

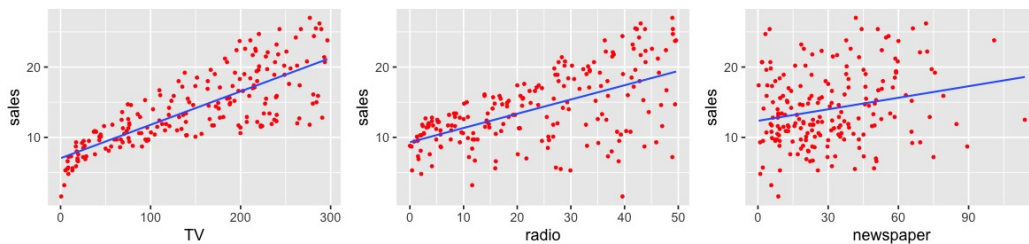
# Aprendizaje Estadístico

**Profesor:** Alfredo Garbuno Iñigo — Primavera, 2022.

**Objetivo.** Establecer las ideas básicas de aprendizaje estadístico. Ciertos criterios de optimalidad y descomposición del error. Discutiremos complejidad y compromiso entre sesgo y varianza.

**Lectura sugerida:** Capítulo 2, [2].

## 1. ¿QUÉ ES EL APRENDIZAJE ESTADÍSTICO?



Supongamos que tenemos datos de ventas de ciertas campañas de *marketing* en ciertos canales de distribución. Queremos estimar la relación

$$\text{Ventas} \approx f(\text{tv}, \text{radio}, \text{periodico}). \quad (1)$$

Lo podemos expresar como

$$Y = f(X) + \varepsilon. \quad (2)$$

### 1.1. ¿Por qué estimar $f$ ?

- Podemos hacer predicciones.
- Podemos entender qué componentes de  $X = (X_1, \dots, X_p)$  son importantes.
- Podemos tratar de entender la complejidad de  $f$ .

### 1.2. ¿Hay una $f$ que sea óptima?

Podríamos utilizar

$$f(x) = \mathbb{E}[Y|x = x], \quad (3)$$

que recibe el nombre **función de regresión**.

## 2. PROPIEDADES

La función de regresión ( $f$ ) es **óptima** en términos del error cuadrático medio:

$$\mathbb{E}[(Y - g(x))^2 | X = x], \quad (4)$$

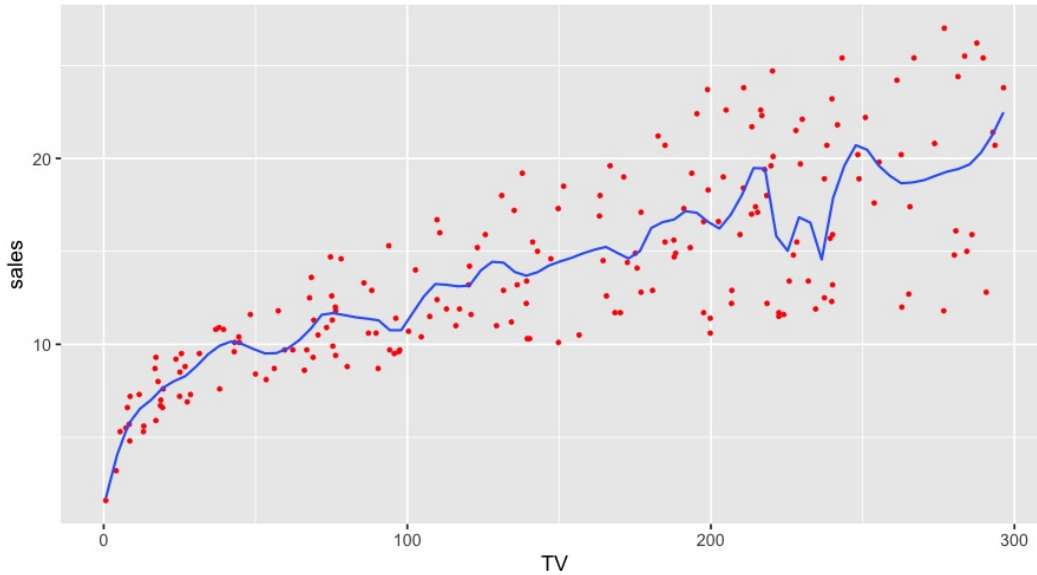


FIGURA 1. Ajuste por medio de promedios locales.

para cualquier función  $g$  evaluada en cualquier punto  $x$ .

El término  $\varepsilon = Y - f(x)$  es el error **irreducible**,

Definir la función de pérdida. Usar probabilidad condicional. Y evaluar sólo  $\mathbb{E}_{Y|X}$  en lugar de  $\mathbb{E}_X \mathbb{E}_{Y|X}$ .

### 2.1. Descomposición del error

Para cualquier estimador  $\hat{f}(x)$  de  $f(x)$  tenemos

$$\mathbb{E}[(Y - \hat{f}(x))^2 | X = x] = \underbrace{[f(x) - \hat{f}(x)]^2}_{\text{reducible}} + \underbrace{\mathbb{V}(\varepsilon)}_{\text{irreducible}}. \quad (5)$$

## 3. IMPORTANTE

Hasta ahora sólo hemos hablado de un procedimiento **predictivo**.

No hemos hablado de un procedimiento de **inferencia estadística**. Por ejemplo,

- Qué predictores están asociados con la respuesta?
- Qué tipo de relación tiene cada predictor con la respuesta?
- Se puede resumir la relación de manera lineal?

## 4. ¿CÓMO ESTIMAMOS $F$ ?

- Tenemos datos observados para la  $x$  que nos interesa?
- Podemos calcular  $\mathbb{E}[Y | X = x]$ ?
- Qué tal que relajamos:

$$\hat{f}(x) = \text{Promedio}(Y | X \in \mathcal{N}(x)). \quad (6)$$

#### 4.1. Vecinos cercanos

Ejemplo de un modelo **no paramétrico**. Este modelo es bueno cuando  $p$  es pequeño y  $n$  es grande. Puede sobre-ajustar rápidamente.

#### 4.2. Maldición de la dimensionalidad

Los vecinos... no son tan cercanos en dimensiones moderadas/altas.

### 5. MODELOS PARAMÉTRICOS

El modelo **lineal** es un modelo paramétrico de la forma

$$f_L(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p. \quad (7)$$

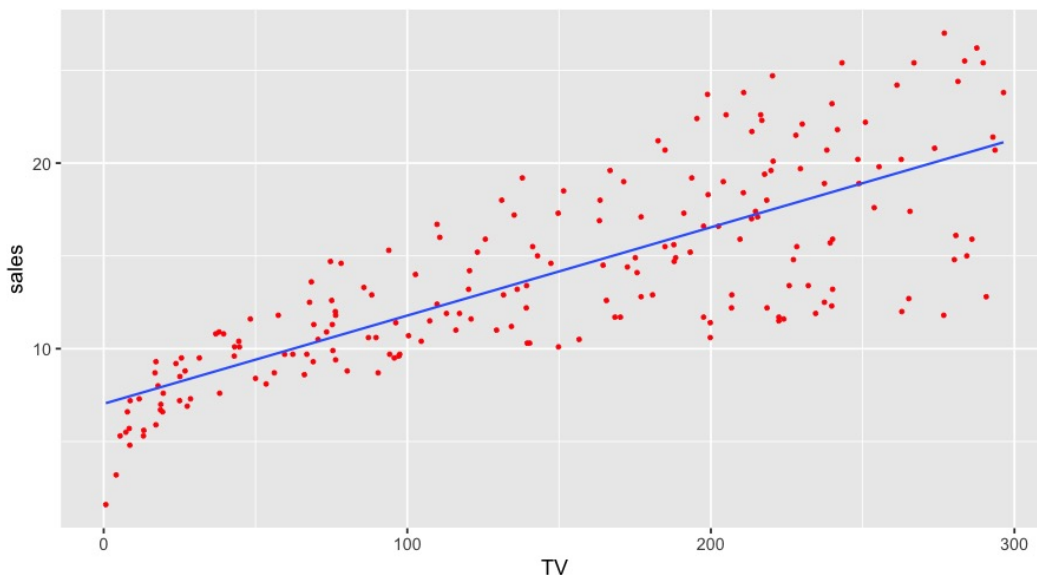


FIGURA 2. Ajuste lineal.

#### 5.1. Compromisos

- El modelo lineal es "fácil" de interpretar. Sin embargo, puede no tener un buen desempeño.
- Hay un balance entre un *buen* ajuste y sobre(sub)-ajuste.
- Complejidad vs Simplicidad

Dificultad de interpretación cuando hay datos observacionales.

### 6. EVALUANDO LA PRECISIÓN DEL MODELO

Supongamos que entrenamos un modelo  $\hat{f}(x)$  sobre  $\mathcal{D}_n$ . ¿Cómo evaluamos su desempeño bajo el conjunto que se utilizó para entrenar?

Función de pérdida / Error de entrenamiento / Error de prueba.

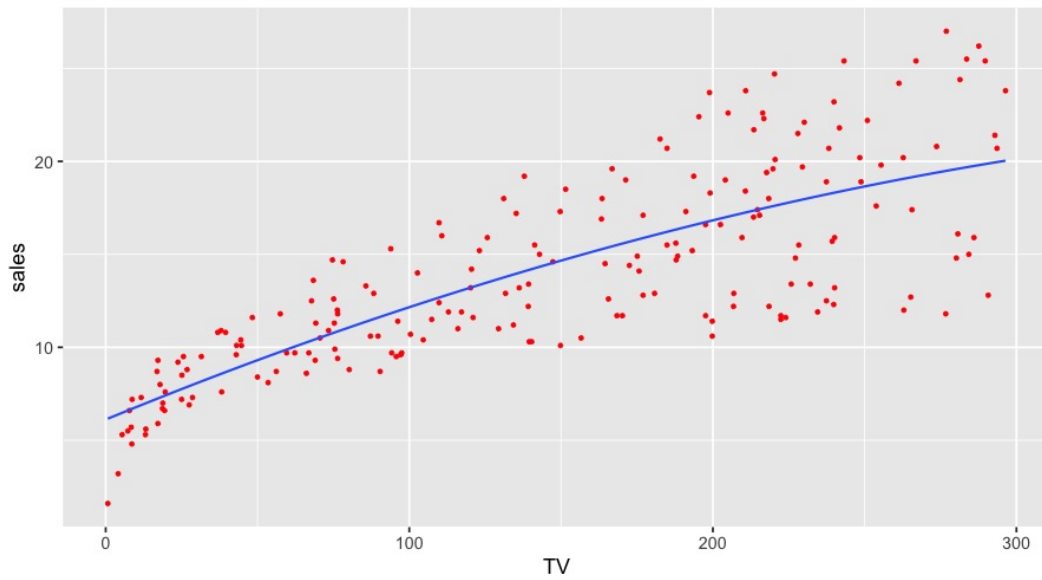


FIGURA 3. *Ajuste cuadrático.*

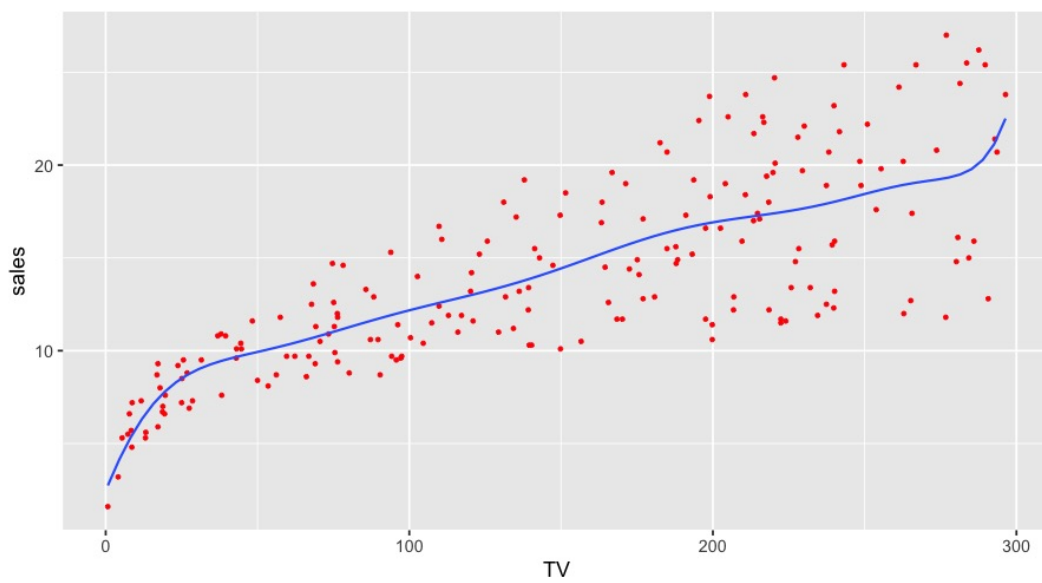


FIGURA 4. *Ajuste polinomial.*

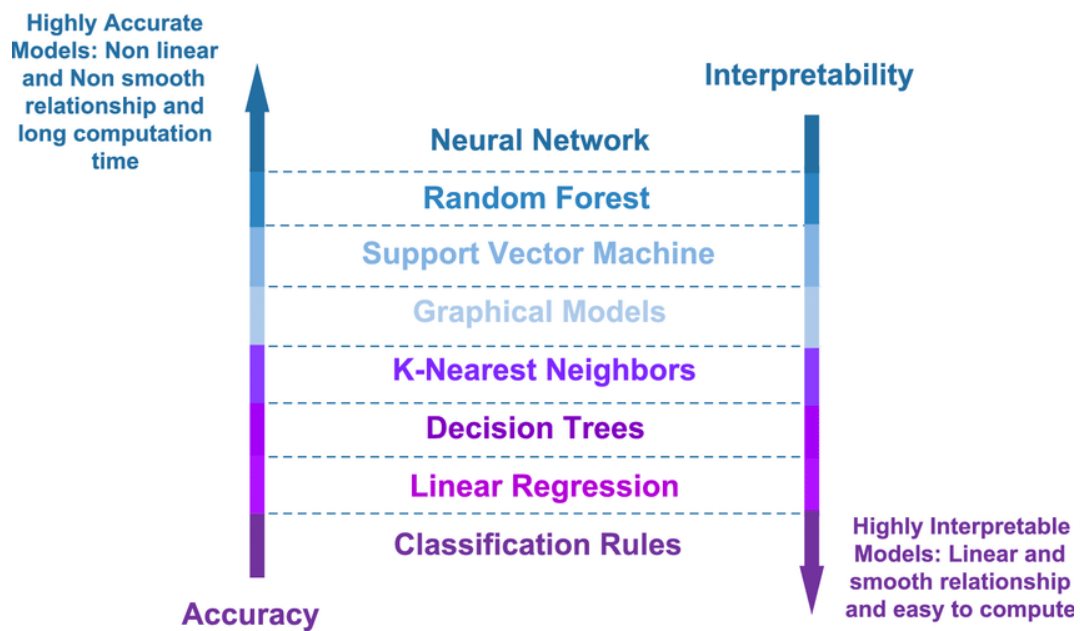


FIGURA 5. Tomado de [1]

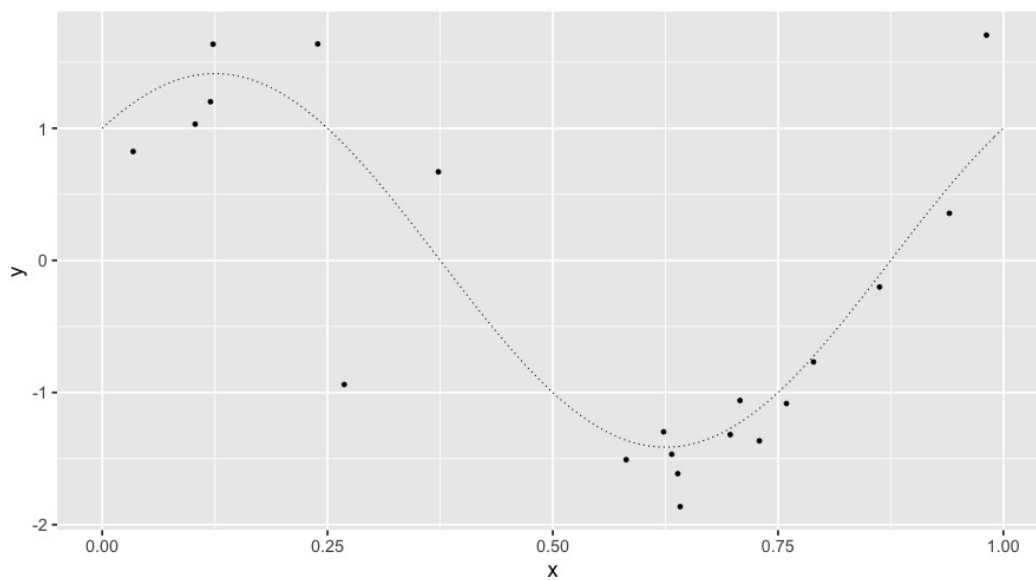


FIGURA 6. Función latente y observaciones.

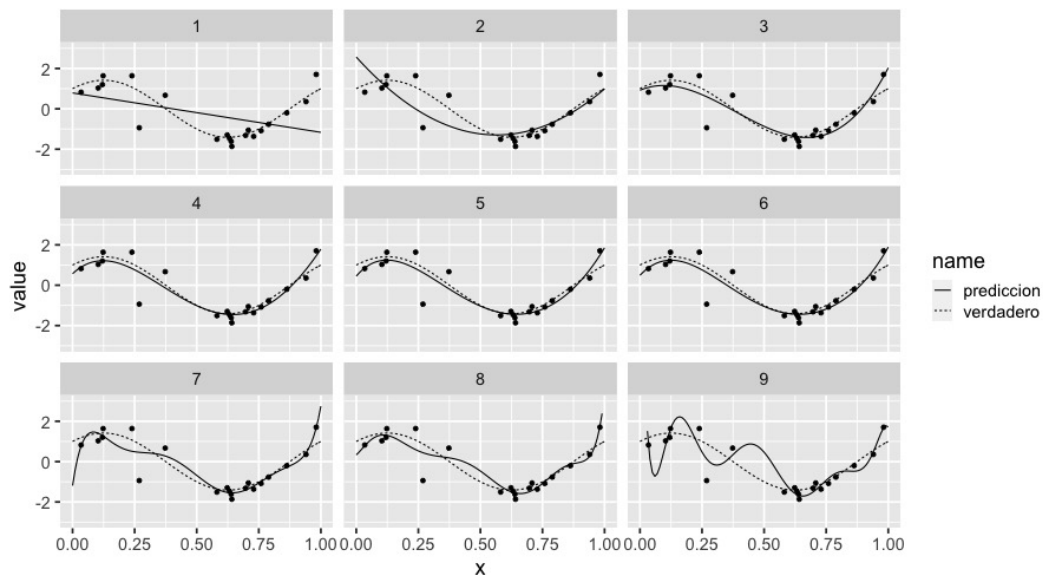


FIGURA 7. Ajuste bajo distintos grados del polinomio

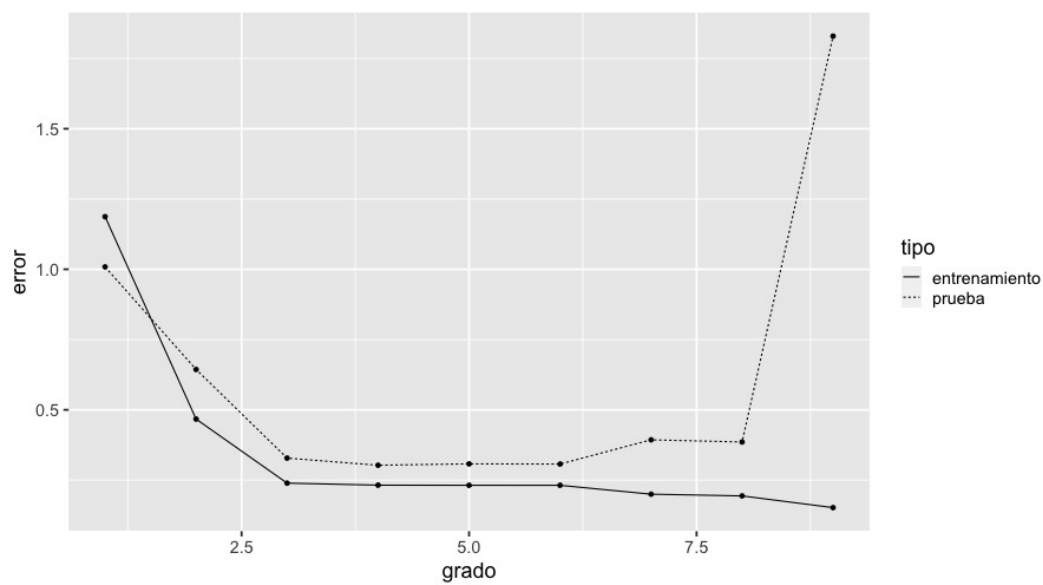


FIGURA 8. Errores de entrenamiento / prueba

### 6.1. Ejemplo (Regresión)

#### 7. COMPROMISO ENTRE SESGO Y VARIANZA

Supongamos que ajustamos un modelo  $\hat{f}(x)$  a un conjunto de datos  $\mathcal{D}_n$ . Sea  $(x_0, y_0)$  un punto no utilizado en el conjunto de entrenamiento. Si el modelo es  $Y = f(X) + \varepsilon$ . Entonces

$$\mathbb{E}[(y_0 - \hat{f}(x_0))^2] = \mathbb{V}(\hat{f}(x_0)) + [\text{Sesgo}(\hat{f}(x_0))]^2 + \mathbb{V}(\varepsilon). \quad (8)$$

Valor esperado. Definición de Sesgo. Figura descomposición.

#### 8. PROBLEMAS DE CLASIFICACIÓN

La predicción es sobre una  $y_n$  que es cualitativa. Nos interesa el **error de clasificación**.

Definir función de pérdida. Es decir nos interesa

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(y_i \neq \hat{y}_i). \quad (9)$$

#### 8.1. Objetivos

- Construir un clasificador  $C(X)$ .
- Medir la incertidumbre en la clase.
- Entender los roles de los predictores.

#### 8.2. El clasificador óptimo

Supongamos que hay  $K$  clases en  $\mathcal{C}$  las cuales están numeradas. Sea

$$p_k(x) = \mathbb{P}(Y = k | X = x) \quad k = 1, \dots, K. \quad (10)$$

El clasificador óptimo Bayesiano es

$$C(x) = j \text{ si } p_j(x) = \max\{p_1(x), \dots, p_K(x)\}. \quad (11)$$

Prueba de optimalidad. Es el clasificador con menor error en la población. Se puede utilizar un modelo de **vecinos mas cercanos**.

#### REFERENCIAS

- [1] H. Fourati, R. Maaloul, and L. Chaari. A survey of 5G network systems: Challenges and machine learning approaches. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 12(2):385–431, feb 2021. ISSN 1868-808X. . 5
- [2] G. James, D. Witten, T. Hastie, and R. Tibshirani. *An Introduction to Statistical Learning: With Applications in R*. Springer Texts in Statistics. Springer US, New York, NY, 2021. ISBN 978-1-07-161417-4 978-1-07-161418-1. . 1