UnB Departamento de
Ciência da Computação

2016/1

Complexidade de Algoritmos

Prof. Guilherme N. Ramos

Os objetivos de um algoritmo computacional são resolver corretamente a tarefa e utilizar os recursos computacionais de forma eficiente [1]. Embora a corretude seja prioritária (de que adianta um algoritmo eficiente que não resolve o problema?), a eficiência pode ser extremamente relevante (de que adianta detectar uma colisão após o acidente?), então é importante entender e otimizar algoritmos.

O custo de execução de um algoritmo depende, em primeiro lugar, da *métrica* definida. As medidas mais comuns são *tempo* (a duração da execução), e *espaço* (a quantidade de memória necessária para execução). Considerar o tempo necessário para terminar a execução de um algoritmo permite planejar se é viável sua execução (considerando as restrições existentes), como organizar sequências de algoritmos, entre outros. Considerar o espaço de memória, permite verificar a viabilidade de uma solução [correta e que leve tempo hábil], pois pode não haver recursos suficientes para executá-la. Neste contexto introdutório, supondo que as atividades não lidam com um volume excessivo de dados, considera-se apenas o *tempo* como métrica.

Este tipo de noção é essencial para planejamento, é bom saber os custos antes de iniciar algum projeto. Por exemplo, é possível estimar *Quantos tuítes diferentes [em Inglês] são possíveis?* e *Quanto tempo demoraria para lê-los?*.

1 Complexidade de Algoritmos

O custo envolvido na execução de instruções sequenciais e bifurcações é proporcional a quantidade de instruções, já o custo de instruções com repetições é proporcional a quantidade de instruções e a quantidade de repetições destas. Mais especificamente, o custo também depende de *quais* instruções são consideradas. Por exemplo, poderia estar interessado apenas na quantidade de *atribuições* realizadas (ou *comparações*, ou *operações matemáticas*, ou todas juntas).

Considerando que cada instrução de atribuição (*atr*), comparação (*cmp*), adição (*ad*), e entrada/saída de dados (*es*) tenha seu custo, qual seria o custo total de execução deste algoritmo?

```c
1  int i, n;
2
3  scanf("%d", &n);                                 /* 1 es */
4
5  if(n < 0)                                        /* 1 cmp */
6    printf("Valor inválido!");                     /* 1 es */
7  else {
8    printf("Valor válido!");                       /* 1 es */
9    printf("Mas vou mudá-lo...");                  /* 1 es */
10   printf("... para facilitar a demonstração."); /* 1 es */
11 }
12
13 n = 4;                                           /* 1 atr */
14 for(i = 0; i < n; ++i)                           /* n+1 atr, n+1 cmp, n ad */
15   printf("i = %d\n", i);                         /* n es */
```

Os comentários indicam as operações, todas devem ser bem evidentes. Nas linhas 5 a 11 há uma comparação e duas possibilidades: ou executa-se a linha 6 ou as linhas 8-10 (mas nunca todas as quatro). Portanto, dependendo do valor de n, o custo será de 1 ou 3, mas proporcional a quantidade de instruções sequenciais. Na linha 15, há uma operação de E/S, que por estar em um laço de repetição, será executada n vezes. Na linha 14 há 1 atribuição `i = 0`, a comparação `i < n` será realizada $n+1$ vezes, e a cada uma das n iterações, o contador `i` será atribuído e incrementado (`++i`).

Como n é definido com o valor 4 (linha 13), pode se dizer que o custo deste algoritmo é, dependendo do caminho tomado na bifurcação:

$$(n)ad + (n+1)atr + (n+2)cmp + (n+2)es \rightarrow 4ad + 5atr + 6cmp + 6es$$

ou

$$(n)ad + (n+1)atr + (n+2)cmp + (n+4)es \rightarrow 4ad + 5atr + 6cmp + 8es$$

Esta análise é válida para qualquer situação, mas o custo específico depende, evidentemente, da velocidade do computador e das especificidades da linguagem em que o programa será executado. Supondo que, neste exemplo, a adição custa 2ms, a atribuição 1ms, a comparação 2 ms, e E/S 10ms; pode-se dizer que sua execução demora entre 85 e 105ms.

Considere que se deseja buscar um elemento em um vetor, uma tarefa trivialmente implementada da seguinte forma:

apc_busca.h

```c
/* Retorna o índice do elemento cujo conteúdo é "valor", se
existir no vetor de n elementos, -1 caso contrário. */
int busca_sequencial(int valor, int* vetor, int n) {
    int i;

    for(i = 0; i < n; ++i) {
        if(vetor[i] == valor)
            return i;
    }

    return -1;
}
```

Quantas comparações seriam necessárias para executar este algoritmo? No melhor caso, o elemento desejado é o primeiro e basta 1 comparação. No pior caso, o elemento não existe no vetor, e são necessárias n comparações para terminar a busca. Desta forma, sabe-se que o custo será de pelo menos 1 e nunca mais que n.

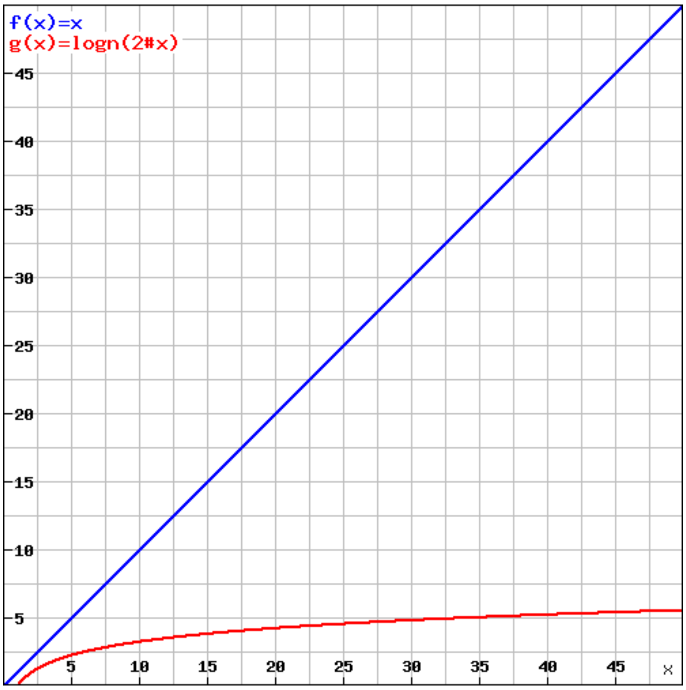
Considere que se deseja buscar uma página em um livro, o algoritmo acima certamente está correto para esta tarefa. Mas ninguém procura uma página desta forma, a forma "tradicional" poderia ser descrita como:

1. Abra o livro no meio.
2. Se está aberto na página desejada, termine.
3. Se a página desejada é menor que a página atual, desconsidere toda a metade posterior do livro, e repita o processo na metade anterior (imagine rasgar o livro ao meio e jogar a segunda metade fora).
4. Senão, desconsidere toda a metade anterior do livro, e repita o processo na metade posterior (imagine rasgar o livro ao meio e jogar a primeira metade fora).

Este processo é muito mais eficiente que o anterior, porque demanda menos passos (tente implementá-lo). A cada tentativa, descarta-se metade dos elementos, de modo que a quantidade descresce em progressão geométrica n elementos até que haja apenas um, possibilitando o término do processo, em T tentativas. Portanto, a quantidade de tentativas é:

$$2^T = n \Rightarrow T = \log_2(n)$$

Comparando esta abordagem (conhecida como busca binária) a busca sequencial vista, fica claro o quão mais eficiente ela é.



Considere o código abaixo, utilizado para ordenar os elementos de um vetor:

apc_ordenacao.h

```
1 /* Ordena os elementos do vetor em ordem crescente. */
2 void bubble_sort1(int* vetor, int n) {
3   int i, j;
4
5   for(i = 0; i < n; ++i)
6     for(j = i + 1; j < n; ++j)
7       if(!crescente(vetor[i], vetor[j]))
8         troca(vetor + i, vetor + j);
9 }
10
11 /* Ordena os elementos do vetor em ordem crescente. */
```

Supondo que se esteja interessado apenas na quantidade de *trocas* realizadas, pode-se estimar o custo de execução deste algoritmo simplesmente contando quantas vezes a função `troca` é chamada. Isto ocorre sempre que a linha 8 for executada, mas a linha 7, que é executada antes, força um teste de modo que a função só é executada se os elementos comparados não estiverem em ordem. Se isto nunca acontecer, então nunca há uma troca e, portanto, o custo de execução do algoritmo é zero (o melhor caso possível).

Considere o caso oposto, os elementos estão sempre fora da ordem e, portanto, todo teste resulta na execução de `troca` (e pode-se, então, ignorar o teste da linha 7). Nesta situação, para saber o custo basta contar quantas vezes a função será chamada dentro do laço de repetição, ou seja, quantas são as iterações. No caso, `j` varia de `i+1` a n, então são $n - i - 1$ iterações. Mas o laço da linha 7 também está dentro de um outro laço em que `i` varia de 0 a $n - 1$ (n iterações).

Então, quando `i`$=0$, serão $n-1$ chamadas de `troca`, quando `i`$=1$, serão $n-2$, e assim sucessivamente até `i`$=n-1$ e 0 chamadas:

$$\underset{a_1}{(n-1)} + \underset{a_2}{(n-2)} + \cdots + \underset{a_{n-2}}{(2)} + \underset{a_{n-1}}{(1)} + \underset{a_n}{(0)}$$

Claramente uma progressão aritmética, cujo total pode ser calculado como:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Este algoritmo, considerando apenas `troca_i` como medida, pode ter um custo de execução que varia entre 0 (limite inferior/melhor caso) e $\frac{n(n-1)}{2}$ (limite superior/pior caso). O custo exato depende dos valores dos `n` elementos do vetor, geralmente uma informação desconhecida, mas pode-se garantir que este custo nunca será maior que o limite superior nem meno que o inferior.

Se considerar apenas a execução da função `crescente` como medida, o mesmo raciocínio se aplica, mas como haverá uma comparação a cada iteração do laço, independentemente dos elementos no vetor, esta função será chamada $\frac{n(n-1)}{2}$.

O custo de execução de um algoritmo está associado ao tamanho entrada.

Tente analisar os algoritmos: *Insertion Sort* e *Selection Sort* em `apc_ordenacao.h`.

"*O sistema de análise matemática [...] constitui o maior avanço técnico do pensamento exato.*"

John von Neumann

Diversos fatores influenciam o tempo de execução de um algoritmo: a velocidade do processador, outros processos sendo executados, etc. Portanto, obter um custo exato, ou mesmo fazer estimativas mais precisas quanto a isso é muito complicada. A complexidade computacional tenta avaliar o quão difícil é a execução do algoritmo, possibilitando uma estimativa do custo (que pode levar a decisão de utilizar ou não a solução) e uma comparação entre [classes de] algoritmos de forma independente do hardware. Para facilitar esta análise. utiliza-se a notação assintótica, uma forma mais simples de avaliar o algoritmo. Ela indica *o quão rapidamente cresce o custo de execução em relação ao tamanho da entrada do algoritmo, supondo que este tamanho chegue a valores arbitrariamente [muito] grandes.*

Por exemplo, veja os seguintes algoritmos:

```c
int f(int x) {
  int i, total = 0;

  for(i=0; i<50; ++i)
    total += i;

  return total;
}
```

```c
int g(int x) {
  int i, total = 0;

  for(i=0; i<x; ++i)
    total += i;

  return total;
}
```

```c
int h(int x) {
  int i, j, total = 0;

  for(i=0; i<x; ++i)
    for(j=0; j<x; ++j)
      total += i;

  return total;
}
```

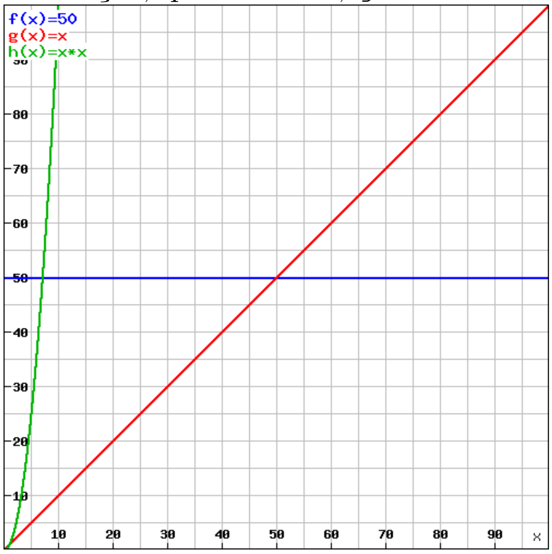
Para facilitar, considere que apenas as instruções envolvendo a atualização da variável `total`. No caso de `f(x)`, `total` é alterada 50 vezes no laço de repetição. Isso acontece para uma entrada de dados qualquer, ou seja, independentemente do valor de `x` $(1, 100, 10^9, \cdots)$, as mesmas 50 atualizações serão realizadas. No caso de `g(x)`, as alterações são realizadas em um laço de repetição cujo critério de parada depende de `x`, portanto a quantidade de instruções a serem executadas é diretamente proporcional a quantidade definida por `x`. Ou seja, se `x` $=1$, será o custo de 1 instrução; se `x` $=100$, será o custo de 100 instruções; se `x` $=10^9$, será o custo de 10^9 instruções, e assim sucessivamente.

Por fim, no caso de `h(x)`, as alterações são realizadas em dois laços de repetição aninhados, cujos critérios de parada dependem de `x`. Assim, a quantidade de instruções a serem executadas é diretamente proporcional ao quadrado da quantidade definida por `x`. Ou seja, se `x` $=1$, será o custo de 1 instrução; se `x` = 100, será o custo de 10000 instruções; se `x` = 10^9, será o custo de 10^{18} instruções, e assim sucessivamente. Considere então a seguinte função, que chama `f`, `g` e `h`:

```c
int funcao(int n) {
  int total;

  total  = f(n); /* 50 instruções */
  total += g(n); /* n instruções */
  total += h(n); /* n*n instruções */

  return total;
}
```



Já foi visto que a influência de cada trecho do código no custo total da função muda conforme o tamanho da entrada. O gráfico ilustra claramente que para valores arbitrariamente maiores de entrada, o custo associado ao termo n^2 cresce muito mais que os demais, efetivamente *dominando* os outros. Para um valor suficientemente grande de n, este crescimento é tão maior que os coeficientes menores podem ser ignorados, ou seja, o custo pode ser aproximado por uma função mais simples: $n^2 + n + 50 \approx n^2$.

A notação assintótica (*Grande-O*) é uma notação matemática usada para analisar o comportamento de funções e utilizada para descrever o uso de recursos computacionais, permitindo prever o comportamento do algoritmo e determinar qual algoritmo utilizar. De forma simplificada, para valores grandes o suficiente, o termo de maior coeficiente da função de custo domina os demais, tornando-se o único a ser considerado.

Por exemplo, considere que a execução de cada linha de código abaixo tenha custo igual, independentemente de qual instrução. O custo total de cada função pode ser aproximado como o custo da função que cresce mais rapidamente.

```c
void O_1(int n) {
  printf("Gol da Alemanha!"); /* 1 */
  printf("Gol da Alemanha!"); /* 1 */
  printf("Gol da Alemanha!"); /* 1 */
  printf("Gol da Alemanha!"); /* 1 */
  printf("Gol da Alemanha!"); /* 1 */
  printf("Gol da Alemanha!"); /* 1 */
  printf("Gol da Alemanha!"); /* 1 */
  printf("Gol do Brasil!");   /* 1 */
}                             /* custo: 8 -> O(1) */

void O_n(int n) {
  O_1(n);                       /* 8 */
  while(n--)                    /* n */
    printf("Gol da Alemanha?"); /* n */
}                               /* custo: 2n + 8 -> O(n) */

void O_n2(int n) {
  int i, i, soma = 0;            /* 1 */

  O_1(n);                        /* 8 */
  O_n(n);                        /* 2n + 8 */
  for(i = 0; i < n; ++i)         /* 3n */
    for(j = n; j > 0; --j) {     /* 3n^2 */
```

```
        printf("(%d, %d)", i , j); /* n^2 */
        soma += i + j;             /* 3n^2 */
    }
}                                  /* custo: 7n^2 + 5n + 17 -> O(n^2) */
```

Os algoritmos podem, então, ser descritos em função de suas classes:

$O(1)$ custo constante (independente de n).

$O(\log(n))$ custo logarítmico.

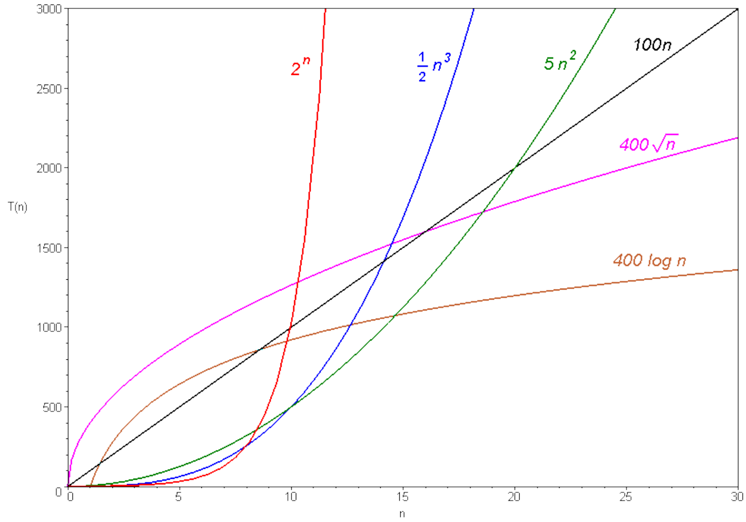
$O(n)$ custo linear.

$O(n\log(n))$ custo log-linear.

$O(n^c)$ custo polinomial.

$O(c^n)$ custo exponencial.

$O(n!)$ custo fatorial.



A notação assintótica serve para comparar algoritmos de classes diferentes, no caso de algoritmos de mesma classe, uma análise mais detalhada da função de custo é necessária. Por exemplo, qual o custo de comparar cada elemento de um vetor aos outros elementos?

Algoritmo

```
for(i = 0; i < n; ++i)
  for(j = 0; j < n; ++j)
    if(i != j)
      compare(i,j)
```

Algoritmo Otimizado

```
for(i = 0; i < n; ++i)
  for(j = i+1; j < n; ++j)
    compare(i,j)
```

Em ambos os casos, a complexidade é $O(n^2)$, mas o algoritmo otimizado tem custo menor.

Uma implementação correta que seja eficiente, em termos de custo computacional, é o objetivo final do desenvolvimento de software. Entretando, na maioria dos casos é melhor ter código claro (e simples) que instruções obscuras e otimizadas.

"*Otimização prematura é a raiz de todos os males.*"

Donald Knuth

2 Ordenação

O ordenação é o processo de organizar os elementos de um conjunto, e pode ser extremamente útil (por exemplo, na busca binária). A análise de algoritmos de ordenação possibilita não só lidar com formas diferentes e interessantes de resolver uma mesma tarefa, como uma boa oportunidade para analisar a complexidade de algoritmos.

Por exemplo, supondo a quantidade de operações como medida de custo, quais as complexidades dos seguintes algoritmos de ordenação?

apc_ordenacao.h

```c
}

/* Ordena os elementos do vetor em
     ordem crescente. */
void bogosort(int* vetor, int n) {
```

apc_ordenacao.h

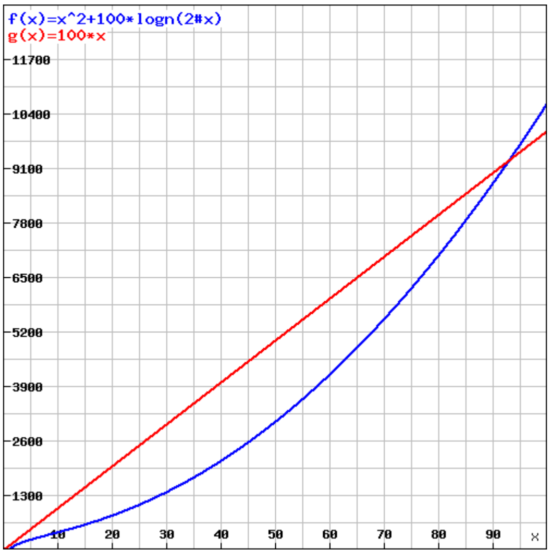
```c
}

/* Ordena os elementos do vetor em ordem
     crescente. */
void bubble_sort2(int* vetor, int n) {
  int i, houve_troca;

  do {
    houve_troca = 0;
    for(i = 0; i < n-1; ++i)
      if(!crescente(vetor[i], vetor[i+1])) {
        troca(vetor + i, vetor + i + 1);
        houve_troca = 1;
```

Suponha que o problema seja encontrar um elemento no vetor, e tem-se dois algoritmos de classes diferente para fazer isso: busca sequencial ($O(n)$) ou binária ($O(\log_2(n))$. Entretanto, a busca binária têm como requisito a ordenação do vetor, portanto o custo de ordenar o vetor e então realizar a busca é $O(n^2) + O(\log_2(n))$.

Claramente, o custo de ordenação e busca é superior ao de uma simples busca sequencial. Mas e se forem x buscas? Para determinados valores de x, é menos custoso ordenar uma vez e realizar x buscas (a custo logarítmico) que realizar x buscas sequenciais.



Esta amortização do custo computacional deve ser considerada na escolha o algoritmo a ser utilizado.

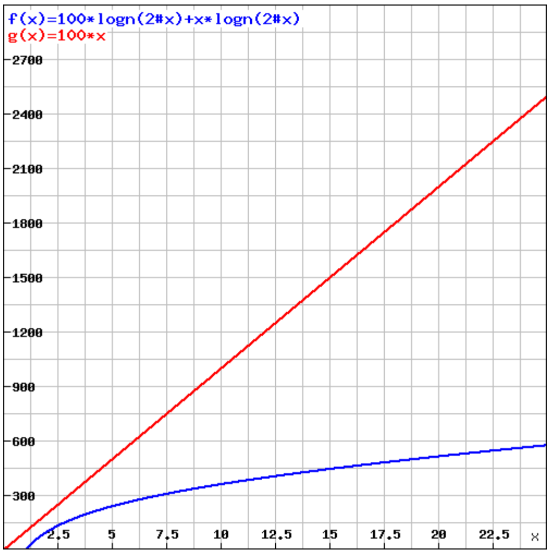
Certos problemas têm características que podem ser exploradas para obter uma solução mais eficiente. Por exemplo, a busca binária aproveita o fato do vetor estar ordenado para dividí-lo em duas partes, uma das quais é desconsiderada, efetivamente diminuindo o esforço necessário para encontrar o elemento.

Esta estratégia de dividir para conquistar também pode ser utilizada para para ordenação. A ideia é simples, dividir o problema em versões menores, resolver estas versões recursivamente, e combinar os resultados de forma a obter a solução completa [1]. É evidente que ordenar ${}^{n}/_{2}$ elementos exige menos esforço que ordenar n, assim como combinar dois conjuntos já ordenados em um é mais fácil que ordenar um conjunto completo.

apc_ordenacao.h

Uma análise pouco detalhada do código mostra que a cada passo há uma divisão do conjunto e duas partes (linhas 5 e 6), a um custo logarítmico, e a função `merge` junta dois vetores de forma linear, portanto a complexidade do algoritmo é da ordem $O(n \log_2(n))$.

O merge sort é mais eficiente que o bubble sort [2], e poderia ser considerado na tarefa de realizar x buscas (com o algoritmo de busca binária).



Outros algoritmos de ordenação interessantes são o Heapsort e o quick sort. O funcionamento deles pode ser visto em:

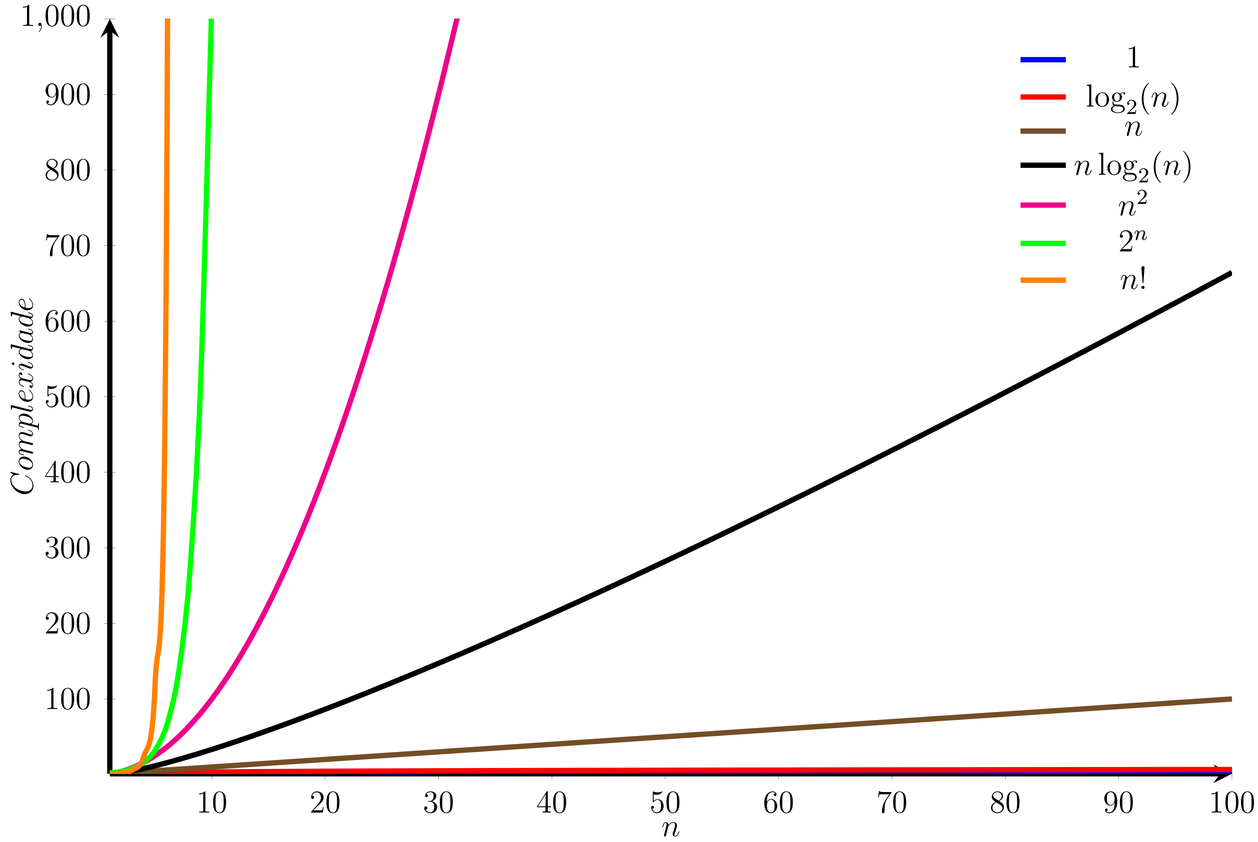
- `www.sorting-algorithms.com`
- `sorting.at`
- `https://www.youtube.com/user/AlgoRythmics/videos`
- `https://www.youtube.com/watch?v=kPRA0W1kECg`
- `https://www.youtube.com/watch?v=ZZuD6iUe3Pc`

O quick sort [3] merece destaque pois pode ser um algoritmo muito eficiente se bem implementado [4] (em termos de custo real), mas sua complexidade é da ordem $O(n^2)$. Você consegue descobrir o motivo disso[1]? A ideia também é dividir para conquistar, escolhe-se um elemento (pivô), e separa-se os elementos restantes em um grupo com os elementos menores que o pivô, outro com os elementos maiores. Desta forma, o pivô está devidamente posicionado, e os problemas restantes são mais fáceis de resolver. O processo se repete (recursivamente) para cada grupo.

```
1  void quick_sort(int *vetor, int n) {
2    if (n < 2) return;
3
4    int i, pivo;
5
6    pivo = escolhe_pivo(vetor, n);
7    for (i = 1; i < n; ++i)
8      /* organiza elementos em função do pivô */
9
10   quick_sort(/* a esquerda do pivô */);
11   quick_sort(/* a direita do pivô */);
12 }
```

Algoritmos de complexidade logarítmica são melhores que polinomiais, mas a escolha do algoritmo correto depende do valor de n. Para pequenos valores, a maioria dos algoritmos não representa variação significativa de desempenho, e estuda-se a complexidade somente para grandes valores de n, pois o comportamento assintótico representa o limite do comportamento do custo quando n cresce.

[1]Por exemplo, analisando a linha 6.



A análise pode ser considerada por diferentes perspectivas:

$\Omega(n)$ **Melhor:** definida pelo menor número de passos executados para qualquer instância de tamanho n.

Médio: definida pela média do número de passos executados para qualquer instância de tamanho n.

$O(n)$ **Pior:** definida pelo maior número de passos executados para qualquer instância de tamanho n.

Existem algumas formas rápidas de estimar a complexidade de algoritmos:

- considerar memória infinita
- não considerar o sistema operacional nem o compilador
- analisar o algoritmo e não o programa
- levar em conta o tamanho das entradas
- ter cuidado ao escolher a função de custo (atribuição, adição, multiplicação, comparação, etc.)

Para dois algoritmos que executem a mesma tarefa, a diferença entre complexidades pode ser muito mais significante que a entre hardware/software. Por exemplo, considere:

Bubble Sort com custo $c_1 \cdot n^2$, rodando no computador A

Merge Sort com custo $c_2 \cdot n \log_2(n)$, rodando no computador B

Supondo que A executa 10^{10} instruções por segundo, sendo 1000 vezes mais rápido que B; e as implementações dos algoritmos se caracterizam por $c_1 = 0,5$ devido ao superprogramador e $c_2 = 50$ devido a inexperiência do estagiário. Se uma entrada de tamanho $n = 10^7$ é fornecida, qual é a melhor opção?

Referências

[1] Thomas H. Cormen. *Algorithms unlocked.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2013.

[2] Donald Ervin Knuth. *The art of computer programming.* Addison-Wesley, Reading, Mass, 3rd ed edition, 1997.

[3] C. A. R. Hoare. Algorithm 64: Quicksort. *Communications of the ACM*, 4(7):321, July 1961.

[4] Steven S. Skiena. *The algorithm design manual.* Springer, London, 2nd ed edition, 2008.