

# EST-25134: Aprendizaje Estadístico

**Profesor:** Alfredo Garbuno Iñigo — Primavera, 2022 — Métodos de selección.

**Objetivo:** Detalles en métodos de selección de variables. Veremos las estrategias de regularización y penalización para ajustar modelos controlando el sesgo predictivo hacia el conjunto de entrenamiento. Utilizaremos validación cruzada para probar configuraciones y elegir la *mejor*. Hablaremos sobre reducción de dimensiones y su combinación con métodos predictivos.

**Lectura recomendada:** Capítulo 6 de [1]. Sección 6.4 de [2]. Aunque el enfoque es regresión los principios de validación cruzada para escoger modelos penalizados en el contexto de clasificación son análogos. Puedes leer la sección 12.5 de [2].

## 1. INTRODUCCIÓN

Como hemos visto es natural **extender** el modelo lineal

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p + \epsilon. \quad (1)$$

Veremos (mas adelante) la idea de incorporar relaciones **no lineales** manteniendo el supuesto de **aditividad**.

Incluso aunque el modelo lineal es sencillo, tiene sus ventajas pues nos ayuda a tener un modelo **interpretable** y al mismo tiempo con buena **capacidad predictiva**.

El libro de Kuhn and Johnson [2] tiene una buena discusión sobre las ventajas algorítmicas de un modelo lineal. Usualmente en la práctica queremos tener nuestro modelo en un ambiente productivo. Lo cual necesita que las predicciones sean fácilmente calculables. ¿Qué pasaría si en la plataforma de Netflix o Amazon se tarda mucho en aparecer las sugerencias? Los modelos lineales son fácilmente calculables en prácticamente cualquier ambiente productivo.

Estudiaremos estrategias para mejorar modelos lineales a través de procedimientos alternativos de ajuste.

### 1.1. Opciones para ajustar modelos

- Basados en **precisión de ajuste**, ideal cuando  $p > n$  con el objetivo de *reducir* varianza.
- Basados en **interpretabilidad**. Por ejemplo, eliminar variables que no tengan capacidad predictiva.

## 2. ESTRATEGIAS DE SELECCIÓN DE VARIABLES

- Selección por subconjuntos.
- Reducción de coeficientes (regularización).
- Reducción de dimensiones.

### 2.1. Selección por subconjuntos

1. Utilizar el modelo nulo  $\mathcal{M}_0$  (sin predictores).
2. Para  $k = 1, \dots, p$ :
  - a) Ajustar todos modelos posibles con  $k$  predictores.
  - b) Elegir el *mejor* de esa colección de modelos, le pondremos  $\mathcal{M}_k$ .
3. Elegir el mejor modelo dentro de la colección  $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_p$  utilizando un criterio de comparación de modelos.

2.1.1. *Para pensar:* ¿Por qué no puedes utilizar el criterio de RSS para escoger entre las opciones  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_p$ ?

### 2.2. En el contexto de clasificación

La **devianza** –el negativo de dos veces la log-verosimilitud– se utiliza como una métrica de bondad de ajuste (como el RSS) para una clase mas amplia de modelos.

### 2.3. Selección iterativa

Podemos elegir empezar con el modelo mas sencillo e ir incorporando una variable a la vez mas predictores. En cada paso podemos evaluar la **mejora adicional** de haber incorporado estas nuevas características.

### 2.4. Pseudo-código (selección hacia adelante)

1. Denotamos por  $\mathcal{M}_0$  el modelo nulo.
2. Para  $k = 1, \dots, p - 1$ :
  - a) Considera todos los  $p - k$  modelos que aumentan el modelo en la iteración anterior  $\mathcal{M}_k$  con un predictor adicional.
  - b) Escoge el *mejor* de estos  $p - k$  modelos y llámale  $\mathcal{M}_{k+1}$ .
3. Escoge el mejor de los modelos entre  $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_p$  utilizando un criterio de comparación de modelos.

### 2.5. Aplicación: créditos

	Income	Limit	Rating	Cards	Age	Education	Gender	Student	Married	Balance
1	11	1647	149	2	71	10	Female	Yes	Yes	195
2	11	3584	294	5	69	16	Male	No	Yes	423
3	33	1786	154	2	60	8	Female	No	Yes	0
4	124	9560	701	3	52	17	Female	Yes	No	1687
5	26	5640	398	3	58	15	Female	No	No	905

LISTING 1. Muestra de datos del conjunto *Credit*.

El objetivo es predecir **Saldo** en utilizando las demás características. El ejemplo de [1] ha implementado la búsqueda por subconjuntos y la búsqueda iterativa hacia adelante. Estos son los mejores modelos encontrados.

Nota que el mecanismo iterativo no tiene garantía de encontrar el mejor modelo dentro de las  $\binom{p}{k}$  posibilidades.

	estrategia	sigma	r.squared	adj.r.squared	AIC	deviance
1	subconjunto	100	0.95	0.95	4823	3915058

# Variables	Best subset	Forward stepwise
One	rating	rating
Two	rating, income	rating, income
Three	rating, income, student	rating, income, student
Four	cards, income student, limit	rating, income, student, limit

FIGURA 1. Método de selección para los datos de créditos. Tomada de [1].

```

3  2  adelante  101      0.95      0.95 4835  4032502

```

LISTING 2. Métricas de bondad de ajuste para los datos de *Credit*.

2.5.1. *Para pensar:* ¿Cuántos modelos en total se ajustan con el procedimiento de búsqueda iterativa hacia adelante? Considera  $p = 20$ .

## 2.6. Selección iterativa hacia atrás

Empezamos con el modelo completo que contenga los  $p$  predictores. Eliminando variables, una a la vez, cuando un predictor no sea tan útil. La única restricción que necesitamos es que  $n > p$ .

## 3. MÉTRICAS DE DESEMPEÑO

Si utilizáramos el RSS para comparar entre  $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_k$  tendríamos un problema pues eliminar predictores siempre perjudicaría la capacidad predictiva del modelo. Necesitamos compensar por el sesgo de sobre-ajuste. Es decir, considerar una métrica que pueda estimar el error de generalización.

### 3.1. $C_p$ de Mallows

Es un criterio de bondad de ajuste (menor mejor) definida como

$$C_p(\mathcal{M}_d) = \frac{1}{n} (\text{RSS}(d) + 2d\hat{\sigma}^2). \quad (2)$$

Tenemos una penalización a la suma de residuales al cuadrado (RSS) que considera un aumento en predictores utilizados.

### 3.2. El criterio de información de Akaike (AIC)

Se utiliza para evaluar modelos ajustados por máxima verosimilitud (menor mejor)

$$\text{AIC}(\mathcal{M}_d) = -2 \log L + 2d. \quad (3)$$

3.2.1. *Ejercicio:* Prueba que en el caso del modelo lineal con errores Gaussianos el criterio de mínimos cuadrados y máxima verosimilitud es el mismo. Además los criterios  $C_p$  y AIC son lo mismo.

### 3.3. $R^2$ ajustada

Se calcula como

$$R_A^2(\mathcal{M}_d) = 1 - \frac{\text{RSS}/(n - d - 1)}{\text{TSS}/(n - 1)}. \quad (4)$$

Es una métrica de correlación entre predicción ( $\hat{y}$ ) y respuesta ( $y$ ) (**mayor mejor**). Al contrario de la  $R^2$  tradicional esta métrica si se afecta por la inclusión de variables innecesarias/redundantes.

### 3.4. Validación cruzada

Cada uno de los procedimientos de selección de variables regresa una secuencia de modelos  $\mathcal{M}_k$ . Lo que queremos es escoger la  $k^*$  de acuerdo al error de generalización. El error de generalización estimado tiene la ventaja de no hacer la estimación de  $\sigma^2$ .

*3.4.1. Selección de modelo: Datos de crédito* El objetivo es predecir el Saldo en términos de los demás predictores.

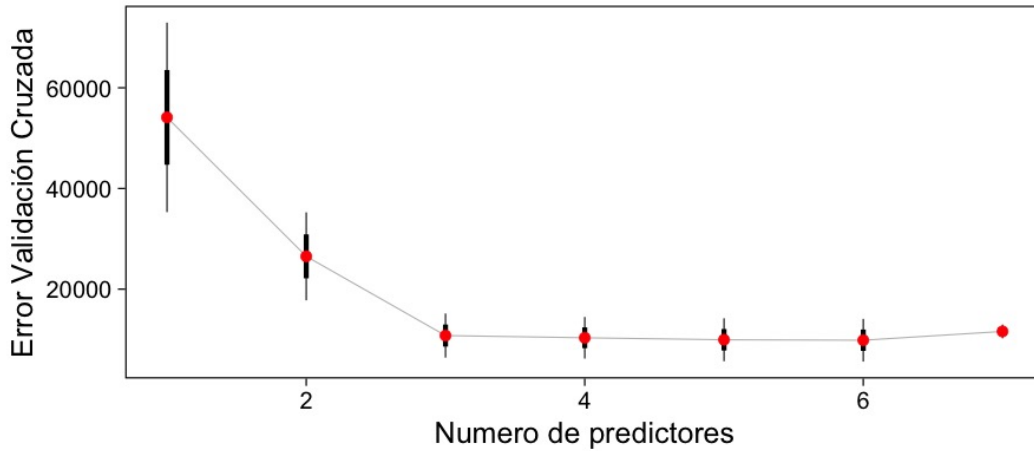


FIGURA 2. Error de generalización estimado por validación cruzada con  $K = 10$ . Para los datos de *Credit*.

Escogemos el modelo con el error mas pequeño. Sin embargo, validación cruzada nos puede dar una métrica de incertidumbre (¿cuál?). ¿Y si el problema de decisión lo planteamos como una prueba de hipótesis?

## 4. REGULARIZACIÓN

Los procedimientos selección de variables discretos/iterativos pueden generar una varianza muy alta en las estimaciones del error y podría no reducir el error de predicción del modelo completo. Estudiaremos dos métodos de regularización, **Ridge** y **LASSO**, donde ajustamos un modelo con todas las características *penalizando* de alguna manera la complejidad del modelo.

### 4.1. Regresión Ridge

Nuestra formulación anterior consideraba encontrar  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$  minimizando

$$\text{RSS} = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p \beta_j x_j \right)^2. \quad (5)$$

Lo que haremos ahora será incorporar un término de penalización en la función objetivo

$$\text{RSS} + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2, \quad (6)$$

donde  $\lambda \geq 0$  es un hiper-parámetro.

El objetivo sigue siendo el mismo, ajustar el modelo lo mejor posible. El término adicional favorece soluciones con  $\beta_1, \dots, \beta_p$  pequeños. El parámetro  $\lambda$  controla qué tanto penalizamos el tamaño de los coeficientes.

*4.1.1. Para pensar:* Un valor muy pequeño para  $\lambda$  implica una penalización pequeña, por lo tanto la solución tenderá a ser un modelo altamente flexible. Por otro lado un valor de  $\lambda$  grande implica una penalización fuerte. Esto se traduce en una solución poco flexible.

## 4.2. Ridge: datos de crédito

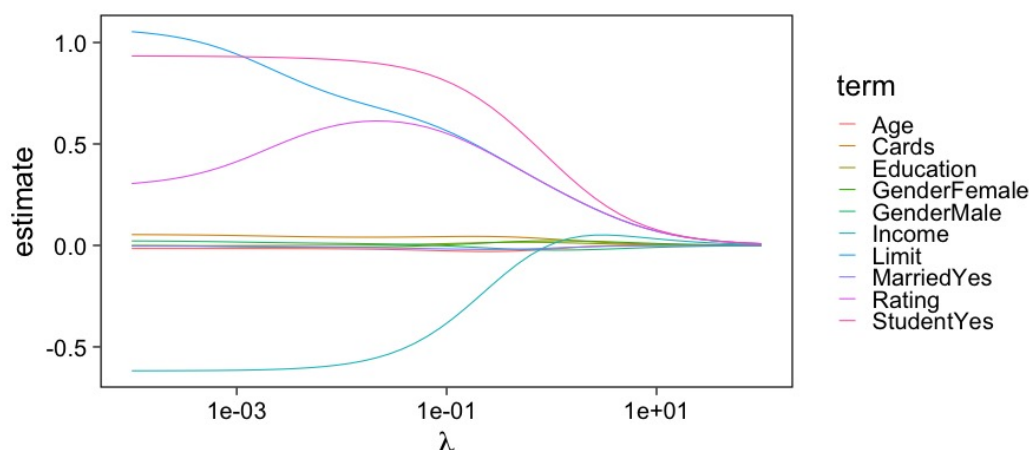


FIGURA 3. Trayectorias de los coeficientes al aumentar la penalización  $\lambda$ .

Al penalizar sobre los coeficientes necesitamos que todos *platicuen* en el mismo idioma. Es por esto que tenemos que estandarizar los predictores. Si queremos estimar el error de generalización métodos de separación de muestras, ¿en qué momento lo hacemos? Es decir, ¿antes de separar los datos o en cada paso del proceso de ajuste?

Con validación cruzada podemos identificar qué valor de  $\lambda$  es el adecuado para penalizar. Una vez realizada esta elección, re-entrenamos el modelo utilizando todo el conjunto de datos para predecir situaciones/observaciones futuras.

## 4.3. Regresión LASSO

En la práctica Ridge no elimina completamente los predictores. Podemos cambiar la penalización para incorporar un término de penalización en la función objetivo

$$\text{RSS} + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|, \quad (7)$$

donde  $\lambda \geq 0$  es un hiper-parámetro.

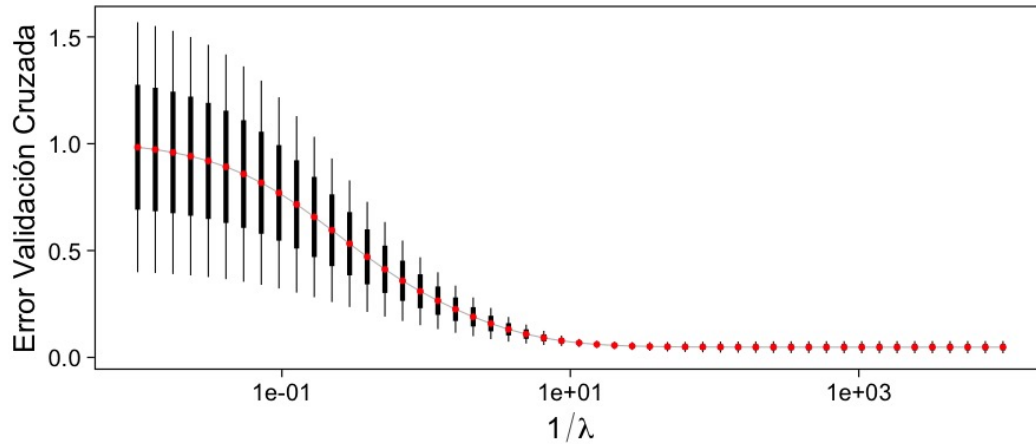


FIGURA 4. Error de validación calculada con  $K = 10$ . Nota que graficamos contra  $1/\lambda$ .

Igual que antes... el objetivo sigue siendo el mismo, ajustar el modelo lo mejor posible. El término adicional favorece soluciones con  $\beta_1, \dots, \beta_p$  pequeños. El parámetro  $\lambda$  controla qué tanto penalizamos el *tamaño* de los coeficientes.

LASSO tiene la propiedad de eliminar completamente los predictores ( $\beta = 0$ ) por lo que es un mecanismo de selección automática de variables.

#### 4.4. LASSO: datos de crédito

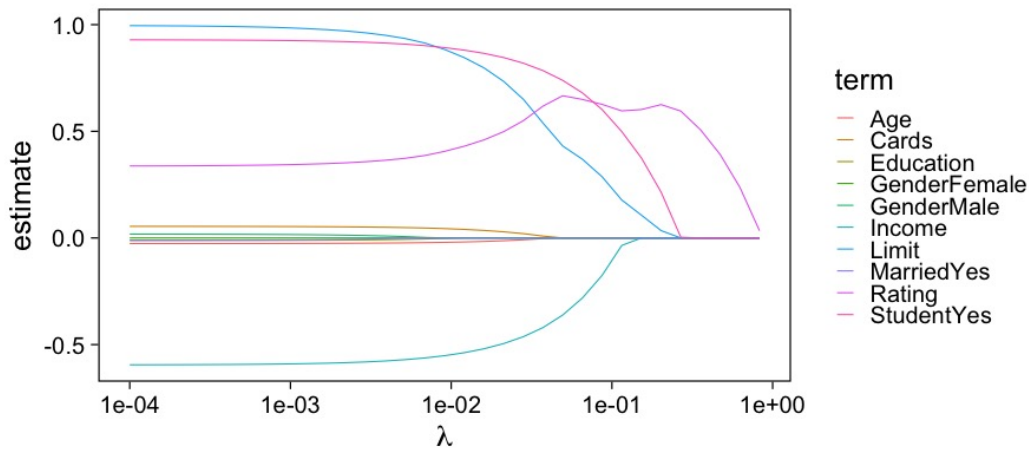


FIGURA 5. Trayectorias de los coeficientes al aumentar la penalización  $\lambda$ .

#### 4.5. Comparación: Ridge v. LASSO

El problema de optimización (Ridge) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\text{minimizar RSS,} \quad \text{sujeto a } \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \leq s, \quad (8)$$

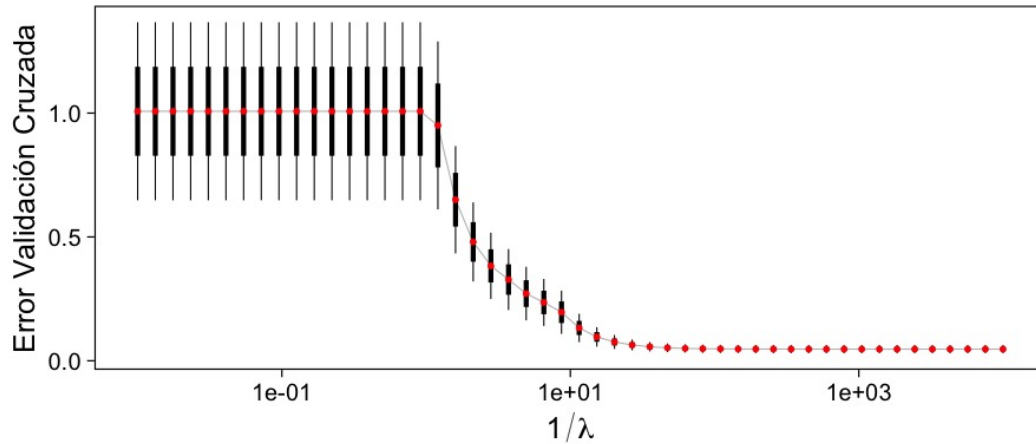


FIGURA 6. Error de validación calculada con  $K = 10$ . Nota que graficamos contra  $1/\lambda$ .

y el respectivo de LASSO

$$\text{minimizar RSS,} \quad \text{sujeto a } \sum_{j=1}^p |\beta_j| \leq s. \quad (9)$$

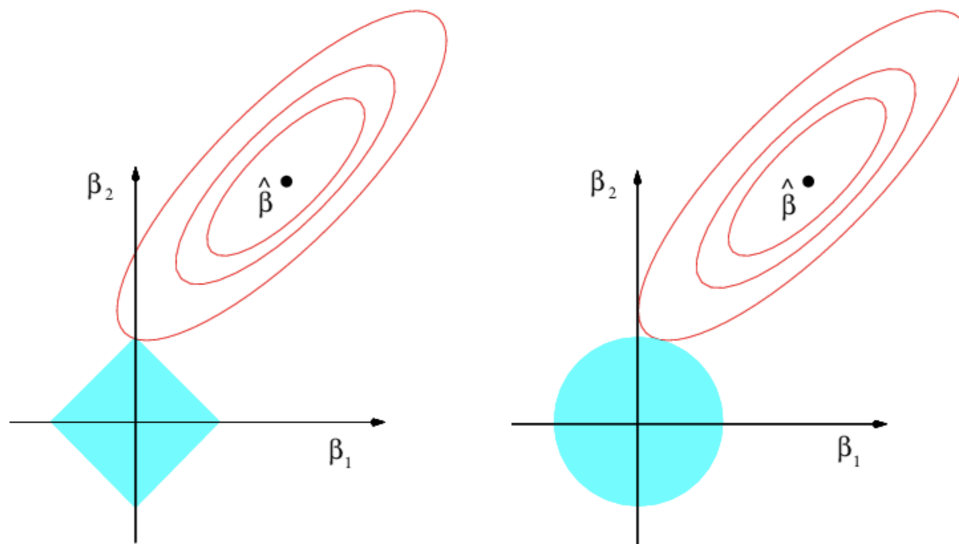


FIGURA 7. Curvas de nivel de los problemas de optimización. Tomada de [1].

#### 4.6. Conclusiones

En la práctica no hay una estrategia dominante. LASSO podría ser preferido cuando el número de parámetros es pequeño. Pero eso implica conocer *a priori* el número de predictores para usar en el modelo.

4.6.1. Para pensar: ¿cómo escogerías entre Ridge o LASSO?

## 5. MÉTODOS DE REDUCCIÓN DE DIMENSIONES

LASSO o Ridge utilizan el concepto de regularización para **restringir** los modelos posibles. Una alternativa es **transformar** primero los predictores (el espacio de los predictores) y **ajustar** un modelo con ese subespacio.

### 5.1. Regresión con reducción de dimensiones

Denotemos por  $Z_1, Z_2, \dots, Z_M$  combinaciones lineales de nuestros predictores originales ( $M < p$ ). Lo escribimos como

$$Z_m = \sum_{j=1}^p \phi_{mj} X_j, \quad (10)$$

con algunas constantes  $\phi_{mj}$  (que se escogen con alguna estrategia).

Podemos ajustar un modelo de regresión por medio de

$$y_i = \theta_0 + \sum_{m=1}^M \theta_m z_{im} + \epsilon_i, \quad (11)$$

utilizando mínimos cuadrados.

Nota que podemos reescribir

$$\sum_{m=1}^M \theta_m z_{im} = \sum_{m=1}^M \theta_m \sum_{j=1}^p \phi_{mj} x_{ij} = \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}, \quad (12)$$

donde

$$\beta_j = \sum_{m=1}^M \theta_m \phi_{mj}. \quad (13)$$

El modelo restringe automáticamente las  $\beta_j$  pues tienen que tomar una forma muy particular. Si las  $\phi_{mj}$  se escogen bien, incluso pueden realizar un mejor trabajo que el modelo de mínimos cuadrados en las variables originales.

### 5.2. Otros métodos de reducción de dimensiones

- Utilizar componentes principales (varianza máxima entre predictores).
- Utilizar *partial least squares* (varianza máxima entre predictores y respuesta).
- Utilizar *least angle regression* (trayectoria de contribución lineal predictiva de atributos).

## REFERENCIAS

- [1] G. James, D. Witten, T. Hastie, and R. Tibshirani. *An Introduction to Statistical Learning: With Applications in R*. Springer Texts in Statistics. Springer US, New York, NY, 2021. ISBN 978-1-07-161417-4 978-1-07-161418-1. . 1, 2, 3, 7
- [2] M. Kuhn and K. Johnson. *Applied Predictive Modeling*. Springer New York, New York, NY, 2013. ISBN 978-1-4614-6848-6 978-1-4614-6849-3. . 1