



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
PRO-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL
EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

ROMILSON DOS SANTOS SOUZA

**UM ESTUDO DA DINÂMICA POPULACIONAL DA LAGARTA FALSA-MEDIDEIRA
VIA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SISTEMAS FUZZY**

**ILHÉUS-BA
2019**

ROMILSON DOS SANTOS SOUZA

**UM ESTUDO DA DINÂMICA POPULACIONAL DA
LAGARTA FALSA-MEDIDEIRA VIA EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS E SISTEMAS FUZZY**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia
da Universidade Estadual de Santa Cruz, como parte
das exigências para obtenção do título de Mestre em
Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira

ILHÉUS-BA
2019

S729 Souza, Romilson dos Santos.

Um estudo da dinâmica populacional da lagarta Falsa-Medideira via equações diferenciais e sistemas fuzzy / Romilson dos Santos Souza. – Ilhéus, BA: UESC, 2019.

93f. : il.; anexo.

Orientador: Eduardo Silva Palmeira

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Inclui referências.

1. Biomatemática. 2. Crescimento populacional. 3. Espécies. 4. Interação social. 5. Simulação de sistemas (Modelagem). 6. Lógica Fuzzy. I. Título.

CDD 570.15

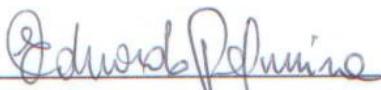
CDU 02:141:005.7

ROMILSON DOS SANTOS SOUZA

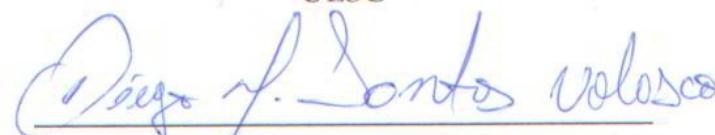
UM ESTUDO DA DINÂMICA POPULACIONAL DA
LAGARTA FALSA-MEDIDEIRA VIA EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS E SISTEMAS FUZZY

Ilhéus-BA, 05/09/2019

Comissão Examinadora


Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira
UESC
(Orientador)


Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus
UESC


Prof. Dr. Diego Habib dos Santos
Nolasco
IFBA

Dedico este trabalho aos meus pais, Ednalva
e Adilon, aos meus irmãos, Lidiane, Josélia,
Chirley e Sérgio, e aos meus sobrinhos.

Agradecimentos

- A Deus pelo dom da vida, pela saúde e proteção.
- Ao professor e orientador Eduardo Silva Palmeira, pelo exemplo de profissionalismo, pelos ensinamentos valiosos e orientações recebidos, pela paciência, disposição e confiança.
- A professora Lilian Karla Figueira Da Silva, pelo suporte fornecido, principalmente relacionado as questões biológicas, pelas orientações, disponibilidade, confiança, pelos rápidos retornos e pela paciência .
- Ao Doutor Adeney de Freitas Bueno, pela sugestão da espécie estudada e fornecimento de material para pesquisa.
- Aos membros da banca de defesa, pela disposição, críticas e sugestões.
- Ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática Computacional, seu corpo docente pelos ensinamentos e incentivos.
- Aos colegas de curso, pela amizade e pelos excelentes momentos de convívio pessoal e profissional, em especial a Uebert Moreira, Allan Gonçalves, Bruno Calazans, Darcio Rocha, Islane Dutra.
- Aos meus pais, meus irmãos e sobrinhos pelo estímulo, confiança, incentivo nas decisões e pelo amor incondicional.
- A todos que, sem dúvida e sem exceção, direta ou indiretamente colaboraram comigo e peço desculpas as pessoas que involuntariamente não foram citadas aqui.

Meus sinceros agradecimentos.

“Saber muito não lhe torna inteligente. A inteligência se traduz na forma que você recolhe, julga, maneja e, sobretudo, onde e como aplica esta informação.”

Carl Sagan

Um Estudo Da Dinâmica Populacional Da Lagarta Falsa-Medideira Via Equações Diferenciais e Sistemas Fuzzy

Resumo

O estudo da dinâmica populacional é muito utilizado como forma de compreender o comportamento de populações de insetos considerados pragas, proporcionando assim projeções quanto ao comportamento populacional da espécie e possibilitando a tomada e decisões em relação ao seu controle. Diversas metodologias são utilizadas para o seu estudo, tais como, modelos via equações diferenciais e modelos estocásticos, contudo, muitas vezes, tais metodologias acabam se tornado limitadas no momento de analisar as subjetividades dos fenômenos naturais. Por exemplo, na determinação do valor da quantidade de indivíduos de uma população, ou valor da taxa de crescimento em um instante de tempo, devido a esses dados serem inexatos, por tal motivo, são definidos geralmente em termos vagos, como, “em torno de”, “entre” e “aproximadamente”. Diversos insetos atacam diferentes tipos de lavouras, dentre eles um que causa muita preocupação aos produtores devido a sua fácil adaptação ao meio e ao clima e por sua característica polífaga é a lagarta *Chrysodeixis includens* (falsa-medideira). Para estudar a sua dinâmica populacional e assim poder compreender o seu comportamento foi utilizado neste trabalho o Modelo Malthusiano via equações diferenciais fuzzy e o modelo malthusiano baseado na base de regras fuzzy. Para estudar a interação entre espécies utilizamos o modelo presa-predador baseado na base de regras fuzzy.

Palavras-chave: Biomatemática. Crescimento populacional. Interação entre espécies. Modelagem matemática. Fuzzy.

A Study Of The Population Fault Of The *Chrysodeixis Includens* Via Fuzzy Differential Equations And Fuzzy Systems

Abstract

The study of population dynamics is widely used as a way to understand the behavior of insect populations considered pests, thus providing projections on the population behavior of the species, allowing the concentration of efforts in planning and making decisions regarding its control. Several methodologies are used for its study, but often, such methodologies have become limited when analyzing the subjectivities of natural phenomena, such as determining the value of the number of individuals in a population or the value of the rate of growth in an instant of time because this data is not accurate, that is, it is generally defined in vague terms as 'around', 'between' and 'approximately'. Several insects attack different types of crops, among them one that causes much concern to growers due to its easy adaptation to the environment and climate and its characteristic Polyphagus is *Chrysodeixis includens* caterpillar. To study the population dynamics of the *Chrysodeixis includens* caterpillar and to understand its population behavior we use in this work the Malthusian Model via Fuzzy Differential Equations and the Malthusian Model based on the fuzzy rule base. To study the interaction between species we use the predator-prey model based on the fuzzy rule base.

Keywords: Biomathematics. Population growth. Interaction between species. Mathematical modeling. *Fuzzy*.

Lista de figuras

Figura 1 – Fases de resolução de problemas (a) na era pré-computador e (b) na era do computador. Fonte: Chapra, 2011.	7
Figura 2 – Princípio Básico do modelo Malthusiano. Fonte: Malthus, 1798.	8
Figura 3 – Princípio Básico do modelo Malthusiano com apenas uma espécie.	9
Figura 4 – Princípio básico do modelo logístico com apenas uma espécie.	10
Figura 5 – Equações representando as variações das populações.	12
Figura 6 – Retrato de fase para o sistema para sistema Predador-Presa para $\alpha = 1, \beta = 1, a = 1$ e $b = 1$.	13
Figura 7 – Desigualdade triangular.	22
Figura 8 – Pseudométrica entre conjuntos. O diagrama ilustra o fato de $dist(A, B) \neq dist(B, A)$.	24
Figura 9 – Psedométrica entre conjuntos.O diagrama inferior ilustra o caso onde é possível ter $dist(A, B) = 0$ e $dist(B, A) \neq 0$.	24
Figura 10 – Gráfico da Função Intervalar $f(x) = [1, 2] \cdot x$.	26
Figura 11 – α -níveis: $[A]^\alpha$.	30
Figura 12 – União de dois conjuntos fuzzy.	31
Figura 13 – Intersecção de dois conjuntos fuzzy.	32
Figura 14 – Complemento fuzzy.	32
Figura 15 – Diagrama da função \hat{f} do princípio da extensão.	33
Figura 16 – Representação do número fuzzy \hat{r} .	35
Figura 17 – Número fuzzy triangular.	36
Figura 18 – Número fuzzy trapezoidal.	37
Figura 19 – Número fuzzy em forma de sino.	38
Figura 20 – Em a) círculo interior ao quadrado , em b) círculo exterior ao quadrado e em c) círculo “parcialmente” interior ao quadrado.	42
Figura 21 – Valor de $F(t) = At$ com $A = [1, 2]$ e $t = 1$.	46
Figura 22 – Valor de $F(t) = At$ com $A = (1, 1.5, 2)$ e $t = 2$.	46
Figura 23 – Função $P(t)$ e seus α -níveis.	47
Figura 24 – Derivada da função $P(t)$ e seus α -níveis.	48
Figura 25 – Arquitetura de sistemas baseados em regras fuzzy. Fonte: Peixoto, 2005.	50
Figura 26 – Forma geral de uma base de regras fuzzy.	51
Figura 27 – Método de Inferência de Mamdani.	52
Figura 28 – Defuzzificador centro de gravidade G(B).	53
Figura 29 – Lagarta Falsa-medideira. Fonte:Moreira; Aragão, 2009.	54
Figura 30 – Pupa. Fonte: Hoffmann-Campo, 2000.	55
Figura 31 – Adulto Fonte: Hoffmann-Campo, 2000.	55

Figura 32 – Dano causado pela falsa-medideira em uma folha de soja. Fonte: Moreira; Aragão, 2009.	56
Figura 33 – Ciclo de desenvolvimento de <i>Chrysodeixis includens</i> . Fonte: Reid, 1975; Bueno <i>et al.</i> , 2012.	56
Figura 34 – 1-Vespa parasita o ovo; 2- A larva de <i>Trichogramma</i> se alimenta internamente no ovo; 3-ovo é preto <i>Trichogramma</i> em fase de pupa; 4 - emergem as vespas. Fonte: KNUTSON, 2005.	57
Figura 35 – <i>Trichogramma pretiosum</i> ovipositando seus ovos Fonte: Embrapa, 2013.	58
Figura 36 – Cartela com vespas do gênero <i>Trichogramma</i>	61
Figura 37 – Solução do modelo malthusiano fuzzy de expansão populacional $\lambda > 0$.	64
Figura 38 – Estrutura da base de regras: variável de entrada x , base de regras, variável de saída x'	65
Figura 39 – Função de pertinência da População de presas. Fonte: Bassanezi, 2010.	66
Figura 40 – Função de pertinência da variação presas. Fonte: Bassanezi, 2010. . .	66
Figura 41 – Solução $x(t)$ do fuzzy malthusiano e do determinístico com $\lambda = 9.5\%$ e $x_0 = 2$. Fonte: Bassanezi, 2010.	66
Figura 42 – Estrutura da base de regras: Variáveis de entrada x e P_y , base de regras, variáveis de saída x' e P'_y	67
Figura 43 – Representação da base de regras do sistema fuzzy.	70
Figura 44 – Funções de pertinência das variáveis de entrada x (presas).	71
Figura 45 – Funções de pertinência das variáveis de saída p'	72
Figura 46 – Soluções do sistema fuzzy dadas pelo controlador: $P' = P'(t)$	72
Figura 47 – Solução $P(t)$ via base de regras.	73
Figura 48 – O 0-nível (curva continua) e o núcleo (curva tracejada) da solução P com condições inicial $P_0 = (520.2; 938.4; 1356.6)$ e $\lambda = 0.7203$	73
Figura 49 – Solução P com condições inicial $P_0 = (520.2; 938.4; 1356.6)$ dado pelo sistema baseado em regras fuzzy.	74
Figura 50 – Solução via derivada de Hukuhara P com condições inicial $P_0 = (520.2; 938.4; 1356.6)$ e $\lambda = 0.7203$	74
Figura 51 – Funções de pertinência da solução via equação diferencial Fuzzy. . .	75
Figura 52 – Solução via sistema baseado em regras fuzzy.	76
Figura 53 – Função de pertinência da variável de entrada potência de predação P_y .	77
Figura 54 – Função de pertinência da variável de entrada Presas.	78
Figura 55 – Função de pertinência da variável de saída Presa.	78
Figura 56 – Função de pertinência da variável de saída Potencial de Predação P'_y .	78
Figura 57 – Superfície dada pelo controlador: $x' = x'(x, P_y)$	79
Figura 58 – Superfície dada pelo controlador: $P'_y = P'_y(x, P_y)$	79
Figura 59 – Evolução dos contingentes populacionais ao longo do tempo das Presas.	80

Figura 60 – Evolução dos contingentes populacionais ao longo do tempo dos Predadores.	80
Figura 61 – Evolução dos contingentes populacionais ao longo do tempo presa e predador.	80
Figura 62 – Plano de fase do modelo fuzzy, para $x_0 = 1158$ e $P_y = 62.508$	81
Figura 63 – Comando para abrir toolbox.	88
Figura 64 – Janela da toolbox.	88
Figura 65 – Informações gerais.	89
Figura 66 – Adicionando variáveis de entrada.	89
Figura 67 – Informações da janela.	90
Figura 68 – Exemplo.	90
Figura 69 – Como adicionar regras.	91
Figura 70 – Regras adicionadas.	91
Figura 71 – Visualizando resultados.	92
Figura 72 – Janela interativa de resultados.	92
Figura 73 – Gerar mapa de todas as possibilidades.	93
Figura 74 – Janela de superfície.	93

Lista de tabelas

Tabela 1 – Número fuzzy dos dados referente a falsa-medideira.	71
Tabela 2 – Número fuzzy triangular de estimativa de população de ovos: equações diferenciais fuzzy × sistema baseado em regras fuzzy.	75
Tabela 3 – Diâmetro da solução via Equação Diferencia Fuzzy e sistema baseado em regras fuzzy.	76
Tabela 4 – Número fuzzy triangular dos dados referente a vespa.	77

Lista de abreviaturas e siglas

UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz
DCET	Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
PPGMC	Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia
Embrapa	Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
ESALQ	Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz
USP	Universidade de São Paulo
PVI	Problema de Valor inicial

Lista de símbolos

A, B, X	(Letras maiúsculas) Conjuntos fuzzy e não fuzzy
(a, b, c, d)	Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
$(a, b, c,)$	Número fuzzy triangular
$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$	Família de números fuzzy
$\mathcal{F}(X)$	Família dos subconjuntos fuzzy de X
x_0	Valor inicial
$\frac{dx}{dt}$	derivada da variável x em relação ao tempo t
x_{∞}	Limite de suporte
a	Taxa de crescimento modelo logístico
$\frac{dy}{dt}$	derivada da variável y em relação ao tempo t
$\mathcal{P}(X)$	conjunto das partes
λ	Taxa de crescimento
\in	Pertence
\notin	Não pertence
x_n	Sequência
e	constante de euler
\overline{X}	Fecho do conjunto
\subset	Está contido
\subseteq	Está contido ou igual
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\leq	Menor que ou igual
\geq	Maior que ou igual
$<$	Menor que
$>$	Maior que

$\mathbb{I}(\mathbb{R})$	Conjuntos de intervalos fechados e limitados da reta real
/	Tal que
a_1, a_2	Extremo inferior e superior de um intervalo
\neq	Diferente
$-_H$	Diferença de Hukuhara
$-_{gH}$	Generalização da diferença de Hukuhara
\Rightarrow	Operador de implicação
\emptyset	Conjunto vazio
\max	Maximo de um conjunto
\min	Minimo de um conjunto
\sup	Supremo de um conjunto
\inf	Infimo de um conjunto

Sumário

1 – Introdução	1
2 – Modelagem e Teoria clássica	4
2.1 Modelagem	4
2.2 Simulação Numérica	6
2.3 Modelo Malthusiano	8
2.4 Modelo Logístico (Verhulst)	9
2.5 Modelo Predador-Presa (Lotka-Volterra)	11
3 – Teoria de Conjuntos Clássica	15
3.1 Conjunto Fechado	16
3.2 Aritmética Intervalar	16
3.3 Espaços Métricos	21
3.4 Métrica de Pompeiu-Hausdorff	23
3.5 Funções a Valor Intervalar	25
3.6 Limite de Funções Intervalares	26
4 – Teoria Fuzzy	28
4.1 Teoria dos Conjuntos Fuzzy	28
4.2 Princípio da Extensão de Zadeh	32
4.2.1 Número Fuzzy	34
4.2.2 Operações com Números Fuzzy	38
4.2.3 Conectivos Básicos da Lógica Fuzzy	39
4.2.4 Relação	42
4.3 Equação Diferencial Fuzzy	44
4.4 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy	49
5 – Informações Falsa-medideira e Vespa	54
5.1 <i>Chrysodeixis includens</i> Walker, 1857. (Lepidoptera: Noctuidae) - Falsa-medideira	54
5.2 <i>Trichogramma pretiosum</i> Riley, 1879. (Hymenoptera: Trichogrammatidae)	57
5.3 O Potencial de Predação	58
5.4 Manejo Integrado de Pragas (MIP)	59
5.5 Controle Biológico	60
6 – Metodologia	62
6.1 Aplicações das Equações Diferenciais Fuzzy no Modelo Malthusiano	63

6.1.1	Modelo Malthusiano via Base de Regras	64
6.2	Presa-Predador via Sistema Baseado em Regras Fuzzy	67
7 – Resultados	71
7.1	Modelo Malthusiano	71
7.2	Modelo Presa-Predador	77
8 – Conclusão	83
Referências	85
Anexos	87
ANEXO A – Lógica fuzzy utilizando toolbox do MATLAB: Tutorial do toolbox, exemplos e aplicações	88

1 Introdução

Entender o mundo em que se vive é de fundamental importância para a sobrevivência e para melhorar a existência do homem. O entendimento do meio o possibilita reconhecer fenômenos que possam ser modelados por leis matemáticas. Em contra partida, determinados problemas modelados, em especial os da biologia desconsideram fatores ou simplificam dados para que os mesmos se adequem ao modelo. Como exemplo, pode-se citar quantidades de indivíduos em um meio (ODUM, 2004; BASSANEZI, 2010).

Muitos especialistas tem se dedicado a estudar a concepção de modelos capazes de determinar a quantidade apropriada de agentes predadores necessária para se fazer um controle biológico em uma determinada praga em lavouras específicas. Contudo, essa não é uma tarefa muito simples, dado o tamanho de algumas lavouras, as peculiaridades inerentes a cada cultura, além de variáveis com elevado grau de imprecisão (ODUM, 2004; ADAB, 2014; GALLO *et al.*, 2004).

A lógica fuzzy tem ganhado destaque como uma forte aliada no estudo de fenômenos biológicos (PEIXOTO, 2005; MIZUKOSHI, 2004). Segundo Bassanezzi (2010), até a contemporaneidade tais estudos são realizados em sua maioria por meio da teoria de equações diferenciais ou por meio de modelos estatísticos e devidos as suas características, as imprecisões citadas anteriormente não são levadas para dentro do modelo e isso acaba distanciando os resultados a serem obtidos da realidade. Em nenhum momento propõe-se a substituição dos estudos através da teoria clássica pela teoria fuzzy. Esse trabalho aplica mais uma ferramenta de estudos que pode agregar ainda mais realidade aos modelos matemáticos pelo fato de carregar para dentro do modelo as imprecisões do parâmetros do sistema.

A modelagem matemática na dinâmica populacional, em especial no Controle Biológico, pode ser utilizada de forma a auxiliar no controle de pragas em culturas agrícolas. Alguns modelos são capazes de simular diferentes cenários de desenvolvimento de uma população no tempo, levando em conta tanto as fontes pontuais (precisa) quanto às difusas (mistura) de sobrevivência. Depois de ajustado a um indivíduo (elemento que entra na extensão de uma espécie), com dados coletados, o modelo propicia projeções quanto ao comportamento da espécie possibilitando a concentração de esforços no planejamento e na tomada e decisões quanto ao objetivo desejado (ODUM, 2004; CRUZ, MONTEIRO, 2004; GALLO *et al.*, 2004).

Dentre os insetos (pragas) em diversas culturas e regiões do país tem-se a lagarta *Chrysodeixis includens* conhecida popularmente como Falsa-Medideira. A lagarta é capaz

de atacar diversas plantas hospedeiras, incluindo cultivos importantes como feijão, repolho, quiabo, batata-doce, fumo, tomate, milho, soja e algodão. No Brasil, os surtos de *C. includens* são detectados com frequência no Oeste da Bahia, Goiás, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul, São Paulo, Paraná e Rio Grande do Sul (MOSCARDI *et al.*, 2012).

A origem da utilização da matemática para descrever o crescimento de uma população iniciou-se com os estudos do economista inglês Thomas Robert Malthus (Modelo Malthusiano). Com o decorrer do tempo o seu modelo foi se desenvolvendo e sendo aperfeiçoado para atender a realidade de forma mais precisa inclusive pelo processo de interação entre espécies com o modelo Lotka-Volterra (Presa-Predador).

A principal forma de controle das pragas ocorre por meio da utilização de defensivos químicos. Embora esses produtos sejam usados para o controle, eles acabam acarretando danos aos inimigos naturais, ocasionando redução da eficiência do controle natural pela diminuição de hospedeiros, reaparecimento das pragas e a diminuição da eficácia devido à resistência adquirida com seu uso intenso. Ocasionalmente o surgimento de novas pragas diretas e secundárias (GALLO *et al.*, 2004).

A presença de resíduos de inseticidas nos alimentos, peixes e animais silvestres, poluição dos lençóis freáticos, rios, afluentes, alta persistência no ambiente e os acidentes causados por intoxicação podem resultar em doenças graves e até na morte do agricultor (GALLO *et al.*, 2004).

O objetivo deste trabalho é estudar a dinâmica populacional da lagarta falsa-medideira. Primeiramente realizando o estudo do crescimento populacional de uma população específica utilizando o Modelo Malthusiano via Equações diferenciais Fuzzy e o modelo Malthusiano desenvolvido por meio da base de regras fuzzy. Posteriormente, aplicando o modelo do tipo presa-predador baseado em regras fuzzy, visando o controle biológico da praga através da interação entre a lagarta e um de seus principais inimigos naturais a vespa *Trichogramma pretiosum* (Hymenoptera: Trichogrammatidae) sem o uso de equações explícitas utilizando como meio para obtenção das soluções a base de regras fuzzy.

O presente trabalho está estruturado em oito capítulos.

O capítulo 2 aborda uma revisão de literatura sobre a Modelagem e nele também são apresentados três modelos considerados canônicos para estudo da dinâmica populacional.

Dando sequência, no capítulo 3 é apresentado a teoria de conjuntos clássicos com o intuito de oferecer uma revisão dos conceitos básicos e assim proporcionar maior facilidade no entendimento do conceito da teoria fuzzy que é apresentada no capítulo 4.

A Teoria fuzzy é exposta no capítulo 4 por meio de definições básicas da teoria dos conjuntos fuzzy e de sistemas baseados em regras fuzzy, que serão utilizados no

nosso trabalho.

Seguindo para o capítulo 5, trazemos os aspectos biológicos das espécies estudadas neste trabalho *C. includens* e *T. pretiosum* (Falsa-medideira e vespa) com o intuito de conhecer características biológicas e obter dados que serão aplicados no processo de modelagem.

A Metodologia é mostrada no capítulo 6.

Os resultados obtidos com a aplicação da metodologia são discutidos e comentados no capítulo 7.

Por fim, no capítulo 8, são oferecidos os comentários finais e as sugestões para pesquisas futuras.

2 Modelagem e Teoria clássica

2.1 Modelagem

Diariamente surgem situações que necessitam de soluções e tomadas de decisões. Algumas delas podem ser tratadas matematicamente de forma a apresentar uma conclusão, sejam elas simples ou complexas, por exemplo: pagar a compra de pães na padaria ou calcular a área de um terreno de forma retangular. Existem condições em que a matemática pode não ser apresentada de forma evidente, mas ela sempre está presente em outras áreas do conhecimento e é preciso analisar de forma mais detalhada e mais complexa para que seu uso fique mais evidente.

Com o avanço tecnológico a Modelagem Matemática tem tomado uma nova direção, tendo como aliado a computação científica. Juntas, elas realizam o aproveitamento de métodos matemáticos avançados na investigação de soluções para problemas atuais em diversas áreas, tais como: Matemática, Física, Engenharias, Ciências Agrárias, Ecologia, Saúde, biológicas, entre outras (CHAPRA; CANELE, 2011).

Durante o processo de resolução de um problema é possível que este contenha dados de forma a encontrar resultados por meio de uma análise e manipulações. Um problema, quando quantificado, pode se tornar um modelo matemático, a ideia é identificar as características fundamentais do sistema a ser estudado, de modo a obter um conjunto de regras matemáticas, simples o suficiente para que se possa extrair informações úteis delas, mas que não se distancie da realidade dos fenômenos mais importantes associados ao sistema em questão. Estas regras assumem as mais diferentes formas, dependendo da natureza do problema e da conveniência na obtenção de soluções.

Uma das ferramentas mais importantes na compreensão destes problemas é a Modelagem Matemática. Segundo Bassanezi (2010), ela incide na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Frequentemente situações complexas e cheias de variáveis requerem um modelo matemático. A linguagem matemática pode ser utilizada e projetada para descrição precisa de uma situação real e complexa. Por meio da matemática transpõem-se ideias e variáveis para obter-se uma sequência organizada de forma lógica e mais simplista ao transpor uma situação real em uma linguagem matemática.

Para Biembengut e Hein (2000, p. 11) “[...] a modelagem, arte de modelar, é um processo que emerge da própria razão e participa da nossa vida como forma de constituição e de expressão do conhecimento”. A modelagem apresenta-se como algo

mais interior ao indivíduo de forma a utilizar o seu conhecimento adequando uma situação matematicamente, mesmo que pareça distante ou inexistente no problema.

Modelos matemáticos são amplamente utilizados em situações de natureza físicas e em aplicações específicas, dentre estas, pode-se utilizá-la no auxílio da compreensão de processos ecológicos. Dentro de um meio ecológico é possível encontrar uma grande diversidade de plantas e animais que a todo o momento estão interagindo entre si. Nessas interações, a ampla diversidade de animais e plantas juntamente com as variações das grandezas (clima, tempo, nutrientes...) tornam difícil construir um modelo totalmente realista. A simplicidade de modelos pode mostrar claramente as implicações de uma ou da maioria dos pressupostos básicos para entendimento da situação apresentada.

Conforme Odum (2004,p. 448) “Os modelos ecológicos são frequentemente avaliados em termos da sua generalidade e da sua capacidade para orientar o esforço de investigação mais do que pelo seu poder numérico produtivo (precisão)”. Modelos são projetados para se concentrar em aspectos específicos de um objeto de estudo, quando não há condições suficientes para que este objeto seja completamente escrito na Linguagem Matemática, certos aspectos do mesmo são abstraídos e a modelagem passa a não ser um fator determinístico, mas sim um norteador.

Por meio da matemática existe a possibilidade de criação de modelos cujas soluções levam a equações que relacionam as variáveis e os parâmetros dos problemas, embora os modelos matemáticos não exprimam as situações reais em sua totalidade, eles podem conseguir representar as características e os dados fundamentais de um problema, que pode ser quantificado. A busca dos fatores que serão necessários na construção do modelo deve ser focada no seu grau de influência e sensibilidade para que, por fim, ofereçam resultados condizentes com a realidade.

Os modelos matemáticos junto aos softwares interativos são utilizados com frequência para estudos de problemas na agricultura. O uso de ferramentas de simulação permite criar cenários que vão desde a previsão de crescimento populacional de uma espécie específica, utilizando, por exemplo, a equação Malthusiana e a equação Logística, como também previsões de comportamento na interação entre duas espécies por meio das equações Lotka-Volterra (Presa-Predador). Com elas, as projeções futuras podem ser melhor “previstas” e por fim compreendidas.

Devido as simulações criadas a partir dos modelos, os pesquisadores passam a ter uma visão geral do sistema e podem posicionar-se como um conhecedor do sistema real. A utilização do modelo, criando simulações, permite uma economia de prejuízos materiais e tempo, quando comparado a experimentos reais. Além disso, pesquisadores da área podem fazer uso de modelos para auxiliar o delineamento de experimentos no campo, através da indicação dos parâmetros a serem observados.

Com o sistema predador-presa os problemas de controle biológicos permitem avaliar quantitativamente e qualitativamente a interação entre as populações onde uma deve ser considerada o predador e a outra a presa. Em um sistema agrícola a sua referência pode ser feita considerando o inseto praga (presa) que ataca uma lavoura e o outro o inimigo natural (predador). A função do modelo é criar projeções em que o sistema se torne instável onde o inimigo natural da praga não elimine em sua totalidade a presa, mas permita a sua existência em um nível em que não cause muito prejuízo à produção agrícola. A matemática permite, nesse caso, a condição da determinação da região dos parâmetros na qual o sistema é estável.

Para Mizukoshi *et al.* (2004) os modelos de interação entre espécies, a identificação dos parâmetros é usualmente baseada em métodos estatísticos, partindo de dados experimentalmente obtidos da escolha de algum método adequado para sua identificação. Os modelos citados anteriormente (Malthusiano, Logístico e Lotka-Volterra) são modelos determinísticos, mas nos últimos anos outras teorias surgiram para modelar matematicamente fenômenos reais, e que levam em conta detalhes relevantes e respeitam as especificidades de cada situação e entre elas tem-se a Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Salientamos que o surgimento de uma nova teoria para estudos de um fenômeno não exclui a necessidade de se utilizar as teorias, estatísticas e determinística clássicas. Neste trabalho, foram utilizados dados encontrados em trabalhos cuja metodologia para determinar os resultados é estatístico.

2.2 Simulação Numérica

O desenvolvimento tecnológico sempre foi inerente à vida em sociedade. Dentro do contexto histórico, ele apresenta-se como o conhecimento que advém das técnicas usadas pelos humanos para sobreviver diante da natureza, e ter assim uma maneira de dominá-la. Nos últimos anos, a evolução da informática tornou o computador uma importante ferramenta dentro e fora do campo científico (CHAPRA; CANELE, 2011).

Antes da era computacional, uma quantidade significativa de energia era gasta em técnicas de resolução de problemas em vez de na definição e interpretação destes. Isso, devido ao fato da existência da necessidade de se aplicar muito tempo e trabalho pesado para obter respostas numéricas usando-se as técnicas pré-computador. Nos dias atuais, os computadores e os métodos numéricos fornecem uma alternativa para tais cálculos complexos. No campo científico a formulação e execução de simulação de modelos proporciona a criação de um ambiente virtual que é usado para testar os modelos propostos (CHAPRA; CANELE, 2011).

Na Figura 1 tem-se a sequência estruturada na resolução de um problema.

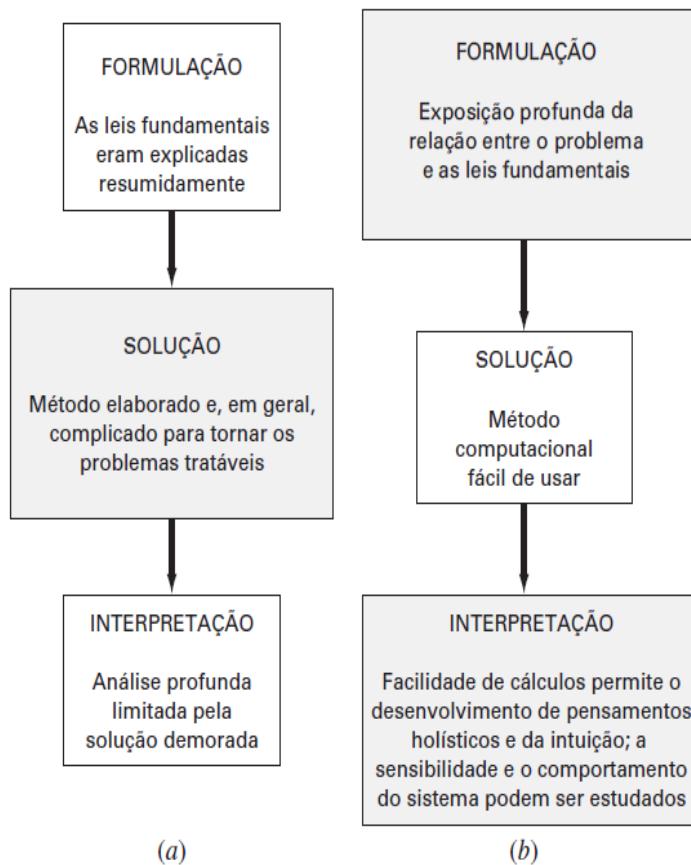


Figura 1 – Fases de resolução de problemas (a) na era pré-computador e (b) na era do computador. Fonte: Chapra, 2011.

O tamanho das caixas, Figura 1, indica o nível de ênfase direcionada a cada fase. Na imagem (a) tem-se a representação da era pré-computacional e na imagem (b) tem-se a era computacional. Comparando as duas imagens fica evidente a diferença no processo de solução, onde há uma significativa diferença no gasto de energia em técnicas de resolução de problemas, em vez de, na definição e interpretação dos mesmos.

Os computadores facilitam a implementação da técnica de resolução e, portanto, permitiram mais gasto de tempo nos aspectos criativos da formulação do problema e na interpretação dos resultados. Nesse trabalho foi utilização o Matlab. O Matlab é uma ferramenta auxiliar importante nas simulações numéricas, nos cálculos, na comparação de resultados e em gráficos e a sua escolha foi feita devido a sua comprovada utilização na matemática aplicada.

O MATLAB, MATrix LABoratory, é um sistema interativo cujo elemento de dados básicos é uma matriz que não requer dimensionamento, ao contrário de linguagens clássicas como C e Fortran, no ambiente MATLAB o usuário não se preocupa com itens como declaração de variáveis, alocação de memória, utilização de ponteiros e outras

tarefas de rotina. Ele combina um ambiente de programação de alto nível, possuindo características de aplicativo, o que o torna uma ferramenta de maior facilidade para o usuário. Ele permite a análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos em ambiente relativamente fácil de usar onde problemas e soluções são expressos somente como eles são escritos matematicamente.

2.3 Modelo Malthusiano

De início iremos trazer o modelo de crescimento malthusiano. Segundo Bassanezi (2004), o economista britânico Thomas Robert Malthus não preceituava originalmente nenhuma equação matemática de crescimento populacional. Ele simplesmente enunciava que a população cresceria geometricamente enquanto o alimento cresceria numa taxa aritmética, desde que não houvesse mecanismo de controle, tais como, doenças, misérias, limite de espaço físico, dentre outros. A figura 2 apresenta o princípio básico do modelo Malthusiano.

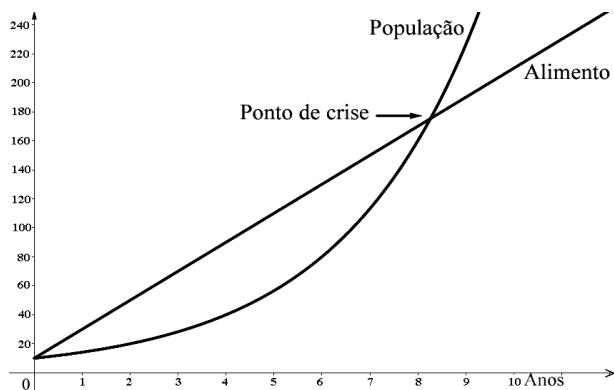


Figura 2 – Princípio Básico do modelo Malthusiano. Fonte: Malthus, 1798.

Observa-se na figura 2 que, no princípio Malthusiano, a população cresceria em ritmo acelerado seguindo uma curva exponencial e a produção de alimentos seguiria uma curva linear. Assim, a população superaria a oferta de alimentos em um determinado instante, denominado ponto crítico, o que resultaria em problemas como a fome e a miséria.

O modelo proposto por Malthus tinha um propósito inicial de descrever o crescimento da população humana (*An Essay on the Principle of Population* - 1798). Seu modelo assume que o crescimento populacional é proporcional à população em cada instante, desta forma a população humana deveria crescer sem nenhuma inibição.

Se uma população for muito pequena não há razão para que ocorra uma competição por nutrientes e espaço, portanto é admissível considerar que para densidades populacionais muito pequenas, o crescimento ocorra de forma ilimitada. Para Odum

(2004, p.285) "Quando o ambiente não está limitado (o espaço, o alimento e outros organismos não exercem um efeito limitante), a taxa ou índice específico de crescimento (isto é, a taxa ou índice de crescimento da população por indivíduo) torna-se constante e máxima para as condições microclimáticas existentes".

Se todos os fatores inibidores de crescimento estão ausentes, ou seja, a espécie tem recursos ilimitados, condições climáticas favoráveis, não interagem com competidores ou predadores e está livre de imigração ou emigração, a população tende a crescer ilimitadamente. Para Gallo *et al.* (2004, p.208) "a distribuição e abundância das espécies de insetos estão na dependência de todos os fatores do meio ambiente. Quando os fatores favoráveis sobrepujam os desfavoráveis, a população aumenta; caso contrário ela diminui".

$$x(t) = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

onde $x(t)$ é o número de indivíduos em cada instante t e x_0 indica o número inicial de indivíduos da população com x_0 e λ sendo números reais e não há incertezas quanto ao seu valor. O gráfico da solução da equação (1) é dado pela Figura 3.

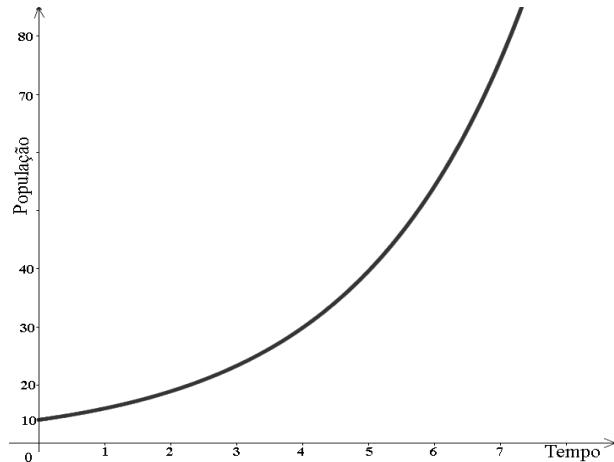


Figura 3 – Princípio Básico do modelo Malthusiano com apenas uma espécie.

2.4 Modelo Logístico (Verhulst)

O modelo formulado pelo matemático belga Pierre François Verhulst em 1837, supõe que uma população vivendo em determinado meio deverá crescer até um limite máximo sustentável, ou seja, ela tende a se estabilizar. Para Odum (2004, p. 175), a presença e o sucesso de um organismo ou grupo de organismos dependem de um conjunto de condições. Qualquer condição que se aproxime ou exceda os limites de

tolerância diz-se ser uma condição limitante ou um fator limitante. O modelo tradicional de Verhulst para crescimento populacional é regido pelo PVI.

$$P(t) = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(1 - x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

onde a é a razão de crescimento intrínseca e cuja solução é dada por,

$$p(x_0) = \frac{Kx_0}{(K - x_0)e^{-at} + x_0} \quad (3)$$

Onde K é o valor limite máximo sustentável.

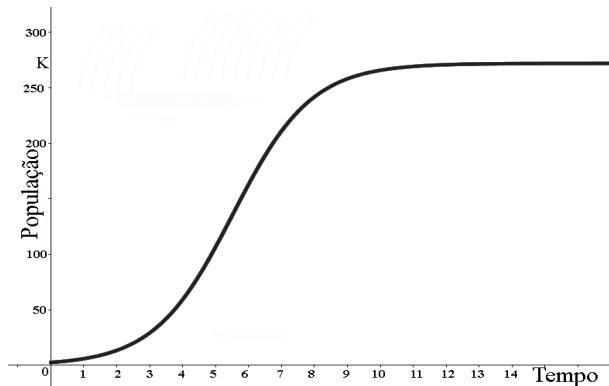


Figura 4 – Princípio básico do modelo logístico com apenas uma espécie.

De acordo com a Figura 4, no período inicial, em que a abundância é baixa, o crescimento é rápido, no gráfico fica percebido pela inclinação mais acentuada da curva. À medida que o tamanho da população aumenta, a taxa de crescimento reduz até chegar a zero, quando a população atinge o tamanho máximo que o ambiente suporta. A esse tamanho máximo dessa população, suportado pelo ambiente, é dado o nome de capacidade de suporte do ambiente é representado por K .

Assim, os organismos apresentam um mínimo e um máximo ecológicos, que representam os limites de tolerância, ou sua capacidade de suporte. O modelo de Verhulst é, em essência, o modelo Malthus modificado, a equação incorpora a queda de crescimento da população que deve estar sujeita a um fator inibidor de proporcionalidade. Segundo Odum (2004) o valor da taxa de crescimento, sob condições favoráveis para a população é máximo, é característico de uma dada estrutura de idade da população, e constitui um índice único da capacidade que uma população tem pra crescer.

2.5 Modelo Predador-Presa (Lotka-Volterra)

Nenhuma população existe isoladamente, exceto em condições laboratoriais muito particulares, visto que as populações se relacionam de várias formas. Deste modo, não é possível compreender muitos fenômenos populacionais sem considerar essas interações.

Os modelos matemáticos de interação entre espécies foram propostos independentemente nos trabalhos do biofísico nascido na Áustria Alfred James Lotka (1880-1949) e quase que simultaneamente pelo matemático italiano Vito Volterra (1860 - 1940). Tal modelo ficou reconhecido como modelo de Lotka-Volterra ou Equação Predador-Presa e são um par de equações diferenciais não lineares de primeira ordem que possui característica determinística, ou seja, é um modelo que possui um conjunto de entradas conhecido e do qual resulta em um único conjunto de saídas.

O modelo criado por Volterra foi para explicar as alterações observadas nas populações de pescadas e tubarões no Mar Adriático, por ocasião da paralisação da pesca devida à Primeira Guerra Mundial e posterior retomada das atividades pesqueiras, quando do término da guerra.

O biólogo italiano, Umberto D'Ancona em 1926, fez um estudo estatístico das populações de peixes no Mar Adriático. Por ele foi observado que nos períodos anuais entre os anos de 1914-1923, que a porcentagem de peixes predadores, por exemplo, tubarões e outros tipos de peixes não indicados para consumo humano tinha crescido significativamente, enquanto que a população de peixes-presa havia diminuído e após a guerra essa situação se alterou. D'Ancona percebeu que para essas espécies, existiam uma periodicidade inesperada que estavam deslocadas no tempo umas com relação às outras. Após essas observações, D'Ancona consultou Vito Volterra sobre a possibilidade de se criar um modelo matemático que pudesse explicar o aumento de peixes predadores.

O modelo Predador-Presa apresenta a interação entre duas espécies e devido a isso, tais modelos não podem descrever completamente as relações complexas que ocorrem, de fato, na natureza. Embora sejam restritos e simplistas, o seu estudo é o primeiro passo para a compreensão de fenômenos mais complexos (BOYCE; DI PRIMA, 2006).

Para Bassanezi (2010), o modelo Predador-Presa trata da interação entre duas espécies, onde uma delas (presa) dispõe de alimentos em abundância e a segunda espécie (predador) tem como suprimento alimentar exclusivamente a população de presa. Pretende-se admitir também que durante o processo num intervalo de tempo Δt , o meio não deve mudar favorecendo alguma das espécies e que qualquer adaptação genética é suficientemente lenta. As variações são dadas pelas seguintes equações

representadas na Figura 5:

$$\begin{cases} \left(\frac{\text{variação do número de presas}}{\text{número de presas}} \right) = \left(\text{aumento natural} \right) - \left(\text{destruição pelos predadores} \right) \\ \left(\frac{\text{variação do número de predadores}}{\text{predadores}} \right) = \left(\text{aumento causado pela alimentação disponível} \right) - \left(\text{morte na ausência de presas} \right) \end{cases}$$

Figura 5 – Equações representando as variações das populações.

Denota-se por x a densidade populacional das presas e por y densidade populacional dos predadores, como essas populações dependem do tempo t , pode-se reescrever-las como $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Ao construir a interação entre as duas espécies, faz-se simplificadamente, as seguintes hipóteses:

- Na ausência de predador ($y = 0$), a população de presas aumenta a uma taxa proporcional a população atual, assim $\frac{dx}{dt} = ax$ (modelo de Malthusiano), sendo $a > 0$;
- Na ausência de presas ($x = 0$), a taxa de mortalidade dos predadores é proporcional a sua população em cada instante (morte por falta de alimentos), assim $\frac{dy}{dt} = -\alpha y$, $\alpha > 0$.

Admitindo que o encontro das duas espécies seja ao acaso, então, quanto maior o número de presas, mais fácil será encontrá-las e quanto mais predadores mais alimentos serão necessários. O número de encontros entre predador e presa é proporcional ao produto das duas populações (xy), cada um desses encontros tende a promover o crescimento da população de predadores e a inibir o crescimento da população de presas. Sendo a, b, α e β constantes positivas, onde:

- b é o coeficiente de ataque do predador;
- a coeficiente de crescimento interespecífico da presa;
- α coeficiente de mortalidade do predador na ausência de alimento;
- β taxa de crescimento do predador.

O sistema predador-presa, simplificado pelas imposições apresentadas, é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - \alpha y \end{cases} \quad (4)$$

Embora o sistema anterior seja bem simples, eles caracterizam uma grande classe de problemas que podem ser analisados.

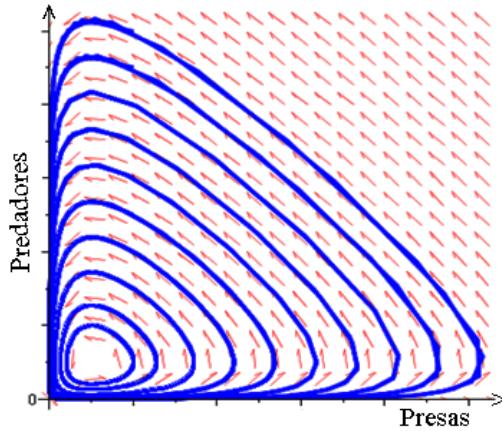


Figura 6 – Retrato de fase para o sistema para sistema Predador-Presa para $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $a = 1$ e $b = 1$.

Observe na Figura 6, que as trajetórias representam pequenas variações em x e y e têm as órbitas (curvas) fechadas em torno do ponto crítico (intersecção de todas as curva). Percebe-se que as trajetórias são percorridas no sentido anti-horário, sentido trigonométrico, como as curvas são fechadas isso implica que x e y são funções periódicas em t . Verifica-se, também, que as oscilações das populações de predadores vêm depois das oscilações das populações de presas. Analisando mais detalhadamente, se tomarmos um ponto no espaço de fase ele irá representar certo número de presas e predadores e por este ponto passa uma curva. Com o passar do tempo, estas populações assumem novos valores para as coordenadas x e y , coordenadas de um ponto no espaço, de modo a formar uma curva no espaço de fase e depois de um certo período, tais populações voltarão à situação inicial.

Em outras palavras, tem-se certo estado na qual as populações de predadores e de presas são relativamente pequenas, tem-se primeiro um aumento no número de presas, já que a poucos predadores. Então a população de predadores com, comida abundante, também cresce e isso aumenta a caça e a população de presas tende a diminuir após um período de tempo, com menor disponibilidade de presas, a população de predadores também diminui, e o sistema volta ao estado original.

No modelo Lotka-Volterra a população de predadores é liberada no local onde se encontram as populações de presas, com o modelo Lotka-Volterra percebe-se que a liberação em grande quantidade de predadores não gera a eliminação total do número de presas. Como foram determinadas anteriormente, para o modelo Lotka-Volterra as trajetórias são curvas fechadas no plano xy e, portanto existe um período $t = T > 0$ no

qual as populações de predador e presa voltam ao número inicial, $x(T) = x_0$ e $y(T) = y_0$.

Segundo Boyce e Diprima (2006), quando um sistema é estável a sua variação é nula, logo existe um ponto P de modo que $\frac{dx}{dt} = 0$ e $\frac{dy}{dt} = 0$. Tal ponto é denominado ponto crítico ou ponto de equilíbrio ou ainda, ponto estacionário do sistema. Verifica-se, também, que se P é um ponto crítico, então as populações de predadores e presas que em certo instante possuem quantidades iguais a esse ponto crítico e serão a solução do sistema, tal solução que corresponde ao número de indivíduos das populações é denominada população estacionária ou de equilíbrio e nessa posição as populações de presas e predadores estão em repouso.

Retomando a Equação 4, do sistema predador-presa, tem-se:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \iff ax - bxy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = \frac{a}{b} \quad (5)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = 0 \iff \beta xy - \alpha y = 0 \iff y = 0 \text{ ou } x = \frac{\alpha}{\beta} \quad (6)$$

Portando, os dois pontos $(0, 0)$ e $(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{a}{b})$ são os pontos críticos do sistema de equações 4.

Em síntese tem-se que trajetórias apresentam características observadas por D'Ancona:

1. A quantidade da população de presas e a quantidade da população de predadores têm característica oscilatória;
2. O crescimento na população de presas é seguido (com retardo) por um aumento na população de predadores.
3. se a quantidade de presas é baixa, então a quantidade de predadores diminui, ou seja, $\frac{dy}{dt} < 0$ quando $x < \frac{\alpha}{\beta}$;
4. se a quantidade de presas é alta, então a quantidade de predadores aumenta, ou seja, $\frac{dy}{dt} > 0$ quando $x > \frac{\alpha}{\beta}$;
5. se a quantidade de predadores é alta, então a quantidade de presas diminui, ou seja, $\frac{dx}{dt} > 0$ quando $y > \frac{a}{b}$;
6. se a quantidade de predadores é baixa, então a quantidade de presas aumenta, ou seja, $\frac{dx}{dt} > 0$ quando $y < \frac{a}{b}$

3 Teoria de Conjuntos Clássica

Antes de introduzirmos formalmente no conceito de subconjunto fuzzy, vamos fazer algumas observações essenciais sobre a teoria clássica de conjuntos.

Um conjunto, que também pode ser chamado de coleção, cuja representação usual é feita por uma letra maiuscula do alfabeto latino (A, B, C, \dots) é formado por objetos denominados elementos. A associação básica entre um objeto e um conjunto é a relação de pertinência. Quando um objeto x é um dos elementos que compõem o conjunto A , dizemos que x pertence a A e escrevemos $x \in A$.

Porém, se x não é um elemento do conjunto A , dizemos que x não pertence a A e escrevemos $x \notin A$. Um conjunto A fica caracterizado (ou definido, ou determinado) quando se dá uma regra que permite decidir se um objeto (elemento) arbitrário x pertence ou não a A . Dizer que um elemeto x pertence a um conjunto A significa verificar se x atende a propriedade que caracteriza o conjunto A . Escreve-se

$$A = \{x; x \text{ goza da propriedade } P\} \quad (7)$$

Lê-se: "A é o conjunto dos elementos x tais que x goza da propriedade P ".

Em situações em que a propriedade P se refere a elementos de um conjunto fundamental X escreve-se:

$$A = \{x \in X; x \text{ goza da propriedade } P\} \quad (8)$$

Exemplo 1 Seja A o conjunto dos triângulos retângulos. O conjunto A está bem definido: um objeto x pertence a A quando é um triângulo e, além disso, um dos seus ângulos é reto. Se x não for um triângulo, ou se x for um triângulo que não possui ângulo reto, então x não pertence a A .

Dados os conjuntos A e X , dizemos que A é subconjunto de X (ou A é parte de X) quando todo elemento de A é também elemento de X , e escrevemos $A \subset X$. Dado um conjunto X , indica-se com $\mathcal{P}(X)$ o conjunto cujos elementos são as partes de X .

Seja $\mathcal{P}(X)$ denominado conjunto das partes de X , ele é o conjunto formado pelos subconjuntos de um conjunto X .

Exemplo 2 Seja $X = \{1, 2, 3\}$, então:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\} \quad (9)$$

3.1 Conjunto Fechado

Definição 1 (LIMA, 2013) : Dizemos que um ponto a é aderente ao conjunto X se a é o limite de uma sequência (x_n) de ponto de X .

Definição 2 (LIMA, 2013) : O fecho do conjunto X , representado por \overline{X} , é o conjunto formado pelos pontos aderente a X .

No caso de ser $X = \overline{X}$, diremos que o conjunto X é *fechado* ou que X é um conjunto *denso* em \mathbb{R} . Em geral, diz-se que o fecho \overline{X} de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é o menor conjunto fechado de \mathbb{R} que contem X . Para obter o fecho de um conjunto X basta acrescentar a X todos os seus pontos *aderentes*.

Assim , um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se , todo ponto aderente a X pertence a X .

Teorema 3.1.1 (LIMA, 2013) : Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R} - F$ é aberto.

3.2 Aritmética Intervalar

Um corpo é um conjunto K , munido de duas operações , chamadas de *adição* e *multiplicação*, que satisfazem aos axiomas do corpo .

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in K$ sua soma $x + y \in K$. A multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x \cdot y \in K$. Os axiomas do corpo são os seguintes:

Axioma da adição

A1: Associatividade - quaisquer que sejam $x, y, z \in K$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$;

A2: Comutatividade – quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se $x + y = y + x$;

A3: Elemento neutro – existe $0 \in K$, tal que $0 + x = x$, seja qual for o $x \in K$. O elemento 0 é chamado de zero.

A4: Simétrico – todo elemento $x \in K$ possui um simétrico, tal que $x + (-x) = 0$;

Axiomas da multiplicação

M1: associatividade – dados quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

M2: comutativa –seja quais forem $x, y \in K$, vale $x \cdot y = y \cdot x$;

M3: elemento neutro – existe $1 \in K$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$ qualquer que seja $x \in K$. O elemento 1 chama-se um;

M4: *inverso multiplicativo* – todo $x \neq 0$ em K possui um inverso x^{-1} , tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Um corpo ordenado é um corpo K , no qual se destacou um subconjunto $P \subset K$, chamado o conjunto dos elementos positivos de K , tal que as seguintes condições são satisfeitas:

P1: A soma e o produto de elementos positivos são positivos , ou seja, $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$;

P2: Dado $x \in K$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorrem : $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

Num corpo ordenado K , existe a importante noção de intervalo.

No corpo ordenado dos números Reais (\mathbb{R}), existe a importante noção de intervalo. Um intervalo (real) é um conjunto que contém cada número real entre dois extremos indicados, podendo ou não conter os próprios extremos. Dados $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, de modo que $A = [a_1, a_2]$ com $a_1 < a_2$, usaremos as notações abaixo:

Intervalo fechado

$$[a_1, a_2] = \{x \in \mathbb{R}; a_1 \leq x \leq a_2\}. \quad (10)$$

Intervalo fechado a esquerda

$$[a_1, a_2) = \{x \in \mathbb{R}; a_1 \leq x < a_2\}. \quad (11)$$

Intervalo fechado a direita

$$(a_1, a_2] = \{x \in \mathbb{R}; a_1 < x \leq a_2\}. \quad (12)$$

Intervalo aberto

$$(a_1, a_2) = \{x \in \mathbb{R}; a_1 < x < a_2\}. \quad (13)$$

Esses quatro intervalos têm extremos a_1 e a_2 . Esses são intervalos limitados. Para maior entendimento consultar (LIMA, 2013).

Quando considera-se um intervalo de extremos a_1 e a_2 , supõe-se que $a_1 < a_2$, com exceção do intervalo $[a_1, a_2]$, em que $a_1 = a_2$. No caso anterior, o intervalo $[a_1, a_2]$ consiste em um único ponto a_1 e é denominado intervalo degenerado. Devido à importância do intervalo fechado no conjunto \mathbb{R} neste trabalho, faremos, a seguir, um estudo dedicado ao mesmo.

Uma noção importante que também irá constar neste trabalho é a noção de supremo e ínfimo em subconjunto. Dado um subconjunto X de \mathbb{R} . Um elemento b de \mathbb{R} é dito cota superior de X se $b \geq x$, isto é, se este elemento b de \mathbb{R} for maior ou igual

a qualquer elemento de X . Se um conjunto tem uma cota superior, então admite uma infinidade de cotas superiores.

Dado um subconjunto X de \mathbb{R} . Um elemento a é dito uma cota inferior de X se $a \leq x$, isto é, se este elemento a , de \mathbb{R} , for menor ou igual a qualquer elemento do subconjunto X . Se X for cotado superiormente, dizemos que uma cota superior de X é o supremo de X , e escrevemos $\sup X$ se ela é menor do que qualquer outra cota superior de X .

Ou ainda:

Um número $b \in \mathbb{R}$ é dito supremo de X se:

- 1) $x \leq b$ para todo $x \in X$, ou seja b é uma cota superior; e
- 2) Se $x \leq u$, para todo $x \in X$, então $b \leq u$, ou seja, b é a menor das cotas superiores.

Agora, considere o subconjunto X de \mathbb{R} . Se X for cotado inferiormente, dizemos que uma cota inferior de X é o ínfimo de X , e escrevemos $\inf X$, se ela é a maior do que qualquer outra cota inferior de X .

Ou ainda:

Um número $a \in \mathbb{R}$ é dito ínfimo de X se:

- 1) $a \leq x$ para todo $x \in X$, ou seja a é uma cota inferior; e
- 2) Se $a \leq c$, para todo $x \in X$, então $c \leq a$, ou seja, a é a maior das cotas inferiores.

Exemplo 3 Um subconjunto A de \mathbb{R} cujos elementos são maiores ou iguais a 0 e menores ou iguais a 1, isto é, $A = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$ ou $A = [0, 1]$, sendo x um elemento qualquer pertencente ao conjunto em questão é um intervalo real que contém os extremos 0 e 1, bem como todos os números reais entre eles. Além disso, tem-se que $\inf A = 0$ e $\sup A = 1$.

Será denotado por $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ o conjunto de intervalos fechados e limitados da reta real e por A, B, X, \dots os elementos de $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ ou de $\mathbb{I}(\mathbb{R})^n$, que no caso, representam intervalos.

Definição 3 (IEZZI, 1985) : Sejam $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$, dois intervalos de \mathbb{R} . Diz-se que $A = B$ se, e somente se, $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$.

Portanto, se dois intervalos são considerados iguais, se eles forem iguais enquanto conjunto .

Sejam A, B dois intervalos de reta real, onde $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. A adição, multiplicação por escalar, multiplicação e divisão via a aritmética usual é dada por:

- *Soma:* $A + B = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$;
- *Multiplicação por λ*

$$\lambda A = \begin{cases} \lambda[a_1, a_2] = [\lambda a_1, \lambda a_2], & \text{se } \lambda > 0, \\ \lambda[a_1, a_2] = [\lambda a_2, \lambda a_1], & \text{se } \lambda < 0. \end{cases} \quad (14)$$

- *Multiplicação:* $AB = [\min\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}, \max\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}]$
- *Divisão:* $A/B = [a_1, a_2]/([b_1, b_2]) = [a_1, a_2][\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}], 0 \notin B$

Note que, se A é um intervalo degenerado, então as operações artiméticas para intervalos estendem as respectivas operações para números reais.

Observe que, se $\lambda = -1$ a multiplicação por escalar resulta na negação de A , ou seja:

$$\lambda A = (-1)A = (-1)[a_1, a_2] = [-a_2, -a_1] \quad (15)$$

Exemplo 4 Seja o conjunto $A = [2, 5]$, então $(-1)A = (-1)[2, 5] = [-5, -2]$

Tendo assim, a subtração é dada por:

$$A - B = A + (-1)B = [a_1, a_2] + [-b_2, -b_1] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1] \quad (16)$$

Note que, a negação de A não é o inverso aditivo A , observe que no exemplo anterior $A - A = [2, 5] - [2, 5] = [2, 5] + [-5, -2] = [-3, 2]$, isto é, $A - A \neq [0, 0]$. Assim, a subtração não está bem definida.

Tal fato resulta que a simplificação aditiva não é válida, portanto, $A + C = B + C$ não resulta em $A = B$ ou que $A + B - B \neq A$. Devido a isso, (Segundo bassanezi p.55) "essa operação de adição não dá ao espaço dos números fuzzy a estrutura de espaço vetorial. Trata-se de um defeito que acaba emperrando várias áreas da matemática fuzzy".

Uma alternativa para tal problema de subtração foi proposta por Masuo Hukuhara (1967) e é denominada diferença de Hukuhara (H-diferença)

Definição 4 (GOMES, BARROS, BEDE, 2015) : Sejam A e B dois conjuntos. Se existir um conjunto C tal que $A = B + C$, então C é chamado de Diferença de Hukuhara de A e B e a denotamos por $A - H B$.

Duas propriedades importantes da Diferença de Hukuhara são:

Propriedade 1 (GOMES, BARROS, BEDE, 2015) : Sejam A e B dois conjuntos então:

$$A -_H A = [0, 0] \quad (17)$$

e

$$(A + B) -_H B = A \quad (18)$$

Além disso, a diferença de Hukuhara é única, contudo, ela nem sempre existe.

Peceba que a definição determina que $A = B + C$, portanto o comprimento do intervalo A que é dado por $a^+ - a^-$ tem que ser maior ou igual o comprimento do intervalo B .

Devido a isso, tal diferença ainda possui algumas restrições, Stefanini e Bede (2009) procurando superar essas restrições, apresentaram uma generalização da diferença de Hukuhara (gH -diferença), que possui várias propriedades, dentre elas, destacam-se o elemento oposto, a associativa e o elemento neutro. A gH -diferença de dois conjuntos A, B é definida por:

$$A -_{gH} B = C \iff \begin{cases} (a) A = B + C, \\ (a) B = A + (-1)C. \end{cases} \quad (19)$$

No espaço intervalar, a gH -diferença existe para quaisquer dois intervalos compactos.

Definição 5 (GOMES, BARROS, BEDE, 2015) : Sejam $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$ dois intervalos, então gH -diferença existe e é dada por:

$$A -_{gH} B = [a_1, a_2] -_{gH} [b_1, b_2] = [\min\{a_1 - b_1, a_2 - b_2\}, \max\{a_1 - b_1, a_2 - b_2\}] \quad (20)$$

Considerando $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ e $C = [c_1, c_2]$, de modo que, $A = B + C$, temos que:

$$A = B + C \Rightarrow [a_1, a_2] = [b_1, b_2] + [c_1, c_2] = [b_1 + c_1, b_2 + c_2]$$

logo,

$$\begin{cases} a_1 = b_1 + c_1, \\ a_2 = b_2 + c_2. \end{cases} \quad (21)$$

No caso,

$$B = A + (-1)C \Rightarrow [b_1, b_2] = [a_1, a_2] + (-1)[c_1, c_2] = [a_1, a_2] + [-c_2, -c_1] = [a_1 - c_2, a_2 - c_1] \quad (22)$$

Logo,

$$\begin{cases} b_1 = a_1 - c_2, \\ b_2 = a_2 - c_1. \end{cases} \quad (23)$$

Acarretando que,

$$c_2 = c_1 \quad (24)$$

Portanto (a) e (b) podem ser satisfeitas simultaneamente, neste caso, A e B são transladados um ao outro e C é um intervalo degenerado. Além disso, se a gH-diferença é dada pelo caso (a), então a gH-diferença coincide com a H-diferença.

Exemplo 5 Seja $A = [2, 4]$, então $A -_H A = [\min\{2 - 2, 4 - 4\}, \max\{2 - 2, 4 - 4\}] = [0, 0]$

3.3 Espaços Métricos

Definição 6 (LIMA, 1977) : Uma métrica em um conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamada a distância de x e y de modo que seja satisfeito os seguintes postulados, para quaisquer $x, y, z \in M$.

d1 $d(x, x) = 0$

d2 Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$

d3 $d(x, y) = d(y, x)$

d4 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Podemos sintetizar **d1** e **d2** da seguinte forma, $d(x, y) \geq 0$ onde $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. No caso de **d3** tem-se que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y , ou seja, a distância de x para y é igual a distância de y para x . E a condição **d4** trata-se da desigualdade triangular. Ela tem origem na geometria euclidiana e refere-se ao teorema que afirma que, num triângulo, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois lados, Figura 7.

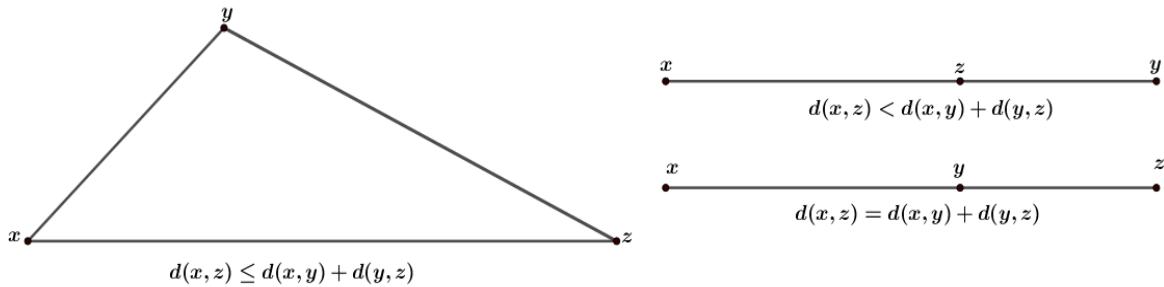


Figura 7 – Desigualdade triangular.

Um espaço métrico é denotado por um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica em M .

A reta real, ou seja, o conjunto dos números reais, é um dos exemplos mais importantes de espaço métrico. A métrica d , que neste caso é a distância entre os pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$, onde, $|x - y|$ é o valor absoluto ou módulo do número.

A reta real, ou seja, o conjunto dos números reais, é um dos exemplos mais importantes de espaço métrico. A métrica d , que neste caso é a distância entre os pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$, onde, $|x - y|$ é o valor absoluto ou módulo do número. Podemos observar que as condições d_1, d_2, d_3 são facilmente testadas usando as propriedades do módulo, provaremos d_3 .

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |x - z| = |x - z - y + y| = |x - y + z - y| \leq \\ &|x - y| + |y - z| = |x - y| + |z - y| = d(x, y) + d(y, z) \end{aligned} \tag{25}$$

Um espaço métrico é um conjunto onde as distâncias entre quaisquer de seus elementos é definida. Estas distâncias formam a métrica do conjunto.

Continuando com Elon (2013), os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrárias: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Mas, comumente são chamados de pontos de M .

O espaço métrico mais familiar é o espaço euclidiano cuja métrica é a mais comumente utilizada e segue o exemplo

Exemplo 6 Se $M = \mathbb{R}^k$, então

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_k - y_k)^2}, \tag{26}$$

Para quaisquer $x = (x_1, x_2, \dots, x_k), y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ em \mathbb{R} , define uma métrica em M , denominada **métrica euclidiana**. No caso $k = 1$ tem-se a reta real, ou seja, o conjunto \mathbb{R} dos números reais, a métrica euclidiana é simplismente o valor absoluto $d(x, y) = |x - y|$ da diferença $x - y$.

3.4 Métrica de Pompeiu-Hausdorff

A métrica de Pompeiu- Hausdorff Pompeiu (1905), proposta para determinar a distância entre dois conjuntos, tem sido amplamente utilizada no contexto intervalar (HUKUHARA, 1967; STEFANINI;BEDE, 2005). Por meio dela é possível calcular a distância entre dois intervalos.

A distância Hausdorff é a mais conhecida e também a mais empregada no espaço de números fuzzy. O Hausdorff (ou Pompeiu-Hausdorff) distância para números fuzzy baseia-se na distância clássica de Hausdorff-Pompeiu entre subconjuntos convexos compactos de $\mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ (BADE 2013). A definição da distância de Hausdorff, neste caso, é da forma:

Seja K denominada a coleção de todos os subconjuntos convexos compactos não vazios de $\mathbb{I}(\mathbb{R})$), e $A \in K$. A distância de um ponto x ao conjunto A é:

$$D(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\} \quad (27)$$

Seja, agora $A, B \in K$. A distância de Hausdorff de B a A e de A a B , respectivamente, são:

$$d_1(B, A) = \sup\{d(b, A) : b \in B\}, \quad (28)$$

e

$$d_2(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}, \quad (29)$$

por fim, a distância de Hausdorff entre $A, B \in K$ é

$$d_H(A, B) = \max\{d_1(B, A), d_2(A, B)\}, \quad (30)$$

para o caso particular, quando $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$ são dois intervalos , sendo que $A, B \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$), a distância Pompeiu- Hausdorff é:

$$d_H(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}. \quad (31)$$

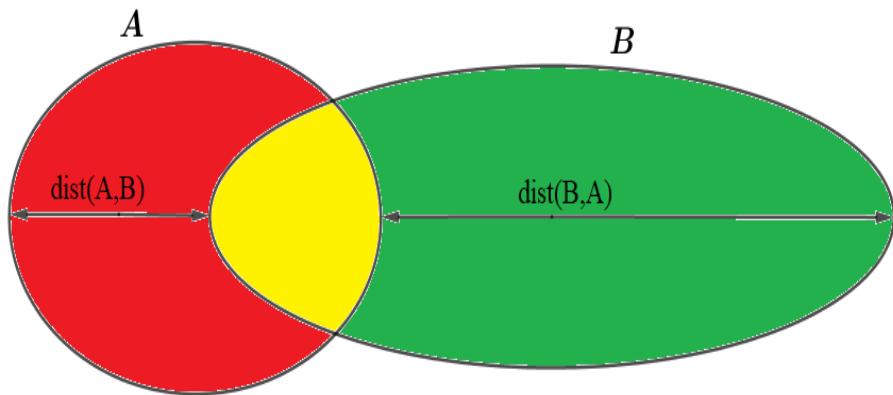


Figura 8 – Pseudométrica entre conjuntos. O diagrama ilustra o fato de $dist(A, B) \neq dist(B, A)$.

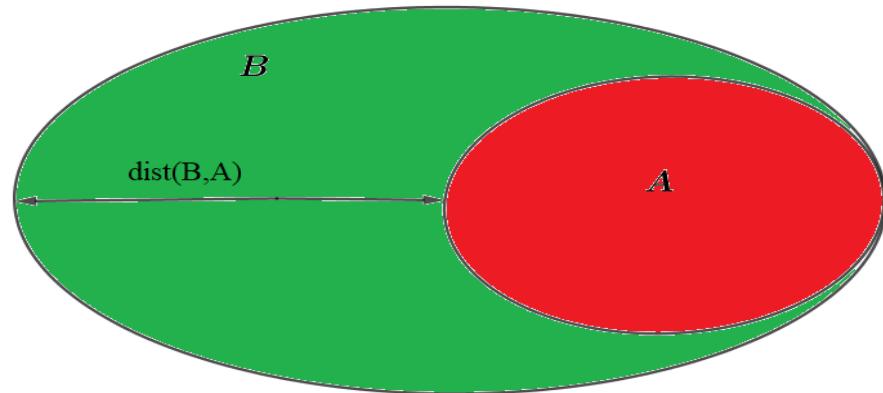


Figura 9 – Psedométrica entre conjuntos. O diagrama inferior ilustra o caso onde é possível ter $dist(A, B) = 0$ e $dist(B, A) \neq 0$.

Perceba que a distância definida é uma pedométrica, pois $dist(A, B) = 0$ se e somente se, $A \subset B$, sem necessariamente serem iguais. Nas Figuras 8 e Figura 9 tem-se uma ilustração através de diagramas. Note que a distância entre dois conjuntos pode ser zero sem a necessidade de serem iguais.

Por meio do conceito de métrica para o espaço intervalar pode-se caracterizar as noções do cálculo intervalar. O conceito de sequência, limite e continuidade de funções de valor intervalar são amplamente discutidos e a literatura apresenta uma gama de resultados (BEDE, 2005)

3.5 Funções a Valor Intervalar

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática e ocupa lugar de destaque em vários de seus campos, bem como em outras áreas do conhecimento. É muito comum e conveniente expressar fenômenos físicos, biológicos, sociais, etc. por meio de funções. O padrão a definição envolve a noção de mapeamento ou correspondência.

A definição clássica de função diz que, uma função $f : A \rightarrow B$, sendo A e B , respectivamente, domínio e contradomínio da função f permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, denominado o valor que a função assume em x (ou no ponto x).

Definição 7 (MOORE, 2009) : Chamaremos de Função a valores Intervalar a toda função f tal que:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{I} \\ x \rightarrow Y &= f(t) = A \cdot g(t) \end{aligned}$$

Onde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{I}$ e \cdot é o operador de multiplicação

Para este tipo de funções dizemos que a função intervalar f é gerada pela função real g e que domínio de $f \subset \mathbb{R}$ e imagem de $f \subset \mathbb{I}$.

Exemplo 7 Seja

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{I} \\ x \rightarrow Y &= f(t) = [1, 2] \cdot t \end{aligned}$$

Portanto, a regra de correspondência é dada por:

$$f(t) = \begin{cases} [t, 2t], & \text{se } t \geq 0 \\ [2t, t], & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (32)$$

Ao considerar os valores $t = 1, t = -1, t = 2$ e $t = -2$ teremos:

$$f(1) = [1, 2] \cdot 1 = [1, 2]$$

$$f(-1) = [1, 2] \cdot (-1) = [-2, -1]$$

$$f(2) = [1, 2] \cdot 2 = [2, 4]$$

$$f(-2) = [1, 2] \cdot (-2) = [-4, -2]$$

e cuja ideia geométrica está dada na Figura 10:

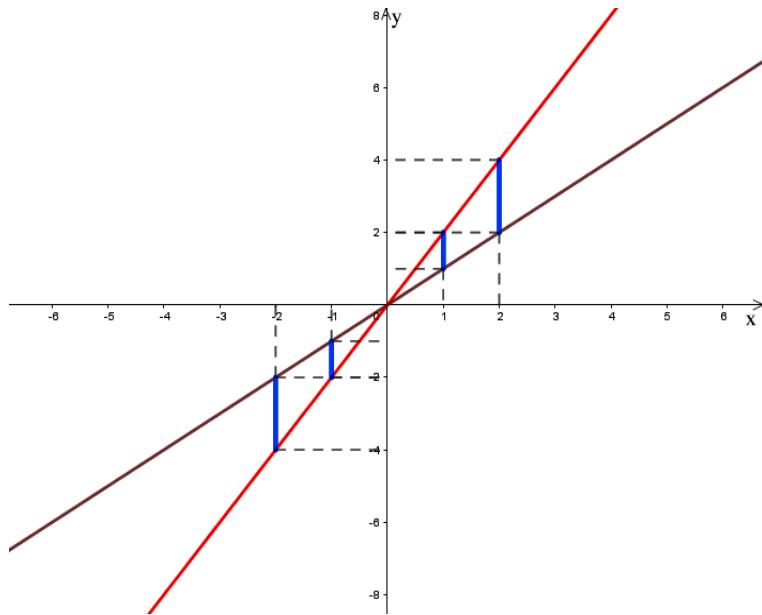


Figura 10 – Gráfico da Função Intervalar $f(x) = [1, 2] \cdot x$.

Veja na Figura 10 que, a cada valor de x no domínio faz-se corresponder um intervalo $[a, b]$ no contradomínio. Assim, uma função de valor intervalar associa um número real a um intervalo real.

3.6 Limite de Funções Intervalares

Definição 8 (MOORE, 2009) : Dizemos que $L \in \mathbb{I}$ é o limite de $F(x)$ quando $t \rightarrow a$ (t tende para a) e é denotado por $\lim_{t \rightarrow a} F(t) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $0 < |t - a| < \delta$ implica $H(F(t), L) < \epsilon$.

Teorema 3.6.1 (MOORE, 2009) : Dada uma função intervalar simples $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ tal que $F(t) = A \cdot g(t)$, onde $A \in \mathbb{I}$ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = L$ temos:

$$\lim_{t \rightarrow a} F(t) = A \cdot \lim_{t \rightarrow a} g(t) = A \cdot L \quad (33)$$

sempre que o limite de F existir.

Demonstração:

Como $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = L$ temos que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |t - a| < \delta$ implica $|g(t) - L| < \frac{\epsilon}{c}$ onde $c = H(A, 0) \in \mathbb{R}$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta$ tal que, se $0 < |t - a| < \delta$, temos:

$$\begin{aligned}
H(F(t), A \cdot L) &= H(A \cdot g(t), A \cdot L) = \\
&= H(A \cdot (g(t), L)) \leq H(A, 0)H(g(t), L) = \\
&= C|g(t) - L| < c \frac{\epsilon}{c} = \epsilon
\end{aligned}$$

potanto, $\lim_{t \rightarrow a} F(t) = A \cdot \lim_{t \rightarrow a} g(t) = L$

Teorema 3.6.2 (MOORE, 2009) : Dadas as funções intervalares $F_1, F_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ tal que associadas a estas existam as funções $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo $F_1(t) = A_1 g_1(t)$, $F_2(t) = A_2 g_2(t)$, com $A_i \in \mathbb{I}$ e $i = 1, 2, \dots$ se:

$$\lim_{t \rightarrow a} F_1(t) = A_1 \cdot \lim_{t \rightarrow a} g_1(t) = A_1 \cdot L_1$$

$$\lim_{t \rightarrow a} F_2(t) = A_2 \cdot \lim_{t \rightarrow a} g_2(t) = A_2 \cdot L_2$$

de modo que $0 \notin A_2$ e $L_2 \neq 0$

temos as propriedades:

$$\lim_{t \rightarrow a} (F_1 + F_2)(t) = A_1 \cdot L_1 + A_2 \cdot L_2$$

$$\lim_{t \rightarrow a} (F_1 - F_2)(t) = A_1 \cdot L_1 - A_2 \cdot L_2$$

$$\lim_{t \rightarrow a} (F_1 \cdot F_2)(t) = A_1 \cdot L_1 \cdot A_2 \cdot L_2$$

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1 \cdot L_1}{A_2 \cdot L_2}$$

A demonstração decorre imediatamente da definição de limite.

4 Teoria Fuzzy

4.1 Teoria dos Conjuntos Fuzzy

A Teoria dos conjuntos fuzzy iniciou-se em 1965 em um artigo publicado pelo matemático Lotfi Asker Zadeh , professor no Departamento de Engenharia Elétrica e Ciências da Computação da Universidade da Califórnia, em Berkeley. Sua principal intenção for dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos como, "aproximadamente", "em torno de ", dentre outros, a exemplo do que faz o ser humano. Esse seria o primeiro passo no sentido de realizar a programação e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas.

Definição 9 (BASSANEZI, 2010) : Seja X um conjunto e A um subconjunto de X . A função característica de A é dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases} \quad (34)$$

dessa forma, χ_A é uma função cujo domínio é X e a imagem está contida no conjunto $\{0, 1\}$, de modo que $\chi_A(x) = 1$ indicando que o elemento x está em A , enquanto $\chi_A(x) = 0$ indicando que x não é elemento de A .

A ideia de conjunto fuzzy estabelecida por Zadeh, permite uma espécie de "relaxamento" no conjunto imagem da função característica para o intervalo $[0, 1]$. Com esse "relaxamento" pode-se estudar os casos dos elementos cuja pertinência em um conjunto não é precisa, ou seja, em que não é possível saber se um elemento pertence efetivamente a um determinado conjunto. Por exemplo, considere o subconjunto dos números reais "próximo de 2".

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x \text{ é próximo de } 2\} \quad (35)$$

Pergunta: O número 7 e o número 2.001 pertencem a A ? A resposta a esta pergunta é incerta pois não sabemos até que ponto podemos dizer objetivamente quando um número está próximo de 2. Neste caso é plausível dizer que o elemento (número 2,001) do conjunto universo se enquadra "melhor" ao termo que caracteriza o subconjunto dos números reais "próximos de 2" do que o número 7.

Conforme visto anteriormente, os conjuntos clássicos são definidos por funções características. Em contrapartida, os conjuntos *fuzzy* podem ser caracterizados por funções de pertinência. Na função característica dos conjuntos clássicos deve-se decidir o grau 0 ou 1 de um elemento a um subconjunto, enquanto isso nos conjuntos *fuzzy* as funções de pertinência permite determinar um valor real arbitrário entre 0 e 1.

Definição 10 (BASSANEZI, 2010; GOMES, 2014) : Um suconjunto Fuzzy F de X é um subconjunto $\{(x, \mu_F(x)) : x \in X\}$ não vazio de $X \times [0, 1]$ para alguma função.

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1] \quad (36)$$

sendo que $\mu_A(x)$ significa o grau com que x pertence a F .

Desse modo tem-se que:

1. $\mu_F(x) = 1$, x pertence totalmente ao conjunto F
2. $0 < \mu_F(x) < 1$, x pertence parcialmente ao conjunto F
3. $\mu_F(x) = 0$, x não pertence ao conjunto F

É Possivel ver na definição anterior que um subconjunto fuzzy F pode ser representado por um conjunto de pares ordenados, cada um com o primeiro elemento $x \in X$, e o segundo elemeto $\mu_F(x) \in [0, 1]$. Em outras palavras, um subconjunto fuzzy F de X é dado por um conjunto (clássico) de pares ordenados. A função $\mu_A(x)$ é pré-fixada e chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy F . O índice F na função de pertinência é usado em analogia à função característica de um subconjunto clássico, conforme definição.

O conjunto formado por todos os subconjuntos fuzzy de X será denotado aqui por $\mathcal{F}(X)$. Embora a nomenclatura mais apropriada seja dizer que F é um subconjunto fuzzy de X , em outras ocasiões F é conjunto fuzzy, ficando implícita a existência de um conjunto X onde está definida a função de pertinência de F .

Dado um subconjunto fuzzy A de X , é pertinente classificar seus elementos através de uma "hierarquia" definida pelo grau de pertinência desse elemento, o conjunto desses elementos é denominado α -nível.

Definição 11 (BASSANEZI, 2010) Seja A um subconjunto Fuzzy de X . Os α -níveis de A são definidos como os conjuntos clássicos

$$[A]_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad (37)$$

com $0 < \alpha \leq 1$

Para $\alpha = 1$ tem-se

$$[A]^1 = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\} \quad (38)$$

que é denominado *núcleo de um conjunto fuzzy*.

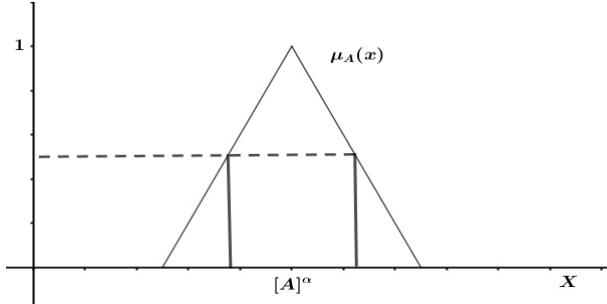


Figura 11 – α -níveis: $[A]^\alpha$.

A Figura 11 apresenta ideia do α -nível, nela verifica o estabelecimento de uma hierarquia a elementos do conjunto A , em outras palavras, um elemento $x \in X$ estará em uma classe A se seu grau de pertinência for maior que um certo nível $\alpha \in (0, 1]$ que define está classe.

Definição 12 (BASSANEZI, 2010) : Seja A um subconjunto fuzzy de X . Suporte de A , $\text{supp}[A]$, são todos os elementos de X que têm grau de pertinência diferente de zero em A , ou seja,

$$\text{supp}[A] = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}, \quad (39)$$

No caso de $\alpha = 0$, ou seja, $[A]_0$ tem-se o fecho do suporte de A que é dado por:

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)} \quad (40)$$

O nível zero de um subconjunto fuzzy A é definido como sendo o menor subconjunto (clássico) fechado de X que contém o conjunto suporte de A .

Definição 13 (BASSANEZI, 2010) : Diz-se que o conjunto fuzzy A de X é normal se existir $x \in A$ tal que:

$$\mu_A(x) = 1 \quad (41)$$

Definição 14 (BASSANEZI, 2010; GOMES, 2014) : Diz-se que o conjunto fuzzy A e B são iguais se,

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X \quad (42)$$

Teorema 4.1.1 (BASSANEZI, 2010; GOMES, 2014) : Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U . Uma condição necessária e suficiente para que $A = B$ é que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 15 (BASSANEZI, 2010) : Um conjunto fuzzy A está contido em um conjunto fuzzy B , e escrevemos $A \subset B$, se

$$\mu_B(x) \leq \mu_A(x), \forall x \in X \quad (43)$$

Analizando o conjunto vazio (\emptyset) vemos que, como o conjunto vazio não possui elemento, o grau de pertinência de um elemento em relação a ele é zero, ou seja, tem função de pertinência $\emptyset(x) = 0$. Por outro lado, o conjunto universo (X) tem função de pertinência $X(x) = 1$ para todo $x \in X$. Portanto podemos dizer que $\emptyset \subset A$ e que $A \subset X$ para todo A .

Definição 16 (BASSANEZI, 2010) : A união entre A e B é o subconjunto fuzzy de X cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), x \in X \quad (44)$$

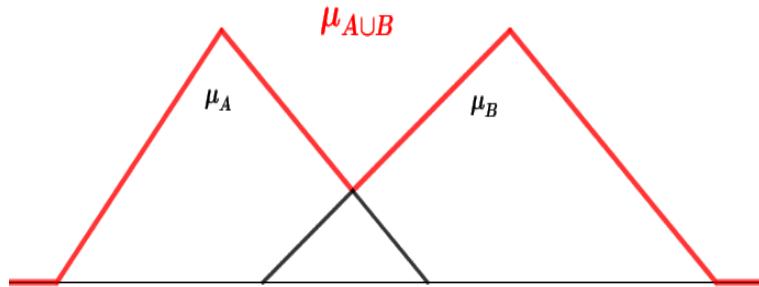


Figura 12 – União de dois conjuntos fuzzy.

Definição 17 (BASSANEZI, 2010) : A intersecção entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), x \in X \quad (45)$$

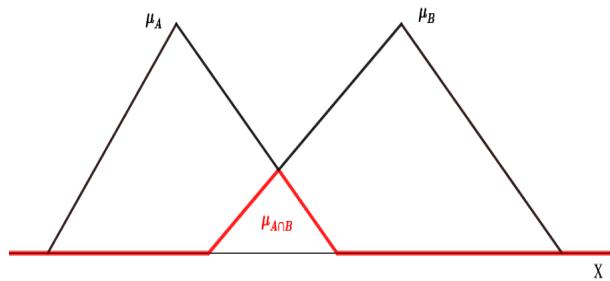


Figura 13 – Intersecção de dois conjuntos fuzzy.

Definição 18 (BASSANEZI, 2010) : O complementar de A é o subconjunto fuzzy A^C de X cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(A^C)}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad x \in X \quad (46)$$

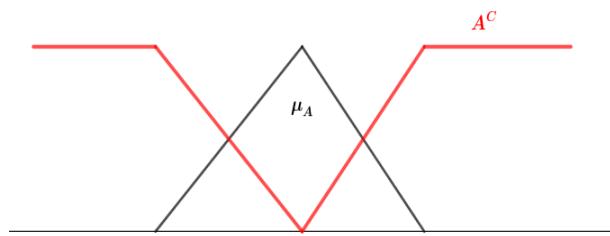


Figura 14 – Complemento fuzzy.

4.2 Princípio da Extensão de Zadeh

Partindo do princípio da extensão de Zadeh, torna-se possível estender uma função f em valores reais para uma correspondente em valores fuzzy, ou seja, essa ferramenta permite calcular a imagem de um conjunto fuzzy por meio de uma função conhecida. Essa ferramenta foi proposta por Zadeh e é o conceito básico da teoria de lógica fuzzy que sustenta a extensão das expressões matemáticas do domínio clássico ao domínio fuzzy (BASSANEZI, 2010).

Exemplo 8 Considere a relação $y = 2x + 4$. Sabemos que, se $x = 3$ então $y = 2 \times 3 + 4 = 10$.

A pergunta é, como podemos calcular o valor de y se x for dado por um conjunto fuzzy de modo que x é "próximo de 3"?

Com o princípio da extensão tem-se um método para fazer isso seguindo a seguinte "ideia": $Y = 3 \times \text{"próximo de 3"} + 4 = \text{"próximo de 10"}$.

Definição 19 (BASSANEZI, 2010; GOMES, 2014) : Seja uma função $f : X \rightarrow Z$, X e Z conjuntos crisp e A um subconjunto fuzzy de X . O princípio de extensão de Zadeh de f define uma função fuzzy $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Z)$ que, quando aplicada a A , fornece o subconjunto fuzzy de Z , cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{\hat{f}}(z) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(z)} \mu(x), & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases} \quad (47)$$

sendo $f^{-1} = \{x | f(x) = z\}$ denominado pré-imagem de z pela função f .

Segundo (Jafelice, 2004), pode-se descrever o princípio da extensão de Zadeh da seguinte forma:

1. O grau de pertinência de um valor do contradomínio é definido pelo grau de pertinência de sua pré imagem.
2. Quando um valor do contradomínio é mapeado por vários do domínio, o seu grau de pertinência é obtido pelo valor máximo dos graus de pertinência dos valores de entrada.

Exemplo 9 Considere $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $f(x) = x + 2$. Se $A = \{(1, 0.1), (2, 0.2), (3, 0.7), (4, 1)\}$ então, a imagem de A por meio de f será o subconjunto fuzzy:

$$\hat{f}(A) = \{(3, 0.1), (4, 0.2), (5, 0.7), (6, 1)\} \quad (48)$$

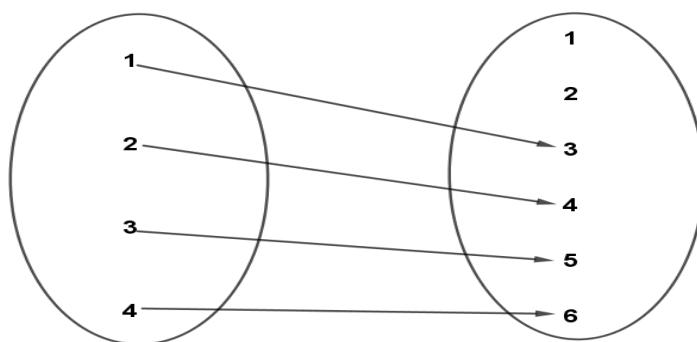


Figura 15 – Diagrama da função \hat{f} do princípio da extensão.

Por meio de diagrama apresentado na Figura 15, tem-se que:

$$\mu_Y(3) = \mu_X(1) = 0.1$$

$$\mu_Y(4) = \mu_X(2) = 0.2$$

$$\mu_Y(5) = \mu_X(3) = 0.7$$

$$\mu_Y(6) = \mu_X(4) = 1$$

4.2.1 Número Fuzzy

O conceito de número fuzzy é uma ferramenta importante em aplicações de conjuntos fuzzy e lógica fuzzy, além de indispensável para análise fuzzy de equações diferenciais fuzzy (BASSANEZI, 2010).

Definição 20 (BASSANEZI, 2010; GOMES, 2014) : Um subconjunto fuzzy A é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo no qual μ_A está definida, é o conjunto dos números reais \mathbb{R} e satisfaz às condições:

- (i) Todos os α -níveis de A são não vazios, com $0 \leq \alpha \leq 1$ ($[A]_\alpha \neq \emptyset$);
- (ii) Todos os α -níveis de A são intervalos fechados de \mathbb{R} ;
- (iii) $\text{Supp}A = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\} = [A]_0$ é limitado.

O número fuzzy generaliza o número real clássico e, de uma forma rústica, um número fuzzy é um subconjunto da reta real com algumas propriedades adicionais.

Como visto na definição anterior, os α -níveis de um número fuzzy A são intervalos fechados de \mathbb{R} , neste trabalho denotaremos esses α -níveis por:

$$[A]^\alpha = [a_{01}^\alpha, a_{02}^\alpha] \quad (49)$$

Teorema 4.2.1 (GOMES; BARROS; BEDE, 2015) : Se A é um número fuzzy e $[A]^\alpha = [a_{01}^\alpha, a_{02}^\alpha]$ são seus α -níveis, então:

1. $[A]^\alpha = [a_{01}^\alpha, a_{02}^\alpha]$ é um intervalo fechado para todo $\alpha \in [0, 1]$
2. Se $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ então $[A]^{\alpha_2} \subseteq [A]^{\alpha_1}$.
3. Para qualquer sequência a_n que converge por baixo para $\alpha \in (0, 1]$ tem-se,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A]_{\alpha_n} = [A]_\alpha$$

4. Para qualquer sequência a_n que converge por cima para 0 tem-se.

$$\overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [A]_{\alpha_n} \right)} = [A]_0$$

Considere também que, se A é um número fuzzy, denota-se seus α -níveis por $[A]^{\alpha} = [a_{01}^{\alpha}, a_{02}^{\alpha}]$, onde, $a_{01}^{\alpha} = \inf A^{\alpha}$ e $a_{02}^{\alpha} = \sup A^{\alpha}$.

Por meio do Teorema anterior, tem-se que os α -níveis de um número fuzzy A são intervalos fechados de \mathbb{R} .

Neste trabalho, a família dos números fuzzy será indicada por $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. De posse dessas informações percebe-se que, se não houver incerteza em relação a um determinado valor, o número fuzzy se reduz a um número real. Por exemplo, ocorre a unanimidade de dizer que o dobro de uma quantia em "torno de 6" resulta em uma quantia em "torno de 12". Se, no exemplo, retirando a incerteza em relação ao número 6, ou seja, calcularmos o dobro de 6 tem-se que o resultado será o número real 12.

Diante disso tem-se que, o número fuzzy é uma generalização do número real. Todo número real r é um caso particular de número fuzzy, cuja função de pertinência é sua função característica:

$$\chi_{\{r\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = r \\ 0, & \text{se } x \neq r \end{cases} \quad (50)$$

Indica-se por $\chi_{\{r\}}$, apenas por \hat{r} , cuja representação gráfica está representado na Figura 16.

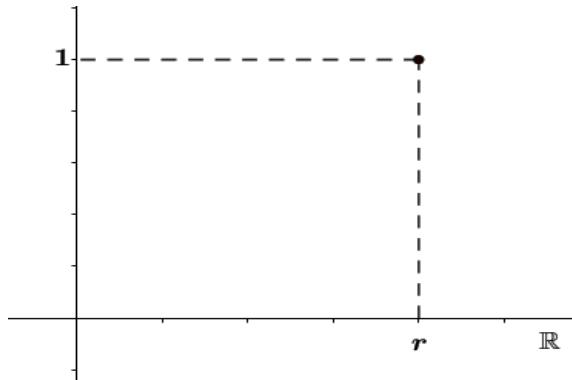


Figura 16 – Representação do número fuzzy \hat{r} .

Portanto, o conjunto de números reais \mathbb{R} é um subconjunto (clássico ou crisp) de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Os números fuzzy mais comuns são os *triangulares*, *trapezoidais* e os em forma de *sino*. Tais números possuem esses nomes devido as suas funções de pertinência definirem gráficos cujas formas se assemelham com tais figuras.

Definição 21 (BASSANEZI, 2010) : Um número fuzzy A é dito triangular se sua função de pertinência é da forma:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a}, & \text{se } a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b}, & \text{se } u < x \leq b \\ 0, & \text{se } x \geq b \end{cases} \quad (51)$$

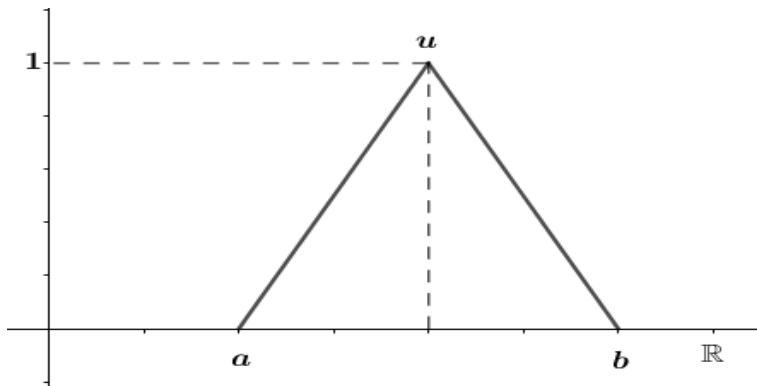


Figura 17 – Número fuzzy triangular.

Como se pode ver na Figura 17, o gráfico da função de pertinência de um número fuzzy triangular tem a forma de um triângulo, tendo como base o intervalo $[a, b]$ e, como único vértice fora desta base, o ponto $(u, 1)$. O número fuzzy triangular será dentado pela terna ordenada (a, u, b) . Observe que o número fuzzy triangular A é um modelo matemático razoável para a expressão linguística do tipo “em torno de u ” já que se espera uma simetria para esse caso. Mas a condição de simetria não é obrigatória, já que $c - b$ pode ser diferente de $b - a$ e a sua existência vai depender da natureza do problema.

Seus α -níveis serão:

$$\frac{x-a}{u-a} \geq \alpha \Rightarrow x-a \geq \alpha(u-a) \Rightarrow x \geq (u-a)\alpha + a \quad (52)$$

$$\frac{x-b}{u-b} \geq \alpha \Rightarrow x-b \geq \alpha(u-b) \Rightarrow x \geq (u-b)\alpha + b \quad (53)$$

De forma simplificada, os α -níveis de um número fuzzy *triangular* é da forma:

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [a + (u - a)\alpha, b + (u - b)\alpha] \quad (54)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$

Definição 22 (BASSANEZI, 2010) : Um número fuzzy A é dito *trapezoidal* se sua função de pertinência tem a forma de um trapézio e é dada por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (55)$$

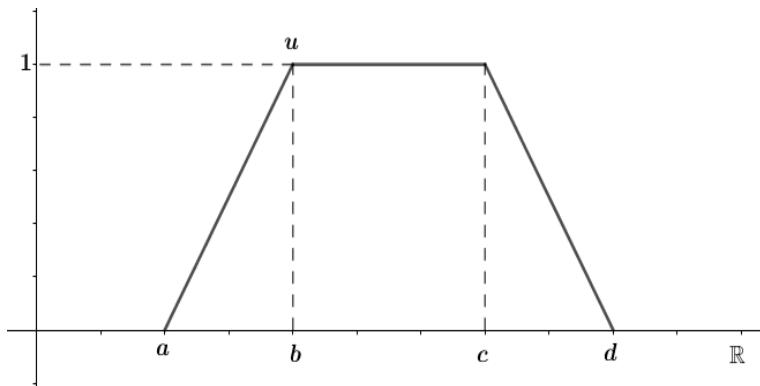


Figura 18 – Número fuzzy trapezoidal.

Definição 23 (BASSANEZI, 2010) : Um número fuzzy tem forma de sino se a função de pertinência for suave e simétrica em relação a um número real. A seguinte função de pertinência tem estas propriedades para u, a e $\delta \in \mathbb{R}$.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2\right), & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (56)$$

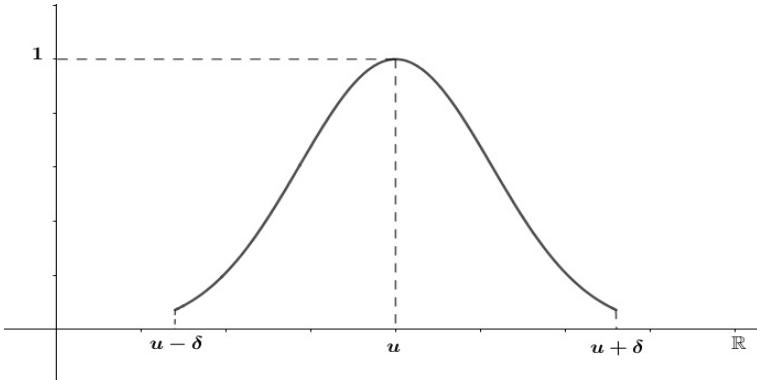


Figura 19 – Número fuzzy em forma de sino.

4.2.2 Operações com Números Fuzzy

As operações aritméticas envolvendo números fuzzy estão relacionadas ás operações aritméticas intervalares. Como vimos anteriormente, operações aritméticas para intervalos estendem as respectivas operações para números reais. Observe que, um número real pode ser considerado como um intervalo fechado com extremos iguais, por exemplo, o número 2 pode ser considerado como o intervalo $[2, 2]$.

A ferramenta utilizada para se obter as operações aritméticas dos números fuzzy, resulta da aplicação do princípio de extensão. Segundo Bassanesi (2010), tem-se que as funções características de cada um dos intervalos obtidos, por meio das operações aritméticas intervalares, podem ser obtidas diretamente das respectivas operações para números reais.

Usando o teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em Pedrycz e Gomide [1998], pode se fazer as operações por meio dos α -níveis dos conjuntos fuzzy envolvidos.

Teorema 4.2.2 (BASSANEZI, 2010; GOMES, BARROS, BEDE, 2015) : Sejam A e B números fuzzy com α -níveis dados, respectivamente, por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então valem as seguintes propriedades:

(a) A soma entre A e B é o número fuzzy $A + B$ cujos α -níveis são

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha] \quad (57)$$

(b) A diferença entre A e B é o número fuzzy $A - B$ cujos α -níveis são

$$[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha] \quad (58)$$

(c) A multiplicação de λ por A é o número fuzzy λA cujos α -níveis são:

$$\lambda[A]^\alpha = [\lambda A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha], & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha], & \text{se } \lambda \leq 0 \end{cases} \quad (59)$$

(d) A multiplicação de A por B é o número fuzzy $A \cdot B$ cujos α -níveis são:

$$[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha = [\min P, \max P] \quad (60)$$

onde $P = [a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha]$

(e) A divisão de A por B , se $0 \notin \text{supp}B$, é o número fuzzy cujos α -níveis são:

$$\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \left[\frac{1}{b_1^\alpha}, \frac{1}{b_2^\alpha}\right] \quad (61)$$

Exemplo 10 Considere os números fuzzy triangulares simétricos $A = (1; 2; 3)$ e $B = (3; 4; 5)$, portanto $[A]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha]$ e $[B]^\alpha = [3 + \alpha, 5 - \alpha]$.

Então, pelo teorema anterior.

$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha] + [3 + \alpha, 5 - \alpha] = [4 + 2\alpha, 8 - 2\alpha]$. Portanto, $A + B = (4; 6; 8)$.

$[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha] - [3 + \alpha, 5 - \alpha] = [1 + \alpha, 3 - \alpha] + [-5 + \alpha, -3 - \alpha] = [-4 + 2\alpha, -2\alpha] = (-4; -2; 0)$. Portanto, $A - B = (-4; 2; 0)$.

$[4 \cdot A]^\alpha = 4 \cdot [A]^\alpha = 4 \cdot [1 + \alpha, 3 - \alpha] = [4 \cdot (1 + \alpha), 4 \cdot (3 - \alpha)] = [4 + 4\alpha, 12 - 4\alpha]$. Portanto, $4 \cdot A = (4; 8; 12)$.

$$[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha = [(1 + \alpha)(3 + \alpha), (3 - \alpha)(5 - \alpha)]$$

$$\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = \frac{[(1+\alpha),(3-\alpha)]}{[(5-\alpha),(3+\alpha)]}$$

4.2.3 Conectivos Básicos da Lógica Fuzzy

No inicio do estudo da lógica matemática tem-se, o estudo dos conectivo lógico que também pode ser chamado de operador lógico. São símbolos ou palavras que são usados para conectar duas ou mais sentenças. Uma sentença pode ser vista como expressão de uma proposição onde ela é algo que possa ser falso ou então verdadeiro, de modo que o sentido da sentença composta produzida dependa apenas das sentenças originais. Como a exemplo de sentença, tem-se:

“Se **a** está em **A** e **b** está em **B**, então **c** está em **C** ou **d** não está em **D**”

Os conectivos lógicos presentes na sentença anterior são: “e”, “ou” e “se...então”. Na lógica clássica o “e” recebe o nome de conjunção, o “ou” recebe o nome de disjunção e o “se... então” recebe o nome de implicação e seus símbolos matemáticos são respectivamente “ \wedge ”, “ \vee ” e “ \Rightarrow ”. Na lógica clássica, sentenças verdadeiras tem valor lógico 1, e sentenças falsas tem valor lógico 0.

Logo, dado duas preposições p e q , tem-se que:

- O valor lógico da sentença “ $p \wedge q$ ” só terá valor 1 quando p e q forem 1, nos demais casos o valor lógico será 0.
- O valor lógico da sentença “ $p \vee q$ ” terá valor 0 quando p e q forem 0, nos demais casos o valor lógico será 1.
- O valor lógico da sentença “ $p \Rightarrow q$ ” terá valor 0 quando p tiver valor 0 e q tiver valor 1, nos demais casos o valor lógico será 1.

Com isso, pode-se observar que p e q assumem apenas os valores 0 ou 1. Por isso, a lógica clássica é também denominada de “lógica a dois valores”. Por outro lado, na lógica fuzzy deve-se atribuir um valor que indique o quanto a proposição “ a está em A ” é verdadeira, sabendo que um elemento a pode pertencer a A com valores no intervalo $[0, 1]$.

Com essa nova característica, para realizar a avaliação lógica dos conectivos no sentido fuzzy, deve-se estendê-los. Tais extensões são obtidas por meio das normas e conormas triangulares.

Definição 24 (BASSANEZI, 2010; KLEMENT, MESIAR, PAP, 2000) : A operação binária $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $T(x, y) = xTy$ é uma t -norma se satisfaz as seguintes condições:

T_1) elemento neutro: $T(x, 1) = xT1 = x$,

T_2) comutativa: $T(x, y) = xTy = yTx = T(y, x)$,

T_3) associativa: $xT(y, z) = (xTy)Tz$,

T_4) Monotonicidade: se $x \leq y$ e $z \leq w$ então $xTz \leq yTw$.

Na operação t -norma considera o operador \wedge que modela o conectivo “e”. Como exemplo, tem-se

$$\begin{aligned} \wedge : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x \wedge y &= \min\{x, y\} \end{aligned} \tag{62}$$

Definição 25 (BASSANEZI, 2010; KLEMENT, MESIAR, PAP, 2000) : A operação binária $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $S(x, y) = xSy$ é uma t-norma se satisfaz as seguintes condições:

S_1) elemento neutro: $S(0, x) = 0Sx = x$,

S_2) comutativa: $S(x, y) = xSy = ySx = S(y, x)$,

S_3) associativa: $xS(y, z) = (xSy)Sz$,

S_4) Monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $xSy \leq uSv$.

Na operação t-conorma considera o operador \vee que modela o conectivo “ou”. Como exemplo, tem-se:

$$\begin{aligned} \vee : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x \vee y &= \max\{x, y\} \end{aligned} \tag{63}$$

t-normas e t-conormas servem para dar base teórica para os sistemas baseados em regras fuzzy, que serão as principais ferramentas da lógica fuzzy utilizadas neste trabalho.

Definição 26 (BASSANEZI, 2010; KLEMENT, MESIAR, PAP, 2000) : Um operador $\Rightarrow : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, é uma implicação fuzzy se satisfizer as seguintes condições:

1. Reproduzir a tabela da implicação clássica, ou seja, o valor lógico da sentença “ $p \Rightarrow q$ ” só terá valor 0 quando p for 1 e q for 0;
2. For decrescente na primeira variável, ou seja, para cada $x \in [0, 1]$ tem-se,

$$(a \Rightarrow x) \leq (b \Rightarrow x) \text{ se } a \geq b.$$

3. For crescente na segunda variável, ou seja, para cada $x \in [0, 1]$ tem-se,

$$(x \Rightarrow a) \leq (x \Rightarrow b) \text{ se } a \geq b.$$

Portanto, o conceito de implicação fuzzy estende a implicação clássica para o intervalo $[0, 1]$ e a restrição aos vértices coincide com os valores da implicação clássica.

Retomando a sentença,

“Se **a** está em **A** e **b** está em **B**, então **c** está em **C** ou **d** não está em **D**”

e utilizando o conceito fuzzy, pode-se reescrever-la da forma:

"Se **a** é **A** e **b** é **B**, então **c** é **C** ou **d** é **D"**

Onde o diferencial, nos dois casos é que, tomando como exemplo a preposição "a está em A" queremos saber se o elemento "a" pertence ou não pertente ao conjunto "A". No caso "a é A" queremos saber o quanto o elemento "a" pertence ao conjunto "A", ou seja, o quanto que "a" está em "A".

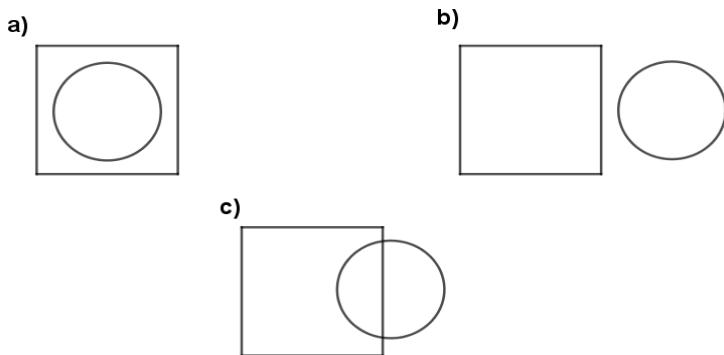


Figura 20 – Em a) círculo interior ao quadrado , em b) círculo exterior ao quadrado e em c) círculo “parcialmente” interior ao quadrado.

Utilizando a Figura 20 como uma forma de representar a situação de pertence, não pertence e o quanto pertence. Considerando o quadrado como um conjunto e o círculo como um elemento. Na lógica clássica só estuda os casos a) e b) da Figura 20, onde o elemento pertence ou não pertence ao conjunto. Na lógica fuzzy pode-se trambalhar além dos casos a) e b) também o caso c) da Figura 20, onde tem-se a condição de estudar o quanto o elemento pertence ao conjunto.

4.2.4 Relação

O entendimento de diversos fenômenos do mundo real o estudo de associações, relações ou interações entre elementos de diversas classes, é de fundamental importância. Como exemplo, nas relações humanas, considere a relação de amizade entre duas pessoas, que se consideram amigos. simplificando a realidade, tem-se que ou alguém é seu amigo ou não é. Por outro lado uma relação de amizade fuzzy entre duas pessoas pode considerar o grau de amizade entre elas.

Em ecologia, os seres vivos de uma mesma comunidade relacionam-se entre si e com o meio. Segundo Braga et al. (2005) duas ou mais espécies que convivem em um mesmo habitat podem desenvolver relações mutuas, tais relações podem ser favoráveis ou desfavoráveis para uma ou para todos os envolvidos na relação. Estas interações podem ocorrer entre indivíduos da mesma espécie (relações intraespecíficas), e também

de outras populações (relações interespecíficas). A exemplo, tem-se a predação que é uma relação negativa, em que a espécie predadora ataca e devora a espécie presa.

Matematicamente, o conceito de relação é formalizado a partir da teoria de conjuntos. Para simplificar, incialmente, considere uma relação binaria entre os conjuntos A e B .

Definição 27 (BASSANEZI, 2010) : *Dados os conjuntos A e B , o produto cartesiano de A por B , denotado $A \times B$ (lê-se: A cartesiano B), é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b) , onde $a \in A$ e $b \in B$, isto é;*

$$A \times B = \{(a, b) | \forall a \in A, \forall b \in B\} \quad (64)$$

Exemplo 11 *Dados dois conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, então $A \times B$ será*

$$\begin{aligned} A \times B = & (1, 2); (1, 4); (1, 6); (1, 8); (3, 2); (3, 4); \\ & (3, 4), (3, 6); (3, 8); (5, 2); (5, 4); (5, 6); (5, 8) \end{aligned} \quad (65)$$

Definição 28 (BASSANEZI, 2010) : *Dados os conjuntos A e B , uma relação R de A em B , denotada $R : A \rightarrow B$ (lê-se: R de A em B), é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.*

Agora, observe estes subconjuntos de $A \times B$

$$R_1 = (1, 2); (1, 8); (3, 4); (3, 6); (5, 4); (5, 8)$$

$$R_2 = (1, 4); (3, 2); (5, 6)$$

$$R_3 = \emptyset$$

$$R_4 = A \times B$$

$$R_5 = (3, 8)$$

R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 são relações binárias entre os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto B (ou relações binárias de A em B), pois todos são subconjuntos de $A \times B$.

Vimos que uma relação clássica indica se há ou não alguma associação entre dois objetos, já uma relação fuzzy, além de indicar se há ou não tal associação, indica também o grau desta relação.

Definição 29 (BASSANEZI,2010) : *Uma relação (clássica) R sobre $X_1 \times X_2 \times X_3 \cdots X_n$ é qualquer subconjunto (clássico) do produto cartesiano $X_1 \times X_2 \times X_3 \cdots X_n$.*

Como a relação R é um subconjunto do produto cartesiano, então ela pode ser representada por sua função característica.

$$\chi_R = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \rightarrow \{0, 1\}, \quad (66)$$

onde

$$\chi_R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } \chi_R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in A, \\ 0, & \text{se } \chi_R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \notin A. \end{cases} \quad (67)$$

Segundo Bassanezi (2010, p.73) “O conceito matemático de relação fuzzy é formalizado a partir do produto cartesiano usual entre conjuntos, estendendo a função característica de uma relação clássica para uma função de pertinência”.

Definição 30 (BASSANEZI, 2010) : Uma relação fuzzy R sobre $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n$ é qualquer subconjunto fuzzy de $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n$. Assim, uma relação fuzzy R é definida por uma função de pertinência $\mu_R : X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \rightarrow [0, 1]$

No caso em que o produto cartesiano é formado por apenas dois conjuntos $X_1 \times X_2$, tem-se uma relação fuzzy binaria sobre $X_1 \times X_2$.

Definição 31 (BASSANEZI, 2010) : O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ respectivamente, é a relação fuzzy $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times \cdots \times A_n$, cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2) \wedge \mu_{A_3}(x_3) \wedge \cdots \wedge \mu_{A_n}(x_n). \quad (68)$$

Onde \wedge representa o mínimo.

4.3 Equação Diferencial Fuzzy

Considerando-se que as incertezas tenham natureza aleatória, o modelo Malthusiano pode ser tratado por meio das equações diferenciais estocásticas, mas se as incertezas forem modeladas por meio de subconjuntos fuzzy pode-se utilizar as equações diferenciais fuzzy e elas podem ser tratadas de várias formas, tais como: equações diferenciais fuzzy (a partir da derivada de Hukuhara), inclusões diferenciais fuzzy, extensão da solução determinística e base de regras fuzzy (BASSANEZI ,2010). Neste trabalho o enfoque será dado aos métodos de Equações diferenciais fuzzy a partir da derivada de Hukuhara e o método via Base de regras fuzzy.

Retomando o modelo de crescimento malthusiano que pressupõe que “o crescimento de uma população é proporcional à própria população”. Tem-se o modelo continuo dado pela equação diferencial.

$$\frac{dP}{dt} = \begin{cases} \lambda P(t) \\ P(t_0) = P_0 \end{cases} \quad (69)$$

Com $P(t)$ e λ sendo números reais em que $P(t)$ é o número de indivíduos em cada instante t e p_0 indica a quantidade inicial de indivíduos da população. Observe que as informações citadas anteriormente consideram que as grandezas λ e p_0 , taxa de crescimento e população inicial respectivamente, são bem determinadas, portanto não há incertezas nos dados. No entanto em um modelo mais próximo da realidade tais grandezas podem ser consideradas incertas devido ao número de indivíduos de uma população por vezes não possível de contagem, a exemplo, números de insetos em uma plantação, e sua taxa de crescimento não ser uma constante fixa. Levando esse fato em consideração, obtém-se incertezas em relação a quantidade exata de indivíduos de uma população (p_0) e em relação a sua taxa de crescimento (λ).

A estreita relação entre logica fuzzy e a teoria intervalar também está presente no conceito de derivada fuzzy. A derivada de Hukuhara esta diretamente ligada no conceito de derivada de Hukuhara para funções com valor de intervalo (BASSANEZI, 2010). No caso unidimensional a função está definida em um intervalo da reta real e leva a valores no conjunto dos números fuzzy, ou seja, a função P associa um número real t a um número fuzzy $P(t)$.

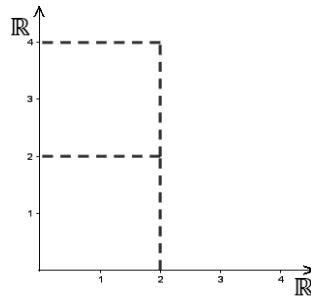
$$P : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}), \quad a \geq 0. \quad (70)$$

Sendo $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ o conjunto dos números fuzzy.

Uma função a valores fuzzy $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ associa cada número real $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ a um número fuzzy $F(t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

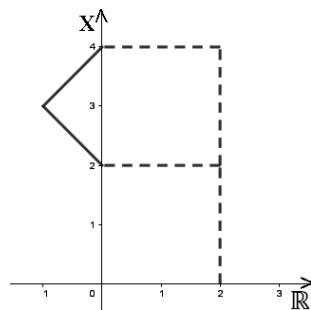
Uma função a valores fuzzy leva pontos clássicos a números fuzzy.

Exemplo 12 A função $F(t) = At$ onde $A = [1, 2]$ e $t \in \mathbb{R}$ é uma função cuja as imagens são intervalos.

Figura 21 – Valor de $F(t) = At$ com $A = [1, 2]$ e $t = 1$.

Tem-se que a imagem da função $F(t) = At$ onde $A = [1, 2]$ e $t = 2$ é o intervalo $[2, 4]$.

Exemplo 13 A função $F(t) = At$ onde $A = (1, 1.5, 2)$ e $t \in \mathbb{R}$ é uma função cuja as imagens são números fuzzy triangulares.

Figura 22 – Valor de $F(t) = At$ com $A = (1, 1.5, 2)$ e $t = 2$.

Tem-se que a imagem da função $F(t) = At$ onde $A = (1, 1.5, 2)$ e $t = 2$ é o número fuzzy triangular $A = (2, 3, 4)$

Para o caso unidimensional define-se a derivada de $P(t)$ a partir de seus α -níveis (Bassanezi, 2010). Sendo $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F$, $a \geq 0$, os α -níveis de $P(t)$ são $[p_1^\alpha(t), p_2^\alpha(t)]$, ou seja,

$$P(t) = [p_1^\alpha(t), p_2^\alpha(t)] \quad (71)$$

Tal função está bem definida se, e somente se, para cada valor distinto de $\alpha \in [0, 1]$, existem funções reais (clássicas).

$$p_1^\alpha, p_2^\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad (72)$$

Por simplicidade e afinidade com a notação, será utilizado a notação clássica de derivada e integral, ou seja, a derivada de funções fuzzy será representado por p' e a integral de funções fuzzy por $\int_a^b F(t)dt$.

Definição 32 (BASSANEZI, 2010) (*Derivada de Hukuhara*) Supondo a existência da derivada clássica $(p_1^\alpha)'(t)$ e $(p_2^\alpha)'(t)$. A derivada da função $p' : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ cujos α -níveis são dados por:

$$[p'(t)]^\alpha = [(p_1^\alpha)'(t), (p_2^\alpha)'(t)]. \quad (73)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$

Exemplo 14 Seja a função $P(t) = At$, $t \geq 0$ com A um número fuzzy, cujos α -níveis são dados pelos intervalos $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[P(t)]^\alpha = [p_1^\alpha(t), p_2^\alpha(t)] = A^\alpha t = [a_1^\alpha t, a_2^\alpha t] = [a_1^\alpha t, a_2^\alpha t]$

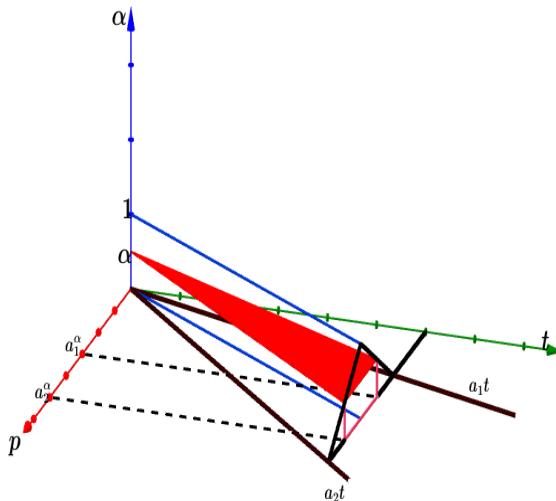
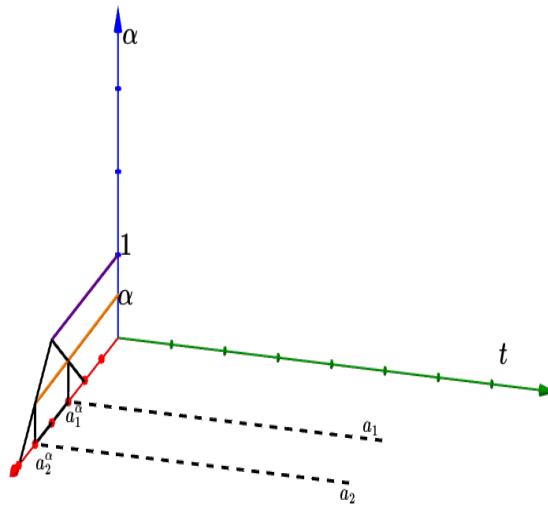


Figura 23 – Função $P(t)$ e seus α -níveis.

Tomando $[P(t)]^\alpha = [p_1^\alpha(t), p_2^\alpha(t)]$, sua derivada será: $[P'(t)]^\alpha = [(p_1^\alpha)'(t), (p_2^\alpha)'(t)] = [(p_1^\alpha t)', (p_2^\alpha t)'] = [(a_1^\alpha t)', (a_2^\alpha t)'] = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$

Figura 24 – Derivada da função $P(t)$ e seus α -níveis.

portanto $p'(t) = A$.

A integral de $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F$ também é definida por meio de seus α -níveis, a partir da integral de Aumann, a princípio ela foi definida para funções com valores em conjuntos clássicos (Bassanesi, 2010)

Definição 33 (BASSANEZI,2010) : A integral $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F$, indicada por $\int_a^b f(t)dt$ é o número fuzzy com α -níveis:

$$\left[\int_a^b p(t)dt \right]^\alpha = \left[\int_a^b p_1^\alpha(t)dt, \int_a^b p_2^\alpha(t)dt \right] \quad (74)$$

onde $\int_a^b p_1^\alpha(t)dt$ e $\int_a^b p_2^\alpha(t)dt$ são as integrais de Riemann das funções reais p_1^α e p_2^α e as funções p_1^α e p_2^α são Riemann integráveis no intervalo $[a, b]$

Tomando $P(t) = At$ a integral será dada por,

$$\begin{aligned} \left[\int p(t)dt \right]^\alpha &= \left[\int p_1^\alpha(t)dt, \int p_2^\alpha(t)dt \right] = \\ \left[\int a_1^\alpha t dt, \int a_2^\alpha t dt \right] &= \left[-a_1^\alpha \frac{t^2}{2}, a_2^\alpha \frac{t^2}{2} \right] = [A]^\alpha \frac{t^2}{2} \end{aligned} \quad (75)$$

Diante disso a integral de $P(t) = At$ definida no intervalo $[a, b]$ é dada por

$$\left[\int_a^b p(t)dt \right]^\alpha = \left[\int_a^b p_1^\alpha(t)dt, \int_a^b p_2^\alpha(t)dt \right] = \left[\int_a^b a_1^\alpha t dt, \int_a^b a_2^\alpha t dt \right] =$$

$$\left[a_1^\alpha \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right), a_2^\alpha \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \right] = \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) [A]^\alpha \quad (76)$$

logo

$$\int_a^b p(t)dt = \int_a^b At dt = A \int_a^b p(t)dt = \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) A$$

A integral de $\int_a^b At dt$ segue o conceito clássico da integral de uma função multiplicada por um número real, ou seja, $\int_a^b At dt$ é a integral de Riemann $\int_a^b t dt$ que, multiplica o número fuzzy A .

Definição 34 (BASSANEZI, 2010) *A métrica para conjunto fuzzy, proveniente da métrica de Hausdorff, é dada por:*

$$\mathcal{D}(A, B) = \max_{0 \leq x \leq 1} d_H([A]^\alpha, [B]^\alpha) \quad (77)$$

Onde d_H é a métrica de Hausdorff para intervalos compactos de \mathbb{R} . Por meio dessa métrica Relascu provou que o espaço métrico $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ é completo, e com isso garante que toda sequencia convergente de número fuzzy converge para um número fuzzy (Bassanezi, 2010).

Teorema 4.3.1 (BASSANEZI, 2010) *Se $F, G : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ são funções diferenciáveis e $\lambda \in \mathbb{R}$, então*

- F e G são continuas na métrica \mathcal{D} ;
- $(F + G)'(t) = F'(t) + G'(t)$;
- $(\lambda F)'(t) = \lambda F'(t)$.

A demonstração do teorema anterior não será apresentada neste trabalho mas os interessados podem consultar Tese de Laécio Carvalho de Barros Sobre sistemas dinâmicos fuzzy - teoria e aplicações/1997.

4.4 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Diversas aplicações de importância prática em modelagem está baseada na concepção de modelos computacionais do conhecimento empregado por um especialista humano formando um Sistema Baseado em Regras.

As regras como uma forma de representação do conhecimento tem uma estrutura formada por uma sequência lógica utilizando os operadores “SE (antecedente) . . .

ENTÃO (consequente)" de modo a relacionar as informações do antecedente, também denominado de premissa ou condição com o consequente também denominado de conclusão.

Sistemas baseados em regras são sistemas especialistas, onde o conhecimento relativo ao domínio de problemas é armazenado como regra. Tais regras são separadas a depender do modo como são processadas, seguindo uma sequência lógica. A partir desse conceito, tem-se os sistemas baseados em regras fuzzy que se utilizam da lógica fuzzy para produzir saídas para cada entrada fuzzy. Sua estrutura é dada pela Figura 25.

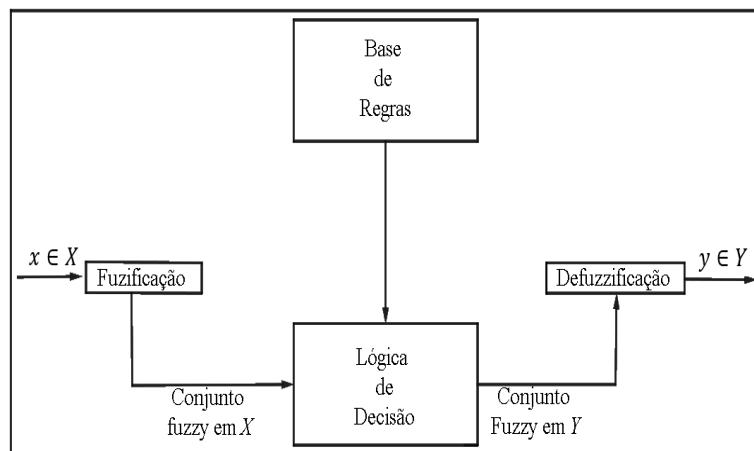


Figura 25 – Arquitetura de sistemas baseados em regras fuzzy. Fonte: Peixoto, 2005.

Como fica evidente na Figura 25, o sistema baseado em regras fuzzy é composto por quatro etapas: fuzzificador (processador de entrada), um conjunto de regras linguísticas, um método de inferência fuzzy e um defuzzificador (processador de saída).

O fuzzificador que gera a fuzzificação é o processo pelo qual os valores de entrada do sistema são convertidos para conjuntos fuzzy, com seus respectivos domínios. É uma transformação do domínio de números reais para o domínio fuzzy. Na Fuzzificação também há atribuições de valores linguísticos, descrições vagas ou qualitativas, definidas por funções de pertinência. As funções de pertinência são formuladas para cada conjunto fuzzy envolvido no processo (Bassanezzi, 2010) .

Uma base de regras fuzzy tem a forma,

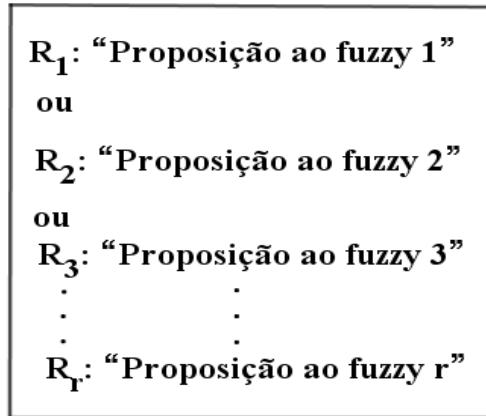


Figura 26 – Forma geral de uma base de regras fuzzy.

Nos sistemas baseados em regras fuzzy cada proposição fuzzy tem a forma,

SE “estado” ENTÃO “reposta”

Pode-se considerar a base de regras, como sendo um módulo que faz parte do “núcleo” do controlador fuzzy, ela caracteriza os objetivos e as estratégias utilizadas por especialistas da área de conhecimento, por meio de um conjunto de regras linguísticas que é composto pelas proposições fuzzy.

O método de inferência participa proporcionando que cada proposição fuzzy seja “traduzida” matematicamente por meio das técnicas de inferência fuzzy, é onde se define quais regras de inferência, t-normas e t-conormas serão utilizadas para se obter a relação fuzzy que modela a base de regras (BASSANEZI, 2010). Neste trabalho será utilizado o Método de Mamdani, publicado em 1973. Ele propõe uma relação fuzzy binária para modelar matematicamente a base de regras agregando as regras por meio do operador lógico OU, modelado pelo operador matemático \vee , em cada regra, os operadores lógicos E são modelados pelo operador mínimo \wedge em uma proposição condicional.

Assim como Peixoto (2005), será utilizado como exemplo do método apenas duas regras genéricas, representadas na Figura 27.

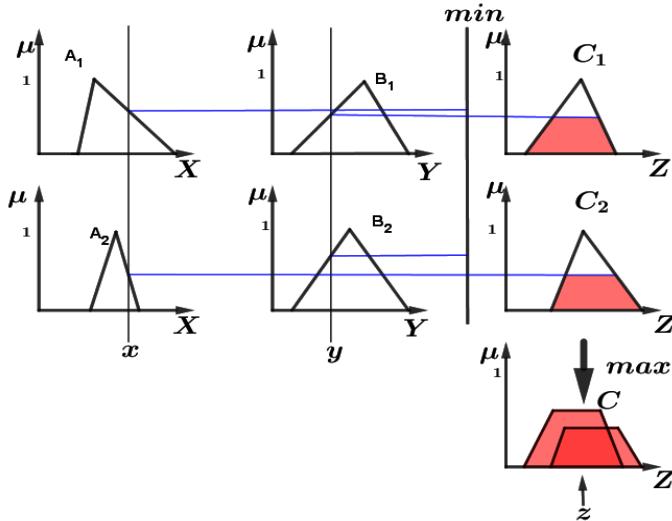


Figura 27 – Método de Inferência de Mamdani.

1. Em cada regra R_j a condicional “Se x é A_j , Então y é B_j ” é modelada pela aplicação o mínimo;
2. Adota-se a aplicação \vee (mínimo) para o conceito lógico “e” e o \wedge (máximo) para “ou”.

Assim, a relação fuzzy R é o subconjunto fuzzy de $X \times U$ cuja função de pertinência é dada por,

$$\mu_R(x, y) = \max_{1 \leq i \leq r} (\mu_{R_i}(x, y)) = \max_{1 \leq i \leq r} [\mu_{A_j}(x) \wedge \mu_{B_j}(y)] = z \quad (78)$$

Sendo r o número de regras que compõem a base de regras, e A_j e B_j são os subconjuntos fuzzy da regra j .

Exemplo 15 Dessa forma, para cada terna $(x_1; x_2; y)$, tem-se,

$$\begin{aligned} \mu_R(x_1, x_2, y) &= \mu_{A_{11}}(x_1) \wedge \mu_{A_{22}}(x_2) \wedge \mu_{B_1}(y) \vee \mu_{A_{21}}(x_1) \wedge \mu_{A_{22}}(x_2) \vee \mu_{B_2}(y) = \\ &= \max\{\mu_{A_{11}}(x_1) \vee \mu_{A_{12}}(x_2) \vee \mu_{B_1}(y), \mu_{A_{21}}(x_1) \vee \mu_{A_{22}}(x_2) \vee \mu_{B_2}(y)\} \end{aligned} \quad (79)$$

que representa a relação fuzzy obtida da fase de regras pelo método de Mamdani.

A partir da Equação 79, pode-se observar que a saída do método de Mamdani resulta da união entre as saídas parciais de cada regra. Para obter cada saída parcial, procede-se da seguinte forma: faz-se a interseção das entradas com cada antecedente da regra, e em seguida, faz-se o produto cartesiano (universos distintos) dessas intersecções

com os consequentes da regra. A projeção desse produto cartesiano no espaço U é a saída parcial para o conjunto fuzzy de entrada A (BASSANEZI, 2010).

O processo de fuzzificação no controlador fuzzy gera uma entrada fuzzy e a cada entrada fuzzy o módulo de inferência produz, como era de se esperar, uma saída fuzzy que indica o controle a ser adotado. Entretanto, se a entrada for um número real, é de se esperar que saída correspondente também o seja e para isso é preciso que ocorra um processo de defuzzificação, a partir da saída fuzzy, pode-se encontrar a saída clássica (BASSANEZI, 2010).

Fazer um processo que torne a saída fuzzy em uma saída clássica é a função da defuzzificação. No processo, o valor da variável linguística de saída inferida pelas regras fuzzy é traduzida num valor real. O objetivo é obter-se um único número real que melhor represente os valores fuzzy inferidos da variável linguística de saída. Dentre os métodos de defuzzificação, temos o método do Centro de Gravidade ou Centroide que é a técnica de defuzzificação mais comumente utilizada, representado na Figura 28.

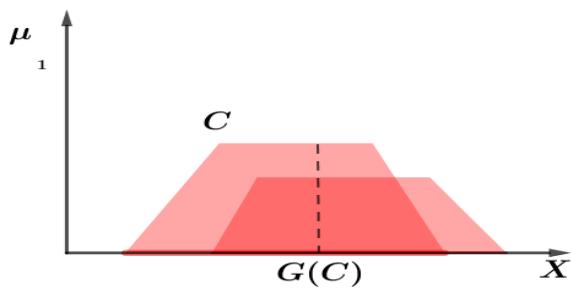


Figura 28 – Defuzzificador centro de gravidade $G(B)$.

O Centro de gravidade ($G(B)$) é semelhante a média aritmética para uma distribuição de frequências de uma dada variável, com a diferença que os pesos aqui são os valores $\mu_A(x_i)$, que indicam o grau de compatibilidade do valor x_i com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy B . O centro de gravidade dá a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto fuzzy. Caso x pertença ao domínio discreto, então a defuzzificação do conjunto fuzzy A é dada pela fórmula

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=0}^n x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=0}^n \mu_A(x_i)} \quad (80)$$

Por outro lado, se x é contínuo, então,

$$\bar{z} = \frac{\int_a^b x \mu_A(x) dx}{\int_a^b \mu_A(x) dx} \quad (81)$$

5 Informações Falsa-medideira e Vespa

5.1 *Chrysodeixis includens* Walker, 1857. (Lepidoptera: Noctuidae) - Falsa-medideira

Segundo a Cartilha Fitossanitária da Bahia (2014/2015) os principais insetos pragas da região oeste da Bahia que necessitam de atenção pelo seu potencial de danos são: a Helicoverpa (*Helicoverpa armigera*) cujos ataque ocorre em todas as culturas; a Lagarta-do-cartucho (*Spodoptera frugiperda*) que possui ineficiência da tecnologia Bt em milho; a lagarta falsa-medideira (*C. includens*) que efetuou intensos ataques nas lavouras de soja em 2014, a Mosca-branca (*Bemisia tabaci*), o Bicudo-do-algodoeiro (*Anthonomus grandis* (BAHIA, 2015). Neste trabalho focaremos nossa atenção para Lagarta falsa-medideira (*C. includens*).

A lagarta falsa-medideira, *C. includens*, é considerada um dos principais insetos desfolhadores do complexo Plusiinae. Recebem esse nome pelo hábito de deslocarem dobrando o corpo como que se medindo palmos, em decorrência de apresentarem apenas dois pares de falsas pernas na região abdominal e um na região caudal (SOSA-GÓMEZ *et al.*, 2010).



Figura 29 – Lagarta Falsa-medideira. Fonte:Moreira; Aragão, 2009.

De acordo com a Figura 29, lagarta falsa-medideira apresenta coloração verde-clara, com linhas longitudinais esbranquiçadas no dorso, podendo medir 35mm (HOFFMANN-CAMPO, 2000).

Na fase de pupa, o estágio intermediário entre a larva e o adulto, a lagarta forma uma teia sob as folhas de soja dobrando-as, Figura 30.



Figura 30 – Pupa. Fonte: Hoffmann-Campo, 2000.

Nesse local, a pupa permanece até a emergência do adulto.

Na fase adulta, Figura 31, elas possuem 35 mm de envergadura, com asas anteriores de coloração marrom com brilho cípreo e com a asa posterior também de coloração marrom (GALLO, et al., 2002).



Figura 31 – Adulto Fonte: Hoffmann-Campo, 2000.

As lagartas se alimentam de cerca de 174 espécies de plantas sejam elas cultivadas ou silvestres, exemplo do feijão, repolho, quiabo, batata-doce, fumo, tomate, milho, sorgo, soja, algodão, dentre outras. Tal fato demonstra que a falsa-medideira é uma praga polífaga. Tal característica, a polifagia, pode colaborar com a dinâmica populacional e condição de praga, uma vez que as populações podem se desenvolver simultaneamente em diferentes plantas hospedeiras dentro de uma região ou podem persistir no ambiente em baixa densidade até a fêmea encontrar um hospedeiro capaz de sustentar o desenvolvimento das lagartas.

Na cultura elas consomem folhas, flores e vagens da soja. Das folhas, somente o limbo foliar é consumido, já que lagarta não consome as nervuras da folha. Este comportamento proporciona nas folhas um aspecto rendilhado, Figura 32, característico

do ataque da praga, indicando que no local há sua ocorrência (MOREIRA; ARAGÃO, 2009; BUENO *et al.*, 2007).



Figura 32 – Dano causado pela falsa-medideira em uma folha de soja. Fonte: Moreira; Aragão, 2009.

Segundo Andrade (2014) o ciclo larva adulto dura cerca de 26 dias, a taxa de Sobrevivência das fases da larva-adulto da falsa-medideira é de 82.77% até 87.23% e a razão sexual corresponde a valores entre 51% e 57%. Para Hoffmann-Campo (2000), durante esse período pode consumir até 200 cm^2 de área foliar da soja.

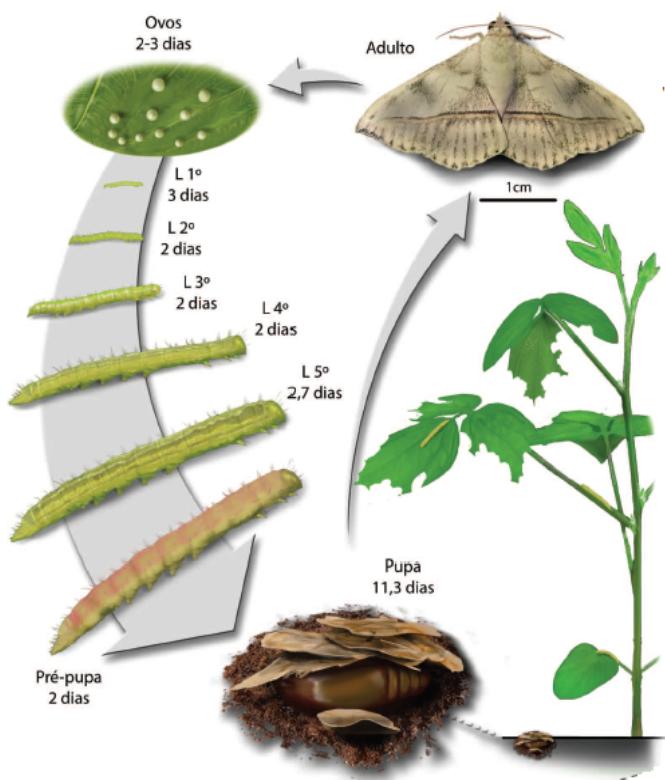


Figura 33 – Ciclo de desenvolvimento de *Chrysodeixis includens*. Fonte: Reid, 1975; Bueno *et al.*, 2012.

Para Avila & Grigolli (2013) a população da falsa-medideira possui tendência à surgir a partir dos 41 dias após a emergência da soja. A lagarta é capaz de colocar mais de 600 ovos, durante o seu período de vida (SILVA, 2017; HOFFMANN-CAMPO, 2000) e, segundo Avila & Grigolli (2013), e Andrade (2014), a falsa-medideira ovipositar em média 700 ovos, os quais são depositados na face inferior das folhas e nos dois terços superiores do dossel da plantas.

5.2 *Trichogramma pretiosum* Riley, 1879. (Hymenoptera: Trichogrammatidae)

A vespa *Trichogramma* é um agente biológico do tipo parasitoide de ovos e ocorre principalmente em lepidópteros (borboletas e mariposas) ela está entre os inimigos naturais mais estudados mundialmente. A sua liberação para o controle biológico de pragas são realizados há mais de 100 anos em todo o mundo no controle biológico de insetos e embora isso aconteça, segundo Querino e Zucchi (2012) os estudos com tricogramatídeos são relativamente recentes na América do Sul e no Brasil os primeiros estudos são datados de 1980.

Para Cruz e Monteiro (2014) as vespas *Trichogramma* parasitam os ovos de várias tipos de insetos. Sua utilização é recomendada principalmente por ser um inseto que pode ser multiplicado em laboratório de maneira fácil e econômica, utilizando-se, para isso, hospedeiros alternativos. São de tamanho pequeno, com cerca de 0.2 a 1.5 mm, são solitárias ou gregárias e seu desenvolvimento ocorre no interior do hospedeiro o que a torna um organismo endoparasitoide.

O modo de ação da vespinha ocorre com as fêmeas de *Trichogramma* ovipositam seus ovos no interior dos ovos da presa e ao invés de eclodir uma lagarta, emerge um adulto da vespinha.

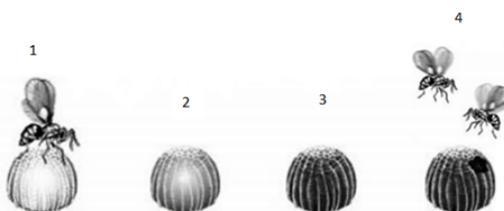


Figura 34 – 1-Vespa parasita o ovo; 2- A larva de *Trichogramma* se alimenta internamente no ovo; 3-ovo é preto *Trichogramma* em fase de pupa; 4 - emergem as vespas. Fonte: KNUTSON, 2005.

Após o parasitismo a praga tem seu desenvolvimento interrompido gradualmente e em poucos dias ocorre o nascimento de um novo parasitoide (vespinha adulta)

que se multiplicará na cultura utilizando o ovo da praga para sua reprodução em campo (BUENO *et al.*, 2009; CRUZ; MONTEIRO; 2014).

O processo de desenvolvimento passa pela fase de ovo, larva, pré-pupa. A coloração do inseto apresenta modificações quanto ao estágio de desenvolvimento e que se torna mais escura com desenvolvimento (BUENO *et al.*, 2009; CRUZ; MONTEIRO; 2014).



Figura 35 – *Trichogramma pretiosum* ovipositando seus ovos Fonte: Embrapa, 2013.

5.3 O Potencial de Predação

As informações obtidas referente as espécies/linhagens de tricogramatídeos foram retiradas de (BUENO *et al.*, 2009). Em seu trabalho foram realizadas coletas em diferentes regiões do país e em diferentes hospedeiros e mantidas na coleção do Laboratório de Biologia de Insetos do Departamento de Entomologia, Fitopatologia e Zoologia Agrícola da ESALQ/USP . Dentre os pontos de coletas tem-se o localizado na região oeste da Bahia na cidade de Barreiras e dentre os hospedeiros tem-se falsa-medideira e para este trabalho as informações utilizadas serão as obtidas no ponto de coleta e no hospedeiros citado.

Segundo Bueno *et al.*, (2009), a duração ovo-adulto (dias) pode variar entre 10.82 e 10.98 dias e durante essa transição o número de adultos emergidos por ovo de *C. includens* varia entre 1.15 e 1.05. Outra característica importante a ser analisada em programas de controle biológico aplicado se refere a razão sexual, devido a necessidade de uma maior produção de fêmeas, visto que são elas as responsáveis pelo parasitismo, nesse caso ela varia de 0.8095 à 0.8260 .

De acordo com a informação sobre a razão sexual, considera-se que os predadores são diferenciados de acordo com seu sexo, segundo uma função de pertinência à classe

dos predadores que aqui adotaremos:

$$P_{y_i} = \begin{cases} 1, & \text{se } fêmea \\ 0, & \text{se } se \text{ macho} \end{cases} \quad (82)$$

Sendo assim, populações de mesmo tamanho podem ter diferentes potencialidades de predação e isso dependerá da quantidade de fêmeas.

Continuando com Bueno *et al.*, (2009), para cada 20 ovos de *P. includens* ofertados para cada fêmea *Tricogramatídeos* houve parasitismo entre 44.65% e 52.15%, portanto são parasitados um valor entre 8.138 e 10.418 ovos. Destes ovos parasitados o percentual de emergência varia entre 88.96% e 97.24% o que torna um predador bastante favorável.

Bueno *et al.*, (2009) cada fêmea gera por ovo parasitado um número entre 1.05 e 1.15 indivíduos adultos, portanto, o número de adultos gerados por cada fêmea é dado por meio do produto entre o número de indivíduos adultos e o número de ovos parasitados, ou seja, valores entre 8.5449 e 11.9807.

5.4 Manejo Integrado de Pragas (MIP)

Constantemente pragas ou pestes surgem em lavouras ou meios urbanos. Uma praga é qualquer espécie, raça ou biótipo de vegetais, animais ou agentes patogênicos , nocivos para os vegetais ou produtos vegetais (GALO *et al.*, 2002). Seu surgimento em muitos casos ocorrem pela interferência do homem no meio ambiente. Sem a interferência humana na natureza ocorrem mecanismos de densidade recíproca, o qual atua de tal forma que sempre uma população é regulada por outra população, ou seja, um ser vivo é sempre explorado por outro ser vivo acarretando efeitos na regulação do crescimento populacional e assim mantendo o equilíbrio da natureza caracterizando a Dinâmica Populacional como um fenômeno natural, mas as ações humanas podem dissolver um sistema estável e equilibrado.

É evidente que a agricultura é um modificador de um sistema ecológico, a sua inserção interfere na regulação do número de plantas e animais e também acarretam mudanças climáticas. Procurar uma solução em que ocorra ganho, tanto do lado agrícola como do lado ambiental é uma ideia que motiva a criação e aplicação de recursos matemáticos e naturais. Um dos desequilíbrios que ocorrem está relacionado ao surgimento de insetos que acabam se tornando pragas nas lavouras.

O controle de pragas, na maioria das vezes, ocorre com a utilização de processos exclusivamente químico mas, em grande parte das situações esse método não proporciona os resultados desejados. Ele pode acarretar o comprometimento da sobrevivência dos predadores naturais e a diminuição da diversidade biológica facilitando o desequi-

líbrio em favor das próprias pragas. O controle de pragas em lavouras deve ocorrer de forma sistematizada e isso deve surgir com a utilização da técnica de Manejo Integrado de Pragas (MIP) que para Alves (1998, p. 1097) “[...] é uma estratégia de controle que utiliza várias táticas em harmonia com o ambiente, integrando-as nas diferentes fases da cultura ou do sistema considerado”.

Segundo Alves (1998, p. 1097) “O objetivo do MIP é manter os insetos em níveis populacionais que não afetem economicamente a cultura”. Deste modo no controle biológico não se pretende buscar soluções que acarretem na eliminação total de pragas, mas sim em soluções que proporcionem um maior período em que as pragas estejam em quantidades baixas, quantidades que não acarretem danos as lavouras.

5.5 Controle Biológico

Existem muitas técnicas para o controle de insetos pragas em lavouras , dentre os mais populares tem-se o controle químico, controle cultural, cultivo de plantas resistentes e o controle biológico. Este trabalho será focado no controle biológico que segundo Gallo *et al.*, (2002, p. 282) “ É um fenômeno natural que consiste na regulação do número de plantas e animais por inimigos naturais, que constituem agentes de mortalidade biótica”.

O controle biológico se divide em 3 categorias que para Gallo *et al.*, (2002) são:

- Controle biológico clássico: consiste na importação e colonização de parasitóides e predadores, visando o controle de pragas exóticas (eventualmente nativas) ocorrendo por meio de liberação inoculativas com a liberação de pequenos números de insetos;
- Controle biológico natural: conservação de populações de inimigos naturais que ocorrem naturalmente, tais parasitóides e predadores devem ser preservados, e se possível aumentados, por meio de manipulações de seu ambiente de alguma forma favorável;
- Controle biológico aplicado: consiste na liberação de parasitóides e predadores, após a sua produção em massa em laboratório, visando à redução rápida da população da praga para o seu nível de equilíbrio.

Geralmente o controle biológico aplicado é o mais aceito pelos usuários isso ocorre devido ao fato dele possuir uma ação mais rápida, muito semelhante a inseticidas convencionais. Para utilização do controle biológico aplicado é preciso conhecer qual espécie de inimigo natural é o mais eficiente, e em diversos casos os insetos da família dos Tricogramatídeos é recomendado.

Neste trabalho será abordado a predação, interação em que a espécie predadora ataca e devora a espécie presa, que no caso de *T. pretiosum* a fase larval é a predadora e que nesse tipo de parasitismo o parasita mata a presa.

Gallo *et al.*, (2002) afirma que o controle biológico aplicado é o mais facilmente aceito pelo usuário, pois tem ação rápida de modo a se tornar semelhante a inseticidas convencionais. Na atualidade, em uma simples busca pela rede de internet é possível encontrar ofertas de vendas e comprar legalmente insetos predadores, a exemplo, os insetos da família *Trichogramma*.



Figura 36 – Cartela com vespas do gênero *Trichogramma*..

6 Metodologia

A escolha da presa (falsa-medideira) foi devido a sugestão do Dr. Adeney de Freitas Bueno, Entomologista da Embrapa Londrina-Paraná no Brasil, durante contato realizado via correspondência eletrônica. A espécie predadora (vespa) fora escolhida devido a diversos trabalhos acadêmicos e pesquisas comerciais à utilizarem como um agente biológico. A sua grande utilização é devido ela estar presente entre os inimigos naturais mais estudados mundialmente, ser efetiva no processo de predação e ser facilmente comercializado, por vias legais, mundialmente e inclusive é possível encontrar ofertas de vendas e comprar facilmente na internet.

Antes da aplicação do modelo foi feito um estudo sobre a teoria fuzzy, onde a principal referência é o livro Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática do Dr. Rodney Carlos Bassanezi (2010).

Para ilustrar as aplicações das equações diferenciais fuzzy será suposta que, no modelo de Malthus, apenas a condição inicial seja fuzzy e considerar taxas de variações positivas, ou seja, populações em expansão.

Os resultados foram obtidos em simulações feitas com os parâmetros referente a taxa de sobrevivência da fase larva até fase de reprodução (adulta), razão sexual e número de ovos ovipositados adquiridos em teses, dissertações e material bibliográfico de instituições pública de pesquisa referenciadas.

Para a aplicação do sistema baseado em regras fuzzy no modelo de interação entre especiais, utilizou-se o modelo presa-predador baseado em regras fuzzy apresentada por Magda da Silva Peixoto em sua Tese intitulada: Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: um Estudo da Dispersão da Morte Súbita dos Citros em São Paulo (2005). Seguindo o conceito clássico de Lotka-Volterra, o modelo fuzzy adota duas variáveis de entrada e duas de saída que são a quantidade de presas e o potencial de predação. Para modelagem dos parâmetro considerou-se os número fuzzy triangular e trapezoidal levando-se em conta os dados obtidos na literatura.

No caso apresentado aqui adotou-se o método de inferência de Mamdani com defuzzificação dada pelo centro de massa. As simulações foram desenvolvidas no software MATLAB, onde destacamos o uso do Fuzzy Logic Toolbox para esse objetivo (ver anexo A).

Para plotagem dos gráficos utilizou-se o aplicativo GeoGebra (aglutinação das palavras Geometria e Álgebra). Ele é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. Sua distribuição é livre, e é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas.

6.1 Aplicações das Equações Diferenciais Fuzzy no Modelo Malthusiano

Uma aplicação das equações diferenciais fuzzy pode ser vista no modelo de Malthus, considerando o caso onde apenas a condição inicial é fuzzy e com as taxas de variações positivas, ou seja, quando a população está em expansão.

$$\frac{dP}{dt} = \begin{cases} \lambda P(t) \\ P(t_0) = P_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (83)$$

Como a condição inicial (população inicial $P(t_0)$) é fuzzy, então a população ($P(t)$) também será. Suponha que $P(t) = [p_1(t); p_2(t)]$, sendo assim os α -níveis $P(t) = [p_1^\alpha(t); p_2^\alpha(t)]$. De acordo com a Derivada de Hukuhara para cada $\alpha \in [0, 1]$, resolve-se a equação:

$$P(t) = \begin{cases} [P'(t)]^\alpha = \lambda P(t) = \lambda[p_1^\alpha(t); p_2^\alpha(t)] \\ P_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \text{ e } \lambda > 0 \end{cases} \quad (84)$$

Como $\lambda > 0$ é um número real e $[p_1^\alpha(t); p_2^\alpha(t)]$ é um número fuzzy, pode-se realizar ao operação da multiplicação de número real por números fuzzy e tem-se:

$$P(t) = \begin{cases} [P'(t)]^\alpha = \lambda P(t) = [\lambda p_1^\alpha(t); \lambda p_2^\alpha(t)] \\ P_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \text{ e } \lambda > 0 \end{cases} \quad (85)$$

Portanto

$$P(t) = \begin{cases} [(p_1^\alpha)'(t), (p_2^\alpha)'(t)] = [\lambda p_1^\alpha(t); \lambda p_2^\alpha(t)] \\ P_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \text{ e } \lambda > 0 \end{cases} \quad (86)$$

Tem-se que a solução dessa equação é obtida a partir da solução do sistema de equações determinísticas para seus α -níveis:

$$P(t) = \begin{cases} (p_1^\alpha)'(t) = \lambda p_1^\alpha(t), \text{ com } p_1^\alpha(a) = p_{01}^\alpha \\ (p_2^\alpha)'(t) = \lambda p_2^\alpha(t), \text{ com } p_2^\alpha(a) = p_{02}^\alpha \end{cases} \quad (87)$$

Para cada $\alpha \in [0, 1]$ a solução do sistema anterior existe e é dada por:

$$P(t) = \begin{cases} p_1^\alpha(t) = p_{01}^\alpha e^{\lambda t} \\ p_2^\alpha(t) = p_{02}^\alpha e^{\lambda t} \end{cases} \quad (88)$$

se $\alpha = 1$ temos o modelo Malthusiano clássico.

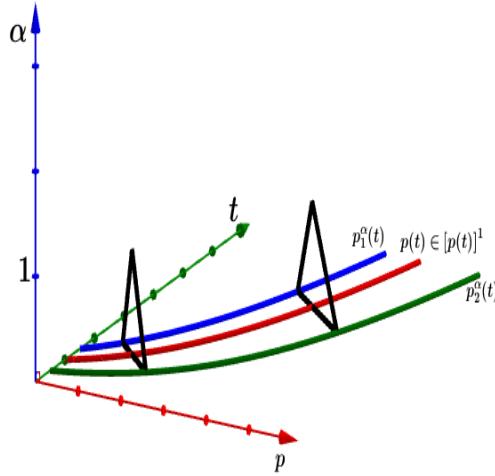


Figura 37 – Solução do modelo malthusiano fuzzy de expansão populacional $\lambda > 0$.

6.1.1 Modelo Malthusiano via Base de Regras

Um modelo de crescimento populacional deve incluir variáveis que permitam determinar a população em determinado instante. Para tal, é necessário construir um sistema baseado em regras fuzzy, uma vez que estas variáveis são incertas. Então, com o auxílio da modelagem fuzzy, as variáveis de entrada e saída do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy em seus respectivos domínios. Assim, define-se uma base de regras, com informações de especialistas, para ativar as informações de entradas/saídas linguísticas do sistema fuzzy.

O Modelo Malthusiano, cuja principal suposição é que, em cada instante t , a taxa de crescimento de uma população é diretamente proporcional à população. A base de regras construída aqui é para a taxa de variação por unidade de tempo. Assim, x é o valor da variável de entrada e por x' a variação de x que é o valor da variável de saída. Adotaremos apenas seis qualificações para cada uma dessas variáveis linguísticas, resumidas a seguir:

R_1 : Se a população (x) é “Muito baixa” então a variação x' é “Muito baixa”.

R_2 : Se a população (x) é “Baixa” então a variação x' é “Baixa”

R_4 : Se a população (x) é “Média” então a variação x' é “Média”

R_5 : Se a população (x) é “Alta” então a variação x' é “Alta”

Observe que, tomando como exemplo a regra 2, estamos supondo que a quantidade de presas, x , é “baixa” então a crescimento da sua população será “baixa”. Em nenhum momento estabelecemos um número exato x para quantificar a população,

assumimos um “intervalo” em que consideramos em que o “baixo” deva estar. Como x tende a aumentar a medida que o tempo passa e considerando a hipótese em que as condições bióticas sejam favoráveis (alimentação, espaço ...) a quantidade x passa a assumir uma nova regra e assim sucessivamente.

Utilizando a base de regras apresentada por Magda da Silva Peixoto (2005). O modelo fuzzy Malthusiano adota a variável de entrada, quantidade ovos de falsa-medideira que é definida por x . A variável de saída será a variação da quantidade de ovos de falsa-medideira que definiremos x' .



Figura 38 – Estrutura da base de regras: variável de entrada x , base de regras, variável de saída x' .

A Simulações das trajetórias produzidas pelo modelo fuzzy Malthusiano seguem os passos:

- O valor da população inicial de presas x_0 é inserido no controlador fuzzy,
- O controlador fuzzy fornece o valor da variável de saída: x'_0
- Para encontrar o valor de x_1 o valor x'_0 é inserido em,

$$x_1 = x_0 + x_0 \cdot x'_0 \quad (89)$$

- Para encontrar o valor de x'_2 o valor x_1 é inserido em,

$$x_2 = x_1 + x_1 \cdot x'_1 \quad (90)$$

Assim sucessivamente até determinar o valor x_{n+1} obtendo recursivamente a fórmula,

$$x_{n+1} = x_n + x_n \cdot x'_n \quad (91)$$

Com $x_0 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

A seguir cada um dos adjetivos “Muito baixa”, “Baixa”, “Média” e “Alta” é modelado matematicamente por um conjunto fuzzy através de sua função de pertinência, de acordo com as espécies em estudo.

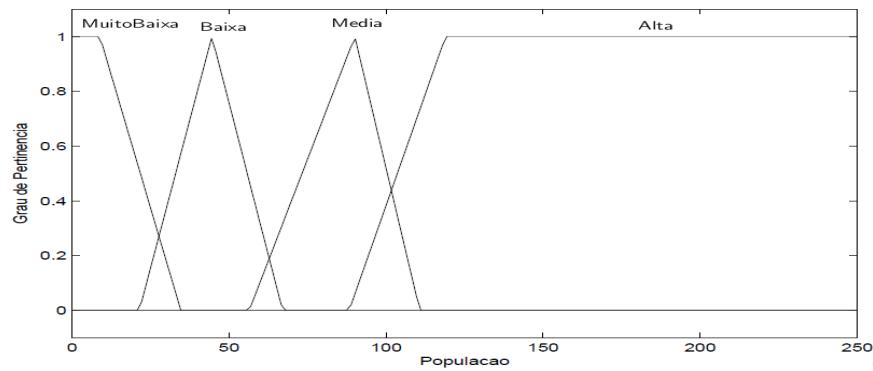


Figura 39 – Função de pertinência da População de presas. Fonte: Bassanezi, 2010.

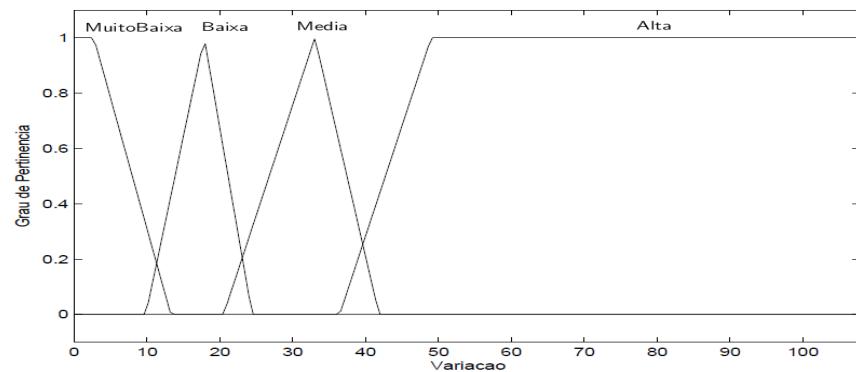


Figura 40 – Função de pertinência da variação presas. Fonte: Bassanezi, 2010.

Cuja solução é dada pela figura a seguir

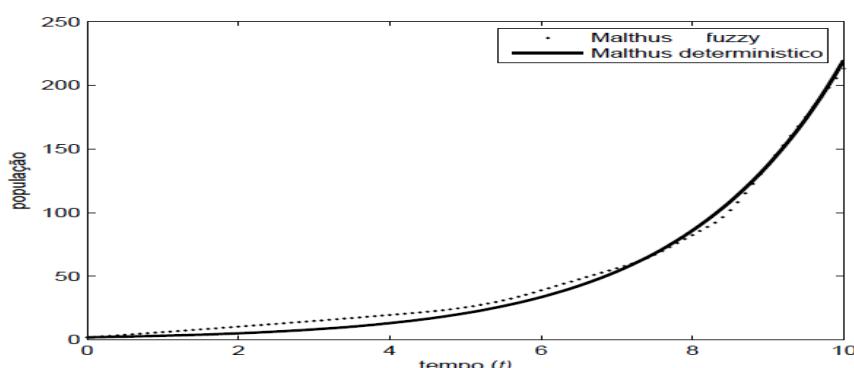


Figura 41 – Solução $x(t)$ do fuzzy malthusiano e do determinístico com $\lambda = 9.5\%$ e $x_0 = 2$. Fonte: Bassanezi, 2010.

6.2 Presa-Predador via Sistema Baseado em Regras Fuzzy

Utilizando a base de regras apresentada por Peixoto (2005), e seguindo o conceito clássico de Lotka-Volterra, o modelo fuzzy adota duas variáveis de entrada e duas de saída. As varáveis de entrada serão a quantidade de presas que definiremos como x e o potencial de predação no qual definiremos como P_y . As duas variáveis de saída serão a variação da quantidade de presas que definiremos x' e a variação do potencial de predação que definiremos por P'_y . Para o caso apresentado aqui adotamos o método de inferência de Mamdani com defuzzificação dada pelo centro de massa.

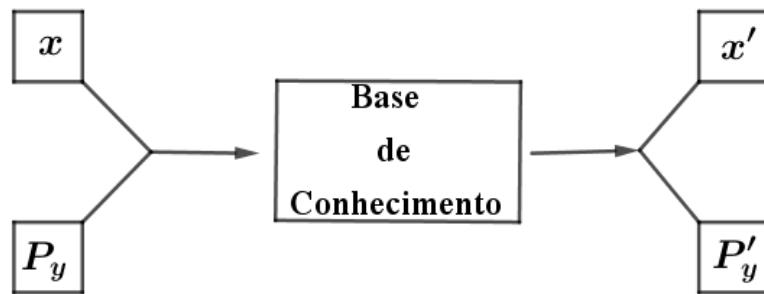


Figura 42 – Estrutura da base de regras: Variáveis de entrada x e P_y , base de regras, variáveis de saída x' e P'_y .

A Simulações das trajetórias produzidas pelo modelo fuzzy presa-predador segue os passos:

- O valor da população inicial de presas x_0 é inserido no controlador fuzzy;
- O valor do potencial de predação P_{y0} é inserido no controlador fuzzy;
- O controlador fuzzy fornece os valores das variáveis de saída: x'_0 e P'_{y0}
- Para encontrar o valor de x_1 e o P'_{y1} os valores x'_0 e P'_{y0} são inserido em

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + x \cdot x'_0 \\ P_{y1} = P_{y0} + P_{y0} \cdot P'_{y0} \end{cases} \quad (92)$$

- Para encontrar o valor de x_2 e o P'_{y2} os valores x'_1 e P'_{y1} são inserido em

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + x \cdot x'_1 \\ P_{y2} = P_{y1} + P_{y1} \cdot P'_{y1} \end{cases} \quad (93)$$

Assim sucessivamente até determinar os valores de x_{n+1} e $P_{y_{n+1}}$ obtendo recursivamente a Equação 94.

- Para encontrar o valor de x_{n+1} e o $P'_{y_{n+1}}$ os valores x'_n e P'_{y_n} são inserido em

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + x \cdot x'_n \\ P_{y_{n+1}} = P_{y_n} + P_{y_n} \cdot P'_{y_n} \end{cases} \quad (94)$$

Com x_0 e $P_{y_0} \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

Cada das variáveis será definida como um conjunto fuzzy, onde cada um dos subconjuntos assumem os adjetivos:

$$x = \{\text{Muito Baixa, Baixa, Média Baixa, Média, alta}\}$$

$$y = \{\text{Muito Baixa, Baixa, Média Baixa, Média, alta}\}$$

e as variações serão

$$x' = \{\text{diminui muito, diminui, diminui pouco, aumenta pouco, aumenta, aumenta muito}\}$$

$$y' = \{\text{diminui muito, diminui, diminui pouco, aumenta pouco, aumenta, aumenta muito}\}$$

Onde a combinação das variáveis irá gerar uma base de regras contendo as 30 regras a seguir

1. SE (x é muito baixa) E (P_y é muito baixa) ENTÃO (x' aumenta muito) E (P'_y diminui muito)
2. SE (x é baixa) E (P_y é muito baixa) ENTÃO (x' aumenta muito) E (P'_y aumenta pouco)
3. SE (x é media baixa) E (P_y é muito baixa) ENTÃO (x' aumenta) E (P'_y aumenta)
4. SE (x é alta) E (P_y é muito baixa) ENTÃO (x' aumenta pouco) E (P'_y aumenta muito)
5. SE (x é muito alta) E (P_y é muito baixa) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y aumenta muito)
6. SE (x é muito alta) E (P_y é media baixa) ENTÃO (x' diminui) (P $_y'$ aumenta)
7. SE (x é muito alta) E (P_y é alta) ENTÃO (x' diminui muito) E (P'_y aumenta pouco)
8. SE (x é alta) E (P_y é alta) ENTÃO (x' diminui muito) E (P'_y aumenta)
9. SE (x é media) E (P_y é alta) ENTÃO (x' diminui) E (P'_y diminui pouco)
10. SE (x é media baixa) E (P_y é alta) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y diminui)
11. SE (x é baixa) E (P_y é alta) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y diminui muito)
12. SE (x é muito baixa) E (P_y é alta) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y diminui muito)
13. SE (x é muito baixa) E (P_y é media) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y diminui)

14. SE (x é muito baixa) E (P_y é media baixa) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y diminui)
15. SE (x é muito baixa) E (P_y é baixa) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y diminui pouco)
16. SE (x é baixa) E (P_y é baixa) ENTÃO (x' aumenta pouco) E (P'_y diminui pouco)
17. SE (x é média baixa) E (P_y é baixa) ENTÃO (x' aumenta) E (P'_y aumenta pouco)
18. SE (x é media) E (P_y é baixa) ENTÃO (x' aumenta pouco) E (P'_y aumenta)
19. SE (x é alta) E (P_y é baixa) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y aumenta)
20. SE (x é baixa) E (P_y é media baixa) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y diminui)
21. SE (x é media baixa) E (P_y é media baixa) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y diminui pouco)
22. SE (x é media) E (P_y é media baixa) ENTÃO (x' aumenta pouco) E (P'_y aumenta pouco)
23. SE (x é alta) E (P_y é media baixa) ENTÃO (x' aumenta pouco) E (P'_y aumenta)
24. SE (x é baixa) E (P_y é media) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y diminui)
25. SE (x é media baixa) E (P_y é media) ENTÃO (x' diminui) E (P'_y diminui pouco)
26. SE (x é media) E (P_y é media) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y aumenta pouco)
27. SE (x é alta) E (P_y é media) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y aumenta pouco)
28. SE (x é muito alta) E (P_y é baixa) ENTÃO (x' diminui pouco) E (P'_y aumenta)
29. SE (x é muito alta) E (P_y é media) ENTÃO (x' diminui) E (P'_y aumenta)
30. SE (x é media) E (P_y é muito baixa) ENTÃO (x' aumenta) E (P'_y aumenta muito)

Observe que, por exemplo, na Regra 2 adota-se que a quantidade de presas, x , é baixa e o potencial de predação P_y é muito baixo. Sendo assim, tanto a população de presa quanto o potencial de predação tendem a aumentar em proporções diferentes pois as presas aumentam muito e o potencial de predação aumentam pouco uma vez que pouca presa implica em pouco alimento dificultando o crescimento de predadores e portanto diminuído o potencial de predação.

Por outro lado, a regra 5 adota que a quantidade de presas, x , é muito alta e o potencial de predação P_y é muito baixo. Sendo assim, a população de presa tende a diminuir pouco e o potencial de predação tendem a aumentar muito pois existe alimento em abundância para os predadores.

A base de regras, apresentada anteriormente, pode ser representada graficamente na Figura a seguir, onde as setas verticais indicam as magnitudes em relação ao potencial de predação de modo que as setas no sentido para cima representam “aumento pouco”, “aumenta” e “aumenta muito” de acordo com sua magnitude e as setas no sentido para baixo representam o “diminui pouco”, “diminui” e “diminui muito”. As setas para horizontais indicam as magnitudes da população de presas de modo que as setas no

sentido para a direita “aumento pouco”, “aumenta” e “aumenta muito” e as setas no sentido para esquerda representam o “diminui pouco”, “diminui” e “diminui muito”.

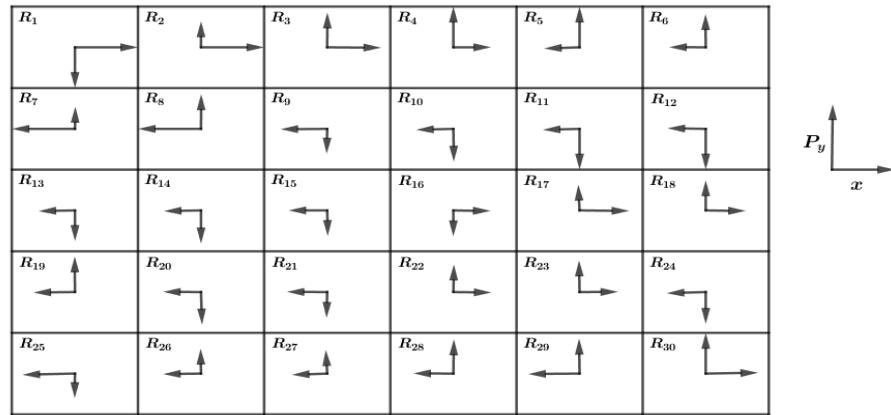


Figura 43 – Representação da base de regras do sistema fuzzy.

Cada um dos adjetivos “Muito Baixa”, “Baixa”, “Média Baixa”, “Média”, “alta”, “diminui muito”, “diminui”, “diminui pouco”, “aumenta pouco”, “aumenta”, “aumenta muito” é modelado matematicamente por um conjunto fuzzy através de uma função de pertinência triangular ou trapezoidal.

As simulações numericas são realizadas no toolbox fuzzy matlab utilizando o método de Inferência de Mamdani e a defuzzificação do Centro de Gravidade (ver anexo 1).

7 Resultados

7.1 Modelo Malthusiano

Segundo (EMBRAPA, 2014) recomenda-se, para o nível de ação em uma lavoura, quando for encontrado um número entre 2 e 3 lagartas falsa-medideira por metro quadrado de plantação, utilizando as informações sobre a falsa-medideira do capítulo 4, constrói-se a seguinte tabela norteadora para aplicação do modelo.

Tabela 1 – Número fuzzy dos dados referente a falsa-medideira.

Quantidade de ovos x	Taxa de crescimento x'	Classificação
(0; 0; 351; 798)	(0.8277; 0.8277; 0.8314; 0.8388)	Muito Baixa
(612; 798; 1368; 1596)	(0.8314; 0.8388; 0.8462)	Baixa
(1368; 1853; 2394)	(0.8388; 0.8462; 0.8536)	Média Baixa
(2052; 2594; 3192)	(0.8462; 0.8536; 0.861)	Média
(2736; 3060; 3192; 3591)	(0.8536; 0.861; 0.8685)	Alta
(3060; 3880; 4788; 4788)	(0.861; 0.8685; 0.8723; 0.8723)	Muito Alta

A Figura 44, traz a representação geométrica dos números fuzzy triangulares e trapezoidais dados na Tabela 1.

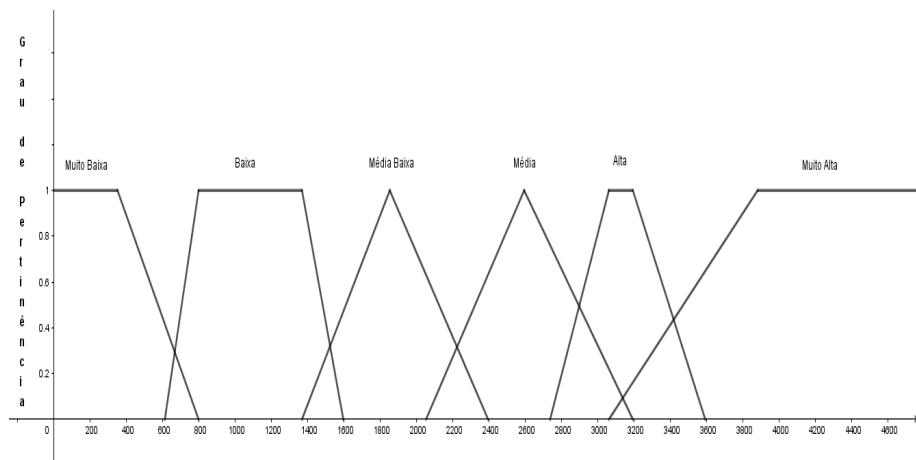


Figura 44 – Funções de pertinência das variáveis de entrada x (presas).

As variável de saída são valores entre $[0, 1]$, conforme a sua intensidade. Para o caso em estudo, as funções de pertinências são do tipo triangular e trapezoidal (Figura 45).

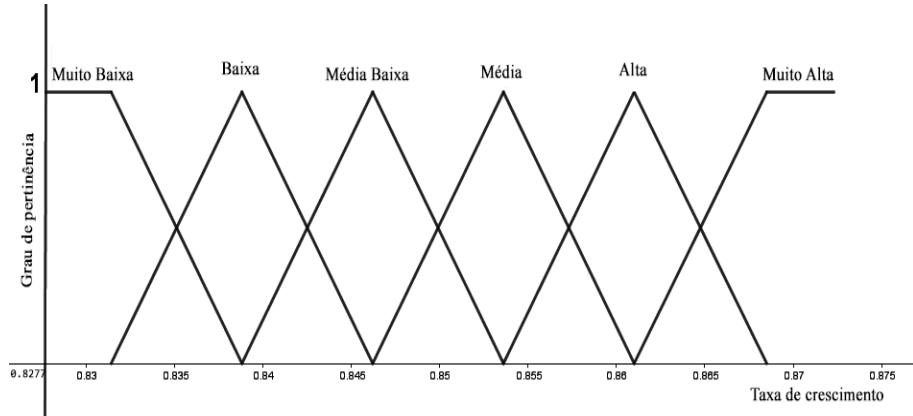


Figura 45 – Funções de pertinência das variáveis de saída p' .

Os resultados foram obtidos em simulações feitas com parâmetros referente a taxa de sobrevivência da fase larva até fase de reprodução (adulta), razão sexual e número de ovos ovipositados citados neste trabalho. Os cálculos foram implementação no software científico para computação numérica Scilab e toolbox fuzzy matlab. Os dados de entrada são a taxa de crescimento e população inicial.

Utilizando o Método de Inferência de Mamdani e a defuzzificação do Centro de Gravidade, vistos no Capítulo 4, obtém-se o gráfico das soluções do sistema fuzzy, apresentado na Figura 46.

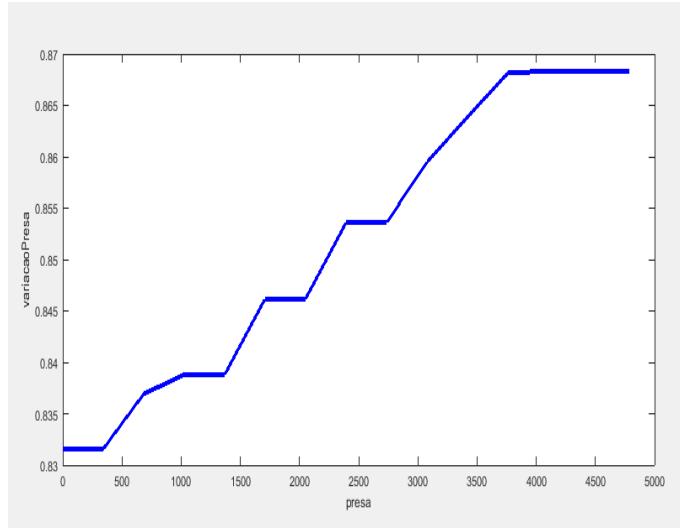


Figura 46 – Soluções do sistema fuzzy dadas pelo controlador: $P' = P'(t)$.

O gráfico anterior, Figura 46, estabelece o tamanho da população de falsamedideira ao longo do tempo, observe que basta saber a taxa de crescimento para determinar a população futura.

O proximo gráfico representa o modelo de crescimento malthusiano fuzzy estabelecida pelo sistema baseado em regras fuzzy.

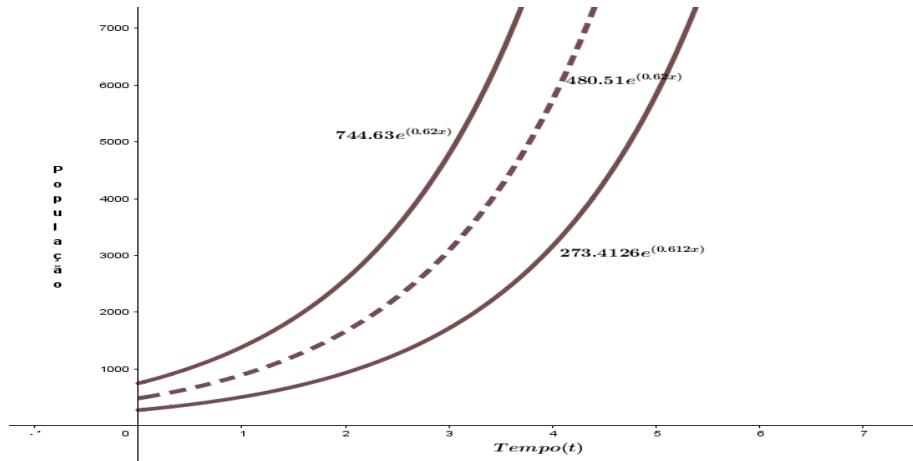


Figura 47 – Solução $P(t)$ via base de regras.

No gráfico apresentado na Figura 47 tem-se que, as duas curvas de linha contínua correspondem ao valor corresponde aos extremos do número fuzzy triangular ($\alpha = 0$) aplicado a condição inicial, e a curva de linha tracejada corresponde a populacional inicial onde ($\alpha = 1$).

O seguinte gráfico, Figura 48, representa o modelo de crescimento Malthusiano Fuzzy onde a taxa de crescimento é constante e a população inicial é um número Fuzzy triangular. As linhas contínua correspondem ao valor corresponde aos extremos do número fuzzy triangular ($\alpha = 0$) aplicado a condição inicial, e a curva de linha tracejada corresponde a populacional inicial onde ($\alpha = 1$).

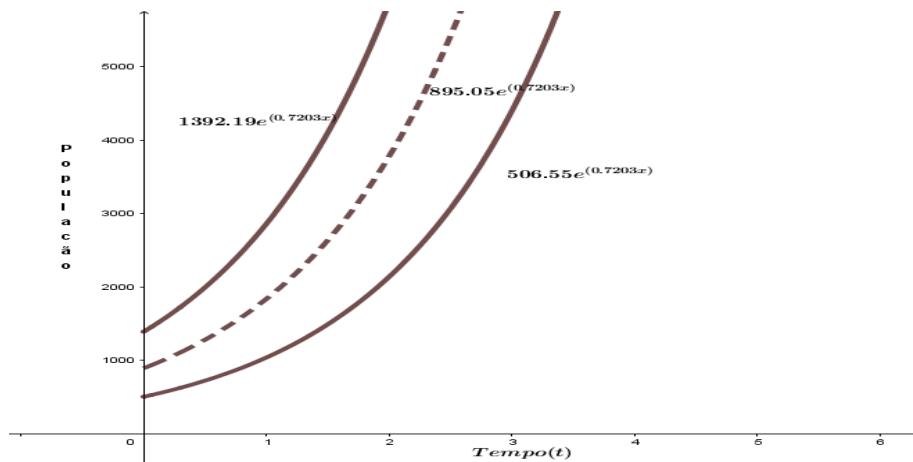


Figura 48 – O 0-nível (curva continua) e o núcleo (curva tracejada) da solução P com condições inicial $P_0 = (520.2; 938.4; 1356.6)$ e $\lambda = 0.7203$.

E notória a semelhança nas curvas determinadas pela solução em ambos os casos. No caso em que se utiliza equações diferenciais fuzzy é de se esperar que se obtenhas equações cujas soluções são do tipo exponencial devido seguir uma tendência do modelo clássico Malthusiano. No caso sistema baseado em regras fuzzy, observe que nenhum momento inicial tem-se tal relação, devido ao ponto de partida ser uma base de regras constituída de conceito semânticos, por exemplo “Baixo” e “Alto” e mesmo assim a solução do sistema determina curvas de tendência do tipo exponencial, atendendo ao modelo malthusiano clássico.

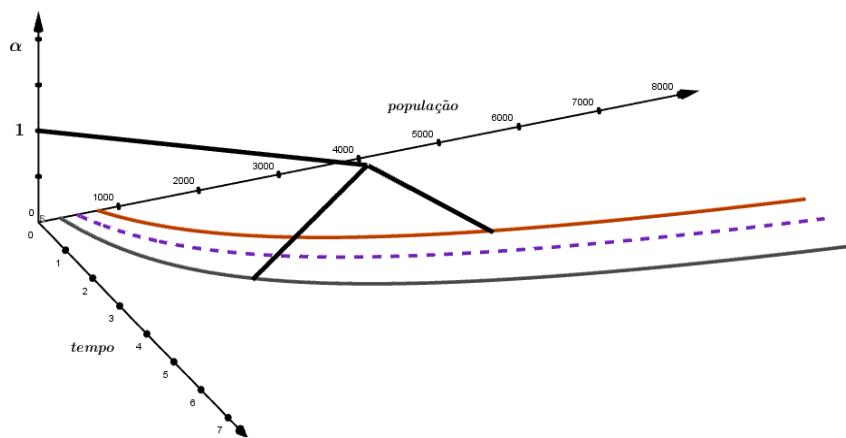


Figura 49 – Solução P com condições inicial $P_0 = (520.2; 938.4; 1356.6)$ dado pelo sistema baseado em regras fuzzy.

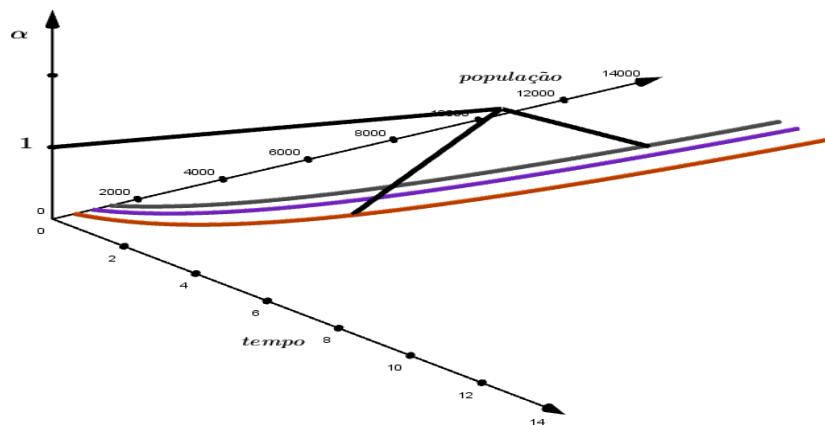


Figura 50 – Solução via derivada de Hukuhara P com condições inicial $P_0 = (520.2; 938.4; 1356.6)$ e $\lambda = 0.7203$.

Os dados de saída refere-se a população em cada instante de tempo até a quarta geração, sendo $t = 0, 1, 2, 3, 4$ onde t corresponde ao ciclo de vida do inseto.

O limitante até a quarta geração ($t = 4$) é devido que, para Avila & Grigolli (2013) a população da falsa-medideira tende surgir a partir dos 41 dias após a emergência das plantas e o período médio entre plantio e colheita da soja é de 135 dias. Segundo Andrade (2014) o ciclo larva adulto dura 26 dias. Sendo assim, consideraremos que em um período de safra de 135 dias tem-se 4 gerações de insetos.

Tabela 2 – Número fuzzy triangular de estimativa de população de ovos: equações diferenciais fuzzy × sistema baseado em regras fuzzy.

Geração t	Equações diferenciais fuzzy	Sistema baseado em regras fuzzy
1	(506.55; 895.05; 1392.19)	(506.55; 895.05; 1392.19)
2	(1040.98; 1839.37; 2861.02)	(508.25; 893.23; 1384.21)
3	(2139.27; 3780; 5879.53)	(944.79; 1660.45; 2573.15)
4	(4396.32; 7768.08; 12082.74)	(1756.31; 3086.66; 4783.30)

Representação geométrica das soluções

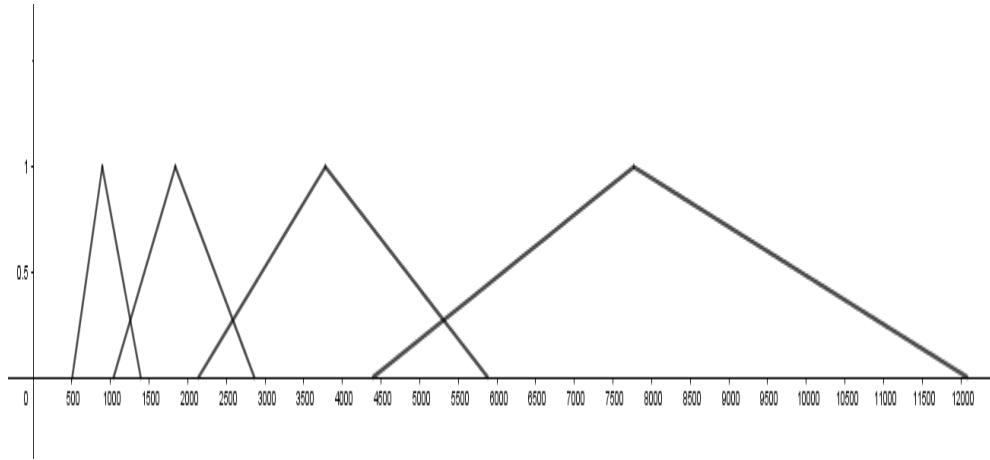


Figura 51 – Funções de pertinência da solução via equação diferencial Fuzzy.

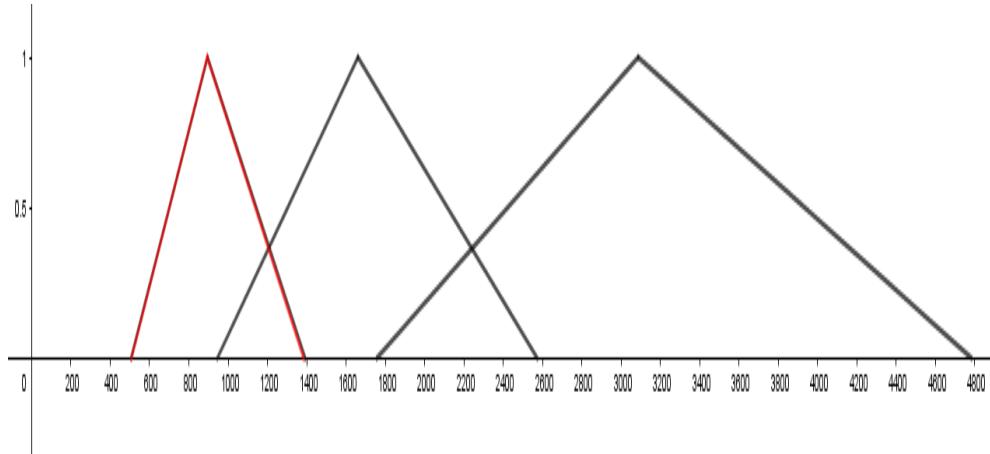


Figura 52 – Solução via sistema baseado em regras fuzzy.

Visualmente os gráficos das Figuras 51 e 52 apresentam quantidades diferentes de funções de pertinência, mas observe que no gráfico da Figura 52 as 2 primeiras função de pertinência, da esquerda para a direita, são quase coincidentes devido ao aumento populacional via sistema baseado em regras proporcionar uma baixa variação nas populações iniciais da primeira para a segunda geração. O número fuzzy correspondente a essas funções na Figura 52 é dado por $(506.55; 895.05; 1392.19)$ e $(508.25; 893.23; 1384.21)$. O diâmetro das soluções encontradas, que corresponde a fuzziness, que é a medida do diâmetro do fecho de seu suporte, é determinado por $diam([P(t)]^\alpha) = (p_{02} - p_{01})e^{\lambda t}$. Assim, quanto maior for seu diâmetro mais fuzzy ele é. Neste caso, os diâmetros são respectivamente 885.64 e 875.96.

A seguir teremos a tabela com os diâmetros de todas as soluções nos dois casos, ou seja, via equações diferenciais fuzzy e via sistema baseado em regras fuzzy.

Tabela 3 – Diâmetro da solução via Equação Diferencia Fuzzy e sistema baseado em regras fuzzy.

Geração t	Equações diferenciais fuzzy	Base de Regras
1	885.64	885.64
2	1820.04	875.96
3	3740.25	1628.3542
4	7686.42	3026.99

Observe que a medida que t aumenta, maior vai se tornando o diâmetro da solução. Este resultado é esperado devido ao fato de que quanto maior for a população mais difícil é determinar a quantidade de indivíduos. Tem-se então o aumento da fuzziness da população. E a solução atende ao comportamento do modelo clássico de crescimento exponencial Malthusiano.

Para o estudo foi adotado o valor de $\lambda > 0$ o comportamento da solução via Equações diferenciais fuzzy e via base de regras fuzzy é o mesmo. E a solução atende ao comportamento do modelo clássico de crescimento exponencial Malthusiano.

7.2 Modelo Presa-Predador

Sabendo que somente as fêmeas tem a capacidade de predação, pois só elas podem ovipositar, e considerando os dados sobre a vespa do capítulo 4, constrói-se a seguinte tabela norteadora para aplicação do modelo.

Tabela 4 – Número fuzzy triangular dos dados referente a vespa.

Potencial de predação	Classificação
(0; 0; 15.63; 31.25)	Muito Baixa
(24.41; 43.46; 62.51)	Baixa
(48.83; 62.51; 73.24; 93.76)	Média Baixa
(73.24; 93.76; 97.66; 125)	Média
(93.76; 122.1; 125; 156.3)	Alta
(122.1; 165.2; 208.4; 208.4)	Muito Alta

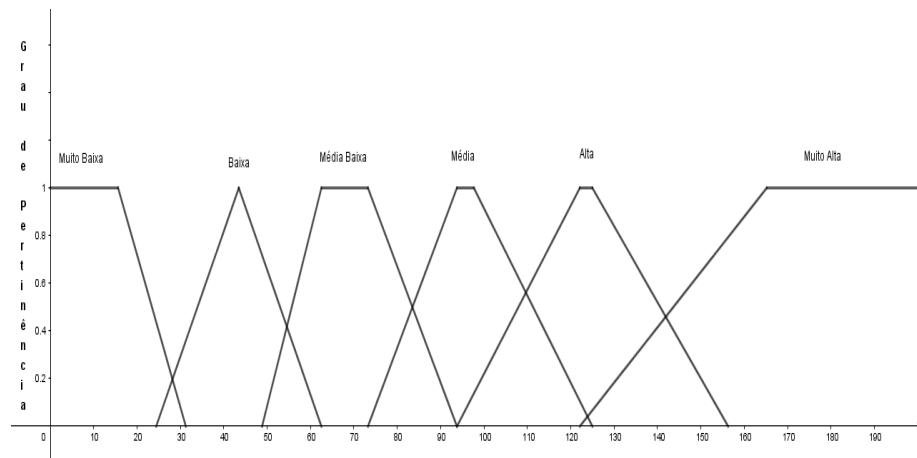


Figura 53 – Função de pertinência da variável de entrada potência de predação P_y .

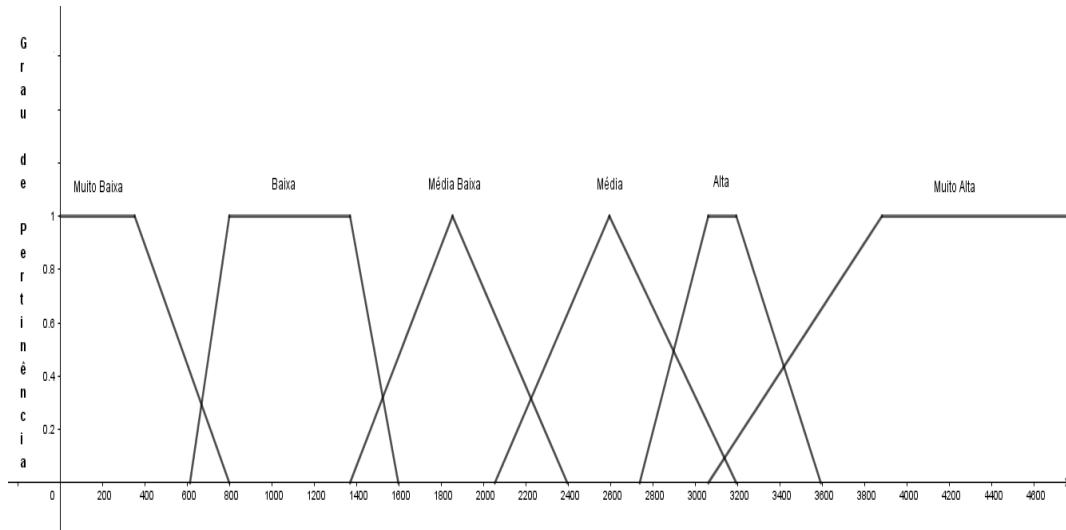


Figura 54 – Função de pertinência da variável de entrada Presas.

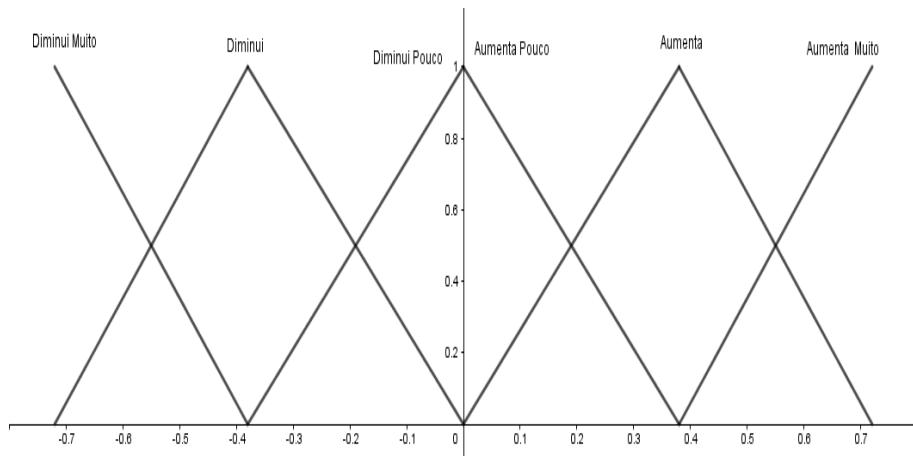


Figura 55 – Função de pertinência da variável de saída Presa.

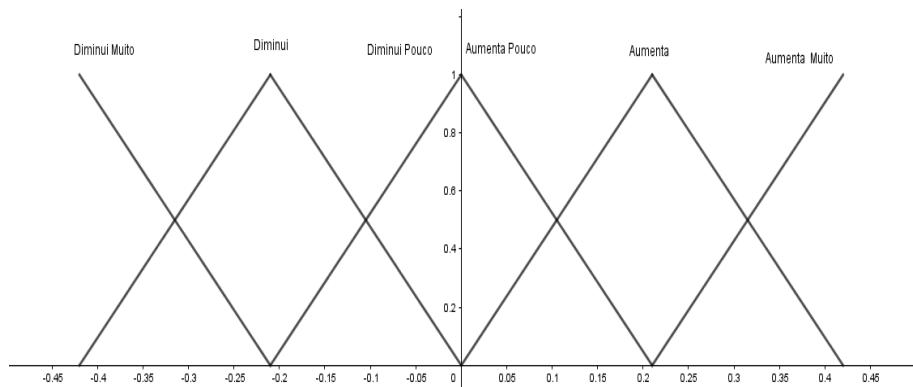


Figura 56 – Função de pertinência da variável de saída Potencial de Predação P'_y .

Utilizando o Método de Inferência de Mamdani e a defuzzificação do Centro de Gravidade, obtém-se as superfícies como soluções do sistema.

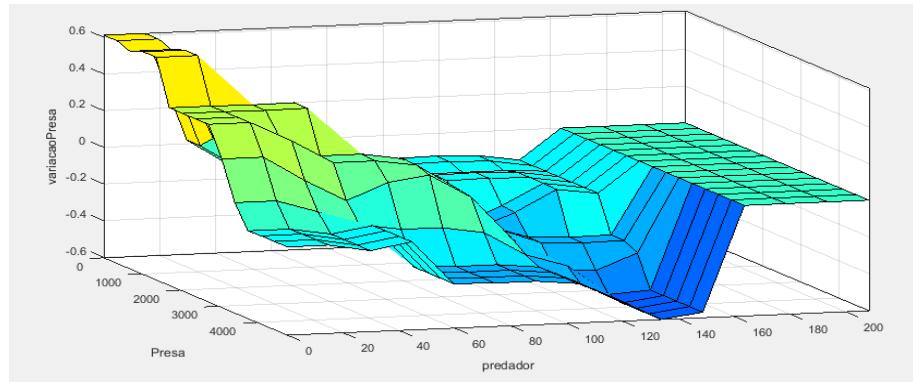


Figura 57 – Superfície dada pelo controlador: $x' = x'(x, P_y)$.

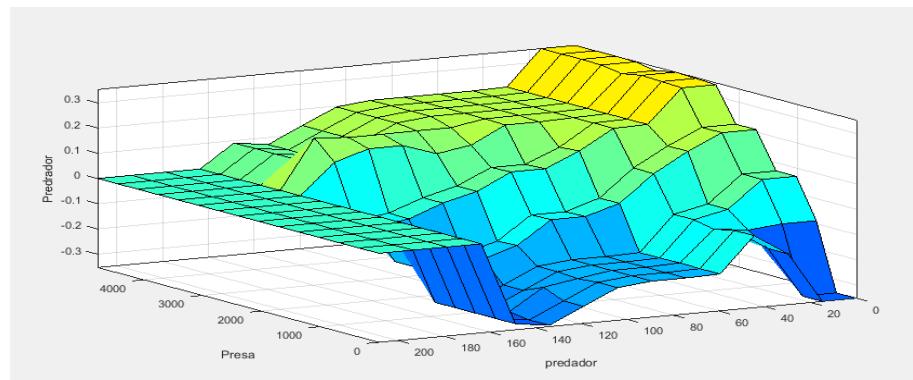


Figura 58 – Superfície dada pelo controlador: $P'_y = P'_y(x, P_y)$.

Realizando os procedimentos para as simulações numéricas do modelo fuzzy, procurou-se observar a variação da quantidade de presas e do potencial de predação. Para a determinação dos valores iniciais, utiliza-se os da (EMBRAPA, 2014) onde se recomenda, para o nível de ação, quando for encontrado um número entre 2 e 4 lagartas falsa-medideira por metro quadrado de plantação, que fornece o número triangular fuzzy (2, 3, 4) e o número triangular fuzzy de ovos no valor de (720, 1158, 1596). Para o potencial de predação a EMBRAPA e lojas que comercializam o produto, as cartelas *Trichogramma*, recomenda-se a liberação de 6 vespinhas por metro quadrado de plantação o que gera um potencial de predação no valor de 62.508 ovos. Portanto, tem-se que $x_0 = 1158$ e $y_0 = 62.508$

A evolução dos contingentes populacionais de presas e potencial de predação obtidos ao longo do tempo para o modelo fuzzy, juntamente com o respectivo plano de fase, estão representados nas figuras a seguir.

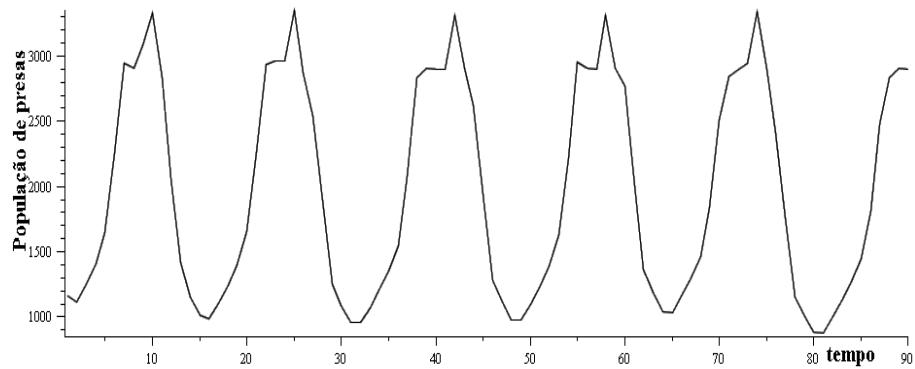


Figura 59 – Evolução dos contingentes populacionais ao longo do tempo das Presas.

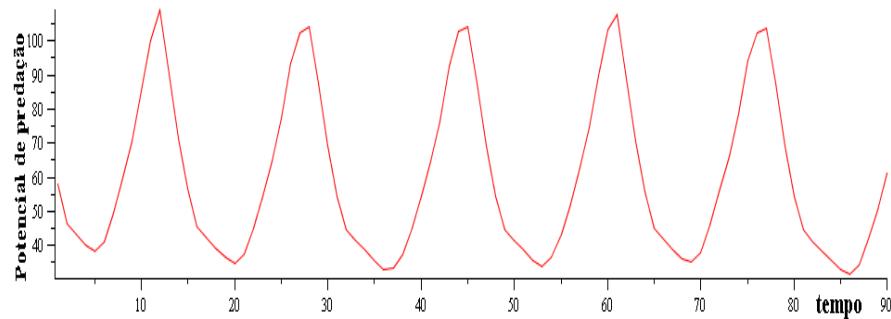


Figura 60 – Evolução dos contingentes populacionais ao longo do tempo dos Predadores.

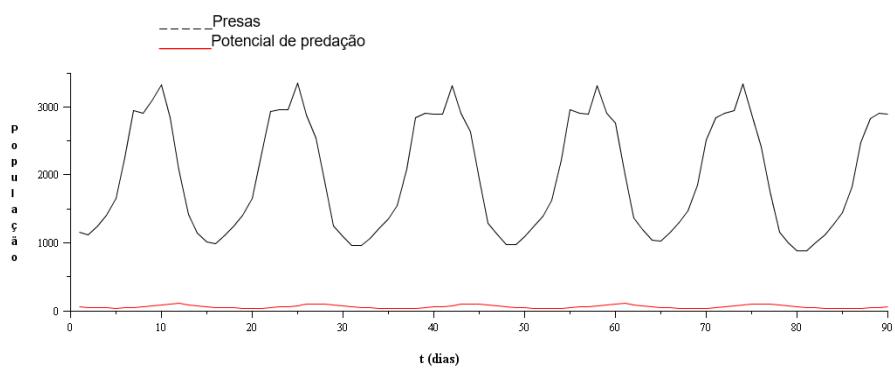


Figura 61 – Evolução dos contingentes populacionais ao longo do tempo presa e predador.

Perceba que a inserção das vespas no ambiente proporciona, com o passar do tempo, que as populações entrem em ciclo oscilatórios de modo que à população das vespas cresçam até atingir o seu ponto máximo e os ovos atingirem o seu ponto mínimo. No intervalo de tempo seguinte, devido à escassez de alimento a população de vespas

decrece e a população de ovos aumenta e assim sucessivamente durante o ciclo de vida da soja. Mostrando assim que as simulações desenvolvida neste trabalho no sistema fuzzy segue o modelo Lotka-Volterra clássico e que presença das vespas pode causar mudanças relevantes na dinâmica populacional da falsa-medideira.

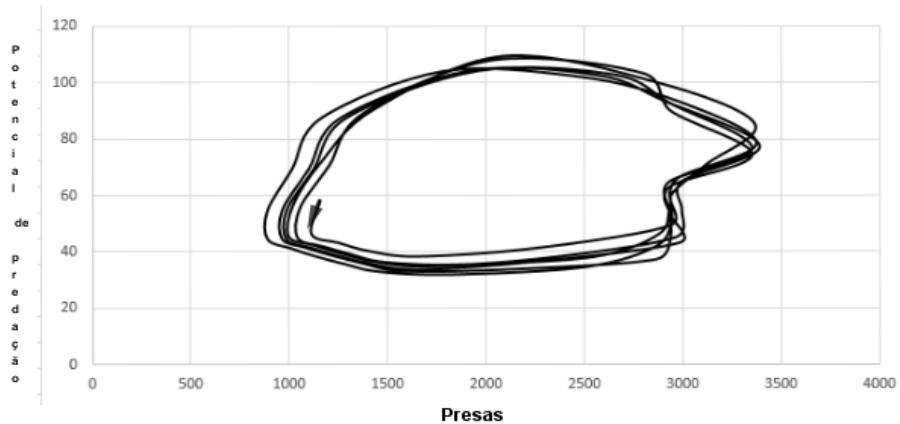


Figura 62 – Plano de fase do modelo fuzzy, para $x_0 = 1158$ e $P_y = 62.508$.

Ao inicial as simulação tem-se que, no plano de fase, a evolução populacional ocorre de “dentro” pra “fora” portanto, existe uma região que não está “coberta” por nenhuma regra. Com esses resultados verifica-se que os determinados valores iniciais geram um sistema em equilíbrio, fazendo com as populações de vespas e a quantidade de ovos não se afaste do valor médio, determinando assim um ciclo ecológico o que faz com que as populações futuras das lagartas não aumentem muito e permaneçam em torno de uma quantidade que cause pouco danos às lavouras.

Em um primeiro momento, com o modelo Malthusiano, tem-se que sem as vespas no ambiente a população de falsa-medideira tendiam a um crescimento exponencial, com a inserção das vespas o crescimento da falsa-medideira se limita a certo período de tempo e chega a um valor máximo que após ser atingido, a sua populações começam a decrescer atingindo um valor mínimo.

Por fim, formulou-se e simulou-se um modelo presa-predador fuzzy que descreve a interação entre vespas e falsa-medideira. É de extrema importância salientar que mesmo sem o uso de equações diferenciais explícitas, conseguimos através de uma base de regras fuzzy um plano de fase onde as trajetórias convergem para um ciclo limite atendendo o conceito do modelo de Lotka-Volterra (predador-presa) clássicos e modelar a dinâmica vespas e falsa-medideira, apenas utilizando hipóteses naturais da interação presa-predador.

No sistema baseado em regras fuzzy houve à eliminação de um problema que é constante no processo de modelagem, que é a dificuldade de obter os parâmetros

para aplicação de uma equação. Embora os mesmos não precisam estar de modo determinísticos no modelo, eles podem ser obtidos por meio do ajuste de curvas a partir da solução. A exemplo do que ocorreu com o modelo malthusiano em que se utiliza a base de regras fuzzy para determinar a solução.

8 Conclusão

Neste trabalho apresentou-se aplicação do Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF) por meio do modelo de crescimento populacional malthusiano fuzzy via derivada de Hukuhara no estudo de equações diferenciais Fuzzy e o modelo de crescimento Malthusiano utilizando a base de regras utilizando a subjetividade proveniente do "fuzziness" a que os fenômenos biológicos estão sujeitos. Observou-se que embora as duas abordagens sejam conceitualmente distintas, para o estudo dos sistemas dinâmicos fuzzy, suas soluções apresentam resultados condizentes ao proposto no modelo de crescimento Malthusiano clássico, ou seja, o gráfico das soluções tendem a uma curva do tipo exponencial.

Os resultados obtidos ratificam a viabilidade da abordagem Fuzzy na construção de modelos matemáticos para estudo da dinâmica populacional de insetos em lavouras. Percebe-se que, embora o modelo construído por meio de base de regras não apresente funções explícitas à sua solução condiz com o modelo clássico. Outro fator importante está relacionado ao diâmetro da solução, ou seja, a sua fuzziness. Onde, no caso do modelo construído por meio da base de regras apresenta-se menor que o construído pelo método utilizando equações diferenciais fuzzy caracterizando uma menor incerteza no resultado embora seus parâmetros sejam mais incertos.

Posteriormente aplicou-se uma base de regras, para estudar-se o modelo baseados em regras fuzzy, para modelar a interação presa-predador. A partir desse estudo, estabeleceu-se um sistema baseado em regras fuzzy para simular a dinâmica de vespa e falsa-medideira em um metro quadrado de plantação. Através desse modelo foi feito o estudo da evolução temporal da quantidade de possíveis pressas e possíveis predadores. Onde ficou evidente que com a evolução no tempo as duas populações entram em ciclo oscilatórios, obedecendo ao modelo presa-predador clássico.

Ressaltamos que, embora não se tenha um sistema de equações diferenciais clássicas, observamos a ascensão da população de presas seguida, com retardo, pela ascensão da população de predadores e também a ascensão da população de predadores seguida, com retardo da população de presas nos contingentes populacionais, característica fundamental dos modelos presa-predador descritos por um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Salientamos que o modelo envolvendo apenas duas espécies não pode descrever completamente as relações complexas que ocorrem de fato na natureza, evidentemente, verdadeiras interações ocorrem em cadeias de muitas espécies que têm relações de predação. Sendo assim, os modelos apresentados podem ser consideradas um ponto

inicial na construção de modelos matemáticos envolvendo predação. Para uma melhor caracterização da realidade é preciso levar em conta a interação entre mais de duas espécies além de outros fatores determinísticos do sistema, como por exemplo, alimento disponível, clima, espaço físico.

O surgimento da modelagem matemática é livre e espontânea, ela advém da necessidade do homem em compreender os fenômenos que o cercam, para interferir ou não em seu processo de construção, com a sua utilização a compreensão do meio pelo homem se torna acessível e norteadora. Observa-se que os recursos computacionais a obtenção de resultados próximos a realidade tem-se se tornado mais favorável dividido a alta capacidade de processamento na criação de simulações.

Podemos verifica a característica que torna o teoria fuzzy útil para se trabalhar com modelos e biomatemática consiste no fato de que em um ambiente não controlado como, por exemplo, em uma lavoura, não é possível determinar a quantidade exata da população presente. Verifica-se que os valores são determinados por expressões “em torno de”, “aproximadamente”, “entre”. Diante disso, a lógica fuzzy torna-se uma ferramenta útil para modelos estudados em biomatemática.

Em relação a trabalhos futuros pode ocorrer a inserção de uma terceira ou mais espécie dentro do modelo para que assim possa simular um ambiente biológico mais realista, pois sabemos que, devido as condições que o meio biológico proporciona ocorre a interação inseto-inseto, inseto-planta, inseto-clima (vento, chuva, frio, calor, neve, etc.); homem-inseto e com o meio.

Neste trabalho, no modelo malthusiano, utilizou somente a população inicial com um número fuzzy e taxa de crescimento, λ como um número clássico. Para trabalhos futuros deseja-se, além da população inicial ser um número fuzzy, a taxa de crescimento Λ também ser. Onde $\Lambda \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ será dado por $[\Lambda]^\alpha = [\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha]$.

Outra sugestão e a substituição da utilização toolbox fuzzy matlab, por um programa a ser desenvolvido onde a inserção dos valores de entrada gerem as soluções por completo para assim facilitar o processo de simulação do modelo.

Referências

- ADAB. Programa Fitossanitário da Bahia Safra 2014/2015. Bahia, 2014.
- ADAB. Programa Fitossanitário do Oeste da Bahia. Bahia, 2013
- AMENDOLA, M.; SOUZA, A. L.; BARROS, L. C. Manual do uso da teoria dos conjuntos Fuzzy no MATLAB 6.5. FEAGRI & IMECC/ UNICAMP, Campinas, 2005.
- ANDRADE, K. Aspectos Bioecológicos de *chrysodeixis Includens*(Walker, [1858])(Lepidoptera:Noctuidae) em Diferentes Hospedeiros. 2014. 187 f. Dissertação -(Mestrado em Agronomia)-Universidade Estadual de Londrina –PR.
- BASSANEZI, R. C., Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. 3. ed .São Paulo: Contexto, 2010.
- BEDE, B. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems* 151 (2005).
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N., Modelagem matemática no ensino. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2013.
- BOYCE, W. E. ; DIPRIMA, R. C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 8a edição, LTC, 2006.
- BRAGA, B. *et al.*, Introdução à engenharia ambiental. São Paulo: Pearson prentice Hall, 2005.
- BUENO , C. O. F.; PARRA, J. R. P.; BUENO, A. F.; HADDAD, M. L. Desempenho de Tricogrammatídeos como Potenciais Agentes de Controle de *Pseudoplusia includens*. Walker (Lepidoptera: Noctuidae). Piracicaba: ESALQ/USP, 2009.
- BUENO, R. C. O. F. Bases biológicas para utilização de *Trichogramma pretiosum Riley*, 1879 (Hymenoptera: Trichogrammatidae) para controle de *Pseudoplusia includens*](Walker, 1857) e *Anticarsia gemmatalis* Hubner, 1818(Lepidoptera:Noctuidae) em soja. 2008. 119f. Tese (Doutorado) – Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba.
- CHAPRA, S. C., Métodos numéricos para engenharia. Porto Alegre : AMGH, 2011.
- CRUZ, I.; MONTEIRO, M. A. R. Controle Biológico da lagarta do cartucho do milho, utilizando o parasitóide de ovos *Spodoptera frugiperda*, *Trichogramma pretiosum*. EMBRAPA, 2004
- DEBACH, P. Control biológico de las plagas de insectos y malas hierbas. Editora Continental, S.A., México, 1968.
- EMBRAPA. Ministério da Agricultura, pecuária e pesca. Ações emergenciais propostas pela EMBRAPA para o manejo integrado de *Helicoverpa spp.* em áreas agrícolas . Brasília: 2014.
- FERREIRA, B. S. C.; CAMPO, C. B. H.; GÓMEZ, D. R. S. Inimigos naturais de *Helicoverpa armigera* em soja. Londrina: Embrapa, 2014.
- FORD, B.J.; STRAYER, J.R.; REID, J.; GODFREY, G.L. The literature of arthropods associated with soybeans. Illinois: Natural History Survival, 1975. (Biology Notes No. 92).
- GALLO, D. *et al.* Entomologia agrícola. Piracicaba: FEALQ, 2002.
- IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo: Atual,1985.
- GOMES, L. T.; BARROS, L. C.; BEDE, B. Fuzzy Differential Equations in Various Approaches. New York: Springer, 2015.

- HOFFMANN-CAMPO, C.B.; MOSCARDI, F.; CORRÊA-FERREIRA, B.S.; OLIVEIRA, L.J.; SOSA-GÓMEZ, D.R.; PANIZZI, A.R.; CORSO, I.C.; GAZZONI, D.L.; OLIVEIRA, E.B., Pragas da soja no Brasil e seu manejo integrado. Londrina: Embrapa-CNPSo, 2000. 70 p. (Embrapa-CNPSo. Circular Técnica, 30).
- HUKUHARA, M. Integration des applications mesurables donc la valeur est un compact convexe, Funkcialaj Ekvacioj 10 (1967), 205– 223.
- JAVELICE, R. M. Modelagem fuzzy para dinâmica de transferência de soropositivos para HIV em doenças plenamente manifestadas. 2004. 187 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica)-Faculdade de Engenharia Elétrica e computação. Unicamp, Campinas,SP.
- KLEMENT, E. P.; MESIAR, R.; PAP, E. Triangular norms. Netherlands: Springer Netherlands, 2000. v. 8.
- LIMA, E. L., Espaços métricos. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 1977.
- LIMA, E. L., Curso de análise. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 2013.
- LUCIANA, T. G. On Fuzzy Differential Equations. 2002. 115f. Tese (Doutorado) -Universidade Estadual De Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica de Administração de Empresas, Campinas.
- MIZUKOSHI, M. T. Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy.120 f. Tese – (Doutorado em Matemática) – UNICAMP, Campinas, 2004.
- MOREIRA, H. J. C.; ARAGÃO, F. D. Manual de Pragas da Soja. Campinas-SP 2009.
- MOORE, R. E. ; KEARFOTT, R. B. ; CLOUD, M. J. Introduction to interval analysis. Society for Industrial Mathematics, 2009.
- MOSCARDI, F.; BUENO, A.F.; SOSA-GÓMEZ, D.R.; ROGGIA, S.; HOFFMAN-CAMPO, C.B.; POMARI, A.F.; CORSO, I.V.; YANO, S.A.C. Artrópodes que atacam as folhas da soja. In: HOFFMAN-CAMPO, C.B.; CORRÊA-FERREIRA, B.S.; MOSCARDI, F. (Ed.). Soja: manejo integrado de insetos e outros artrópodes-praga. Brasília: Embrapa, 2012. p.213-309.
- NEGOITA C.V.; RALESCU, D.A. Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis—Willey, New York,1975.
- NEVES, J.A. Dinâmica Predador presa, realação funcionais e o potencial de Heterópteros no manejo de pragas. 2014. 106 f. Tese -(Doutorado em ciências)-Escola Superior de Agricultura, Piracicaba -SP.
- ODUM , E. P. Fundamentos de Ecologia. São Paulo: Fundação Calouste Gulbenkian, 2004.
- PEIXOTO, M. S. Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: um Estudo da Dispersão da Morte Súbita dos Citros em São Paulo 2005. 209. Tese (Doutorado) – Departamento de Matemática Aplicada, UNICAM, campinas-SP.
- QUERINO , R. B.; ZUCCHI, R. A., Guia de identificação de *Trichogramma* para o Brasil. 2. ed. Brasília: Embrapa, 2012.
- SIMÕES, F. S. P. Sobre equações diferenciais para processos fuzzy linearmente correlacionados: aplicações em dinâmica de população. 2017. 128f. Tese (Doutorado) -Universidade Estadual De Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica de Administração de Empresas, Campinas.

Anexos

ANEXO A – Lógica fuzzy utilizando toolbox do MATLAB: Tutorial do toolbox, exemplos e aplicações

Para abrir o recurso no Matlab, basta digitar “fuzzy” na linha de comando

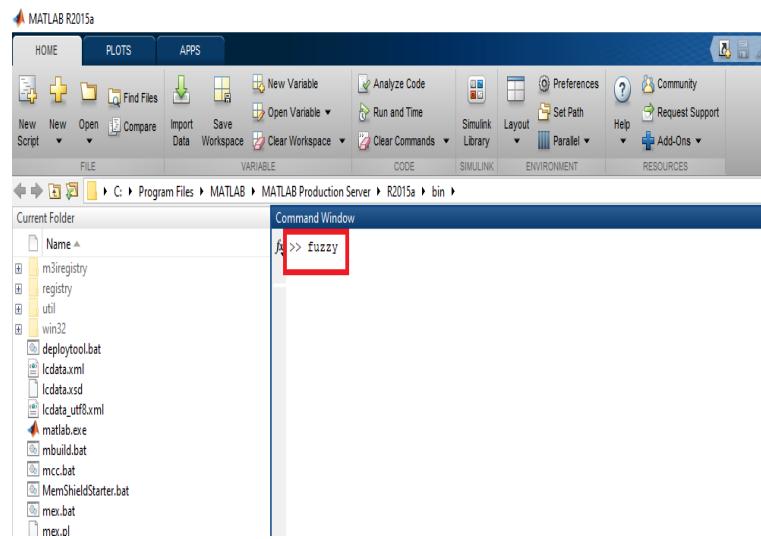


Figura 63 – Comando para abrir toolbox.

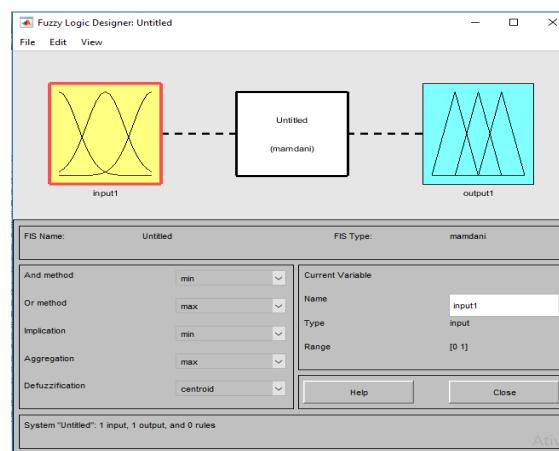


Figura 64 – Janela da toolbox.

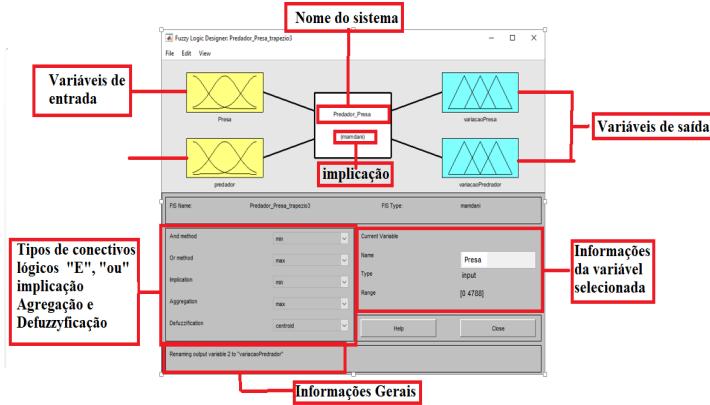


Figura 65 – Informações gerais.

Comece adicionando a quantidade adequada de variáveis de entrada e saída

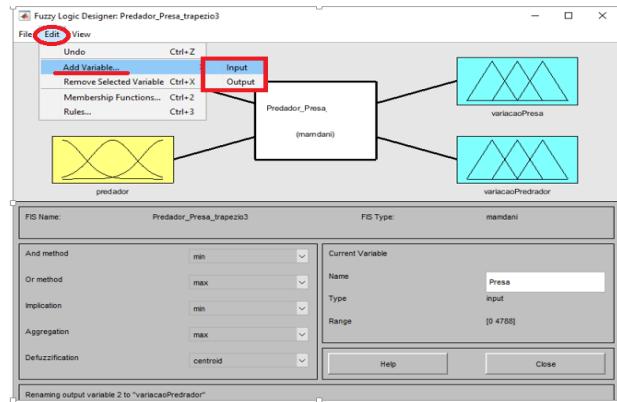


Figura 66 – Adicionando variáveis de entrada.

Comece adicionando a quantidade adequada de variáveis de entrada e saída

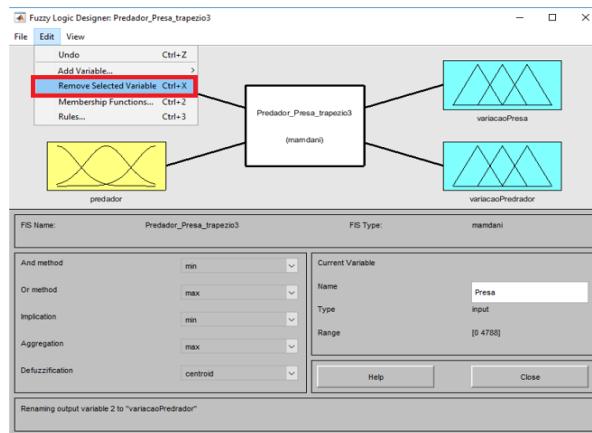


Figura 67 – Informações da janela.

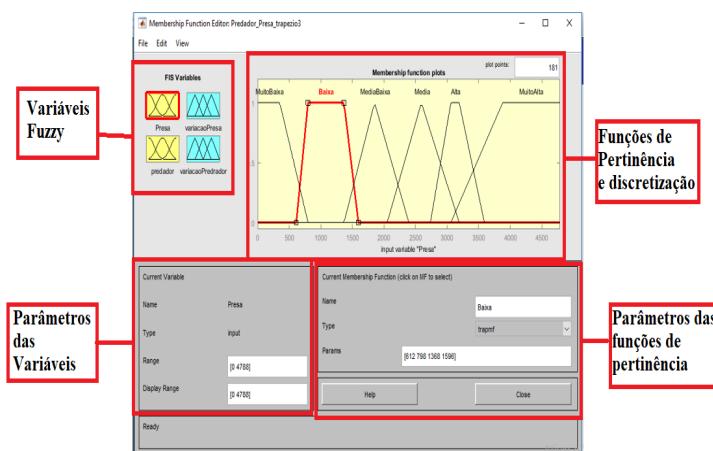


Figura 68 – Exemplo.

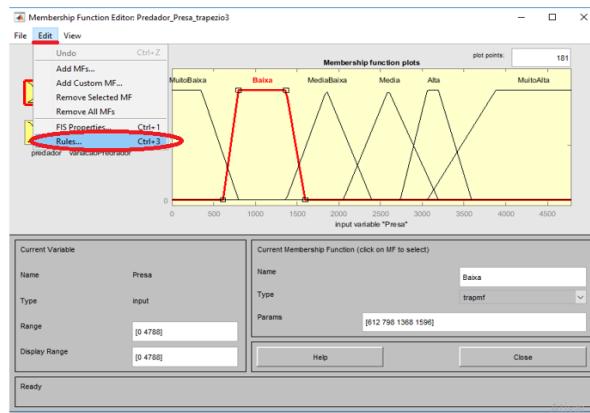


Figura 69 – Como adicionar regras.

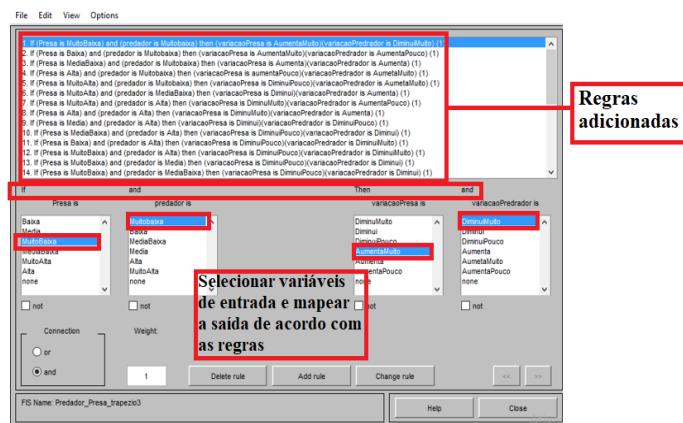


Figura 70 – Regras adicionadas.

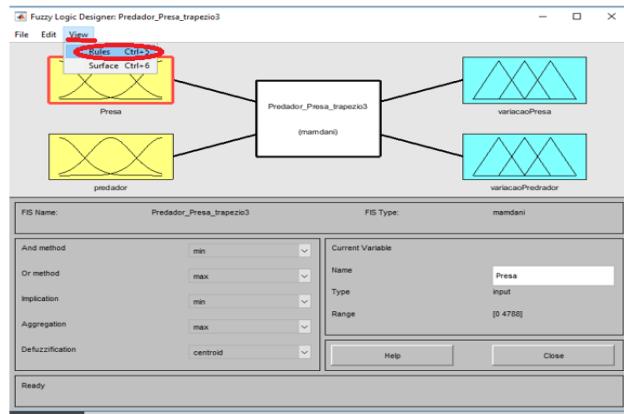


Figura 71 – Visualizando resultados.

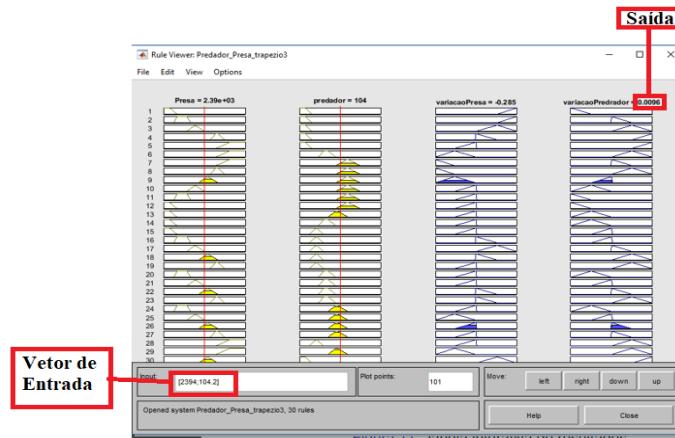


Figura 72 – Janela interativa de resultados.

O Matlab consegue mapear todas as possibilidades de entradas e suas respectivas saídas em um gráfico tridimensional

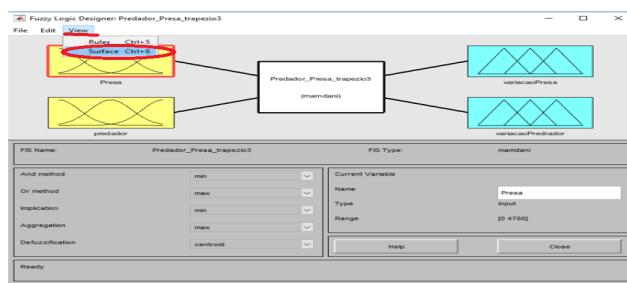


Figura 73 – Gerar mapa de todas as possibilidades.

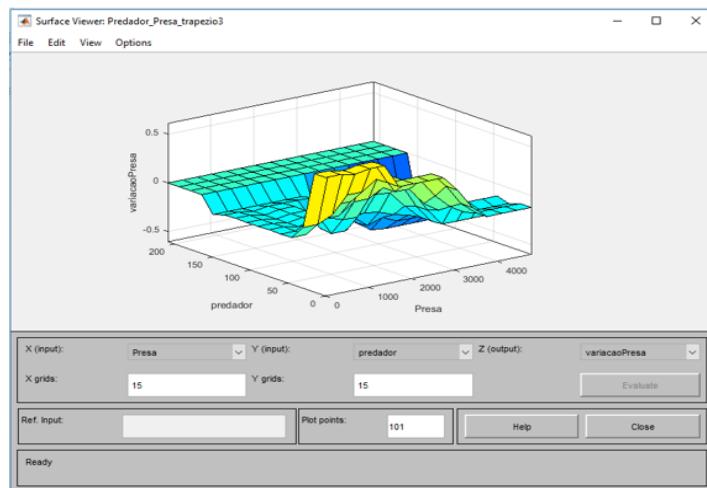


Figura 74 – Janela de superfície.