (152) e, aplicando Lema da Inversão de blocos matriciais, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} - H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1}] - F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (153)$$

$$\hat{x}_{i+1|i} = (D - CA^{-1}B)^{-1} \left(CA^{-1} (F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} - \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k}]) \right) \quad (154)$$

$$+ \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}] \hat{x}_{i|i-1} + Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}. \quad (155)$$

Onde,

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}])^{-1} \\ &\times F_i^T Q_i^{-1})^{-1}. \end{aligned} \quad (156)$$

Observe que, $Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}] + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} = (Q_i + F_i (P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}])^{-1} F_i^T)^{-1}$, pelo Lema A.1.1. Portanto,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = Q_i + F_i (P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}])^{-1} F_i^T. \quad (157)$$

Onde,

$$\sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}] = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i,1}^T & H_{i,2}^T & \cdots & H_{i,L}^T \end{bmatrix}}_{\bar{H}_i^T} \underbrace{\begin{bmatrix} R_{i,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i,2}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i,L}^{-1} \end{bmatrix}}_{\bar{R}_i^{-1}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i,1} \\ H_{i,2} \\ \vdots \\ H_{i,L} \end{bmatrix}}_{\bar{H}_i}. \quad (158)$$

Daí, segue que a Equação (157) ficará da seguinte forma:

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = Q_i + F_i(P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} F_i^T. \quad (159)$$

Pelo Lema da Inversão de Matrizes, a Equação (159) pode ser reescrita como:

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = Q_i + (F_i P_{i|i-1} - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \bar{H}_i P_{i|i-1}) F_i^T. \quad (160)$$

Definindo $P_{i+1|i} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$, tem-se:

$$P_{i+1|i} = Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T. \quad (161)$$

Portanto, a Equação (161) pode ser escrita na forma de blocos matriciais:

$$P_{i+1|i} = \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T & -F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \\ -\bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T & \bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (162)$$

Retomando o cálculo da Equação (155), tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} (Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}])^{-1} \\ &\times (\sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} - H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1}] - F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}). \end{aligned} \quad (163)$$

Onde,

$$\sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k}] = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i,1}^T & H_{i,2}^T & \cdots & H_{i,L}^T \end{bmatrix}}_{\bar{H}_i^T} \underbrace{\begin{bmatrix} R_{i,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i,2}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i,L}^{-1} \end{bmatrix}}_{\bar{R}_i^{-1}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} z_{i,1} \\ z_{i,2} \\ \vdots \\ z_{i,L} \end{bmatrix}}_{\bar{z}_i}. \quad (164)$$

Daí, segue que a Equação (163), terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} \\ &\times (\bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{z}_i - \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1} - F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}, \end{aligned} \quad (165)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} \\ &\times (\bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{z}_i - \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i \\ &+ F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1}) F_i \hat{x}_{i|i-1}. \end{aligned} \quad (166)$$

Aplicando novamente o Lema A.1.1, na Equação (166), seque que,

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} \\ &\times \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} (\bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} (Q_i + F_i (P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}, \end{aligned} \quad (167)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} \\ &\times \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} (\bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \\ &\times \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}. \end{aligned} \quad (168)$$

Pelo Lema A.1.2, considerando $A = Q_i$, $B = F_i$, $C = P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i$ e $D = F_i^T$,

a Equação (168) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i}(Q_i + F_i(P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} F_i^T)^{-1} \\
 &\times F_i(P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} (\bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\
 &+ P_{i+1|i}(Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \\
 &\times \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1},
 \end{aligned} \tag{169}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i}(Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} \\
 &\times F_i(P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} (\bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\
 &+ P_{i+1|i}(Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \\
 &\times \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}.
 \end{aligned} \tag{170}$$

Aplicando novamente o Lema A.1.2, sendo $A = P_{i|i-1}^{-1}$, $B = \bar{H}_i^T$, $C = \bar{R}_i$ e $D = \bar{H}_i$, a Equação (170) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i}(Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} \\
 &\times F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} (\bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\
 &+ P_{i+1|i}(Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}.
 \end{aligned} \tag{171}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T & -F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \\ -\bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T & \bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \\
 &\times \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{172}$$

□

3.1.4 Estimativa Preditora Robusta

Seja $J(x_i, x_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i,k})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (95), denotado por:

$$\begin{aligned}
 J(x_i, x_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i,k}) &= \|x_i - \hat{x}_{i|i-1}\|_{P_{i|i-1}^{-1}}^2 + \|x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 \\
 &+ \sum_{k=1}^L \|z_{i,k} - (H_{i,k} + \delta H_{i,k})x_i\|_{R_{i,k}^{-1}}^2.
 \end{aligned} \tag{173}$$

Para atualizar a estimativa preditora robusta de x_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{x}_{i|i-1}$, para $\hat{x}_{i+1|i}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\{x_i, x_{i+1}\}} \max_{\{\delta F_i, \delta H_{i,k}\}} \left[\|x_i - \hat{x}_{i|i-1}\|_{P_{i|i-1}^{-1}}^2 + \|x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i,k} - (H_{i,k} + \delta H_{i,k})x_{i+1}\|_{R_{i,k}^{-1}}^2 \right]. \quad (174)$$

A seguir, é proposto o teorema que soluciona o Problema (174).

Teorema 3.1.4. *Seja $k = 1 \dots L$ a quantidade de modelos de medida para todo $i \geq 0$. A estimativa preditora robusta de x_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{x}_{i|i-1}$, que pode ser obtida pelo seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$\begin{aligned} P_{0|-1} &:= P_0, \\ \hat{x}_{0|-1} &:= 0. \end{aligned} \quad (175)$$

Passo 1: Se $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i}^{(k)} = 0$, então $\hat{\lambda}_{i,k} := 0$. Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{i,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, dada pelo no Lema 2.1.1, no intervalo:

$$\hat{\lambda}_{i,k} > \lambda_{n,i}^{(k)} := \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L}Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)} \end{bmatrix} \right\|. \quad (176)$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_{i,k} \neq 0$, substitua os parâmetros $\{Q_i, R_{i,k}, P_{i|i}, F_i, \bar{H}_i, I\}$, pelos parâmetros corrigidos:

$$\hat{\mathcal{Q}}_i := \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \mathcal{Q}_i := \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \hat{\mathcal{Q}}_{i,k}^{-1} \quad e \quad \hat{\mathcal{Q}}_{i,k} := \mathcal{Q}_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T, \quad (177)$$

$$\hat{\mathcal{R}}_i := \begin{bmatrix} \bar{R}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{R}_i := \text{diag} \left[\hat{R}_{i,k} \right] \quad e \quad \hat{R}_{i,k} := R_{i,k} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i}^{(k)} M_{h,i}^{(k)T}, \quad (178)$$

$$\hat{F}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad (179)$$

$$\hat{I} := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (180)$$

$$\hat{H}_i := \begin{bmatrix} \bar{H}_i \\ \bar{N}_{h,i} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{H}_i := \begin{bmatrix} H_{i,1} \\ H_{i,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix} \quad e \quad \bar{N}_{h,i} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i}^{(L)} \end{bmatrix}. \quad (181)$$

Passo 3: Atualize $\{P_{i|i-1}, \hat{x}_{i|i-1}\}$ para $\{P_{i+1|i}, \hat{x}_{i+1|i}\}$, sendo:

$$P_{i+1|i} := \left(\begin{bmatrix} \hat{I} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & -\hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \\ -\hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & \hat{\mathcal{R}}_i + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (182)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &:= P_{i+1|i} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & -\hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \\ -\hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & \hat{\mathcal{R}}_i + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (183)$$

Onde,

$$Z_i = \begin{bmatrix} \bar{z}_i \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{z}_i := \begin{bmatrix} z_{i,1} \\ z_{i,2} \\ \vdots \\ z_{i,L} \end{bmatrix}. \quad (184)$$

Demonstração. Reescrevendo o Funcional (174) em forma de blocos matriciais, tem-se:

$$\begin{aligned}
 J(x_i, x_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k}) &= \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\
 &+ \sum_{k=1}^L \left[\left(\begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i) & I \\ (H_{i,k} + \delta H_{i,k}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i)\hat{x}_{i|i-1} \\ (H_{i,k} + \delta H_{i,k})\hat{x}_{i|i-1} - z_{i,k} \end{bmatrix} \right)^T \right. \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{1}{L}Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \left. \left(\begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i) & I \\ (H_{i,k} + \delta H_{i,k}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i)\hat{x}_{i|i-1} \\ (H_{i,k} + \delta H_{i,k})\hat{x}_{i|i-1} - z_{i,k} \end{bmatrix} \right) \right]. \quad (185)
 \end{aligned}$$

Comparando o Funcional (185) com os parâmetros dados pelo Lema 2.1.1 são obtidas as seguintes identificações:

$$\begin{aligned}
 x &\leftarrow \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, Q \leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L}Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix}, b_k \leftarrow \begin{bmatrix} F_i\hat{x}_{i|i-1} \\ H_{i,k}\hat{x}_{i|i-1} - z_{i,k} \end{bmatrix}, \\
 \delta b_k &\leftarrow \begin{bmatrix} \delta F_i\hat{x}_{i|i-1} \\ \delta H_{i,k}\hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i}\hat{x}_{i|i-1} \\ N_{h,i}^{(k)}\hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}, \\
 \delta A_k &\leftarrow \begin{bmatrix} \delta F_i & 0 \\ \delta H_{i,k} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} & 0 \\ N_{h,i}^{(k)} & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_k &\leftarrow \begin{bmatrix} F_i & I \\ H_{i,k} & 0 \end{bmatrix}, G_k \leftarrow \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)} \end{bmatrix}, \\
 N_{a,k} &\leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i} & 0 \\ N_{h,i}^{(k)} & 0 \end{bmatrix}, N_{b,k} \leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i}\hat{x}_{i|i-1} \\ N_{h,i,k}\hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}, \\
 \Delta &\leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i} \end{bmatrix}. \quad (186)
 \end{aligned}$$

Como foi visto no Lema 2.1.1, a solução do Problema (174) será dada por:

$$\hat{x} = \left[\hat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b_k + \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}]. \quad (187)$$

Sendo $\hat{Q} = Q + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{a,k}]$ e $\hat{W}_k = W_k + W_k H_k (\hat{\lambda}_{i,k} I - G_k^T W_k G_k)^\dagger G_k^T W_k$. Pelo Lema da Inversão de Matrizes tem-se que $\hat{W}_k^{-1} = W_k^{-1} - G_k \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k^T = W_k^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k G_k^T$. Daí, segue que:

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= Q + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{a,k}], \\ \hat{Q} &= \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^L \left[\hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} N_{f,i}^T & N_{h,i}^{(k)T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} & 0 \\ N_{h,i}^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \right], \\ \hat{Q} &= \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} (N_{f,i}^T N_{f,i} + N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)})] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (188)$$

Além disso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \hat{W}_k &= (W_k^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k G_k^T)^{-1}, \\ \hat{W}_k &= \left(\begin{bmatrix} Q_i L & 0 \\ 0 & R_{i,k} \end{bmatrix} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} \begin{bmatrix} M_{f,i} M_{f,i}^T L & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)} M_{h,i}^{(k)T} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \\ \hat{W}_k &= \begin{bmatrix} (Q_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T) L & 0 \\ 0 & R_{i,k} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i}^{(k)} M_{h,i}^{(k)T} \end{bmatrix}^{-1}, \\ \hat{W}_k &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i,k}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (189)$$

Calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T & H_{i,k}^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i & I \\ H_{i,k} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i + H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} H_{i,k} & F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} \\ \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (190)$$

Daí, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\hat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k &= \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} (N_{f,i}^T N_{f,i} + N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)})] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i + H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} H_{i,k}] & \sum_{k=1}^L F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} \\ \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L \hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{f,i} + \sum_{k=1}^L N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} H_{i,k}] & F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] \\ \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] \end{bmatrix}. \tag{191}
\end{aligned}$$

Calculando $A_k^T \hat{W}_k b_k$, tem-se:

$$\begin{aligned}
A_k^T \hat{W}_k b_k &= \begin{bmatrix} F_i^T & H_{i,k}^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} - z_{i,k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} - H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} z_{i,k} + H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} \\ \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \tag{192}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, calculando $\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k} &= \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} N_{f,i}^T & N_{h,i}^{(k)T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} \\ N_{h,i}^{(k)} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \\
&= \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} + N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)} \hat{x}_{i|i-1} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{193}
\end{aligned}$$

Substituindo os resultados de (192) e (193), na expressão $\sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b_k + \hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k}]$, tem-se:

$$\sum_{k=1}^L \left[\begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} - H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} z_{i,k} + H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} \\ \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} + N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)} \hat{x}_{i|i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \right]. \tag{194}$$

Observe que $x := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, então tem-se que $\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix}$. Assim, pode-se

reescrever a Equação (187) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{f,i} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \\
 &+ \begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] & F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] \\ \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] \end{bmatrix} \Big)^{-1} \\
 &\times \left(\begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i \hat{x}_{i|i-1} - \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} z_{i,k}] \\ \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right. \\
 &+ \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} H_{i,k}] \hat{x}_{i|i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &+ \left. \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)}] \hat{x}_{i|i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \right). \tag{195}
 \end{aligned}$$

Pode-se reescrever a Equação (195), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \bar{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i} + \bar{N}_{h,i}^T \bar{N}_{h,i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \\
 &+ \begin{bmatrix} F_i^T \mathcal{Q}_i F_i + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i & F_i^T \mathcal{Q}_i \\ \mathcal{Q}_i F_i & \mathcal{Q}_i \end{bmatrix} \Big)^{-1} \\
 &\times \left(\begin{bmatrix} F_i^T \mathcal{Q}_i F_i \hat{x}_{i|i-1} - \bar{H}_{i+1}^T \bar{R}_{i+1}^{-1} \bar{z}_i + \bar{H}_{i+1}^T \bar{R}_{i+1}^{-1} \bar{H}_{i+1} \hat{x}_{i|i-1} \\ \mathcal{Q}_i F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right. \\
 &+ \left. \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} + \bar{N}_{h,i}^T \bar{N}_{h,i} \hat{x}_{i|i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \right). \tag{196}
 \end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_i &:= \sum_{k=1}^L \left[\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} \right], \quad \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad \bar{N}_{h,i} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_i := \begin{bmatrix} H_{i,1} \\ H_{i,2} \\ \vdots \\ H_{i,L} \end{bmatrix}, \\
\bar{R}_i &:= \begin{bmatrix} \hat{R}_{i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{R}_{i,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_i := \begin{bmatrix} z_{i,1} \\ z_{i,2} \\ \vdots \\ z_{i,L} \end{bmatrix}. \quad (197)
\end{aligned}$$

Considere as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{Q}}_i &:= \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathcal{R}}_i := \begin{bmatrix} \bar{R}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{I} := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\hat{F}_i &:= \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_i := \begin{bmatrix} \bar{H}_i \\ \bar{N}_{h,i} \end{bmatrix}, \quad Z_i := \begin{bmatrix} \bar{z}_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (198)
\end{aligned}$$

Assim, pode-se reescrever a Equação (196) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i & \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} \\ \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} - \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \quad (199)
\end{aligned}$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (199) por $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i & \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} \\ \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} - \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \quad (200)
\end{aligned}$$

Substituindo $A = P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i$, $B = \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{I}$, $C = \hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i$ e $D = \hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{I}$, em (200) e, aplicando o Lema A.1.2, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \\ \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} - \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (201)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1}(-CA^{-1}(\hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} - \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i \\ &+ \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) + \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}). \end{aligned} \quad (202)$$

Onde,

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (\hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{E}_{i+1} - \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \\ &\times \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{E}_{i+1})^{-1} \\ &= (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \\ &\times \hat{F}_i^T \hat{Q}_i) \hat{E}_{i+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (203)$$

Observe que, $\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i = (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \hat{F}_i^T)^{-1}$, pelo Lema (A.1.1), tem-se que:

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{E}_{i+1})^{-1}, \quad (204)$$

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + (\hat{F}_i P_{i|i-1} - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\ &\times \hat{H}_i P_{i|i-1}) \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{E}_{i+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (205)$$

Definindo $P_{i+1|i} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$, então:

$$\begin{aligned} P_{i+1|i} &= (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\ &\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{E}_{i+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (206)$$

Portanto, a Equação (206) pode ser escrita na forma matricial, como:

$$P_{i+1|i} = \left(\begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & -\hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \\ -\hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & \hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (207)$$

Daí, tem-se que a Equação (202), ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i}(-\hat{E}_{i+1}^T \bar{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \bar{Q}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \\ &\times (\hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1} - \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i + \hat{F}_i^T \bar{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ \hat{E}_{i+1}^T \bar{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}),\end{aligned}\quad (208)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \\ &\times (\hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{Z}_i - \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \\ &+ \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i) \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}.\end{aligned}\quad (209)$$

Aplicando novamente o Lema (A.1.1), na Equação (209), tem-se que:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \\ &\times \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} (\hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1},\end{aligned}\quad (210)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \\ &\times \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} (\hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\ &\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}.\end{aligned}\quad (211)$$

Pelo Lema (A.1.2), considerando $A = \hat{Q}_i^{-1}$, $B = \hat{F}_i$, $C = P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i$ e $D = \hat{F}_i^T$, a Equação (211) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \\ &\times \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} (\hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\ &\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1},\end{aligned}\quad (212)$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\
&\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} (\hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\
&+ P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\
&\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}.
\end{aligned} \tag{213}$$

Aplicando o Lema (A.1.2), considerando $A = P_{i|i-1}^{-1}$, $B = \hat{H}_i^T$, $C = \hat{\mathcal{R}}_i$ e $D = \hat{H}_i$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\
&\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}}_i + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} (\hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\
&+ P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\
&\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}.
\end{aligned} \tag{214}$$

Ou ainda, na forma de blocos matriciais,

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & -\hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \\ -\hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & \hat{\mathcal{R}}_i + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{215}$$

□

3.2 Fusão Probabilística

Nesta seção serão desenvolvidos filtros de Kalman para Sistemas no Espaços de Estados utilizando a técnica MMQRI com fusão de dados probabilística, apresentada na Subseção 2.1.2.

3.2.1 Estimativa Filtrada Nominal

O Sistema (62), para o caso probabilístico, assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
x_{i+1} &= F_i x_i + w_i, \quad i \geq 0, \\
z_i &= H_{i,k} x_i + v_i, \quad k = 1, \dots, L,
\end{aligned} \tag{216}$$

onde, $H_{i,k}$ são parâmetros de diversos modelos, escolhidas por uma cadeia de Markov $\Theta_i = k$ variante no tempo, com distribuição de probabilidade $\pi_{i,k}$, ou seja, a cada instante i , o modelo de medida z_i é calculado utilizando uma das matrizes $H_{i,k}$, de acordo com a probabilidade destas serem escolhidas.

Seja $J(x_i, x_{i+1})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (216), denotado por

$$J(x_i, x_{i+1}) = \|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1} - H_{i+1,k} x_{i+1}\|_{I_{\pi_{i+1,k}}}^2. \quad (217)$$

Para atualizar a estimativa filtrada de x_i , dada por $\hat{x}_{i|i}$, para $\hat{x}_{i+1|i+1}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{x_i, x_{i+1}} \left[\|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1} - H_{i+1,k} x_{i+1}\|_{I_{\pi_{i+1,k}}}^2 \right]. \quad (218)$$

Definido o Problema (218), o próximo passo é demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 3.2.1. *Suponha $k = 1, \dots, L$ a quantidade de modelos de medida, para todo $i \geq 0$. A estimativa ótima filtrada de x_i no cenário da fusão de dados probabilística, dada por $\hat{x}_{i|i}$, pode ser obtida através do seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$\begin{aligned} P_{0|0} &= (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{H}_0)^{-1}, \\ \hat{x}_{0|0} &:= P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{z}_0. \end{aligned} \quad (219)$$

Passo i :

$$P_{i+1|i+1} := \left(\begin{bmatrix} I \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{I}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (220)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} I \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{I}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (221)$$

Onde,

$$\hat{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{I}_{i+1} := \begin{bmatrix} I\pi_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I\pi_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I\pi_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1} \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (222)$$

Demonstração. Pode-se reescrever o Funcional (217), na forma de blocos matriciais:

$$\begin{aligned} J(x_i, x_{i+1}) &= \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{k=1}^L \left(\begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I\pi_{i+1,k} \end{bmatrix} \\ &\times \left(\begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (223)$$

Comparando a Equação (26) com o Funcional (223), são obtidas as seguintes identificações:

$$\begin{aligned} x &\leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, A_k \leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix}, b \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}, \\ Q &\leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I\pi_{i+1,k} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (224)$$

Como foi visto no Lema 2.1.2, a solução única para o Problema (218) será encontrada ao substituir as matrizes identificadas em (224) na seguinte equação:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L A_k^T W_k b. \quad (225)$$

Assim, calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ I & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i & -F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} \\ -\frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i & \frac{1}{L} Q_i^{-1} + H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k} \end{bmatrix}. \tag{226}
\end{aligned}$$

Calculando $Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k$ tem-se:

$$Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k = \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1}] \\ \sum_{k=1}^L [-\frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} Q_i^{-1} + H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}. \tag{227}$$

Da mesma forma, calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b$, tem-se:

$$\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b = \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ I & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \tag{228}$$

$$= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1} \end{bmatrix}. \tag{229}$$

Observe que, $x := \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, então $\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix}$. Desta forma, a Equação (225) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1}] \\ \sum_{k=1}^L [-\frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} Q_i^{-1} + H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i}] \\ \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1}] \end{bmatrix}. \tag{230}
\end{aligned}$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (230) por $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i & -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T Q_i^{-1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1}] \end{bmatrix}. \tag{231}
\end{aligned}$$

Substituindo $A = P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i$, $B = -F_i^T Q_i^{-1}$, $C = -Q_i^{-1} F_i$ e $D = Q_i^{-1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}]$, na Equação (231) e, aplicando o Lema A.1.1, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1}] \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (232)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = (D - CA^{-1}B)^{-1} (CA^{-1} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1}]). \quad (233)$$

Onde,

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} \\ &+ \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}])^{-1} \\ &= ((Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1}) \\ &+ \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}])^{-1}. \end{aligned} \quad (234)$$

Observe que, $Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} = (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1}$, pelo Lema A.1.1. Portanto,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = ((Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}])^{-1}. \quad (235)$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}] &= \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i+1,1}^T & H_{i+1,2}^T & \cdots & H_{i+1,L}^T \end{bmatrix}}_{\bar{H}_{i+1}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} I \pi_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \pi_{i+1,L} \end{bmatrix}}_{\bar{I}_{i+1}} \\ &\times \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}}_{\bar{H}_{i+1}}. \end{aligned} \quad (236)$$

A partir de (236), tem-se que a Equação (235) ficará da seguinte forma:

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = ((Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} + \bar{H}_{i+1}^T \bar{I}_{i+1} \bar{H}_{i+1})^{-1}. \quad (237)$$

Definindo $P_{i+1|i+1} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$, e reescrevendo a Equação (237) na forma de matrizes em blocos, tem-se:

$$P_{i+1|i+1} = \left(\begin{bmatrix} I \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{I}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (238)$$

Retomando o cálculo da Equação (233), tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} (-Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ &\quad + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1}]). \end{aligned} \quad (239)$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1}] &= \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i+1,1}^T & H_{i+1,2}^T & \cdots & H_{i+1,L}^T \end{bmatrix}}_{\bar{H}_{i+1}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} I \pi_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \pi_{i+1,L} \end{bmatrix}}_{\bar{I}_{i+1}} \\ &\quad \times \underbrace{\begin{bmatrix} z_{i+1} \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_{i+1} \end{bmatrix}}_{\bar{z}_{i+1}}. \end{aligned} \quad (240)$$

A partir de (240), tem-se que a Equação (239) ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1}) F_i \hat{x}_{i|i} \\ &\quad + P_{i+1|i+1} \bar{H}_{i+1}^T \bar{I}_{i+1} \bar{z}_{i+1}. \end{aligned} \quad (241)$$

Aplicando novamente o Lema A.1.1, pode-se reescrever a Equação (241) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1}(Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ &+ P_{i+1|i+1} \bar{H}_{i+1}^T \bar{I}_{i+1} \bar{z}_{i+1}.\end{aligned}\quad (242)$$

Ou ainda, na forma de blocos matriciais,

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} I \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{I}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (243)$$

Para obter a condição inicial é necessário calcular a derivada parcial do funcional a seguir. De fato,

$$J(x_0) = \|x_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_0 - H_{0,k} x_0\|_{I\pi_{0,k}}^2, \quad (244)$$

ou,

$$J(x_0) = x_0^T P_0^{-1} x_0 + \sum_{k=1}^L (z_0 - H_{0,k} x_0)^T I\pi_{0,k} (z_0 - H_{0,k} x_0). \quad (245)$$

Sendo sua derivada parcial dada por:

$$\frac{\partial J(x_0)}{\partial x_0} = x_0^T P_0^{-1} + \sum_{k=1}^L [-z_0^T I\pi_{0,k} H_{0,k} + x_0^T H_{0,k}^T I\pi_{0,k} H_{0,k}]. \quad (246)$$

Fazendo $\frac{\partial J(x_0)}{\partial x_0} = 0$, é obtida a solução mínima para o Funcional (89), dada por:

$$\hat{x}_{0|0} = (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{H}_0)^{-1} \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{z}_0, \quad (247)$$

onde,

$$\bar{H}_0 := \begin{bmatrix} H_{0,1} \\ H_{0,2} \\ \vdots \\ H_{0,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{I}_0 := \begin{bmatrix} I\pi_{0,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I\pi_{0,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I\pi_{0,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_0 := \begin{bmatrix} z_0 \\ z_0 \\ \vdots \\ z_0 \end{bmatrix}. \quad (248)$$

Definindo $P_{0|0} := P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{H}_0$, tem-se:

$$\hat{x}_{0|0} = P_{0|0}^{-1} \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{z}_0. \quad (249)$$

□

3.2.2 Estimativa Filtrada Robusta

O Sistema (95), para o caso probabilístico, assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i)x_i + w_i, & i \geq 0, \\ z_i &= (H_{i,k} + \delta H_{i,k})x_i + v_i, & k = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (250)$$

onde, $H_{i,k}$ e $\delta H_{i,k}$ são parâmetros e incertezas respectivamente, de diversos modelos, escolhidas por uma cadeia de Markov $\Theta_i = k$ variante no tempo, com distribuição de probabilidade $\pi_{i,k}$, ou seja, a cada instante i , o modelo de medida z_i é calculado utilizando uma das matrizes $H_{i,k}$ e sua incerteza $\delta H_{i,k}$, de acordo com a probabilidade destas serem escolhidas.

Seja $J(x_i, x_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (250), denotado por

$$\begin{aligned} J(x_i, x_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k}) &= \|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1} - (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k})x_{i+1}\|_{I_{\pi_{i+1,k}}}^2. \end{aligned} \quad (251)$$

Para atualizar a estimativa filtrada robusta de x_i no cenário da fusão de dados probabilística, dada por $\hat{x}_{i|i}$, para $\hat{x}_{i+1|i+1}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{\{x_i, x_{i+1}\}} \max_{\{\delta F_i, \delta H_{i+1,k}\}} &\left[\|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1} - (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k})x_{i+1}\|_{I_{\pi_{i+1,k}}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (252)$$

Definido o Problema (252), a seguir será enunciado o teorema que propõe a sua solução.

Teorema 3.2.2. *Seja $k = 1 \dots L$ a quantidade de modelos de medida para todo $i \geq 0$. A estimativa filtrada robusta de x_i no cenário da fusão de dados probabilística, dada por $\hat{x}_{i|i}$, pode ser obtida pelo seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais) Se $M_{h,0}^{(k)} = 0$, então:

$$\begin{aligned} P_{0|0} &:= (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{H}_0)^{-1}, \\ \hat{x}_{0|0} &:= P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{z}_0. \end{aligned} \quad (253)$$

Onde,

$$\bar{I}_0 := \text{diag} \left[I \pi_{0,k} \right]. \quad (254)$$

Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{-1,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, dada pelo Lema 2.1.1, no intervalo $\lambda_{-1,k} > \|M_{h,0}^{(k)T} I \pi_{0,k} M_{h,0}^{(k)}\|$, sendo:

$$\hat{I}_{0,k} := (I \pi_{0,k}^{-1} - \hat{\lambda}_{-1,k}^{-1} M_{h,0}^{(k)} M_{h,0}^{(k)T})^{-1}, \quad (255)$$

$$\bar{I}_0 := \text{diag} \left[\hat{I}_{0,k} \right], \quad (256)$$

$$\bar{N}_{h,0} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,1}} N_{h,0}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,2}} N_{h,0}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,L}} N_{h,0}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad (257)$$

$$P_{0|0} := (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{H}_0 + \bar{N}_{h,0}^T \bar{N}_{h,0})^{-1}, \quad (258)$$

$$\hat{x}_{0|0} := P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{z}_0. \quad (259)$$

Passo 1: Se $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i+1}^{(k)} = 0$, então $\hat{\lambda}_{i,k} := 0$. Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{i,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, dada pelo Lema 2.1.1, no intervalo:

$$\hat{\lambda}_{i,k} > \lambda_{n,i}^{(k)} := \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{L} M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{L} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \right\|. \quad (260)$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_{i,k} \neq 0$, substitua os parâmetros $\{Q_i, I \pi_{i+1,k}, E_{i+1}, F_i, \bar{H}_{i+1}\}$, pelos parâmetros corrigidos:

$$\hat{Q}_i := \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } Q_i := \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}, \quad e \quad \hat{Q}_{i,k} := Q_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T, \quad (261)$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{I}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{I}_{i+1} := \text{diag} [\hat{I}_{i+1,k}] \quad e \quad \hat{I}_{i+1,k} := (I \pi_{i+1,k}^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T})^{-1}, \quad (262)$$

$$\hat{F}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad (263)$$

$$\hat{I} := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (264)$$

$$\hat{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{H}_{i+1} \\ \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix} \quad e \quad \bar{N}_{h,i+1} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i+1}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i+1}^{(L)} \end{bmatrix}. \quad (265)$$

Passo 3: Atualize $\{P_{i|i}, \hat{x}_{i|i}\}$ para $\{P_{i+1|i+1}, \hat{x}_{i+1|i+1}\}$, sendo:

$$P_{i+1|i+1} := \left(\begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{I}}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (266)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{I}}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{Z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (267)$$

Onde,

$$Z_{i+1} = \begin{bmatrix} \bar{z}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1} \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (268)$$

Demonstração. Reescrevendo o Funcional (251) na forma de blocos matriciais, tem-se:

$$\begin{aligned}
 J(x_i, x_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k}) &= \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\
 &+ \sum_{k=1}^L \left[\left(\begin{bmatrix} -(F_i + \delta F_i) & I \\ 0 & (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i)\hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right)^T \right. \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{1}{L}Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I\pi_{i+1,k} \end{bmatrix} \\
 &\quad \left. \times \left(\begin{bmatrix} -(F_i + \delta F_i) & I \\ 0 & (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i)\hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right) \right]. \quad (269)
 \end{aligned}$$

Comparando o Funcional (269) com os parâmetros dados pelo Lema (2.1.2) são obtidas as seguintes identificações:

$$\begin{aligned}
 x &\leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, Q \leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L}Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I\pi_{i+1,k} \end{bmatrix}, b \leftarrow \begin{bmatrix} F_i\hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}, \\
 \delta b &\leftarrow \begin{bmatrix} \delta F_i\hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i}\hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \delta A_k &\leftarrow \begin{bmatrix} -\delta F_i & 0 \\ 0 & \delta H_{i+1,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_{f,i} & 0 \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, \\
 A_k &\leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix}, G_k \leftarrow \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, \\
 N_{a,k} &\leftarrow \begin{bmatrix} -N_{f,i} & 0 \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, N_{b,k} \leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i}\hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \Delta &\leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix}. \quad (270)
 \end{aligned}$$

Como foi visto no Lema 2.1.2, a solução do Problema (252) será dada por:

$$\hat{x} = \left[\hat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b + \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}]. \quad (271)$$

Sendo $\hat{Q} = Q + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{a,k}]$ e $\hat{W}_k = W_k + W_k G_k (\hat{\lambda}_{i,k} I - G_k^T W_k G_k)^{\dagger} G_k^T W_k$.

Pelo Lema (A.1.1) tem-se que $\hat{W}_k^{-1} = W_k^{-1} - G_k \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k^T = W_k^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k G_k^T$. Daí, segue que:

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= Q + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{a,k}], \\ \hat{Q} &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^L \left[\hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T & 0 \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_{f,i} & 0 \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \right], \\ \hat{Q} &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{f,i}] & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)}] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (272)$$

Além disso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \hat{W}_k &= (W_k^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k G_k^T)^{-1}, \\ \hat{W}_k &= \left(\begin{bmatrix} Q_i L & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} \begin{bmatrix} M_{f,i} M_{f,i}^T L & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \\ \hat{W}_k &= \begin{bmatrix} (Q_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T) L & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,k}^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix}^{-1}, \\ \hat{W}_k &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{I}_{i+1,k} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (273)$$

Calculando $\sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k A_k]$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k A_k] &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ I & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{I}_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & -F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} \\ -\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} + H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} H_{i+1,k} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (274)$$

Daí, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& \hat{Q} + \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k A_k] \\
&= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{f,i}] & - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{e,i+1}] \\ - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{e,i+1}^T N_{f,i}] & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} (N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} + N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)})] \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & - \sum_{k=1}^L F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} \\ - \sum_{k=1}^L E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & \sum_{k=1}^L [E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} + H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} H_{i+1,k}] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{f,i} & - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{e,i+1} \\ - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{e,i+1}^T N_{f,i} & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)}] \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & - F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} \\ - E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}. \tag{275}
\end{aligned}$$

Calculando $A_k^T \hat{W}_k b$, tem-se:

$$\begin{aligned}
A_k^T \hat{W}_k b &= \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ I & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{I}_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} z_{i+1} \end{bmatrix}. \tag{276}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, calculando $\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k} &= \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T & 0 \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{277}
\end{aligned}$$

A partir dos resultados de (276) e (277), tem-se:

$$\sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b + \hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k}] = \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} z_{i+1} \end{bmatrix} \\ + \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{278}$$

Sabe-se que $x := \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, então tem-se que $\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix}$. Assim, é possível reescrever a Equação (271) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{f,i} & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & -F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] \\ -\sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} H_{i+1,k}] \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\times \left(\begin{bmatrix} -F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i \hat{x}_{i|i} \\ \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i \hat{x}_{i|i} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} z_{i+1}] \end{bmatrix} \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (279)$$

Pode-se reescrever a Equação (279) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \bar{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i} & 0 \\ 0 & \bar{N}_{h,i+1}^T \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix} \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} F_i^T \mathcal{Q}_i F_i & -F_i^T \mathcal{Q}_i \\ -\mathcal{Q}_i F_i & \mathcal{Q}_i + \bar{H}_{i+1}^T \bar{I}_{i+1} \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\times \left(\begin{bmatrix} -F_i^T \mathcal{Q}_i F_i \hat{x}_{i|i} \\ \mathcal{Q}_i F_i \hat{x}_{i|i} + \bar{H}_{i+1}^T \bar{I}_{i+1} \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix} + \bar{\lambda}_i \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (280)$$

Onde,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_i &:= \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}], \quad \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad \bar{N}_{h,i+1} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i+1}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i+1}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}, \\ \bar{I}_{i+1} &:= \begin{bmatrix} \hat{I}_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{I}_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{I}_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1} \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_{i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (281)$$

Considere as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{Q}}_i &:= \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \hat{\mathcal{I}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{I}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \hat{I} := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{F}_i &:= \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\lambda_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \hat{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{H}_{i+1} \\ \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix}, Z_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{z}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (282)$$

Assim, pode-se reescrever a Equação (280) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} \\ -\hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} Z_{i+1} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (283)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (283) por $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} \\ -\hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} Z_{i+1} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (284)$$

Substituindo $A = P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \bar{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i$, $B = -\hat{F}_i^T \bar{\mathcal{Q}}_i \hat{I}$, $C = -\hat{I}^T \bar{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i$ e $D = \hat{I}^T \bar{\mathcal{Q}}_i \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1,k} \hat{H}_{i+1,k}$, na Equação (284) e, aplicando o Lema (A.1.3), tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} Z_{i+1} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (285)$$

Daí, segue que:

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = (D - CA^{-1}B)^{-1}(CA^{-1}\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} Z_{i+1}). \quad (286)$$

Onde,

$$\begin{aligned}
(D - CA^{-1}B)^{-1} &= (\hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{I} - \hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{I} \\
&\quad + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} \hat{H}_{i+1})^{-1} \\
&= (\hat{I}^T (\hat{Q}_i \hat{I} - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \\
&\quad \times \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{I}) + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} \hat{H}_{i+1})^{-1} \\
&= (\hat{I}^T (\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \\
&\quad \times \hat{F}_i^T \hat{Q}_i) \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} \hat{H}_{i+1})^{-1}. \tag{287}
\end{aligned}$$

Observe que, $\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i = (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1}$, pelo Lema A.1.1. Portanto,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (\hat{I}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} \hat{H}_{i+1})^{-1}. \tag{288}$$

Definindo $P_{i+1|i+1} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$ e substituindo na Equação (288):

$$P_{i+1|i+1} = (\hat{I}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} \hat{H}_{i+1})^{-1}. \tag{289}$$

A Equação (289) pode ser escrita na forma de blocos matriciais, como segue:

$$P_{i+1|i+1} = \left(\begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{I}}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \tag{290}$$

Retomando o cálculo da Equação (286), tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} (-\hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\
&\quad + \hat{I}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} Z_{i+1}), \tag{291}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} \hat{I}^T (\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i) \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\
&\quad + P_{i+1|i+1} \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} Z_{i+1}. \tag{292}
\end{aligned}$$

Aplicando novamente o Lema A.1.1, segue que a Equação (292) pode ser reescrita como:

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \hat{I}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} Z_{i+1}. \tag{293}$$

Ou ainda,

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\bar{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{I}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{Z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (294)$$

Como as equações desenvolvidas nesta Subseção, tanto do filtro, como da covariância do erro de estimação, são semelhantes às do caso padrão (com uma equação de medida), a condição inicial segue a mesma de (CAMPOS, 2004), considerando as matrizes e vetor aumentados $\bar{N}_{h,i+1}$, \bar{H}_{i+1} , \bar{I}_{i+1} e \bar{z}_{i+1} .

□

Observação 3.2.1. Os algoritmos de filtragem robusta apresentados neste capítulo retornam facilmente à sua versão nominal quando suas incertezas são consideradas como zero, ou seja, $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i+1}^{(k)} = 0$.

Observação 3.2.2. Pode-se verificar nos algoritmos desenvolvidos neste capítulo que considerando $k = 1$, estes retornam aos filtros encontrados em (CAMPOS, 2004), que foram desenvolvidos utilizando apenas uma equação de medida.

3.3 Exemplos Numéricos

A seguir serão apresentados exemplos numéricos para mostrar a efetividade das estimativas filtradas robustas, para sistemas no espaço de estados. Os filtros desenvolvidos neste trabalho, serão comparados com seus filtros correspondentes que utilizam uma única medida, simulando uma falha nessa medida. Nos testes será usado como termo de comparação a raiz do erro quadrático médio (rms). Para todos testes feitos nessa seção, foram utilizados os seguintes parâmetros e incertezas:

$$F = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.04 & 0.06 \end{bmatrix}, \quad (295)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 1.3 & 0.7 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
M_f &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix}, N_f = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.13 \end{bmatrix}, \\
M_{h,1} &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}, M_{h,2} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}, M_{h,3} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}, \\
N_{h,1} &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, M_{h,2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 28.18 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, M_{h,3} = \begin{bmatrix} 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 28.19 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{296}$$

Os exemplos numéricos utilizados, foram baseados nos testes feitos em (ISHIHARA et al., 2006), e adaptados para um caso onde são utilizados 3 modelos de medidas.

Para a simulação da estimativa filtrada robusta no cenário da fusão ponderada, apresentada na Subseção 3.1.2, foram considerados os parâmetros apresentados em (295), as matrizes que formam as incertezas dadas em (296) e as variâncias dos ruídos dos modelos de medida a seguir:

$$R_1 = 0.18, R_2 = 0.16, R_3 = 0.17. \tag{297}$$

Foi feito um estudo comparativo entre a estimativa filtrada robusta proposta por (CAMPOS, 2004) e a estimativa filtrada robusta no cenário da fusão ponderada, que pode ser visto na Figura 3. Neste caso, o parâmetro H_1 e suas incertezas, usados no filtro de (CAMPOS, 2004), estão simulando uma falha. As curvas foram obtidas de $i = 0, \dots, 100$ para cada passo recursivo de 1000 simulações de Monte Carlo.

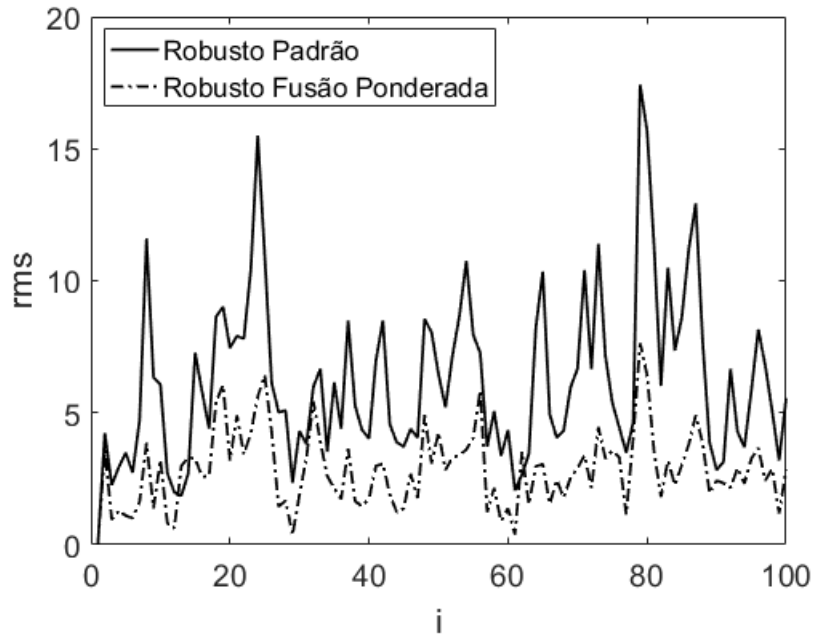


Figura 3 – Comparação entre o filtro robusto com um único modelo de medida e o filtro robusto no cenário da fusão de dados ponderada.

Observe na Figura 3, que o filtro robusto padrão apresenta um maior intervalo de variação da raiz do erro quadrático médio (rms), além de picos maiores, comparado ao filtro robusto no cenário da fusão de dados ponderada.. Portanto, no teste apresentado, o filtro robusto no cenário da fusão de dados ponderada, proposto neste trabalho, teve melhor performance do que o filtro robusto encontrado em (CAMPOS, 2004).

Da mesma forma, foi testado o algoritmo da estimativa filtrada robusta no cenário da fusão probabilística, apresentada na Subseção 3.2.2 considerando os mesmos parâmetros dados em (295), matrizes de incertezas dadas em (296), variância dos ruídos do modelo de medida, matriz de probabilidade de transição de modelos de medida e valores iniciais da distribuição de probabilidade de Θ_i a seguir:

$$R = 0.16, \quad Pm = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.45 & 0.45 \\ 0.1 & 0.45 & 0.45 \\ 0.1 & 0.45 & 0.45 \end{bmatrix}, \quad (298)$$

$$\pi_1(0) = 0.05, \quad \pi_2(0) = 0.475, \quad \pi_3(0) = 0.475,$$

para valores randômicos de $\Theta_i \in \{1, 2, 3\}$.

Foi feito um estudo comparativo entre a estimativa filtrada robusta proposta em (CAMPOS, 2004) e a estimativa filtrada robusta no cenário da fusão probabilística, que pode ser visto na Figura 4. Assim como no caso do filtro anterior, o parâmetro H_1 e suas incertezas, que foram usados no filtro robusto de (CAMPOS, 2004) estão simulando

uma falha. As curvas foram obtidas de $i = 0, \dots, 100$ para cada passo recursivo de 1000 simulações de Monte Carlo.

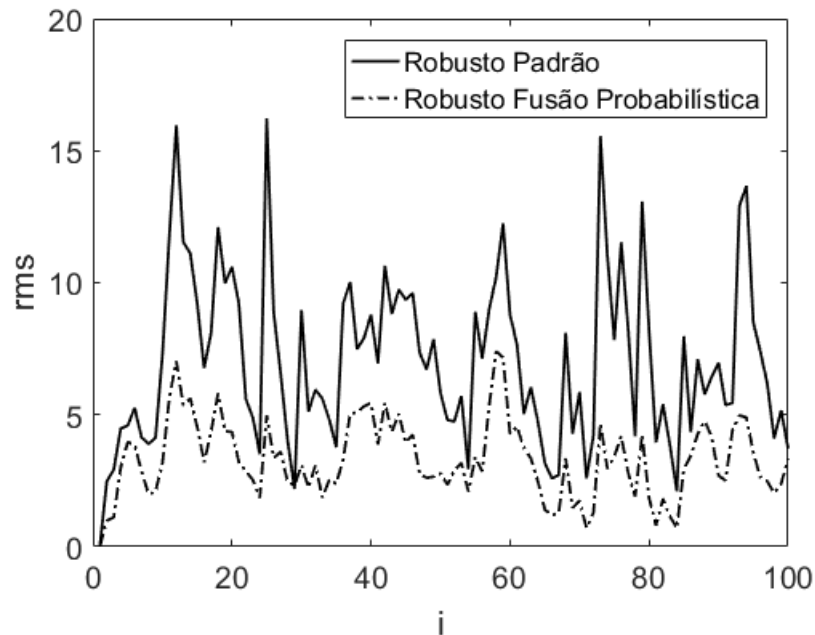


Figura 4 – Comparação entre o filtro robusto com um único modelo de medida e o filtro robusto no cenário da fusão de dados probabilística.

Observe na Figura 4, que o filtro robusto padrão apresenta um maior intervalo de variação da raiz do erro quadrático médio (rms), além de picos maiores, comparado ao filtro robusto no cenário da fusão de dados probabilística. Portanto, no teste apresentado, o filtro robusto no cenário da fusão de dados probabilística, proposto neste trabalho, teve melhor performance do que o filtro robusto encontrado em (CAMPOS, 2004).

4 Filtragem Robusta Para Sistemas Singulares Num Cenário De Fusão De Dados

No Capítulo anterior foram demonstrados filtros de Kalman para sistemas na formulação espaço de estados. Na Seção 2.3 do Capítulo 2 foi visto que os sistemas no espaço de estados estão contidos na formulação singular. Neste capítulo, serão deduzidas as estimativas filtradas e preditoras do filtro de Kalman para sistemas singulares, nos casos nominal e robusto, num cenário de fusão de dados. Os teoremas que dão origem aos filtros para sistemas singulares, apresentados neste capítulo, são contribuições deste trabalho para a teoria de filtragem.

4.1 Fusão Ponderada

Nesta seção serão desenvolvidos filtros de Kalman para Sistemas Singulares, utilizando a técnica MMQRI com fusão de dados ponderada, apresentada na Subseção 2.1.1.

4.1.1 Estimativa Filtrada Nominal

Considerando o sistema formado pelas Equações (33) e (34), agora com vários modelos de medida, ou seja,

$$\begin{aligned} E_{i+1}x_{i+1} &= F_i x_i + w_i, & i \geq 0, \\ z_{i,k} &= H_{i,k} x_i + v_{i,k}, & k = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (299)$$

Seja $J(x_i, x_{i+1})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (299), denotado por:

$$J(x_i, x_{i+1}) = \|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|E_{i+1}x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1,k} - H_{i+1,k} x_{i+1}\|_{R_{i+1,k}^{-1}}^2 \quad (300)$$

Para atualizar a estimativa filtrada de x_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{x}_{i|i}$, para $\hat{x}_{i+1|i+1}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{x_i, x_{i+1}} \left[\|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|E_{i+1}x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1,k} - H_{i+1,k} x_{i+1}\|_{R_{i+1,k}^{-1}}^2 \right]. \quad (301)$$

Definido o Problema (301), o próximo passo é demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 4.1.1. Suponha que $\begin{bmatrix} E_i \\ \bar{H}_i \end{bmatrix}$ possui posto coluna pleno e $k = 1, \dots, L$ a quantidade de modelos de medida, para todo $i \geq 0$. A estimativa ótima filtrada de x_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{x}_{i|i}$, pode ser obtida através do seguinte algoritmo recursivo:

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$\begin{aligned} P_{0|0} &:= (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{H}_0)^{-1}, \\ \hat{x}_{0|0} &:= P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0. \end{aligned} \quad (302)$$

Passo 1:

$$P_{i+1|i+1} := \left(\begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (303)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (304)$$

Onde,

$$\bar{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_{i+1} := \begin{bmatrix} R_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1,1} \\ z_{i+1,2} \\ \vdots \\ z_{i+1,L} \end{bmatrix}. \quad (305)$$

Demonstração. Pode-se reescrever o Funcional (301), na forma de blocos matriciais:

$$\begin{aligned} J(x_i, x_{i+1}) &= \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{k=1}^L \left(\begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \\ &\times \left(\begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (306)$$

Comparando a Equação (15) com o Funcional (306), são obtidas as seguintes identificações:

$$\begin{aligned} x &\leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, A_k \leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix}, b_k \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix}, \\ Q &\leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (307)$$

Como foi visto no Lema (2.1.1), a solução única para o Problema (301) será encontrada ao substituir as matrizes identificadas em (307) na seguinte equação:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k. \quad (308)$$

Assim, calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i & -F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1} + H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (309)$$

Calculando $Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k$ tem-se:

$$\begin{aligned} &Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \\ &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1}] \\ \sum_{k=1}^L [-E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1} + H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (310)$$

Da mesma forma, calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k$, tem-se:

$$\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k = \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix} \quad (311)$$

$$= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k} \end{bmatrix}. \quad (312)$$

Observe que, $x := \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, então $\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix}$. Desta forma, a Equação (308) pode ser reescrita como:

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} \\ P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1}] \\ \sum_{k=1}^L [-E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1} + H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}^{-1} \quad (313)$$

$$\times \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i}] \\ \sum_{k=1}^L [E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}] \end{bmatrix}$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (313) por $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i & -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}^{-1} \quad (314)$$

$$\times \begin{bmatrix} -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}] \end{bmatrix}$$

Substituindo $A = P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i$, $B = -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1}$, $C = -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i$ e $D = E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}]$, na Equação (314) e, aplicando o Lema A.1.3, tem-se:

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}] \end{bmatrix}, \quad (315)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = (D - CA^{-1}B)^{-1}(CA^{-1}F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}]). \quad (316)$$

Onde,

$$\begin{aligned}
 (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} - E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}])^{-1} \\
 &= (E_{i+1}^T (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1}) E_{i+1} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}])^{-1}. \tag{317}
 \end{aligned}$$

Observe que, $Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} = (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1}$, pelo Lema A.1.1. Portanto,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}])^{-1}. \tag{318}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] &= \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i+1,1}^T & H_{i+1,2}^T & \cdots & H_{i+1,L}^T \end{bmatrix}}_{\bar{H}_{i+1}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} R_{i+1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i+1,2}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i+1,L}^{-1} \end{bmatrix}}_{\bar{R}_{i+1}^{-1}} \\
 &\quad \times \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}}_{\bar{H}_{i+1}} \tag{319}
 \end{aligned}$$

A partir de (319), tem-se que a Equação (318) ficará da seguinte forma:

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} E_{i+1} + \bar{H}_{i+1}^T \bar{R}_{i+1}^{-1} \bar{H}_{i+1})^{-1}. \tag{320}$$

Definindo $P_{i+1|i+1} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$, e reescrevendo a Equação (320) na forma de matrizes em blocos, tem-se:

$$P_{i+1|i+1} = \left(\begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \tag{321}$$

Retomando o cálculo da Equação (316), tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1}(-E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i}) \\ &+ \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}].\end{aligned}\quad (322)$$

Observe que,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T R_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}] &= \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i+1,1}^T & H_{i+1,2}^T & \cdots & H_{i+1,L}^T \end{bmatrix}}_{\bar{H}_{i+1}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} R_{i+1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i+1,2}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i+1,L}^{-1} \end{bmatrix}}_{\bar{R}_{i+1}^{-1}} \\ &\times \underbrace{\begin{bmatrix} z_{i+1,1} \\ z_{i+1,2} \\ \vdots \\ z_{i+1,L} \end{bmatrix}}_{\bar{z}_{i+1}}.\end{aligned}\quad (323)$$

A partir de (323), tem-se que a Equação (322) ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} E_{i+1}^T (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1}) F_i \hat{x}_{i|i} \\ &+ P_{i+1|i+1} \bar{H}_{i+1}^T \bar{R}_{i+1}^{-1} \bar{z}_{i+1}.\end{aligned}\quad (324)$$

Aplicando novamente o Lema A.1.1, é possível reescrever a Equação (324) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ &+ P_{i+1|i+1} \bar{H}_{i+1}^T \bar{R}_{i+1}^{-1} \bar{z}_{i+1}.\end{aligned}\quad (325)$$

Ou ainda, na forma de blocos matriciais,

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix}.\quad (326)$$

A condição inicial segue a mesma forma apresentada e demonstrada na Subseção 3.1.1.

□

4.1.2 Estimativa Filtrada Robusta

Considere o Sistema (36), agora com mais de uma equação de medida, ou seja,

$$\begin{aligned} (E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i)x_i + w_i, & i \geq 0, \\ z_{i,k} &= (H_{i,k} + \delta H_{i,k})x_i + v_{i,k}, & k = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (327)$$

Onde a incerteza das matrizes $H_{i,k}$ são modeladas da seguinte forma:

$$\delta H_{i,k} = M_{h,i}^{(k)} \Delta_{2,i} N_{h,i}^{(k)}. \quad (328)$$

Sendo $M_{h,i}^{(k)}$ e $N_{h,i}^{(k)}$ matrizes conhecidas, e $\Delta_{2,i}$ matriz arbitrária, que satisfaz a seguinte condição $\|\Delta_{2,i}\| \leq 1$.

Seja $J(x_i, x_{i+1}, \delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (327), denotado por:

$$\begin{aligned} J(x_i, x_{i+1}, \delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k}) &= \|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 \\ &+ \|(E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 \\ &+ \sum_{k=1}^L \|z_{i+1,k} - (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k})x_{i+1}\|_{R_{i+1,k}^{-1}}^2. \end{aligned} \quad (329)$$

Para atualizar a estimativa filtrada robusta de x_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{x}_{i|i}$, para $\hat{x}_{i+1|i+1}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\{x_i, x_{i+1}\}} \max_{\{\delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k}\}} \left[\|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|(E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1,k} - (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k})x_{i+1}\|_{R_{i+1,k}^{-1}}^2 \right]. \quad (330)$$

A seguir, é proposto o teorema que soluciona o Problema (330).

Teorema 4.1.2. *Suponha que $\begin{bmatrix} \hat{E}_i \\ \hat{H}_i \end{bmatrix}$ possui posto coluna pleno e $k = 1, \dots, L$ a quantidade de modelos de medida, para todo $i \geq 0$. A estimativa filtrada robusta de x_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{x}_{i|i}$, pode ser obtida pelo seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais) Se $M_{h,0}^{(k)} = 0$, então:

$$\begin{aligned} P_{0|0} &:= (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{H}_0)^{-1}, \\ \hat{x}_{0|0} &:= P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0. \end{aligned} \quad (331)$$

Onde,

$$\bar{R}_0 := \text{diag} \left[R_{0,k} \right]. \quad (332)$$

Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\lambda_{-1,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, dada pelo Lema 2.1.1, no intervalo $\lambda_{-1,k} > \|M_{h,0}^{(k)T} R_{0,k}^{-1} M_{h,0}^{(k)}\|$, sendo:

$$\hat{R}_{0,k} := R_{0,k} - \hat{\lambda}_{-1,k}^{-1} M_{h,0}^{(k)} M_{h,0}^{(k)T}, \quad (333)$$

$$\bar{R}_0 := \text{diag} \left[\hat{R}_{0,k} \right], \quad (334)$$

$$\bar{N}_{h,0} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,1}} N_{h,0}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,2}} N_{h,0}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,L}} N_{h,0}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad (335)$$

$$P_{0|0} := (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{H}_0 + \bar{N}_{h,0}^T \bar{N}_{h,0})^{-1}, \quad (336)$$

$$\hat{x}_{0|0} := P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0. \quad (337)$$

Passo 1: Se $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i+1}^{(k)} = 0$, então $\hat{\lambda}_{i,k} := 0$. Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{-1,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, dada pelo Lema 2.1.1, no intervalo:

$$\hat{\lambda}_{i,k} > \lambda_{n,i}^{(k)} := \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{L} M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{L} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \right\|. \quad (338)$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_{i,k} \neq 0$, substitua os parâmetros $\{Q_i, R_{i+1,k}, E_{i+1}, F_i, \bar{H}_{i+1}\}$, pelos parâmetros corrigidos:

$$\hat{Q}_i := \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } Q_i := \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} \text{ e } \hat{Q}_{i,k} := Q_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T, \quad (339)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{i+1} &:= \begin{bmatrix} \bar{R}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{R}_{i+1} := \text{diag} [\hat{R}_{i+1,k}] \text{ e} \\ \hat{R}_{i+1,k} &:= R_{i+1,k} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T}, \end{aligned} \quad (340)$$

$$\hat{F}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad (341)$$

$$\hat{E}_{i+1} := \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{e,i+1} \end{bmatrix}, \quad (342)$$

$$\hat{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{H}_{i+1} \\ \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix} \text{ e } \bar{N}_{h,i+1} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i+1}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i+1}^{(L)} \end{bmatrix}. \quad (343)$$

Passo 3: Atualize $\{P_{i|i}, \hat{x}_{i|i}\}$ para $\{P_{i+1|i+1}, \hat{x}_{i+1|i+1}\}$, sendo:

$$P_{i+1|i+1} := \left(\begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (344)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{Z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (345)$$

Onde,

$$Z_{i+1} = \begin{bmatrix} \bar{z}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1,1} \\ z_{i+1,2} \\ \vdots \\ z_{i+1,L} \end{bmatrix}. \quad (346)$$

Demonstração. Reescrevendo o Funcional (329) na forma de blocos matriciais, tem-se:

$$\begin{aligned}
 J(x_i, x_{i+1}, \delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k}) &= \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\
 &+ \sum_{k=1}^L \left[\left(\begin{bmatrix} -(F_i + \delta F_i) & (E_{i+1} + \delta E_{i+1}) \\ 0 & (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i)\hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix} \right)^T \right. \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{1}{L}Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \\
 &\quad \left. \times \left(\begin{bmatrix} -(F_i + \delta F_i) & (E_{i+1} + \delta E_{i+1}) \\ 0 & (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i)\hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix} \right) \right]. \quad (347)
 \end{aligned}$$

Comparando o Funcional (347) com os parâmetros dados pelo Lema 2.1.1 são obtidas as seguintes identificações:

$$\begin{aligned}
 x &\leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, Q \leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L}Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix}, b_k \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix}, \\
 \delta b_k &\leftarrow \begin{bmatrix} \delta F_i \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \delta A_k &\leftarrow \begin{bmatrix} -\delta F_i & \delta E_{i+1} \\ 0 & \delta H_{i+1,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, \\
 A_k &\leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix}, G_k \leftarrow \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, \\
 N_{a,k} &\leftarrow \begin{bmatrix} -N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, N_{b,k} \leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \Delta &\leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix}. \quad (348)
 \end{aligned}$$

Como foi visto no Lema 2.1.1, a solução do Problema (330) será dada por:

$$\hat{x} = \left[\hat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b_k + \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}]. \quad (349)$$

Sendo $\hat{Q} = Q + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{a,k}]$ e $\hat{W}_k = W_k + W_k G_k (\hat{\lambda}_{i,k} I - G_k^T W_k G_k)^{\dagger} G_k^T W_k$.

Pelo Lema A.1.1 tem-se que $\hat{W}_k^{-1} = W_k^{-1} - G_k \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k^T = W_k^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k G_k^T$. Daí, segue que:

$$\hat{Q} = Q + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{a,k}],$$

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^L \left[\hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T & 0 \\ N_{e,i+1}^T & N_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \right], \quad (350)$$

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{f,i}] & -\sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{e,i+1}] \\ -\sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{e,i+1}^T N_{f,i}] & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} (N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} + N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)})] \end{bmatrix}.$$

Além disso, tem-se que:

$$\hat{W}_k = (W_k^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k G_k^T)^{-1},$$

$$\hat{W}_k = \left(\begin{bmatrix} Q_i L & 0 \\ 0 & R_{i+1,k} \end{bmatrix} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} \begin{bmatrix} M_{f,i} M_{f,i}^T L & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (351)$$

$$\hat{W}_k = \begin{bmatrix} (Q_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T) L & 0 \\ 0 & R_{i+1,k} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\hat{W}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Calculando $\sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k A_k]$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k A_k] &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & -F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} + H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (352)$$

Daí, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& \hat{Q} + \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k A_k] \\
&= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{f,i}] & - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{e,i+1}] \\ - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{e,i+1}^T N_{f,i}] & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} (N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} + N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)})] \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & - \sum_{k=1}^L F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} \\ - \sum_{k=1}^L E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & \sum_{k=1}^L [E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} + H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{f,i} & - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{e,i+1} \\ - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{e,i+1}^T N_{f,i} & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)}] \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & - F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} \\ - E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}. \tag{353}
\end{aligned}$$

Calculando $A_k^T \hat{W}_k b_k$, tem-se:

$$\begin{aligned}
A_k^T \hat{W}_k b_k &= \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k} \end{bmatrix}. \tag{354}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, calculando $\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k} &= \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T & 0 \\ N_{e,i+1}^T & N_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ N_{e,i+1}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \end{bmatrix}. \tag{355}
\end{aligned}$$

A partir dos resultados de (354) e (355), tem-se:

$$\sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b_k + \hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k}] = \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k} \\ + \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ N_{e,i+1}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{356}$$

Sabe-se que $x := \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, então tem-se que $\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix}$. Assim, é possível reescrever a Equação (349) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} \\
 = & \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{f,i} & - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{e,i+1} \\ - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{e,i+1}^T N_{f,i} & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. + \begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & - F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} \\ - E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (357) \\
 & \times \left(\begin{bmatrix} - F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i \hat{x}_{i|i} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} z_{i+1,k}] \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] \begin{bmatrix} - N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ N_{e,i+1}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \end{bmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Pode-se reescrever a Equação (357) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \bar{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i} & - \bar{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{e,i+1} \\ - \bar{\lambda}_i N_{e,i+1}^T N_{f,i} & \bar{N}_{h,i+1}^T \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. + \begin{bmatrix} F_i^T Q_i F_i & - F_i^T Q_i E_{i+1} \\ - E_{i+1}^T Q_i F_i & E_{i+1}^T Q_i E_{i+1} + \bar{H}_{i+1}^T \bar{R}_{i+1}^{-1} \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
 & \times \left(\begin{bmatrix} - F_i^T Q_i F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T Q_i F_i \hat{x}_{i|i} + \bar{H}_{i+1}^T \bar{R}_{i+1}^{-1} \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix} + \bar{\lambda}_i \begin{bmatrix} - N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ N_{e,i+1}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \end{bmatrix} \right). \quad (358)
 \end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_i &:= \sum_{k=1}^L \left[\frac{1}{L} \hat{\mathcal{Q}}_{i,k}^{-1} \right], \quad \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad \bar{N}_{h,i+1} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i+1}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i+1}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}, \\
\bar{R}_{i+1} &:= \begin{bmatrix} \hat{R}_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{R}_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1,1} \\ z_{i+1,2} \\ \vdots \\ z_{i+1,L} \end{bmatrix} \quad (359)
\end{aligned}$$

Considere as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{Q}}_i &:= \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathcal{R}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{R}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{E}_{i+1} := \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{e,i+1} \end{bmatrix}, \\
\hat{F}_i &:= \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{H}_{i+1} \\ \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix}, \quad Z_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{z}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (360)
\end{aligned}$$

Assim, é possível reescrever a Equação (358) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} \\ -\hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (361)
\end{aligned}$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (361) por $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} \\ -\hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (362)
\end{aligned}$$

Substituindo $A = P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i$, $B = -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1}$, $C = -\hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i$ e $D = \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1}$, na Equação (362) e, aplicando o Lema A.1.3, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (363)$$

Daí, segue que:

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = (D - CA^{-1}B)^{-1}(CA^{-1}\hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1}). \quad (364)$$

Onde,

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (\hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{E}_{i+1} - \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{E}_{i+1} \\ &\quad + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1})^{-1} \\ &= (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i \hat{E}_{i+1} - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \\ &\quad \times \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{E}_{i+1}) + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1})^{-1} \\ &= (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \\ &\quad \times \hat{F}_i^T \hat{Q}_i) \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (365)$$

Observe que, $\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i = (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1}$, pelo Lema A.1.1. Portanto,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1})^{-1}. \quad (366)$$

Definindo $P_{i+1|i+1} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$ e substituindo na Equação (366):

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1})^{-1}. \quad (367)$$

A Equação (367) pode ser escrita na forma de blocos matriciais, como segue:

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (368)$$

Retomando o cálculo da Equação (364), tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} (-\hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ &\quad + \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1}). \end{aligned} \quad (369)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i) \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ &+ P_{i+1|i+1} \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1}.\end{aligned}\quad (370)$$

Aplicando novamente o Lema A.1.1, segue que a Equação (370) pode ser reescrita como:

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{Z}_{i+1}. \quad (371)$$

Ou ainda, na forma de blocos matriciais,

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{Z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (372)$$

Como as equações desenvolvidas nesta subseção, tanto do filtro, como da covariância do erro de estimação, são semelhantes às do caso padrão (com uma equação de medida), a condição inicial segue a mesma de (CAMPOS, 2004), considerando as matrizes e vetor aumentados $\bar{N}_{h,i+1}$, \bar{H}_{i+1} , \bar{R}_{i+1} e \bar{z}_{i+1} .

□

4.1.3 Estimativa Preditora Nominal

Seja $J(x_i, x_{i+1})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (299), denotado por:

$$J(x_i, x_{i+1}) = \|x_i - \hat{x}_{i|i-1}\|_{P_{i|i-1}^{-1}}^2 + \|E_{i+1}x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i,k} - H_{i,k}x_i\|_{R_{i,k}^{-1}}^2. \quad (373)$$

Para atualizar a estimativa preditora de x_i , dada por $\hat{x}_{i|i-1}$, para $\hat{x}_{i+1|i}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{x_i, x_{i+1}} \left[\|x_i - \hat{x}_{i|i-1}\|_{P_{i|i-1}^{-1}}^2 + \|E_{i+1}x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i,k} - H_{i,k}x_i\|_{R_{i,k}^{-1}}^2 \right]. \quad (374)$$

Estabelecido o Problema (374), pode-se enunciar o teorema a seguir.

Teorema 4.1.3. *Suponha que E_i possui posto coluna pleno e $k = 1 \dots L$ a quantidade de equações de medida, para todo $i \geq 0$. A estimativa preditora ótima de x_i num cenário de fusão de dados, dada por $\hat{x}_{i|i-1}$, pode ser obtida pelo seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$\begin{aligned} P_{0|-1} &:= P_0, \\ \hat{x}_{0|-1} &:= 0. \end{aligned} \quad (375)$$

Passo 1:

$$P_{i+1|i} := \left(\begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T & -F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \\ -\bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T & \bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (376)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &:= P_{i+1|i} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T & -F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \\ -\bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T & \bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (377)$$

Onde,

$$\bar{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_{i+1} := \begin{bmatrix} R_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1,1} \\ z_{i+1,2} \\ \vdots \\ z_{i+1,L} \end{bmatrix}. \quad (378)$$

Demonstração. Pode-se reescrever o Funcional (373) na forma de blocos matriciais:

$$\begin{aligned} J(x_i, x_{i+1}) &= \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{k=1}^L \left[\left(\begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ H_{i,k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_{i,k} - H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \right. \\ &\times \left. \left(\begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ H_{i,k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_{i,k} - H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right) \right]. \end{aligned} \quad (379)$$

Comparando a Equação (15) com o Funcional (379), são obtidas as seguintes identificações:

$$\begin{aligned} x &\leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, A_k \leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i,k} \end{bmatrix}, b_k \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_{i,k} - H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}, \\ Q &\leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (380)$$

Como foi visto no Lema 2.1.1, a solução do Problema (374) será encontrada ao substituir as matrizes identificadas em (380) na seguinte equação:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k. \quad (381)$$

Assim, calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k$, tem-se:

$$\sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k = \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & H_{i,k}^T \\ E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ H_{i,k} & 0 \end{bmatrix} \quad (382)$$

$$= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i + H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k} & -F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (383)$$

Assim, calculando $Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k$ tem-se:

$$Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k = \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i + H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}] & \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1}] \\ \sum_{k=1}^L [-E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1}] \end{bmatrix}. \quad (384)$$

Da mesma forma, calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k$, tem-se:

$$\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k = \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & H_{i,k}^T \\ E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_{i,k} - H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \quad (385)$$

$$= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} - (F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i + H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}) \hat{x}_{i|i-1} \\ E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \quad (386)$$

Como $x := \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, então tem-se que $\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} - \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix}$. Assim, a Equação (381) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} - \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i + H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}] & \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1}] \\ \sum_{k=1}^L [-E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1}] \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} - F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} - H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1}] \\ \sum_{k=1}^L [E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}] \end{bmatrix}. \quad (387)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (387) por $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}] & -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} - H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1}] - F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (388)$$

Substituindo $A = P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}]$, $B = -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1}$, $C = -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i$ e $D = E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1}$, em (388) e, aplicando Lema A.1.3, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \\ \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} - H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1}] - F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} - H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1}] - F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (389)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \left(CA^{-1} (F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} - \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k}]) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}] \hat{x}_{i|i-1} + E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \right). \end{aligned} \quad (390)$$

Onde,

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} - E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}])^{-1} \\ &\quad \times F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1})^{-1} \\ &= (E_{i+1}^T (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}])^{-1} \\ &\quad \times F_i^T Q_i^{-1}) E_{i+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (391)$$

Observe que, $Q_i^{-1} - Q_i^{-1}F_i(P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}] + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} = (Q_i + F_i(P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}])^{-1} F_i^T)^{-1}$, pelo Lema A.1.1. Portanto,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (E_{i+1}^T (Q_i + F_i(P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}])^{-1} F_i^T)^{-1} E_{i+1})^{-1}. \quad (392)$$

Onde,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}] &= \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i,1}^T & H_{i,2}^T & \cdots & H_{i,L}^T \end{bmatrix}}_{\bar{H}_i^T} \underbrace{\begin{bmatrix} R_{i,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i,2}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i,L}^{-1} \end{bmatrix}}_{\bar{R}_i^{-1}} \\ &\quad \times \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i,1} \\ H_{i,2} \\ \vdots \\ H_{i,L} \end{bmatrix}}_{\bar{H}_i}. \end{aligned} \quad (393)$$

Daí, seque que a Equação (392) ficará da seguinte forma:

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (E_{i+1}^T (Q_i + F_i(P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} F_i^T)^{-1} E_{i+1})^{-1}. \quad (394)$$

Pelo Lema A.1.1, a Equação (394) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (E_{i+1}^T (Q_i + (F_i P_{i|i-1} - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \\ &\quad \times \bar{H}_i P_{i|i-1}) F_i^T)^{-1} E_{i+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (395)$$

Definindo $P_{i+1|i} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned} P_{i+1|i} &= (E_{i+1}^T (Q_i + (F_i P_{i|i-1} - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \\ &\quad \times \bar{H}_i P_{i|i-1}) F_i^T)^{-1} E_{i+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (396)$$

Portanto, a Equação (396) pode ser escrita na forma de blocos matriciais:

$$P_{i+1|i} = \left(\begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T & -F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \\ -\bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T & \bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (397)$$

Retomando o cálculo da Equação (390), tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i}(E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}])^{-1} \\ &\times (\sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} - H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1}] - F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}).\end{aligned}\quad (398)$$

Onde,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k}] &= \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i,1}^T & H_{i,2}^T & \cdots & H_{i,L}^T \end{bmatrix}}_{\bar{H}_i^T} \underbrace{\begin{bmatrix} R_{i,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i,2}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i,L}^{-1} \end{bmatrix}}_{\bar{R}_i^{-1}} \\ &\times \underbrace{\begin{bmatrix} z_{i,1} \\ z_{i,2} \\ \vdots \\ z_{i,L} \end{bmatrix}}_{\bar{z}_i}.\end{aligned}\quad (399)$$

Daí, segue de (399) que a Equação (398), terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} \\ &\times (\bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{z}_i - \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1} - F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1},\end{aligned}\quad (400)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} \\ &\times (\bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{z}_i - \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i \\ &+ F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1}) F_i \hat{x}_{i|i-1}.\end{aligned}\quad (401)$$

Aplicando novamente o Lema A.1.1, segue que a Equação (401) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} \\ &\times \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} (\bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i + F_i (P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1},\end{aligned}\quad (402)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} \\ &\times \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} (\bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R} + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \\ &\times \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}.\end{aligned}\quad (403)$$

Pelo Lema A.1.2, considerando $A = Q_i$, $B = F_i$, $C = P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i$ e $D = F_i^T$, tem-se que:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i + F_i (P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} F_i^T)^{-1} \\ &\times F_i (P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} (\bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R} + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \\ &\times \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1},\end{aligned}\quad (404)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R} + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} \\ &\times F_i (P_{i|i-1}^{-1} + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i)^{-1} \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} (\bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R} + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \\ &\times \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}.\end{aligned}\quad (405)$$

Aplicando novamente o Lema A.1.2, sendo $A = P_{i|i-1}^{-1}$, $B = \bar{H}_i^T$, $C = \bar{R}_i$ e $D = \bar{H}_i$, tem-se que a Equação (405) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R} + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} \\ &\times F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} (\bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (\bar{R} + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \\ &\times \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}.\end{aligned}\quad (406)$$

Ou ainda, na forma de blocos matriciais,

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T & -F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \\ -\bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T & \bar{R}_i + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \bar{z}_i - \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (407)$$

□

4.1.4 Estimativa Preditora Robusta

Seja $J(x_i, x_{i+1}, \delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i,k})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (327), denotado por:

$$\begin{aligned}J(x_i, x_{i+1}, \delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i,k}) &= \|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i-1}^{-1}}^2 + \|(E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 \\ &+ \sum_{k=1}^L \|z_{i,k} - (H_{i,k} + \delta H_{i,k})x_i\|_{R_{i,k}^{-1}}^2.\end{aligned}\quad (408)$$

Para atualizar a estimativa preditora robusta de x_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{x}_{i|i}$, para $\hat{x}_{i+1|i+1}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\{x_i, x_{i+1}\}} \max_{\{\delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i,k}\}} \left[\|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i-1}^{-1}}^2 + \|(E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i,k} - (H_{i,k} + \delta H_{i,k})x_{i+1}\|_{R_{i,k}^{-1}}^2 \right]. \quad (409)$$

Para resolver o Problema (409), será proposto o teorema a seguir.

Teorema 4.1.4. *Suponha que \hat{E}_i possui posto coluna pleno e $k = 1, \dots, L$ a quantidade de modelos de medida, para todo $i \geq 0$. A estimativa preditora robusta de x_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{x}_{i|i-1}$, que pode ser obtida pelo seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$\begin{aligned} P_{0|-1} &:= P_0, \\ \hat{x}_{0|-1} &:= 0. \end{aligned} \quad (410)$$

Passo 1: Se $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i}^{(k)} = 0$, então $\hat{\lambda}_{i,k} := 0$. Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{i,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, mostrada no Lema 2.1.1, no intervalo:

$$\hat{\lambda}_{i,k} > \lambda_{n,i}^{(k)} := \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L}Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)} \end{bmatrix} \right\|. \quad (411)$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_{i,k} \neq 0$, substitua os parâmetros $\{Q_i, R_{i,k}, E_{i+1}, F_i, \bar{H}_i, I\}$, pelos parâmetros corrigidos:

$$\hat{Q}_i := \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } Q_i := \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} \quad e \quad \hat{Q}_{i,k} := Q_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T, \quad (412)$$

$$\hat{\mathcal{R}}_i := \begin{bmatrix} \bar{R}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{R}_i := \text{diag} [\hat{R}_{i,k}] \text{ e } \hat{R}_{i,k} := R_{i,k} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i}^{(k)} M_{h,i}^{(k)T}, \quad (413)$$

$$\hat{F}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad (414)$$

$$\hat{E}_{i+1} := \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{e,i+1} \end{bmatrix}, \quad (415)$$

$$\hat{H}_i := \begin{bmatrix} \bar{H}_i \\ \bar{N}_{h,i} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{H}_i := \begin{bmatrix} H_{i,1} \\ H_{i,2} \\ \vdots \\ H_{i,L} \end{bmatrix} \text{ e } \bar{N}_{h,i} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i}^{(L)} \end{bmatrix}. \quad (416)$$

Passo 3: Atualize $\{P_{i|i-1}, \hat{x}_{i|i-1}\}$ para $\{P_{i+1|i}, \hat{x}_{i+1|i}\}$, sendo:

$$P_{i+1|i} := \left(\begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & -\hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \\ -\hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & \hat{\mathcal{R}}_i + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (417)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &:= P_{i+1|i} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & -\hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \\ -\hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & \hat{\mathcal{R}}_i + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (418)$$

Onde,

$$Z_i = \begin{bmatrix} \bar{z}_i \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{z}_i := \begin{bmatrix} z_{i,1} \\ z_{i,2} \\ \vdots \\ z_{i,L} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Reescrevendo o Funcional (408) em forma de blocos matriciais, tem-se:

$$\begin{aligned}
 J(x_i, x_{i+1}, \delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k}) &= \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\
 &+ \sum_{k=1}^L \left[\left(\begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i) & (E_{i+1} + \delta E_{i+1}) \\ (H_{i,k} + \delta H_{i,k}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i)\hat{x}_{i|i-1} \\ (H_{i,k} + \delta H_{i,k})\hat{x}_{i|i-1} - z_{i,k} \end{bmatrix} \right)^T \right. \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{1}{L}Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \left. \left(\begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i) & (E_{i+1} + \delta E_{i+1}) \\ (H_{i,k} + \delta H_{i,k}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i)\hat{x}_{i|i-1} \\ (H_{i,k} + \delta H_{i,k})\hat{x}_{i|i-1} - z_{i,k} \end{bmatrix} \right) \right]. \quad (419)
 \end{aligned}$$

Comparando o Funcional (419) com os parâmetros dados pelo Lema 2.1.1 são obtidas as seguintes identificações:

$$\begin{aligned}
 x &\leftarrow \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, Q \leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L}Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} \end{bmatrix}, b_k \leftarrow \begin{bmatrix} F_i\hat{x}_{i|i-1} \\ H_{i,k}\hat{x}_{i|i-1} - z_{i,k} \end{bmatrix}, \\
 \delta b_k &\leftarrow \begin{bmatrix} \delta F_i\hat{x}_{i|i-1} \\ \delta H_{i,k}\hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i}\hat{x}_{i|i-1} \\ N_{h,i}^{(k)}\hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}, \\
 \delta A_k &\leftarrow \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta E_{i+1} \\ \delta H_{i,k} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ N_{h,i}^{(k)} & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_k &\leftarrow \begin{bmatrix} F_i & E_{i+1} \\ H_{i,k} & 0 \end{bmatrix}, G_k \leftarrow \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)} \end{bmatrix}, \\
 N_{a,k} &\leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ N_{h,i}^{(k)} & 0 \end{bmatrix}, N_{b,k} \leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i}\hat{x}_{i|i-1} \\ N_{h,i}^{(k)}\hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}, \\
 \Delta &\leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i} \end{bmatrix}. \quad (420)
 \end{aligned}$$

Como foi visto no Lema 2.1.1, a solução do Problema (409) será dada por:

$$\hat{x} = \left[\hat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b_k + \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}]. \quad (421)$$

Sendo $\hat{Q} = Q + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{a,k}]$ e $\hat{W}_k = W_k + W_k G_k (\hat{\lambda}_{i,k} I - G_k^T W_k G_k)^\dagger G_k^T W_k$. Pelo Lema da Inversão de Matrizes tem-se que $\hat{W}_k^{-1} = W_k^{-1} - G_k \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k^T = W_k^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k G_k^T$. Daí, segue que:

$$\hat{Q} = Q + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{a,k}],$$

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^L \left[\hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} N_{f,i}^T & N_{h,i}^{(k)T} \\ N_{e,i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ N_{h,i}^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \right], \quad (422)$$

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} (N_{f,i}^T N_{f,i} + N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)})] & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{e,i+1}] \\ \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{e,i+1}^T N_{f,i}] & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{e,i+1}^T N_{e,i+1}] \end{bmatrix}.$$

Além disso, tem-se que:

$$\hat{W}_k = (W_k^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k G_k^T)^{-1},$$

$$\hat{W}_k = \left(\begin{bmatrix} Q_i L & 0 \\ 0 & R_{i,k} \end{bmatrix} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} \begin{bmatrix} M_{f,i} M_{f,i}^T L & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)} M_{h,i}^{(k)T} \end{bmatrix} \right)^{-1},$$

$$\hat{W}_k = \begin{bmatrix} (Q_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T) L & 0 \\ 0 & R_{i,k} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i}^{(k)} M_{h,i}^{(k)T} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (423)$$

$$\hat{W}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i,k}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T & H_{i,k}^T \\ E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i & E_{i+1} \\ H_{i,k} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i + H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} H_{i,k} & F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} \\ E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (424)$$

Daí, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\hat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k &= \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} (N_{f,i}^T N_{f,i} + N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)})] & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{e,i+1}] \\ \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{e,i+1}^T N_{f,i}] & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{e,i+1}^T N_{e,i+1}] \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i + H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} H_{i,k}] & \sum_{k=1}^L F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} \\ \sum_{k=1}^L E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & \sum_{k=1}^L E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L \hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{f,i} + \sum_{k=1}^L N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)} & \sum_{k=1}^L \hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{e,i+1} \\ \sum_{k=1}^L \hat{\lambda}_{i,k} N_{e,i+1}^T N_{f,i} & \sum_{k=1}^L \hat{\lambda}_{i,k} N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} H_{i,k}] & F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} \\ E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} \end{bmatrix}. \tag{425}
\end{aligned}$$

Calculando $A_k^T \hat{W}_k b_k$, tem-se:

$$\begin{aligned}
A_k^T \hat{W}_k b_k &= \begin{bmatrix} F_i^T & H_{i,k}^T \\ E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} - z_{i,k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} - H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} z_{i,k} + H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} \\ E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \tag{426}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, calculando $\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k} &= \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} N_{f,i}^T & N_{h,i}^{(k)T} \\ N_{e,i}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} \\ N_{h,i}^{(k)} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \\
&= \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} + N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)} \hat{x}_{i|i-1} \\ N_{e,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \tag{427}
\end{aligned}$$

Substituindo os resultados de (426) e (427), na expressão $\sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b_k + \hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k}]$, tem-se:

$$\sum_{k=1}^L \left[\begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} - H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} z_{i,k} + H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} H_{i,k} \hat{x}_{i|i-1} \\ E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} + N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)} \hat{x}_{i|i-1} \\ N_{e,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right]. \tag{428}$$

Observe que $x := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, então tem-se que $\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix}$. Assim, é

possível reescrever a Equação (421) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{f,i} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)} & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{e,i+1} \\ \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{e,i+1}^T N_{f,i} & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} \end{bmatrix} \right. \\
&+ \left. \begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{R}_{i+1,k}^{-1} H_{i+1,k}] & F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} \\ E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&\times \left(\begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i \hat{x}_{i|i-1} - \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} z_{i,k}] + \sum_{k=1}^L [H_{i,k}^T \hat{R}_{i,k}^{-1} H_{i,k}] \hat{x}_{i|i-1} \\ E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{h,i}^{(k)T} N_{h,i}^{(k)} \hat{x}_{i|i-1} \\ \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{e,i+1}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right). \tag{429}
\end{aligned}$$

Pode-se reescrever a Equação (429), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \bar{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i} + \bar{N}_{h,i}^{(k)T} \bar{N}_{h,i}^{(k)} & \bar{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{e,i+1} \\ \bar{\lambda}_i N_{e,i+1}^T N_{f,i} & \bar{\lambda}_i N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} \end{bmatrix} \right. \\
&+ \left. \begin{bmatrix} F_i^T \mathcal{Q}_i F_i + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i & F_i^T \mathcal{Q}_i E_{i+1} \\ E_{i+1}^T \mathcal{Q}_i F_i & E_{i+1}^T \mathcal{Q}_i E_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&\times \left(\begin{bmatrix} F_i^T \mathcal{Q}_i F_i \hat{x}_{i|i-1} - \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{z}_i + \bar{H}_i^T \bar{R}_i^{-1} \bar{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \\ E_{i+1}^T \mathcal{Q}_i F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right. \\
&+ \left. \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} + \bar{N}_{h,i}^T \bar{N}_{h,i} \hat{x}_{i|i-1} \\ \bar{\lambda}_i N_{e,i+1}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right). \tag{430}
\end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_i &:= \sum_{k=1}^L \left[\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} \right], \quad \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad \bar{N}_{h,i} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_i := \begin{bmatrix} H_{i,1} \\ H_{i,2} \\ \vdots \\ H_{i,L} \end{bmatrix}, \\
\bar{R}_i &:= \begin{bmatrix} \hat{R}_{i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{R}_{i,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_i := \begin{bmatrix} z_{i,1} \\ z_{i,2} \\ \vdots \\ z_{i,L} \end{bmatrix}. \quad (431)
\end{aligned}$$

Considere as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{Q}}_i &:= \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathcal{R}}_i := \begin{bmatrix} \bar{R}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{E}_{i+1} := \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{e,i+1} \end{bmatrix}, \\
\hat{F}_i &:= \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_i := \begin{bmatrix} \bar{H}_i \\ \bar{N}_{h,i} \end{bmatrix}, \quad Z_i := \begin{bmatrix} \bar{z}_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (432)
\end{aligned}$$

Assim, é possível reescrever a Equação (430) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i & \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} - \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \quad (433)
\end{aligned}$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (433) por $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i & \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} - \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \quad (434)
\end{aligned}$$

Substituindo $A = P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i$, $B = \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{E}_{i+1}$, $C = \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i$ e $D = \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{E}_{i+1}$, em (434) e, aplicando o Lema A.1.3, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \\ \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} - \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (435)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1}(-CA^{-1}(\hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} - \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i \\ &+ \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) + \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}). \end{aligned} \quad (436)$$

Onde,

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (\hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{E}_{i+1} - \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \\ &\times \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{E}_{i+1})^{-1} \\ &= (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \\ &\times \hat{F}_i^T \hat{Q}_i) \hat{E}_{i+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (437)$$

Observe que, $\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i = (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \hat{F}_i^T)^{-1}$, pelo Lema A.1.1. Portanto,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{E}_{i+1})^{-1}, \quad (438)$$

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + (\hat{F}_i P_{i|i-1} - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\ &\times \hat{H}_i P_{i|i-1}) \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{E}_{i+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (439)$$

Definindo $P_{i+1|i} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$, então:

$$\begin{aligned} P_{i+1|i} &= (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\ &\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{E}_{i+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (440)$$

Portanto, a Equação (440) pode ser escrita na forma matricial, como:

$$P_{i+1|i} = \left(\begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & -\hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \\ -\hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & \hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (441)$$

Daí, tem-se que a Equação (436), ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i}(-\hat{E}_{i+1}^T \bar{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \bar{Q}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \\ &\times (\hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1} - \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i + \hat{F}_i^T \bar{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ \hat{E}_{i+1}^T \bar{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}),\end{aligned}\quad (442)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \\ &\times (\hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{Z}_i - \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i \\ &+ \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i) \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}.\end{aligned}\quad (443)$$

Aplicando novamente o Lema (A.1.1), na Equação (443), tem-se que:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \\ &\times \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} (\hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1},\end{aligned}\quad (444)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \\ &\times \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} (\hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\ &\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}.\end{aligned}\quad (445)$$

Aplicando o Lema A.1.2, considerando $A = \hat{Q}_i^{-1}$, $B = \hat{F}_i$, $C = P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i$ e $D = \hat{F}_i^T$, tem-se que:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \\ &\times \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} (\hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\ &\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1},\end{aligned}\quad (446)$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\
&\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} (\hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\
&+ P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\
&\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}.
\end{aligned} \tag{447}$$

Aplicando novamente o Lema A.1.2, sendo $A = P_{i|i-1}^{-1}$, $B = \hat{H}_i^T$, $C = \hat{\mathcal{R}}_i$ e $D = \hat{H}_i$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\
&\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}}_i + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} (\hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1}) \\
&+ P_{i+1|i} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T - \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}} + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \\
&\times \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1}.
\end{aligned} \tag{448}$$

Ou ainda, na forma de blocos matriciais,

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & -\hat{F}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \\ -\hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{F}_i^T & \hat{\mathcal{R}}_i + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \hat{Z}_i - \hat{H}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{449}$$

□

4.2 Fusão Probabilística

Nesta seção serão desenvolvidos filtros de Kalman para Sistemas Singulares utilizando a técnica MMQRI com fusão de dados probabilística, apresentada na Subseção 2.1.2.

4.2.1 Estimativa Filtrada Nominal

O Sistema (299), para o caso probabilístico, assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
E_{i+1} x_{i+1} &= F_i x_i + w_i, \quad i \geq 0, \\
z_i &= H_{i,k} x_i + v_i, \quad k = 1, \dots, L,
\end{aligned} \tag{450}$$

onde, $H_{i,k}$ são matrizes de diversos modelos, escolhidas por uma cadeia de Markov $\Theta_i = k$ variante no tempo, com distribuição de probabilidade $\pi_{i,k}$.

Seja $J(x_i, x_{i+1})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (450), denotado por:

$$J(x_i, x_{i+1}) = \|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|E_{i+1}x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1} - H_{i+1,k}x_{i+1}\|_{I_{\pi_{i+1,k}}}^2 \quad (451)$$

Para atualizar a estimativa filtrada de x_i num cenário de fusão de dados probabilística, dada por $\hat{x}_{i|i}$, para $\hat{x}_{i+1|i+1}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{x_i, x_{i+1}} \left[\|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|E_{i+1}x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1} - H_{i+1,k}x_{i+1}\|_{I_{\pi_{i+1,k}}}^2 \right]. \quad (452)$$

Desta forma, é preciso demonstrar o teorema a seguir, que dá a solução para o Problema (452).

Teorema 4.2.1. *Suponha que $\begin{bmatrix} E_i \\ \bar{H}_i \end{bmatrix}$ possui posto coluna pleno e $k = 1, \dots, L$ a quantidade de modelos de medida, para todo $i \geq 0$. A estimativa ótima filtrada de x_i no cenário da fusão de dados probabilística, dada por $\hat{x}_{i|i}$, pode ser obtida através do seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$\begin{aligned} P_{0|0} &:= (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{H}_0)^{-1}, \\ \hat{x}_{0|0} &:= P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{z}_0. \end{aligned} \quad (453)$$

Passo 1:

$$P_{i+1|i+1} := \left(\begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{I}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (454)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{I}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (455)$$

Onde,

$$\bar{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{I}_{i+1} := \begin{bmatrix} I\pi_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I\pi_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I\pi_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1} \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (456)$$

Demonstração. Pode-se reescrever o Funcional (451), na forma de blocos matriciais:

$$\begin{aligned} J(x_i, x_{i+1}) &= \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{k=1}^L \left(\begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I\pi_{i+1,k} \end{bmatrix} \\ &\times \left(\begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (457)$$

Comparando a Equação (26) com o Funcional (457), são obtidas as seguintes identificações:

$$\begin{aligned} x &\leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, A_k \leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix}, b \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}, \\ Q &\leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I\pi_{i+1,k} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (458)$$

Como foi visto no Lema 2.1.2, a solução única para o Problema (452) será encontrada ao substituir as matrizes identificadas em (458) na seguinte equação:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L A_k^T W_k b. \quad (459)$$

Assim, calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i & -F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1} + H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k} \end{bmatrix} \quad (460)
\end{aligned}$$

Calculando $Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k$ tem-se:

$$\begin{aligned}
&Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \\
&= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1}] \\ \sum_{k=1}^L [-E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1} + H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}. \quad (461)
\end{aligned}$$

Da mesma forma, calculando $\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (462)
\end{aligned}$$

Observe que, $x := \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, então $\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix}$. Desta forma, a Equação (308) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1}] \\ \sum_{k=1}^L [-E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i] & \sum_{k=1}^L [E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} E_{i+1} + H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}^{-1} \quad (463) \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L [-F_i^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i}] \\ \sum_{k=1}^L [E_{i+1}^T \frac{1}{L} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1}] \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (463) por $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i & -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1}] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (464)$$

Substituindo $A = P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i$, $B = -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1}$, $C = -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i$ e $D = E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}]$, na Equação (464) e, aplicando o Lema A.1.3, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1}] \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (465)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = (D - CA^{-1}B)^{-1}(CA^{-1}F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1}]). \quad (466)$$

Onde,

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} - E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ &+ \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}])^{-1} \\ &= (E_{i+1}^T (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1}) E_{i+1} \\ &+ \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}])^{-1}. \end{aligned} \quad (467)$$

Observe que $Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} = (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1}$, pelo Lema A.1.1. Portanto,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}])^{-1}. \quad (468)$$

Observe que:

$$\sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} H_{i+1,k}] = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i+1,1}^T & H_{i+1,2}^T & \cdots & H_{i+1,L}^T \end{bmatrix}}_{\bar{H}_{i+1}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} I \pi_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \pi_{i+1,L} \end{bmatrix}}_{\bar{I}_{i+1}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}}_{\bar{H}_{i+1}}. \quad (469)$$

A partir de (469), tem-se que a Equação (468) ficará da seguinte forma:

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} E_{i+1} + \bar{H}_{i+1}^T \bar{I}_{i+1} \bar{H}_{i+1})^{-1}. \quad (470)$$

Definindo $P_{i+1|i+1} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$, e reescrevendo a Equação (470) na forma de matrizes em blocos, tem-se:

$$P_{i+1|i+1} = \left(\begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{I}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (471)$$

Retomando o cálculo da Equação (466), tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} (-E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ &\quad + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1}]) \end{aligned} \quad (472)$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T I \pi_{i+1,k} z_{i+1}] &= \underbrace{\begin{bmatrix} H_{i+1,1}^T & H_{i+1,2}^T & \cdots & H_{i+1,L}^T \end{bmatrix}}_{\bar{H}_{i+1}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} I \pi_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \pi_{i+1,L} \end{bmatrix}}_{\bar{I}_{i+1}} \\ &\quad \times \underbrace{\begin{bmatrix} z_{i+1} \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_{i+1} \end{bmatrix}}_{\bar{z}_{i+1}}. \end{aligned} \quad (473)$$

A partir de (473), tem-se que a Equação (472) ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} E_{i+1}^T (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1}) F_i \hat{x}_{i|i} \\ &+ P_{i+1|i+1} \bar{H}_{i+1}^T \bar{I}_{i+1} \bar{z}_{i+1}. \end{aligned} \quad (474)$$

Aplicando novamente o Lema A.1.1, pode-se reescrever a Equação (474) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ &+ P_{i+1|i+1} \bar{H}_{i+1}^T \bar{I}_{i+1} \bar{z}_{i+1}. \end{aligned} \quad (475)$$

Ou ainda, na forma de blocos matriciais,

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{I}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (476)$$

A condição inicial é a mesma apresentada e demonstrada na Subseção 3.2.1.

□

4.2.2 Estimativa Filtrada Robusta

O Sistema (327), para o caso probabilístico, assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} (E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i)x_i + w_i, & i \geq 0 \\ z_i &= (H_{i,k} + \delta H_{i,k})x_i + v_i, & k = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (477)$$

onde, $H_{i,k}$ e $\delta H_{i,k}$ são matrizes e incertezas respectivamente, de diversos modelos, escolhidas por uma cadeia de Markov $\Theta_i = k$ variante no tempo, com distribuição de probabilidade $\pi_{i,k}$.

Seja $J(x_i, x_{i+1}, \delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (477), denotado por

$$\begin{aligned} J(x_i, x_{i+1}, \delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k}) &= \|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 \\ &+ \|(E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 \\ &+ \sum_{k=1}^L \|z_{i+1} - (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k})x_{i+1}\|_{I\pi_{i+1,k}}^2. \end{aligned} \quad (478)$$

Para atualizar a estimativa filtrada robusta de x_i no cenário da fusão de dados probabilística, dada por $\hat{x}_{i|i}$, para $\hat{x}_{i+1|i+1}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{\{x_i, x_{i+1}\}} \max_{\{\delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k}\}} &\left[\|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|(E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1} - (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k})x_{i+1}\|_{I\pi_{i+1,k}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (479)$$

A solução do Problema (479) é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 4.2.2. *Suponha que $\begin{bmatrix} \hat{E}_i \\ \hat{H}_i \end{bmatrix}$, possui posto coluna pleno e $k = 1, \dots, L$ a quantidade de modelos de medida, para todo $i \geq 0$. A estimativa filtrada robusta de x_i no cenário da fusão de dados probabilística, dada por $\hat{x}_{i|i}$, pode ser obtida pelo seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais) Se $M_{h,0}^{(k)} = 0$, então:

$$\begin{aligned} P_{0|0} &:= (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{H}_0)^{-1}, \\ \hat{x}_{0|0} &:= P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{z}_0. \end{aligned} \quad (480)$$

Onde,

$$\bar{I}_0 := \text{diag} \left[I\pi_{0,k} \right]. \quad (481)$$

Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{-1,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, dada pelo Lema 2.1.2, no intervalo $\lambda_{-1,k} > \|M_{h,0}^{(k)T} Ip_{0,k} M_{h,0}^{(k)}\|$, sendo:

$$\hat{I}_{0,k} := (Ip_{0,k}^{-1} - \hat{\lambda}_{-1,k}^{-1} M_{h,0}^{(k)} M_{h,0}^{(k)T})^{-1}, \quad (482)$$

$$\bar{I}_0 := \text{diag} [\hat{I}_{0,k}], \quad (483)$$

$$\bar{N}_{h,0} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,1}} N_{h,0}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,2}} N_{h,0}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,L}} N_{h,0}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad (484)$$

$$P_{0|0} := (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{H}_0 + \bar{N}_{h,0}^T \bar{N}_{h,0})^{-1}, \quad (485)$$

$$\hat{x}_{0|0} := P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{I}_0 \bar{z}_0. \quad (486)$$

Passo 1: Se $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i+1}^{(k)} = 0$, então $\hat{\lambda}_{i,k} := 0$. Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{i,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, dada pelo Lema 2.1.2, no intervalo:

$$\hat{\lambda}_{i,k} > \lambda_{n,i}^{(k)} := \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{L} M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{L} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \right\|. \quad (487)$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_{i,k} \neq 0$, substitua os parâmetros $\{Q_i, I \pi_{i+1,k}, E_{i+1}, F_i, \bar{H}_{i+1}\}$, pelos parâmetros corrigidos:

$$\hat{Q}_i := \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } Q_i := \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} \quad e \quad \hat{Q}_{i,k} := Q_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T, \quad (488)$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{I}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{I}_{i+1} := \text{diag} [\hat{I}_{i+1,k}] \quad e$$

$$\hat{I}_{i+1,k} := (Ip_{i+1,k}^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T})^{-1}, \quad (489)$$

$$\hat{F}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad (490)$$

$$\hat{E}_{i+1} := \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{e,i+1} \end{bmatrix}, \quad (491)$$

$$\hat{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{H}_{i+1} \\ \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix} \text{ e } \bar{N}_{h,i+1} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i+1}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i+1}^{(L)} \end{bmatrix}. \quad (492)$$

Passo 3: Atualize $\{P_{i|i}, \hat{x}_{i|i}\}$ para $\{P_{i+1|i+1}, \hat{x}_{i+1|i+1}\}$, sendo:

$$P_{i+1|i+1} := \left(\begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{I}}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (493)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{I}}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{Z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (494)$$

Onde,

$$Z_{i+1} = \begin{bmatrix} \bar{z}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1} \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (495)$$

Demonstração. Reescrevendo o Funcional (478) na forma de blocos matriciais, tem-se:

$$\begin{aligned} J(x_i, x_{i+1}, \delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1,k}) &= \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{k=1}^L \left[\left(\begin{bmatrix} -(F_i + \delta F_i) & (E_{i+1} + \delta E_{i+1}) \\ 0 & (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i) \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right)^T \right. \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,k} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \left. \left(\begin{bmatrix} -(F_i + \delta F_i) & (E_{i+1} + \delta E_{i+1}) \\ 0 & (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i) \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right) \right]. \end{aligned} \quad (496)$$

Comparando o Funcional (496) com os parâmetros dados pelo Lema 2.1.2 são obtidas as seguintes identificações:

$$\begin{aligned}
 x &\leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, Q \leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L}Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & I\pi_{i+1,k} \end{bmatrix}, b \leftarrow \begin{bmatrix} F_i\hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}, \\
 \delta b_k &\leftarrow \begin{bmatrix} \delta F_i\hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i}\hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \delta A_k &\leftarrow \begin{bmatrix} -\delta F_i & \delta E_{i+1} \\ 0 & \delta H_{i+1,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, \\
 A_k &\leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix}, G_k \leftarrow \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, \\
 N_{a,k} &\leftarrow \begin{bmatrix} -N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, N_{b,k} \leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i}\hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \Delta &\leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}}\Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{497}$$

Como foi visto no Lema 2.1.2, a solução do Problema (479) será dada por:

$$\hat{x} = \left[\hat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b + \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}]. \tag{498}$$

Sendo $\hat{Q} = Q + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{a,k}]$ e $\hat{W}_k = W_k + W_k G_k (\hat{\lambda}_{i,k} I - G_k^T W_k G_k)^\dagger G_k^T W_k$.

Pelo Lema A.1.1 tem-se que $\hat{W}_k^{-1} = W_k^{-1} - G_k \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k^T = W_k^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k G_k^T$. Daí, segue

que:

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= Q + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{a,k}], \\ \hat{Q} &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^L \left[\hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T & 0 \\ N_{e,i+1}^T & N_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \right], \\ \hat{Q} &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{f,i}] & -\sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{e,i+1}] \\ -\sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{e,i+1}^T N_{f,i}] & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} (N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} + N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)})] \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{499}$$

Além disso, tem-se que:

$$\begin{aligned}\hat{W}_k &= (W_k^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} G_k G_k^T)^{-1}, \\ \hat{W}_k &= \left(\begin{bmatrix} Q_i L & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} \begin{bmatrix} M_{f,i} M_{f,i}^T L & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \\ \hat{W}_k &= \begin{bmatrix} (Q_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T) L & 0 \\ 0 & I \pi_{i+1,k}^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix}^{-1}, \\ \hat{W}_k &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{I}_{i+1,k} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{500}$$

Calculando $\sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k A_k]$, tem-se:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k A_k] &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{I}_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & -F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} + H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} H_{i+1,k} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{501}$$

Daí, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& \hat{Q} + \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k A_k] \\
&= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{f,i}] & - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{f,i}^T N_{e,i+1}] \\ - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{e,i+1}^T N_{f,i}] & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} (N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} + N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)})] \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^L F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & - \sum_{k=1}^L F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} \\ - \sum_{k=1}^L E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i & \sum_{k=1}^L [E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} E_{i+1} + H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} H_{i+1,k}] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{f,i} & - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{e,i+1} \\ - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{e,i+1}^T N_{f,i} & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k} N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)}] \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & - F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} \\ - E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} H_{i+1,k}] \end{bmatrix}. \tag{502}
\end{aligned}$$

Calculando $A_k^T \hat{W}_k b$, tem-se:

$$\begin{aligned}
A_k^T \hat{W}_k b &= \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & H_{i+1,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{I}_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} z_{i+1} \end{bmatrix}. \tag{503}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, calculando $\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k} &= \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T & 0 \\ N_{e,i+1}^T & N_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ N_{e,i+1}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \end{bmatrix}. \tag{504}
\end{aligned}$$

A partir dos resultados de (503) e (504), tem-se:

$$\sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b_k + \hat{\lambda}_{i,k} N_{a,k}^T N_{b,k}] = \sum_{k=1}^L \begin{bmatrix} -F_i^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} z_{i+1} \\ + \hat{\lambda}_{i,k} \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ N_{e,i+1}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{505}$$

Sabe-se que $x := \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, então tem-se que $\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix}$. Assim, é possível reescrever a Equação (498) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} \\
 = & \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{f,i} & - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{f,i}^T N_{e,i+1} \\ - \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{e,i+1}^T N_{f,i} & \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] N_{h,i+1}^{(k)T} N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. + \begin{bmatrix} F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & - F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} \\ - E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i & E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] E_{i+1} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} H_{i+1,k}] \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (506) \\
 & \times \left(\begin{bmatrix} - F_i^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T \sum_{k=1}^L [\frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}] F_i \hat{x}_{i|i} + \sum_{k=1}^L [H_{i+1,k}^T \hat{I}_{i+1,k} z_{i+1}] \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}] \begin{bmatrix} - N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ N_{e,i+1}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \end{bmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Pode-se reescrever a Equação (506) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \bar{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i} & - \bar{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{e,i+1} \\ - \bar{\lambda}_i N_{e,i+1}^T N_{f,i} & \bar{N}_{h,i+1}^T \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. + \begin{bmatrix} F_i^T \mathcal{Q}_i F_i & - F_i^T \mathcal{Q}_i E_{i+1} \\ - E_{i+1}^T \mathcal{Q}_i F_i & E_{i+1}^T \mathcal{Q}_i E_{i+1} + \bar{H}_{i+1}^T \bar{I}_{i+1} \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (507) \\
 & \times \left(\begin{bmatrix} - F_i^T \mathcal{Q}_i F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T \mathcal{Q}_i F_i \hat{x}_{i|i} + \bar{H}_{i+1}^T \bar{I}_{i+1} \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix} + \bar{\lambda}_i \begin{bmatrix} - N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ N_{e,i+1}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \end{bmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_i &:= \sum_{k=1}^L \left[\frac{1}{L} \hat{\mathcal{Q}}_{i,k}^{-1} \right], \quad \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad \bar{N}_{h,i+1} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i+1}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i+1}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}, \\
\bar{I}_{i+1} &:= \begin{bmatrix} \hat{I}_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{I}_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{I}_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1} \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (508)
\end{aligned}$$

Considere as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{Q}}_i &:= \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathcal{I}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{I}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{E}_{i+1} := \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{e,i+1} \end{bmatrix}, \\
\hat{F}_i &:= \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{H}_{i+1} \\ \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix}, \quad Z_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{z}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (509)
\end{aligned}$$

Assim, é possível reescrever a Equação (507) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} \\ -\hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} Z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (510)
\end{aligned}$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (510) por $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} \\ -\hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} Z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (511)
\end{aligned}$$

Substituindo $A = P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \bar{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i$, $B = -\hat{F}_i^T \bar{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1}$, $C = -\hat{E}_{i+1}^T \bar{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i$ e $D = \hat{E}_{i+1}^T \bar{\mathcal{Q}}_i \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1,k}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1,k} \hat{H}_{i+1,k}$, na Equação (511) e, aplicando o Lema A.1.3, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{L}}_{i+1} Z_{i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (512)$$

Daí, segue que:

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = (D - CA^{-1}B)^{-1}(CA^{-1}\hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{L}}_{i+1} Z_{i+1}). \quad (513)$$

Onde,

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (\hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{E}_{i+1} - \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{E}_{i+1} \\ &\quad + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{L}}_{i+1} \hat{H}_{i+1})^{-1} \\ &= (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i \hat{E}_{i+1} - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \\ &\quad \times \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{E}_{i+1}) + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{L}}_{i+1} \hat{H}_{i+1})^{-1} \\ &= (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \\ &\quad \times \hat{F}_i^T \hat{Q}_i) \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{L}}_{i+1} \hat{H}_{i+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (514)$$

Observe que $\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i = (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1}$, pelo Lema A.1.1. Portanto,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{L}}_{i+1} \hat{H}_{i+1})^{-1}. \quad (515)$$

Definindo $P_{i+1|i+1} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$ e substituindo na Equação (515), segue que:

$$P_{i+1|i+1} = (\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{L}}_{i+1} \hat{H}_{i+1})^{-1}. \quad (516)$$

A Equação (516) pode ser escrita na forma de blocos matriciais, como segue:

$$P_{i+1|i+1} = \left(\begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{L}}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (517)$$

Retomando o cálculo da Equação (513), tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} (-\hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ &\quad + \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{L}}_{i+1} Z_{i+1}), \end{aligned} \quad (518)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i - \hat{Q}_i \hat{F}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{Q}_i \hat{F}_i)^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i) \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ &+ P_{i+1|i+1} \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} Z_{i+1}.\end{aligned}\quad (519)$$

Aplicando novamente o Lema A.1.1, pode-se reescrever a Equação (519) da seguinte forma:

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{I}}_{i+1} \hat{Z}_{i+1}. \quad (520)$$

Ou ainda, na forma de blocos matriciais,

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{Q}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{I}}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{Z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (521)$$

Como as equações desenvolvidas nesta subseção, tanto do filtro, como da covariância do erro de estimação, são semelhantes às do caso padrão (com uma equação de medida), a condição inicial segue a mesma de (CAMPOS, 2004), considerando as matrizes e vetor aumentados $\bar{N}_{h,i+1}$, \bar{H}_{i+1} , $\bar{\mathcal{I}}_{i+1}$ e \bar{z}_{i+1} .

□

Observação 4.2.1. Os algoritmos de filtragem robusta apresentados neste capítulo retornam facilmente à sua versão nominal quando as suas incertezas são consideradas como zero, ou seja, $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i+1}^{(k)} = 0$.

Observação 4.2.2. Dos algoritmos apresentados neste capítulo, pode-se verificar que para $k = 1$, estes passam a ser os filtros para sistemas singulares encontrados em (CAMPOS, 2004), que foram desenvolvidos utilizando apenas uma equação de medida.

Observação 4.2.3. Os algoritmos desenvolvidos neste capítulo, ao considerarmos $E_{i+1} = I$, recaem nos algoritmos para sistemas no espaço de estados, desenvolvidos no Capítulo 3.

4.3 Exemplos Numéricos

Nesta seção serão apresentados exemplos numéricos para mostrar a efetividade das estimativas filtradas nominais, assim como das estimativas filtradas robustas, para sistemas singulares. Os filtros desenvolvidos neste trabalho, serão comparados com os filtros correspondentes que utilizam uma única medida, simulando uma falha nessa

medida. Nos testes será usado como termo de comparação a raiz do erro médio quadrático (rms). Para todos testes feitos nessa seção, foram utilizados os seguintes parâmetros e incertezas:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (522)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.04 & 0.06 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 1.3 & 0.7 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix}, N_f = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.13 \end{bmatrix},$$

$$M_{h,1} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}, M_{h,2} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}, M_{h,3} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad (523)$$

$$N_{h,1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, N_{h,2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 28.18 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, N_{h,3} = \begin{bmatrix} 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 28.19 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1 \end{bmatrix}.$$

Os exemplos numéricos utilizados foram baseados nos testes feitos em (ISHIHARA et al., 2006), e adaptados para um caso onde são utilizados 3 modelos de medidas.

Para a simulação da estimativa filtrada robusta no cenário da fusão ponderada, apresentada na Subseção 3.1.2, foram considerados os parâmetros apresentados em (522), as matrizes de incertezas dadas em (523) e as variâncias dos ruídos dos modelos de medida a seguir:

$$R_1 = 0.18, R_2 = 0.16, R_3 = 0.17. \quad (524)$$

Foi feito um estudo comparativo entre a estimativa filtrada robusta proposta por (ISHIHARA et al., 2006) e a estimativa filtrada robusta no cenário da fusão ponderada, que pode ser visto na Figura 5. Neste caso, o parâmetro H_1 e suas incertezas, usados no filtro de (ISHIHARA et al., 2006), estão simulando uma falha. As curvas foram obtidas de $i = 0, \dots, 100$ para cada passo recursivo de 1000 simulações de Monte Carlo.

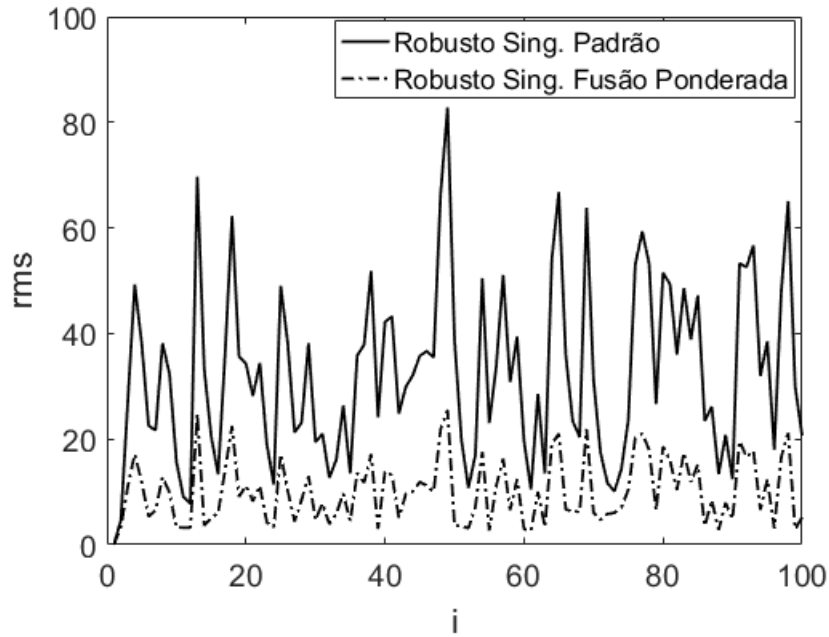


Figura 5 – Comparação entre o filtro robusto singular com um único modelo de medida e o filtro robusto singular no cenário da fusão de dados ponderada.

Observe na Figura 5, que o filtro robusto singular padrão apresenta um maior intervalo de variação da raiz do erro quadrático médio (rms), além de picos maiores, comparado ao filtro singular no cenário da fusão de dados ponderada. Portanto, no teste apresentado, o filtro robusto singular no cenário da fusão de dados ponderada, proposto neste trabalho, tem melhor performance do que o filtro robusto encontrado em (ISHIHARA et al., 2006).

Da mesma forma, foi testado o algoritmo da estimativa filtrada robusta no cenário da fusão probabilística, apresentado na Subseção 3.2.2 considerando os parâmetros apresentados em (522), as incertezas apresentadas em (523), variância do ruído do modelo de medida, a matriz de probabilidade de transição de modelos de medida e valores iniciais da distribuição de probabilidade de Θ_i a seguir:

$$R = 0.16, \quad Pm = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.45 & 0.45 \\ 0.1 & 0.45 & 0.45 \\ 0.1 & 0.45 & 0.45 \end{bmatrix}, \quad (525)$$

$$p_1(0) = 0.05, \quad p_2(0) = 0.475, \quad p_3(0) = 0.475,$$

para valores randômicos de $\Theta_i \in \{1, 2, 3\}$.

Foi feito um estudo comparativo entre a estimativa filtrada robusta proposta em (ISHIHARA et al., 2006) e a estimativa filtrada robusta no cenário da fusão probabilística, que pode ser visto na Figura 6. Assim como no caso do filtro anterior, o parâmetro H_1

e suas incertezas, que foram utilizados no filtro robusto de (ISHIHARA et al., 2006) estão simulando uma falha. As curvas foram obtidas de $i = 0, \dots, 100$ para cada passo recursivo de 1000 simulações de Monte Carlo.

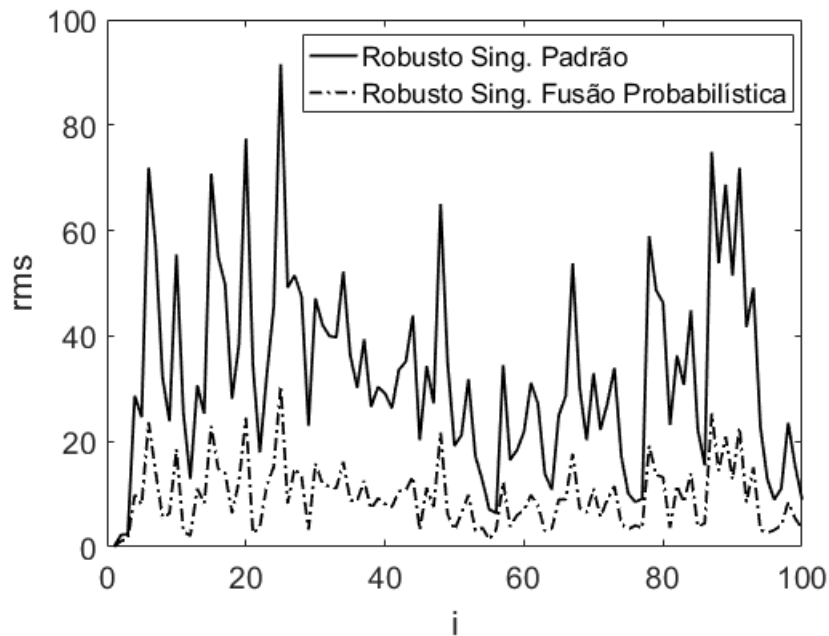


Figura 6 – Comparação entre o filtro robusto singular com um único modelo de medida e o filtro robusto singular no cenário da fusão de dados probabilística.

Observe na Figura 6, que o filtro robusto singular padrão apresenta um maior intervalo de variação da raiz do erro quadrático médio (rms), além de picos maiores, comparado ao filtro robusto singular no cenário da fusão de dados probabilística. Portanto, no teste apresentado, o filtro robusto singular no cenário da fusão de dados probabilística, proposto neste trabalho, tem melhor performance do que o filtro robusto singular encontrado em (ISHIHARA et al., 2006).

5 Filtragem Robusta Para SLSM Num Cenário de Fusão de Dados

Neste capítulo, serão desenvolvidos filtros de Kalman para os SLSM, tanto para o caso nominal, quanto para o caso robusto, num cenário de fusão de dados. Os teoremas que dão origem aos filtros para SLSM, apresentados neste capítulo, são contribuições deste trabalho para a teoria de filtragem.

5.1 Fusão Ponderada

Nesta seção serão desenvolvidos filtros de Kalman para SLSM, utilizando a técnica MMQI com fusão dados ponderada, apresentada na Subseção 2.1.1.

5.1.1 Estimativa Filtrada Nominal

Considere o sistema formado pelas Equações (38) e (39), agora com vários modelos de medida. Desta forma, é dado o seguinte SLSM, sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F_{i,\theta_i} x_i + G_{i,\theta_i} u_i, & i \geq 0, \\ y_i^{(k)} &= H_{i,\theta_i}^{(k)} x_i + D_{i,\theta_i}^{(k)} w_i^{(k)}, & k = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (526)$$

Observe que, o Sistema (526) possui as mesmas características do sistemas formado pelas Equações (38) e (39), com exceção da equação de medida. Portanto, tem-se que o sistema aumentado, baseado no Sistema (526), será dado por:

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= \mathcal{F}_i z_i + \psi_i, & i \geq 0, \\ y_i^{(k)} &= \mathcal{H}_i^{(k)} z_i + \varphi_i^{(k)}, & k = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (527)$$

onde,

$$\mathcal{H}_i^{(k)} = \begin{bmatrix} H_{i,1}^{(k)} & \dots & H_{i,N}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (528)$$

$$\varphi_i^{(k)} = D_{i,\theta_i}^{(k)} w_i^{(k)}. \quad (529)$$

As variâncias dos ruídos $\varphi_i^{(k)}$, serão dadas por $R_i^{(k)} = \mathbb{E}\{\varphi_i^{(k)} \varphi_i^{(k)T}\}$. Daí, segue que:

$$R_i^{(k)} = \mathbb{E}\{D_{i,\theta_i}^{(k)} w_i^{(k)} w_i^{(k)T} D_{i,\theta_i}^{(k)T}\}. \quad (530)$$

Sabendo que $\mathbb{E}\{w_i^{(k)} w_i^{(k)T}\} = W_i^{(k)}$, então

$$R_i^{(k)} = \mathcal{D}_i^{(k)} \mathcal{D}_i^{(k)T}, \quad (531)$$

sendo,

$$\mathcal{D}_i^{(k)} = \begin{bmatrix} D_{i,1}^{(k)} \bar{\pi}_{i,1}^{1/2} W_i^{(k)1/2} & \cdots & D_{i,N}^{(k)} \bar{\pi}_{i,N}^{1/2} W_i^{(k)1/2} \end{bmatrix}. \quad (532)$$

Seja $J(z_i, z_{i+1})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (527), denotado por

$$J(z_i, z_{i+1}) = \|z_i - \hat{z}_{i|i}\|_{\tilde{Z}_{i|i}^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - \mathcal{F}_i z_i\|_{\Pi_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|y_{i+1}^{(k)} - \mathcal{H}_{i+1}^{(k)} z_{i+1}\|_{R_{i+1}^{(k)-1}}^2, \quad (533)$$

sendo z_i e Π_i definidos na Seção 2.4.

Para atualizar a estimativa filtrada de z_i , dada por $\hat{z}_{i|i}$, para $\hat{z}_{i+1|i+1}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{z_i, z_{i+1}} \left[\|z_i - \hat{z}_{i|i}\|_{\tilde{Z}_{i|i}^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - \mathcal{F}_i z_i\|_{\Pi_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1}^{(k)} - \mathcal{H}_{i+1}^{(k)} x_{i+1}\|_{R_{i+1}^{(k)-1}}^2 \right]. \quad (534)$$

Definido o Problema (534), o próximo passo é demonstrar o teorema a seguir.

Teorema 5.1.1. *Seja $k = 1 \dots L$ a quantidade de modelos de medida para todo $i \geq 0$. A estimativa filtrada ótima de z_i , no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{z}_{i|i}$, pode ser obtida através do seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{0|0} &:= (P_0^{-1} + \bar{\mathcal{H}}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{\mathcal{H}}_0)^{-1}, \\ \hat{z}_{0|0} &:= \tilde{Z}_{0|0} \bar{\mathcal{H}}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{y}_0. \end{aligned} \quad (535)$$

Passo 1: Atualize $\{\hat{z}_{i|i}, \tilde{Z}_{i|i}\}$ para $\{\hat{z}_{i+1|i+1}, \tilde{Z}_{i+1|i+1}\}$, da seguinte forma:

$$\tilde{Z}_{i+1|i+1} := \left(\begin{bmatrix} I \\ \bar{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\Pi_i + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i} \mathcal{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ \bar{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (536)$$

$$\hat{z}_{i+1|i+1} := \tilde{Z}_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} I \\ \bar{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\Pi_i + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i} \mathcal{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \bar{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i} \\ \bar{y}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (537)$$

Onde,

$$\bar{\mathcal{H}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i+1}^{(1)} \\ \mathcal{H}_{i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathcal{H}_{i+1}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_{i+1} := \begin{bmatrix} R_{i+1}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i+1}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_{i+1} := \begin{bmatrix} y_{i+1}^{(1)} \\ y_{i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ y_{i+1}^{(L)} \end{bmatrix}. \quad (538)$$

Demonstração. Visto que, o problema de otimização (534) é semelhante ao problema de otimização (64) para o caso de sistemas no Espaço de Estados da Seção 3.1.1, segue que a demonstração é análoga à do Teorema 3.1.1. \square

5.1.2 Estimativa Filtrada Robusta

Considere o Sistema (52), agora com vários modelos de medida. Desta forma, é dado o seguinte SLSM, sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F_{i,\theta_i} + \delta F_{i,\theta_i})x_i + G_{i,\theta_i}u_i, & i \geq 0, \\ y_i^{(k)} &= (H_{i,\theta_i}^{(k)} + \delta H_{i,\theta_i}^{(k)})x_i + D_{i,\theta_i}^{(k)}w_i^{(k)}, & k = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (539)$$

Observe que, o Sistema (539) possui as mesmas características do Sistema (52), com exceção da equação de medida. Assim, as incertezas paramétricas $\delta H_{i,\theta_i}^{(k)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, serão modeladas da seguinte forma:

$$\delta H_{i,\theta_i}^{(k)} = M_{i,\theta_i}^{h(k)} \Delta_{i,\theta_i}^2 N_{i,\theta_i}^{h(k)}. \quad (540)$$

Sendo, $M_{i,\theta_i}^{h(k)}, N_{i,\theta_i}^{h(k)}$, matrizes conhecidas de dimensões apropriadas e Δ_{i,θ_i}^2 uma matriz arbitrária, que satisfaz a seguinte condição $\|\Delta_{i,\theta_i}^2\| \leq 1$.

Portanto, tem-se que o sistema aumentado, baseado no Sistema (539), será dado por:

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= (\mathcal{F}_i + \delta \mathcal{F}_i)z_i + \psi_i, & i \geq 0, \\ y_i^{(k)} &= (\mathcal{H}_i^{(k)} + \delta \mathcal{H}_i^{(k)})z_i + \varphi_i^{(k)}, & k = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (541)$$

onde,

$$\varphi_i^{(k)} = D_{i,\theta_i}^{(k)}w_i^{(k)}, \quad (542)$$

$$\mathcal{H}_i^{(k)} = \begin{bmatrix} H_{i,1}^{(k)} & \cdots & H_{i,\mathcal{N}}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (543)$$

$$\delta \mathcal{H}_i^{(k)} = \begin{bmatrix} \delta H_{i,1}^{(k)} & \cdots & \delta H_{i,\mathcal{N}}^{(k)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_{i,1}^{h(k)} & \cdots & M_{i,\mathcal{N}}^{h(k)} \end{bmatrix}}_{M_{h,i}^{(k)}} \quad (544)$$

$$\times \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{i,1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta_{i,\mathcal{N}}^2 \end{bmatrix}}_{\Delta_{2,i}} \underbrace{\begin{bmatrix} N_{i,1}^{h(k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N_{i,\mathcal{N}}^{h(k)} \end{bmatrix}}_{N_{h,i}^{(k)}}. \quad (545)$$

A variância de $\varphi_i^{(k)}$ continua a mesma apresentada no caso nominal, como segue:

$$R_i^{(k)} = \mathcal{D}_i^{(k)} \mathcal{D}_i^{(k)T}, \quad (546)$$

sendo,

$$\mathcal{D}_i^{(k)} = \begin{bmatrix} D_{i,1}^{(k)} \pi_{i,1}^{1/2} W_i^{(k)1/2} & \cdots & D_{i,\mathcal{N}}^{(k)} \pi_{i,\mathcal{N}}^{1/2} W_i^{(k)1/2} \end{bmatrix}. \quad (547)$$

Seja $J(z_i, z_{i+1}, \delta \mathcal{F}_i, \delta \mathcal{H}_i^{(k)})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (541), denotado por:

$$\begin{aligned} J(z_i, z_{i+1}, \delta \mathcal{F}_i, \delta \mathcal{H}_i^{(k)}) &= \|z_i - \hat{z}_{i|i}\|_{\tilde{Z}_{i|i}^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - (\mathcal{F}_i + \delta \mathcal{F}_i)z_i\|_{\Pi_i^{-1}}^2 \\ &+ \sum_{k=1}^L \|y_{i+1}^{(k)} - (\mathcal{H}_{i+1}^{(k)} + \delta \mathcal{H}_{i+1}^{(k)})z_{i+1}\|_{R_{i+1}^{-1(k)}}^2, \end{aligned} \quad (548)$$

sendo z_i e Π_i definidos na Seção 2.4.

Para atualizar a estimativa filtrada robusta de z_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{z}_{i|i}$, para $\hat{z}_{i+1|i+1}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{\{z_i, z_{i+1}\}} \max_{\{\delta \mathcal{F}_i, \delta \mathcal{H}_{i+1,k}\}} &\left[\|z_i - \hat{z}_{i|i}\|_{\tilde{Z}_{i|i}^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - (\mathcal{F}_i + \delta \mathcal{F}_i)z_i\|_{\Pi_i^{-1}}^2 \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^L \|y_{i+1}^{(k)} - (\mathcal{H}_{i+1}^{(k)} + \delta \mathcal{H}_{i+1}^{(k)})z_{i+1}\|_{R_{i+1}^{-1(k)}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (549)$$

Definido o Problema (549), para solucioná-lo, deve-se enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.1.2. *Seja $k = 1 \dots L$ a quantidade de modelos de medida para todo $i \geq 0$. A estimativa filtrada robusta de z_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{z}_{i|i}$, pode ser obtida pelo seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais) Se $M_{h,0}^{(k)} = 0$, então:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{0|0} &:= (P_0^{-1} + \bar{\mathcal{H}}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{\mathcal{H}}_0)^{-1}, \\ \hat{z}_{0|0} &:= \tilde{Z}_{0|0} \bar{\mathcal{H}}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0.\end{aligned}\tag{550}$$

Onde,

$$\bar{R}_0 := \text{diag} [R_{0,k}].\tag{551}$$

Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{-1,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, dada pelo Lema 2.1.1, no intervalo $\lambda_{-1,k} > \|M_{h,0}^{(k)T} R_{0,k}^{-1} M_{h,0}^{(k)}\|$, sendo:

$$\hat{R}_{0,k} := R_{0,k} - \hat{\lambda}_{-1,k}^{-1} M_{h,0}^{(k)} M_{h,0}^{(k)T},\tag{552}$$

$$\bar{R}_0 := \text{diag} [\hat{R}_{0,k}],\tag{553}$$

$$\bar{N}_{h,0} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,1}} N_{h,0}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,2}} N_{h,0}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,L}} N_{h,0}^{(L)} \end{bmatrix},\tag{554}$$

$$\tilde{Z}_{0|0} := (P_0^{-1} + \bar{\mathcal{H}}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{\mathcal{H}}_0 + \bar{N}_{h,0}^T \bar{N}_{h,0})^{-1},\tag{555}$$

$$\hat{x}_{0|0} := \tilde{Z}_{0|0} \bar{\mathcal{H}}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0.\tag{556}$$

Passo 1: Se $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i+1}^{(k)} = 0$, então $\hat{\lambda}_{i,k} := 0$. Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{i,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, dada pelo Lema 2.1.1, no intervalo:

$$\hat{\lambda}_{i,k} > \lambda_{n,i}^{(k)} := \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{L} M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{L} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \right\|.\tag{557}$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_{i,k} \neq 0$, substitua os parâmetros $\{\Pi_i, R_{i+1,k}, \tilde{Z}_{i|i}, \mathcal{F}_i, \bar{\mathcal{H}}_{i+1}, I\}$, pelos parâmetros corrigidos:

$$X_i := \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \Phi_i := \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \hat{\Pi}_{i,k}^{-1} \quad e \quad \hat{\Pi}_{i,k} := \Pi_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T, \quad (558)$$

$$Y_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{R}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{R}_{i+1} := \text{diag} \left[\hat{R}_{i+1,k} \right] e$$

$$\hat{R}_{i+1,k} := R_{i+1,k} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T}, \quad (559)$$

$$\hat{\mathcal{F}}_i := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad (560)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{H}}_{i+1} \\ \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{\mathcal{H}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i+1}^{(1)} \\ \mathcal{H}_{i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathcal{H}_{i+1}^{(L)} \end{bmatrix} e \quad \bar{N}_{h,i+1} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i+1}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i+1}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad (561)$$

$$\hat{I} := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (562)$$

Passo 3: Atualize $\{\tilde{Z}_{i|i}, \hat{z}_{i|i}\}$ para $\{\tilde{Z}_{i+1|i+1}, \hat{z}_{i+1|i+1}\}$, sendo:

$$\tilde{Z}_{i+1|i+1} := \left(\begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (X_i^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i \tilde{Z}_{i|i} \hat{\mathcal{F}}_i^T) & 0 \\ 0 & Y_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (563)$$

$$\hat{z}_{i+1|i+1} := \tilde{Z}_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (X_i^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i \tilde{Z}_{i|i} \hat{\mathcal{F}}_i^T) & 0 \\ 0 & Y_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{z}_{i|i} \\ \Sigma_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (564)$$

Onde,

$$\Sigma_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{y}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{y}_{i+1} := \begin{bmatrix} y_{i+1}^{(1)} \\ y_{i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ y_{i+1}^{(L)} \end{bmatrix}. \quad (565)$$

Demonstração. Visto que, o problema de otimização (549) é semelhante ao problema de otimização (98) para o caso de sistemas no Espaço de Estados da Seção 3.1.2, segue que a demonstração é análoga à do Teorema 3.1.2. \square

5.1.3 Estimativa Preditora Nominal

Seja $J(z_i, z_{i+1})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (527), denotado por

$$J(z_i, z_{i+1}) = \|z_i - \hat{z}_{i|i-1}\|_{\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - \mathcal{F}_i z_i\|_{\Pi_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|y_{i,k} - \mathcal{H}_{i,k} z_i\|_{R_{i,k}^{-1}}^2. \quad (566)$$

Para atualizar a estimativa preditora de z_i , dada por $\hat{z}_{i|i-1}$, para $\hat{z}_{i+1|i}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{z_i, z_{i+1}} \left[\|z_i - \hat{z}_{i|i-1}\|_{\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - \mathcal{F}_i z_i\|_{\Pi_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|y_{i,k} - \mathcal{H}_{i,k} z_i\|_{R_{i,k}^{-1}}^2 \right]. \quad (567)$$

Estabelecido o Problema (567), a seguir será enunciado o teorema que dá a sua solução.

Teorema 5.1.3. *Seja $k = 1 \dots L$ a quantidade de modelos de medida para todo $i \geq 0$. A estimativa preditora ótima de z_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{z}_{i|i-1}$, pode ser obtida pelo seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{0|-1} &:= P_0, \\ \hat{z}_{0|-1} &:= 0. \end{aligned} \quad (568)$$

Passo 1:

$$\tilde{Z}_{i+1|i} := \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Pi_i + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T & -\mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \bar{\mathcal{H}}_{i,k}^T \\ -\bar{\mathcal{H}}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T & \bar{R}_i^{-1} + \bar{\mathcal{H}}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \bar{\mathcal{H}}_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (569)$$

$$\begin{aligned} \hat{z}_{i+1|i} &:= \tilde{Z}_{i+1|i} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Pi_i + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T & -\mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \bar{\mathcal{H}}_i^T \\ -\bar{\mathcal{H}}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T & \bar{R}_i + \bar{\mathcal{H}}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \bar{\mathcal{H}}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} \\ \bar{y}_i - \bar{\mathcal{H}}_i \hat{z}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (570)$$

Onde,

$$\bar{\mathcal{H}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_i^{(1)} \\ \mathcal{H}_i^{(2)} \\ \vdots \\ \mathcal{H}_i^{(L)} \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_i := \begin{bmatrix} R_i^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_i^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_i^{(L)} \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_i := \begin{bmatrix} y_i^{(1)} \\ y_i^{(2)} \\ \vdots \\ y_i^{(L)} \end{bmatrix}. \quad (571)$$

Demonstração. Visto que, o problema de otimização (567) é semelhante ao problema de otimização (140) para o caso de sistemas no Espaço de Estados da Seção 3.1.3, segue que a demonstração é análoga à do Teorema 3.1.3. \square

5.1.4 Estimativa Preditora Robusta

Seja $J(z_i, z_{i+1}, \delta\mathcal{F}_i, \delta\mathcal{H}_i^{(k)})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (541), denotado por:

$$\begin{aligned} J(z_i, z_{i+1}, \delta\mathcal{F}_i, \delta\mathcal{H}_i^{(k)}) &= \|z_i - \hat{z}_{i|i}\|_{\tilde{Z}_{i|i}^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - (\mathcal{F}_i + \delta\mathcal{F}_i)z_i\|_{\Pi_i^{-1}}^2 \\ &+ \sum_{k=1}^L \|y_{i,k} - (\mathcal{H}_i^{(k)} + \delta\mathcal{H}_i^{(k)})z_i\|_{R_i^{(k)-1}}^2. \end{aligned} \quad (572)$$

Para atualizar a estimativa preditora robusta de z_i , no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{z}_{i|i-1}$, para $\hat{z}_{i+1|i}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{\{z_i, z_{i+1}\}} \max_{\{\delta\mathcal{F}_i, \delta\mathcal{H}_{i,k}\}} &\left[\|z_i - \hat{z}_{i|i}\|_{\tilde{Z}_{i|i}^{-1}}^2 + \|z_i - (\mathcal{F}_i + \delta\mathcal{F}_i)z_i\|_{\Pi_i^{-1}}^2 \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^L \|y_{i,k} - (\mathcal{H}_i^{(k)} + \delta\mathcal{H}_i^{(k)})z_i\|_{R_i^{(k)-1}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (573)$$

Definido o Problema (573), que dá origem à estimativa preditora no cenário da fusão de dados ponderada, para encontrar sua solução, é preciso enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.1.4. *Seja $k = 1 \dots L$ a quantidade de modelos de medida para todo $i \geq 0$. A estimativa preditora robusta de z_i no cenário da fusão de dados ponderada, dada por $\hat{z}_{i|i-1}$, pode ser obtida pelo seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais) Se $M_{h,0}^{(k)} = 0$, então:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{0|-1} &:= P_0^{-1}, \\ \hat{z}_{0|-1} &:= 0. \end{aligned} \quad (574)$$

Passo 1: Se $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i}^{(k)} = 0$, então $\hat{\lambda}_{i,k} := 0$. Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{i,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, dada pelo no Lema 2.1.1, no intervalo:

$$\hat{\lambda}_{i,k} > \lambda_{n,i}^{(k)} := \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L}\Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{(k)-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{L}M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i}^{(k)} \end{bmatrix} \right\| \quad (575)$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_{i,k} \neq 0$, substitua os parâmetros $\{\Pi_i, R_i^{(k)}, \mathcal{F}_i, \bar{\mathcal{H}}_i, I\}$, pelos parâmetros corrigidos:

$$X_i := \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \Phi_i := \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \hat{\Pi}_{i,k}^{-1} \quad e \quad \hat{\Pi}_{i,k} := \Pi_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T, \quad (576)$$

$$Y_i := \begin{bmatrix} \bar{R}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{R}_i := \text{diag} [\hat{R}_{i,k}] \quad e \quad \hat{R}_{i,k} := R_{i,k} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i}^{(k)} M_{h,i}^{(k)T}, \quad (577)$$

$$\hat{\mathcal{F}}_i := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad (578)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{H}}_i \\ \bar{N}_{h,i} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{\mathcal{H}}_i := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_i^{(1)} \\ \mathcal{H}_i^{(2)} \\ \vdots \\ \mathcal{H}_i^{(L)} \end{bmatrix} \quad e \quad \bar{N}_{h,i} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad (579)$$

$$\hat{I} := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (580)$$

Passo 3: Atualize $\{\tilde{Z}_{i|i-1}, \hat{z}_{i|i-1}\}$ para $\{\tilde{Z}_{i+1|i}, \hat{z}_{i+1|i}\}$, sendo:

$$\tilde{Z}_{i+1|i} := \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\Pi}_i^{-1} + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T & -\mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \\ -\hat{\mathcal{H}}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T & Y_i + \hat{\mathcal{H}}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (581)$$

$$\begin{aligned} \hat{z}_{i+1|i} &:= \tilde{Z}_{i+1|i} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\Pi}_i^{-1} + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T & -\mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \\ -\hat{\mathcal{H}}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T & Y_i + \hat{\mathcal{H}}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} \\ \Sigma_i - \hat{\mathcal{H}}_i \hat{z}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (582)$$

Onde,

$$\Sigma_i := \begin{bmatrix} \bar{y}_i \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{y}_i := \begin{bmatrix} y_i^{(1)} \\ y_i^{(2)} \\ \vdots \\ y_i^{(L)} \end{bmatrix}. \quad (583)$$

Demonstração. Visto que, o problema de otimização (573) é semelhante ao problema de otimização (174) para o caso de sistemas no Espaço de Estados da Seção 3.1.4, segue que a demonstração é análoga à do Teorema 3.1.4. \square

5.2 Fusão Probabilística

Nesta seção serão desenvolvidos filtros de Kalman para SLSM utilizando a técnica de fusão de dados probabilística, apresentada na Subseção 2.1.2.

5.2.1 Estimativa Filtrada Nominal

Considere o Sistema (526) para o caso probabilístico. Assim, é dado o seguinte SLSM, sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F_{i,\theta_i} x_i + G_{i,\theta_i} u_i, \quad i \geq 0, \\ y_i &= H_{i,\theta_i}^{(k)} x_i + D_{i,\theta_i} w_i, \quad k = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (584)$$

Percebe-se que, o Sistema (584) possui características semelhantes às do Sistema (526), com exceção de y_i e $D_{i,\theta_i} w_i$. Assim, o sistema aumentado baseado no Sistema (584), será dado por:

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= \mathcal{F}_i z_i + \psi_i, \quad i \geq 0, \\ y_i &= \mathcal{H}_i^{(k)} z_i + \varphi_i, \quad k = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (585)$$

Onde, os parâmetros $\mathcal{H}_i^{(k)}$ são escolhidos por uma cadeia de Markov $\Theta_i = k$ variável no tempo discreto, com distribuição $\pi_{i,k}$.

Sendo,

$$\mathcal{H}_i^{(k)} = \begin{bmatrix} H_{i,1}^{(k)} & \dots & H_{i,\mathcal{N}}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (586)$$

Seja $J(z_i, z_{i+1})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (585), denotado por:

$$J(z_i, z_{i+1}) = \|z_i - \hat{z}_{i|i}\|_{\hat{Z}_{i|i}^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - \mathcal{F}_i z_i\|_{\Pi_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|y_{i+1} - \mathcal{H}_{i+1}^{(k)} z_{i+1}\|_{R_{i+1}\pi_{i+1,k}}^2, \quad (587)$$

sendo que, z_i , Π_i , R_i são dados na Seção 2.4.

Para atualizar a estimativa filtrada robusta de z_i no cenário da fusão de dados probabilística, dada por $\hat{z}_{i|i}$, para $\hat{z}_{i+1|i+1}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\{z_i, z_{i+1}\}} \max_{\{\delta \mathcal{F}_i, \delta \mathcal{H}_{i+1}^{(k)}\}} \left[\|z_i - \hat{z}_{i|i}\|_{\Pi_i^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - (\mathcal{F}_i + \delta \mathcal{F}_i)z_i\|_{\Pi_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|y_{i+1} - (\mathcal{H}_{i+1}^{(k)} + \delta \mathcal{H}_{i+1}^{(k)})z_{i+1}\|_{p_{i+1,k} R_{i+1}^{(k)}}^2 \right]. \quad (588)$$

Para solucionar o Problema (588), é preciso enunciar o teorema a seguir.

Teorema 5.2.1. *Seja $k = 1 \dots L$ a quantidade de modelos de medida para todo $i \geq 0$. A estimativa ótima filtrada de z_i no cenário da fusão de dados probabilística, dada por $\hat{z}_{i|i}$, pode ser obtida através do seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{0|0} &:= (P_0^{-1} + \bar{\mathcal{H}}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{\mathcal{H}}_0)^{-1}, \\ \hat{z}_{0|0} &:= \tilde{Z}_{0|0} \bar{\mathcal{H}}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{y}_0. \end{aligned} \quad (589)$$

Passo 1: Atualize $\{\hat{z}_{i|i}, \tilde{Z}_{i|i}\}$ para $\{\hat{z}_{i+1|i+1}, \tilde{Z}_{i+1|i+1}\}$, da seguinte forma:

$$\tilde{Z}_{i+1|i+1} = \left(\begin{bmatrix} I \\ \bar{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\Pi_i + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i} \mathcal{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ \bar{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (590)$$

$$\hat{z}_{i+1|i+1} = \tilde{Z}_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} I \\ \bar{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\Pi_i + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i} \mathcal{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i} \\ \bar{y}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (591)$$

Onde,

$$\bar{\mathcal{H}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i+1}^{(1)} \\ \mathcal{H}_{i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathcal{H}_{i+1}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_{i+1} := \begin{bmatrix} R_{i+1}\pi_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i+1}\pi_{i+1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{i+1}\pi_{i+1,L} \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_{i+1} := \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (592)$$

Demonstração. Visto que, o problema de otimização (588) é semelhante ao problema de otimização (218) da Seção 3.2.1, segue que a demonstração é análoga à do Teorema 3.2.1. \square

5.2.2 Estimativa Filtrada Robusta

Considere o Sistema (539) para o caso probabilístico. Desta forma, é dado o seguinte SLSM sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F_{i,\theta_i} + \delta F_{i,\theta_i})x_i + G_{i,\theta_i}u_i, \quad i \geq 0, \\ y_i &= (H_{i,\theta_i}^{(k)} + \delta H_{i,\theta_i}^{(k)})x_i + D_{i,\theta_i}w_i, \quad k = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (593)$$

Observe que, o Sistema (539) possui características semelhantes às do Sistema (593), com exceção de y_i e $D_{i,\theta_i}w_i$. Portanto, o sistema aumentado baseado no Sistema (539), será dado por:

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= (\mathcal{F}_i + \delta \mathcal{F}_i)z_i + \psi_i, \quad i \geq 0, \\ y_i &= (\mathcal{H}_i^{(k)} + \delta \mathcal{H}_i^{(k)})z_i + \varphi_i, \quad k = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (594)$$

Onde, os parâmetros e suas incertezas $\mathcal{H}_i^{(k)}, \delta \mathcal{H}_i^{(k)}$ são escolhidos por uma cadeia de Markov $\Theta_i = k$ variável no tempo discreto, com distribuição $\pi_{i,k}$.

Sendo,

$$\mathcal{H}_i^{(k)} = \begin{bmatrix} H_{i,1}^{(k)} & \dots & H_{i,\mathcal{N}}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (595)$$

$$\delta \mathcal{H}_i^{(k)} = \begin{bmatrix} \delta H_{i,1}^{(k)} & \dots & \delta H_{i,\mathcal{N}}^{(k)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_{i,1}^{h(k)} & \dots & M_{i,\mathcal{N}}^{h(k)} \end{bmatrix}}_{M_{h,i}^{(k)}} \quad (596)$$

$$\times \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{i,1}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Delta_{i,\mathcal{N}}^2 \end{bmatrix}}_{\Delta_{2,i}} \underbrace{\begin{bmatrix} N_{i,1}^{h(k)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & N_{i,\mathcal{N}}^{h(k)} \end{bmatrix}}_{N_{h,i}^{(k)}}, \quad (597)$$

Seja $J(z_i, z_{i+1}, \delta \mathcal{F}_i, \delta \mathcal{H}_{i+1}^{(k)})$ o funcional de custo quadrático do Sistema (594), denotado por:

$$\begin{aligned} J(z_i, z_{i+1}, \delta \mathcal{F}_i, \delta \mathcal{H}_{i+1}^{(k)}) &= \|z_i - \hat{z}_{i|i}\|_{\hat{Z}_{i|i}^{-1}}^2 \\ &+ \|z_{i+1} - (\mathcal{F}_i + \delta \mathcal{F}_i)z_i\|_{\Pi_i^{-1}}^2 \\ &+ \sum_{k=1}^L \|y_{i+1} - (\mathcal{H}_{i+1}^{(k)} + \delta \mathcal{H}_{i+1}^{(k)})z_{i+1}\|_{R_{i+1}\pi_{i+1,k}}^2, \end{aligned} \quad (598)$$

sendo que, z_i , Π_i , R_i são dados na Seção.

Para atualizar a estimativa filtrada robusta de z_i no cenário da fusão de dados probabilística, dada por $\hat{z}_{i|i}$, para $\hat{z}_{i+1|i+1}$, é necessário solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\{z_i, z_{i+1}\}} \max_{\{\delta \mathcal{F}_i, \delta \mathcal{H}_{i+1}^{(k)}\}} \left[\|z_i - \hat{z}_{i|i}\|_{\Pi_i^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - (\mathcal{F}_i + \delta \mathcal{F}_i)z_i\|_{\Pi_i^{-1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|y_{i+1} - (\mathcal{H}_{i+1}^{(k)} + \delta \mathcal{H}_{i+1}^{(k)})z_{i+1}\|_{R_{i+1}\pi_{i+1,k}}^2 \right]. \quad (599)$$

Definido o Problema (599), para solucioná-lo será enunciado o teorema a seguir.

Teorema 5.2.2. *Seja $k = 1 \dots L$ a quantidade de modelos de medida para todo $i \geq 0$. A estimativa filtrada robusta de z_i no cenário da fusão de dados probabilística, dada por $\hat{z}_{i|i}$, pode ser obtida pelo seguinte algoritmo recursivo:*

Passo 0: (Condições Iniciais) Se $M_{h,0}^{(k)} = 0$, então:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{0|0} &:= (P_0^{-1} + \bar{\mathcal{H}}_0^T \mathcal{R}_0 \bar{\mathcal{H}}_0)^{-1}, \\ \hat{z}_{0|0} &:= \tilde{Z}_{0|0} \bar{\mathcal{H}}_0^T \mathcal{R}_0 \bar{z}_0. \end{aligned} \quad (600)$$

Onde,

$$\mathcal{R}_0 := \text{diag} [R_0 \pi_{0,k}]. \quad (601)$$

Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{-1,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$, dada pelo no Lema 2.1.2, no intervalo $\lambda_{-1,k} > \|M_{h,0}^{(k)T} R_0 \pi_{0,k} M_{h,0}^{(k)}\|$, sendo:

$$\hat{R}_{0,k} := ((R_0 \pi_{0,k})^{-1} - \hat{\lambda}_{-1,k}^{-1} M_{h,0}^{(k)} M_{h,0}^{(k)T})^{-1}, \quad (602)$$

$$\mathcal{R}_0 := \text{diag} [\hat{R}_{0,k}], \quad (603)$$

$$\bar{N}_{h,0} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,1}} N_{h,0}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,2}} N_{h,0}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,L}} N_{h,0}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad (604)$$

$$\tilde{Z}_{0|0} := (P_0^{-1} + \bar{\mathcal{H}}_0^T \mathcal{R}_0 \bar{\mathcal{H}}_0 + \bar{N}_{h,0}^T \bar{N}_{h,0})^{-1}, \quad (605)$$

$$\hat{x}_{0|0} := \tilde{Z}_{0|0} \bar{\mathcal{H}}_0^T \mathcal{R}_0 \bar{z}_0. \quad (606)$$

Passo 1: Se $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i+1}^{(k)} = 0$, então $\hat{\lambda}_{i,k} := 0$. Senão, encontre os parâmetros escalares ótimos $\hat{\lambda}_{i,k}$, que minimizam a função $G(\lambda_k)$ dada no Lema 2.1.2, no intervalo:

$$\hat{\lambda}_{i,k} > \lambda_{n,i}^{(k)} := \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{L} M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1} \pi_{i+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{L} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \right\|. \quad (607)$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_{i,k} \neq 0$, substitua os parâmetros $\{\Pi_i, R_{i+1} \pi_{i,k}\}$, $\tilde{Z}_{i|i}$, \mathcal{F}_i , $\bar{\mathcal{H}}_{i+1}$, I }, pelos parâmetros corrigidos:

$$X_i := \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \Phi_i := \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \hat{\Pi}_{i,k}^{-1} \text{ e } \hat{\Pi}_{i,k} := \Pi_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T, \quad (608)$$

$$\mathcal{Y}_{i+1} := \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \mathcal{R}_{i+1} := \text{diag} [\hat{R}_{i+1,k}] \text{ e} \\ \hat{R}_{i+1,k} := ((R_{i+1} p_{i+1,k})^{-1} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T})^{-1}, \quad (609)$$

$$\hat{\mathcal{F}}_i := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \\ \sqrt{\bar{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad (610)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{H}}_{i+1} \\ \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{\mathcal{H}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i+1,1} \\ \mathcal{H}_{i+1,2} \\ \vdots \\ \mathcal{H}_{i+1,L} \end{bmatrix} \text{ e } \bar{N}_{h,i+1} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i+1}^{(1)} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i+1}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad (611)$$

$$\hat{I} := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (612)$$

Passo 3: Atualize $\{\tilde{Z}_{i|i}, \hat{z}_{i|i}\}$ para $\{\tilde{Z}_{i+1|i+1}, \hat{z}_{i+1|i+1}\}$, sendo:

$$\tilde{Z}_{i+1|i+1} = \left(\begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (X_i^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i \tilde{Z}_{i|i} \hat{\mathcal{F}}_i^T) & 0 \\ 0 & \mathcal{Y}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (613)$$

$$\hat{z}_{i+1|i+1} = \tilde{Z}_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (X_i^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i \tilde{Z}_{i|i} \hat{\mathcal{F}}_i^T) & 0 \\ 0 & \mathcal{Y}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{z}_{i|i} \\ \Sigma_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (614)$$

Onde,

$$\Sigma_{i+1} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \bar{y}_{i+1} := \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (615)$$

Demonstração. Visto que, o problema de otimização (599) é semelhante ao problema de otimização (218) da Seção 3.2.1, segue que a demonstração é análoga à do Teorema 3.2.1. \square

Observação 5.2.1. Os algoritmos de filtragem robusta apresentados neste capítulo retornam facilmente à sua versão nominal quando as suas incertezas são consideradas como zero, ou seja, $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i+1}^{(k)} = 0$.

Observação 5.2.2. Dos algoritmos apresentados neste capítulo, pode-se verificar que para $k = 1$, estes passam a ser os filtros para SLSM encontrados em (JESUS, 2011), que foram desenvolvidos utilizando apenas uma equação de medida.

5.3 Exemplos Numéricos

Nesta seção serão apresentados exemplos numéricos para mostrar a efetividade das estimativas filtradas robustas apresentadas neste capítulo, para SLSM. Assim como nos capítulos anteriores, a ideia principal é comparar os filtros desenvolvidos neste trabalho, com os filtros correspondentes que utilizam um único modelo de medida, simulando uma falha nesse modelo. Todos os testes serão apresentados utilizando a raiz do erro quadrático médio (rms). Para todos testes feitos nesta seção, foram utilizados a seguinte matriz de probabilidade de transição de parâmetros, parâmetros e incertezas a seguir:

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 0.8731 & 0 \\ 0 & 0.2089 \end{bmatrix},$$

$$H_1^{(1)} = H_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}, H_1^{(2)} = H_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \end{bmatrix}, H_1^{(3)} = H_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (616)$$

$$\begin{aligned}
M_{f,1} &= \begin{bmatrix} 0.13 & 0 \\ 0.13 & 0.13 \end{bmatrix}, M_{f,2} = \begin{bmatrix} 0.13 & 0 \\ 0 & 0.13 \end{bmatrix}, N_{f,1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, N_{f,2} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \\
M_{h,1}^{(1)} &= M_{h,2}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.39 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, M_{h,1}^{(2)} = M_{h,2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.38 & 0 \\ 1.4 & 0 \end{bmatrix}, M_{h,1}^{(3)} = M_{h,2}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.37 & 0 \\ 1.3 & 0 \end{bmatrix}, \\
N_{h,1}^{(1)} &= N_{h,2}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, N_{h,1}^{(2)} = N_{h,2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, N_{h,1}^{(3)} = N_{h,2}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{617}$$

para valores de θ_i gerados randomicamente. A condição inicial x_0 é considerada Gaussiana com média $\begin{bmatrix} 0.196 & 0.295 \end{bmatrix}^T$ e variância $\begin{bmatrix} 0.0384 & 0.0578 \\ 0.0578 & 0.870 \end{bmatrix}$, $\theta_i \in \{1, 2\}$, $\bar{\pi}_1(0) = 0.05$ e $\bar{\pi}_2(0) = 0.95$.

Os exemplos numéricos utilizados foram baseados nos testes feitos em (TERRA et al., 2013), e adaptados para um caso onde são utilizados 3 modelos de medidas.

Para a estimativa filtrada robusta SLSM no cenário da fusão de dados ponderada, apresentada na Subseção 5.1.2, foram considerados os parâmetros apresentados em (616), as incertezas dadas em (617), parâmetros que acompanham os ruídos de medida e suas variâncias:

$$\begin{aligned}
D_1^{(1)} &= D_2^{(1)} = 0.007, D_1^{(2)} = D_2^{(2)} = 0.008, D_1^{(3)} = D_2^{(3)} = 0.006, \\
W^{(1)} &= 0.1, W^{(2)} = 0.2, W^{(3)} = 0.3,
\end{aligned} \tag{618}$$

Foi feita uma comparação entre a estimativa filtrada robusta SLSM no cenário da fusão de dados ponderada e a estimativa filtrada robusta, que utiliza somente um modelo de medida, que pode ser visto na Figura 7. No teste os parâmetros $H_i^{(1)}$ usados no filtro nominal SLSM de (TERRA et al., 2013), assim como suas incertezas, estão simulando uma falha. As curvas foram obtidas de $i = 0, \dots, 100$ para cada passo recursivo de 1000 simulações de Monte Carlo.

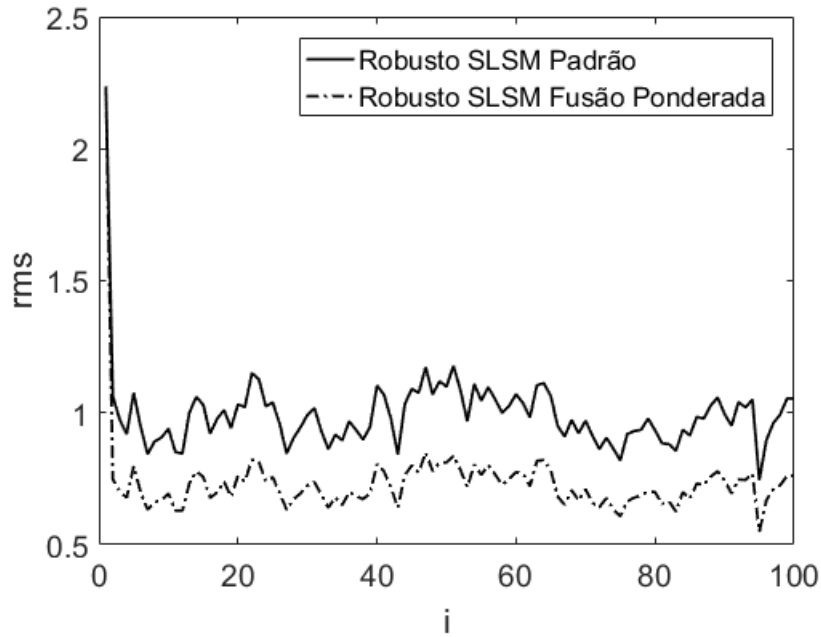


Figura 7 – Comparação entre o filtro robusto SLSM com um único modelo de medida e o filtro robusto SLSM no cenário da fusão de dados ponderada.

Observe na Figura 7, que o filtro robusto SLSM padrão apresenta um maior intervalo de variação da raiz do erro quadrático médio (rms), além de picos maiores, comparado ao filtro singular no cenário da fusão de dados ponderada. Portanto, no teste apresentado, o filtro robusto SLSM no cenário da fusão de dados ponderada, proposto neste trabalho, tem melhor performance do que o filtro robusto encontrado em (TERRA et al., 2013).

Para a estimativa filtrada robusta SLSM no cenário da fusão de dados probabilística, também foi feito um teste. Foram utilizados a matriz de probabilidade de transição de parâmetros e os parâmetros dados em (616), as incertezas dadas em (617), os parâmetros que acompanham o ruído de medida, sua variância e a matriz de probabilidade de transição de modelos de medidas a seguir:

$$D_1 = D_2 = 0.008, \quad W = 0.1, \quad Pm = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.45 & 0.45 \\ 0.1 & 0.45 & 0.45 \\ 0.1 & 0.45 & 0.45 \end{bmatrix}, \quad (619)$$

$$\pi_1(0) = 0.05, \quad \pi_2(0) = 0.475, \quad \pi_3(0) = 0.475.$$

para valores randômicos de $\Theta_i \in \{1, 2, 3\}$.

A comparação feita entre a estimativa filtrada robusta SLSM no cenário da fusão de dados probabilística e a estimativa filtrada robusta, que utiliza somente um modelo de medida, pode ser vista na Figura 8. Na simulação o parâmetro $H_i^{(1)}$ usado no filtro

robusto SLSM de (TERRA et al., 2013), assim como suas incertezas, estão simulando uma falha. As curvas foram obtidas de $i = 0, \dots, 100$ para cada passo recursivo de 1000 simulações de Monte Carlo.

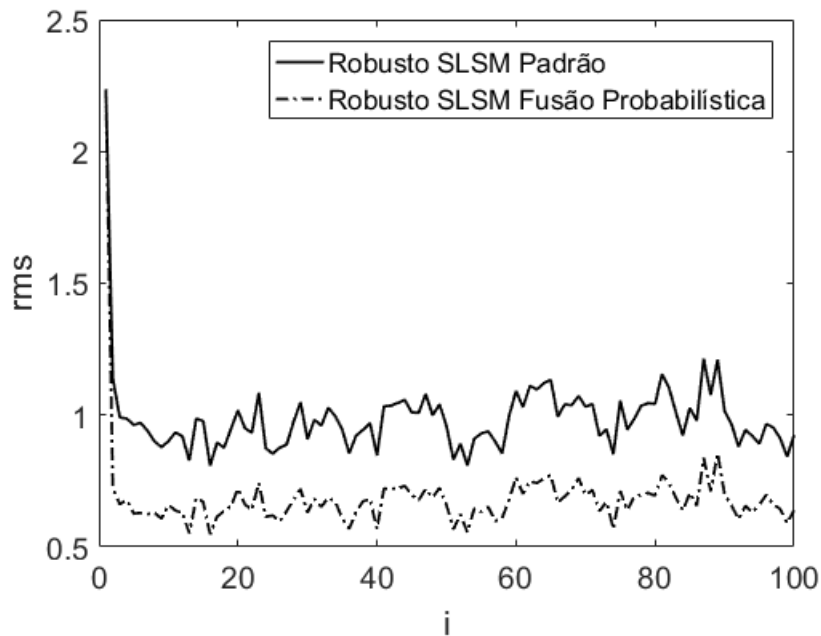


Figura 8 – Comparação entre o filtro robusto SLSM com um único modelo de medida e o filtro robusto SLSM no cenário da fusão de dados probabilística.

Observe na Figura 8, que o filtro robusto SLSM padrão apresenta um maior intervalo de variação da raiz do erro quadrático médio (rms), além de picos maiores, comparado ao filtro singular no cenário da fusão de dados probabilística. Portanto, no teste apresentado, o filtro robusto SLSM no cenário da fusão de dados probabilística, proposto neste trabalho, tem melhor performance do que o filtro robusto encontrado em (TERRA et al., 2013).

6 Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foram desenvolvidos algoritmos recursivos do tipo Kalman para sistemas no espaço de estados, sistemas singulares e sistemas sujeitos a saltos markovianos, todos num cenário de fusão de dados, para os casos ponderado e probabilístico. Além disso, vale ressaltar o resultado obtido na Subseção 2.1.2, com a modificação da técnica MMQRI com Fusão de Dados Probabilística proposta em (SAYED et al., 2000). Por fim, o estudo apresentado neste trabalho, evidencia a possibilidade dos algoritmos desenvolvidos aqui, serem aplicados em problemas mais gerais onde podem ocorrer falhas em processos de medida.

6.1 Trabalhos Futuros

- Desenvolver a estimativa preditora probabilística para os sistemas em espaços de estados, sistemas singulares e SLSM.
- Desenvolver a estimativa preditora-corretora para as classes de sistemas no espaço de estados, singulares e SLSM.
- Desenvolver algoritmos Array para os filtros desenvolvidos neste trabalho. Com o intuito de melhorar a eficiência numérica dos mesmos.

Referências

- BIANCO, A. F.; ISHIHARA, J. Y.; TERRA, M. H. A deterministic approach for general discrete-time kalman filter for singular systems. In: IEEE. **American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005.** [S.l.], 2005. p. 4045–4050.
- CAMPOS, J. C. T. **Filtragem robusta para sistemas singulares discretos no tempo.** Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2004.
- COSTA, E. F.; SAPORTA, B. D. Linear minimum mean square filters for markov jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, 2017.
- COSTA, O. L. V. Linear minimum mean square error estimation for discrete-time markovian jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 39, n. 8, p. 1685–1689, 1994.
- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. **Discrete-time Markov jump linear systems.** [S.l.]: Springer Science + Business Media, 2006.
- COSTA, O. L. V.; GUERRA, S. Robust linear filtering for discrete-time hybrid markov linear systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 75, n. 10, p. 712–727, 2002.
- COSTA, O. L. V.; GUERRA, S. Stationary filter for linear minimum mean square error estimator of discrete-time markovian jump systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 47, n. 8, p. 1351–1356, 2002.
- HAN, C.; WANG, W. Optimal markov jump linear filter for discrete-time jumping parameter systems with multi-channel observation delays and packet losses. In: IEEE. **Control Conference (CCC), 2017 36th Chinese.** [S.l.], 2017. p. 5344–5349.
- HASAN, M. A.; AZIMI-SADJADI, M. R. Noncausal image modeling using descriptor approach. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing**, IEEE, v. 42, n. 8, p. 536–540, 1995.
- HSIEH, C.-S. Robust state estimation via the descriptor kalman filtering method. In: IEEE. **Control Conference (ASCC), 2013 9th Asian.** [S.l.], 2013. p. 1–6.
- ISHIHARA, J. Y.; TERRA, M. H. Robust state prediction for descriptor systems. **Automatica**, v. 44, n. 8, p. 2185–2190, 2008.
- ISHIHARA, J. Y.; TERRA, M. H.; CAMPOS, J. C. T. Robust kalman filter for descriptor systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 51, n. 8, p. 1354–1354, 2006.
- JESUS, G. Q. de. **Filtragem robusta recursiva para sistemas lineares a tempo discreto com parâmetros sujeitos a saltos Markovianos.** Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011.
- KAILATH, T.; SAYED, A. H.; HASSIBI, B. **Linear Estimation.** Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000. v. 1.

- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. **Journal of basic Engineering**, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.
- KALMAN, R. E.; BUCY, R. S. New results in linear filtering and prediction theory. **Journal of basic engineering**, v. 83, n. 1, p. 95–108, 1961.
- LEI, Z.; DONG-MEI, Z. Multi-rate distributed fusion estimate of sensor networks based on descriptor system. In: IEEE. **Control and Decision Conference (CCDC), 2015 27th Chinese**. [S.l.], 2015. p. 1440–1445.
- LUENBERGER, D. Dynamic equations in descriptor form. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 22, n. 3, p. 312–321, 1977.
- MILLS, J. K.; GOLDENBERG, A. A. Force and position control of manipulators during constrained motion tasks. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, IEEE, v. 5, n. 1, p. 30–46, 1989.
- NIKOUKHAH, R.; WILLSKY, A. S.; LEVY, B. C. Kalman filtering and riccati equations for descriptor systems. **IEEE transactions on automatic control**, IEEE, v. 37, n. 9, p. 1325–1342, 1992.
- QI, W.; ZHANG, P.; DENG, Z. Robust weighted fusion kalman filters for multisensor time-varying systems with uncertain noise variances. **Signal Processing**, Elsevier, v. 99, p. 185–200, 2014.
- SAYED, A. H. A framework for state-space estimation with uncertain models. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 46, n. 7, p. 998–1013, 2001.
- SAYED, A. H.; AL-NAFFOURI, T. Y.; KAILATH, T. Robust estimation for uncertain models in a data fusion. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 33, n. 15, p. 899–904, 2000.
- SIMON, D. **Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006.
- SOUZA, C. E. D.; BARBOSA, K. A. Robust filtering for uncertain linear descriptor systems. In: IEEE. **Control Conference (ECC), 2007 European**. [S.l.], 2007. p. 2867–2874.
- TERRA, M. H.; ISHIHARA, J. Y.; JESUS, G.; CERRI, J. P. Robust estimation for discrete-time markovian jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 58, n. 8, p. 2065–2071, 2013.
- YING, S. Measurement fusion kalman filters for descriptor stochastic systems. In: **Control Conference, 2007. CCC 2007. Chinese**. [S.l.]: IEEE, 2007. p. 775–778.

Apêndices

APÊNDICE A – Resultados Auxiliares

A.1 Lemas de Inversão de Matrizes

Nesta seção serão apresentados alguns resultados de álgebra matricial encontrados em (KAILATH et al., 2000), que foram utilizados nas demonstrações dos filtros desenvolvidos no presente trabalho.

Lema A.1.1. *Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $(A + BCD)$ e $(I + CDA^{-1}B)$ invertíveis, onde B, C e D possuem dimensões compatíveis, então:*

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1}. \quad (\text{A.1})$$

Além disso, caso C seja invertível, então

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

Lema A.1.2. *Sejam A e C matrizes invertíveis, então*

$$(A + BC^{-1}D)^{-1}BC^{-1} = A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}. \quad (\text{A.3})$$

Lema A.1.3. *Sendo A invertível, a seguinte igualdade é válida:*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Da mesma forma, para D invertível, temos:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

APÊNDICE B – Modelagem SVD para Sistemas Singulares

Como os sistemas singulares apresentam uma formulação onde existe uma matriz não inversível, que impossibilita a recursão da equação de estado do sistema, é preciso utilizar a técnica de Decomposição em Valores Singulares (SVD, sigla em inglês), para obter os estados do sistema. Desta forma, neste apêndice é apresentado como é feita a modelagem SVD para sistemas singulares.

Considere o sistema:

$$(E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} = (F_i + \delta F_i)x_i + G_i w_i, \quad i \geq 0, \quad (\text{B.6})$$

$$z_{i,k} = (H_{i,k} + \delta H_{i,k})x_i + v_{i,k}, \quad k = 1, \dots, L. \quad (\text{B.7})$$

Sendo, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ o vetor de estados, $z_{i,k} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ os vetores de saída, $E_{i+1}, F_i, G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H_{i,k} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $w_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}, v_{i,k} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ vetores de ruído de estado e medida, respectivamente. Fazendo a transformação SVD de E_{i+1} , tem-se que a Equação (B.6) ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned} U_i S_i V_i^T x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i)x_i + G_i w_i, \\ U_i S_i V_i^T x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i)V_i V_i^T x_i + G_i w_i. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Definindo, $\bar{x}_i = V_i^T x_i$, tem-se que a Equação (B.8) será dada por:

$$\begin{aligned} U_i S_i \bar{x}_{i+1} &= (F_i + \delta F_i)V_i \bar{x}_i + G_i w_i, \\ S_i \bar{x}_{i+1} &= U_i^T (F_i + \delta F_i)V_i \bar{x}_i + U_i^T G_i w_i \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Escrevendo a Equação (B.9) na forma matricial, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,i+1} \\ \bar{x}_{2,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11,i} & F_{12,i} \\ F_{21,i} & F_{22,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,i} \\ \bar{x}_{2,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{1,i} \\ G_{2,i} \end{bmatrix} w_i \quad (\text{B.10})$$

Ou ainda,

$$\Sigma_i \bar{x}_{1,i+1} = F_{11,i} \bar{x}_{1,i} + F_{12,i} \bar{x}_{2,i} + G_{1,i} w_i \quad (\text{B.11})$$

$$0 = F_{21,i} \bar{x}_{1,i} + F_{22,i} \bar{x}_{2,i} + G_{2,i} w_i \quad (\text{B.12})$$

Se $\det F_{22,i} \neq 0$, então as Equações (B.11) e (B.12) podem ser reescritas como:

$$\bar{x}_{1,i+1} = \Sigma_i^{-1} F_{11,i} \bar{x}_{1,i} + \Sigma_i^{-1} F_{12,i} \bar{x}_{2,i} + \Sigma_i^{-1} G_{1,i} w_i \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{x}_{2,i} = -F_{22,i}^{-1} (F_{21,i} \bar{x}_{1,i} + G_{2,i} w_i) \quad (\text{B.14})$$

A equação de medida ficará da seguinte forma:

$$z_{i,k} = (H_{i,k} + \delta H_{i,k}) V_i V_i^T x_i + v_{i,k} \quad (\text{B.15})$$

$$z_{i,k} = (H_{i,k} + \delta H_{i,k}) V_i \bar{x}_i + v_{i,k} \quad (\text{B.16})$$

Ou ainda,

$$z_{i,k} = \begin{bmatrix} H_{1,i}^{(k)} & H_{2,i}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,i} \\ \bar{x}_{2,i} \end{bmatrix} + v_{i,k} \quad (\text{B.17})$$

$$z_{i,k} = H_{1,i}^{(k)} \bar{x}_{1,i} + H_{2,i}^{(k)} \bar{x}_{2,i} + v_{i,k} \quad (\text{B.18})$$

Considerando $E_{i+1}, F_i, G_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sendo o posto de E_{i+1} igual a n . A partir da Equação (B.10), tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_i \\ 0 \end{bmatrix} \bar{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} F_{11,i} \\ F_{21,i} \end{bmatrix} \bar{x}_i + \begin{bmatrix} G_{1,i} \\ G_{2,i} \end{bmatrix} w_i \quad (\text{B.19})$$

Ou ainda,

$$\Sigma_i \bar{x}_{i+1} = F_{11,i} \bar{x}_i + G_{1,i} w_i \quad (\text{B.20})$$

$$0 = F_{21,i} \bar{x}_i + G_{2,i} w_i \quad (\text{B.21})$$

A equação de medida continua sendo modelada da mesma forma, como mostrado na Equação (B.16) ou Equação (B.18).