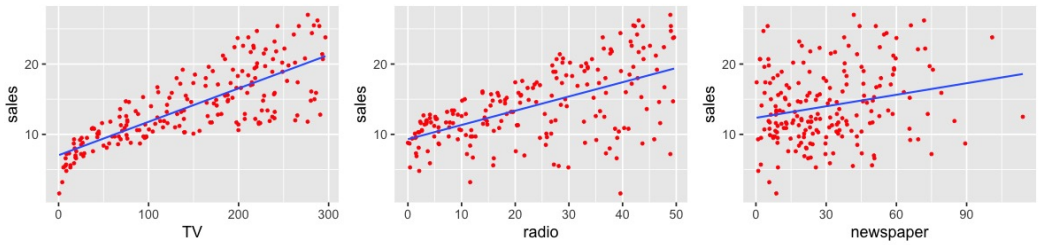
Aprendizaje Estadístico

Objetivo. Establecer las ideas básicas de aprendizaje estadistico. Ciertos criterios de optimalidad y descomposición del error. Discutiremos complejidad y compromiso entre sesgo y varianza.

1. ¿QUÉ ES EL APRENDIZAJE ESTADÍSTICO?



Supongamos que tenemos datos de ventas de ciertas campañas de *marketing* en ciertos canales de distribución. Queremos estimar la relación

$$\texttt{Ventas} \approx f(\texttt{tv, radio, periodico}). \tag{1}$$

Lo podemos expresar como

$$Y = f(X) + \varepsilon\,. \tag{2}$$

1.1. ¿Por qué estimar f?

- Podemos hacer predicciones.
- Podemos entender qué componentes de $X = (X_1, \ldots, X_p)$ son importantes.
- Podemos tratar de entender la complejidad de f.

1.2. ¿Hay una f que sea óptima?

Podríamos utilizar

$$f(x) = \mathbb{E}[Y|x = 4]\,, \tag{3}$$

que recibe el nombre `función de regresión`.

2. PROPIEDADES

La función de regresión (f) es `óptima` en términos del error cuadratico medio:

$$\mathbb{E}\left[(Y - g(x))^2|X = x\right]\,, \tag{4}$$

para `cualquier función` g evaluada en `cualquier punto` x.
El término $\varepsilon = Y - f(x)$ es el error `irreducible`,

Definir la función de pérdida. Usar probabilidad condicional. Y evaluar sólo $\mathbb{E}_{Y|X}$ en lugar de $\mathbb{E}_X\mathbb{E}_{Y|X}$.

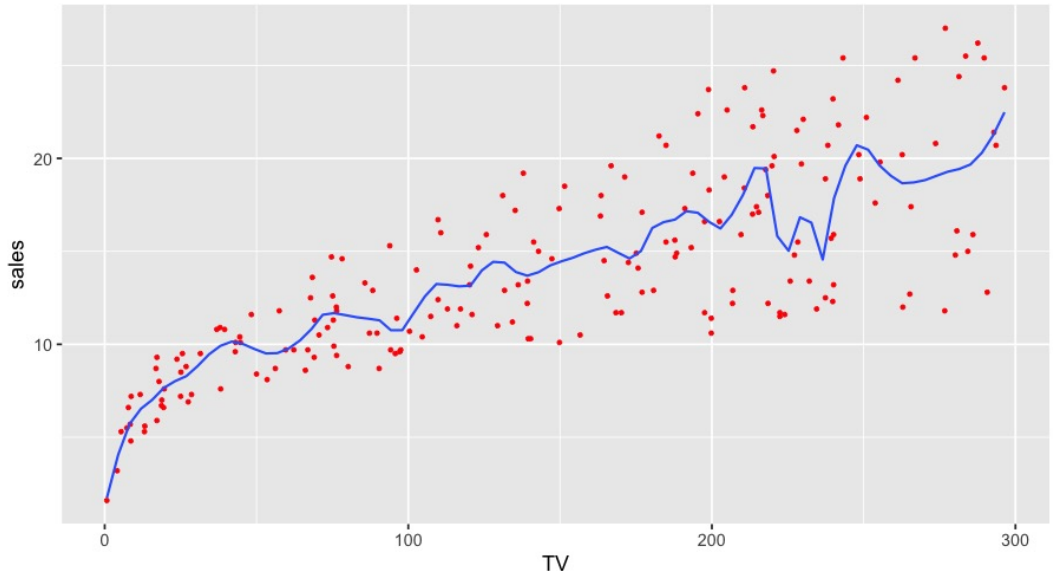


FIGURA 1. *Ajuste por medio de promedios locales.*

2.1. Descomposción del error

Para cualquier estimador $\hat{f}(x)$ de $f(x)$ tenemos

$$\mathbb{E}[(Y - \hat{f}(x))^2 | X = x] = \underbrace{[f(x) - \hat{f}(x)]^2}_{\text{reducible}} + \underbrace{\mathbb{V}(\varepsilon)}_{\text{irreducible}} . \tag{5}$$

3. IMPORTANTE

Hasta ahora sólo hemos hablado de un procedimiento `predictivo`.
No hemos hablado de un procedimiento de `inferencia estadistica`. Por ejemplo,

- Qué predictores están asociados con la respuesta?
- Qué tipo de relación tiene cada predictor con la respuesta?
- Se puede resumir la relación de manera lineal?

4. ¿CÓMO ESTIMAMOS F?

- Tenemos datos observados para la x que nos interesa?
- Podemos calcular $\mathbb{E}[Y|X = x]$?
- Qué tal que relajamos:

$$\hat{f}(x) = \mathsf{Promedio}(Y|X \in \mathcal{N}(x)) . \tag{6}$$

4.1. Vecinos cercanos

Ejemplo de un modelo `no paramétrico`. Este modelo es bueno cuando p es pequeño y n es grande. Puede sobre-ajustar rápidamente.

4.2. Maldición de la dimensionalidad

Los vecinos... no son tan cercanos en dimensiones moderadas/altas.

5. MODELOS PARAMÉTRICOS

El modelo `lineal` es un modelo paramétrico de la forma

$$f_L(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p \,. \tag{7}$$

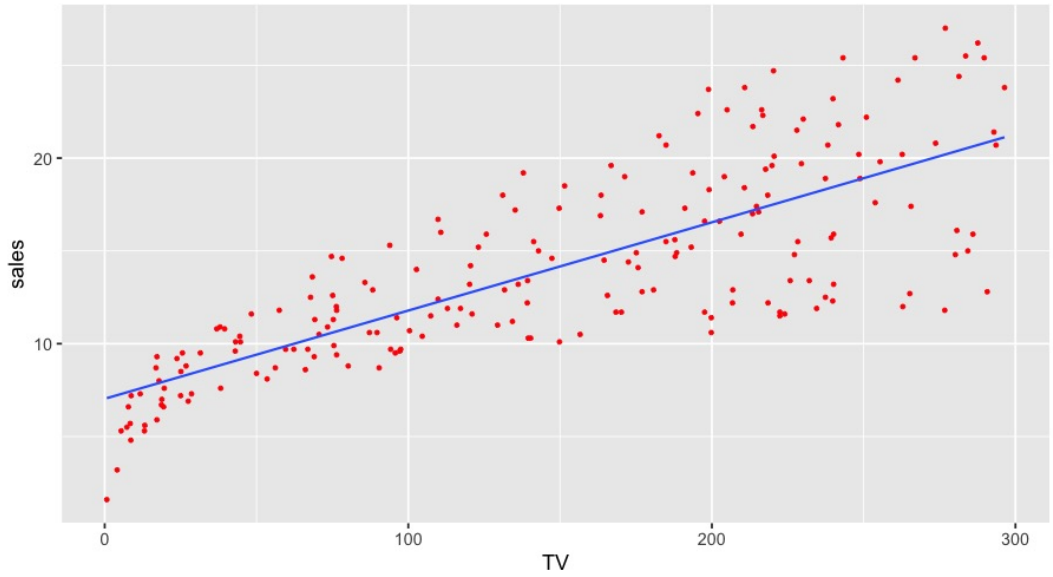


FIGURA 2. *Ajuste lineal.*

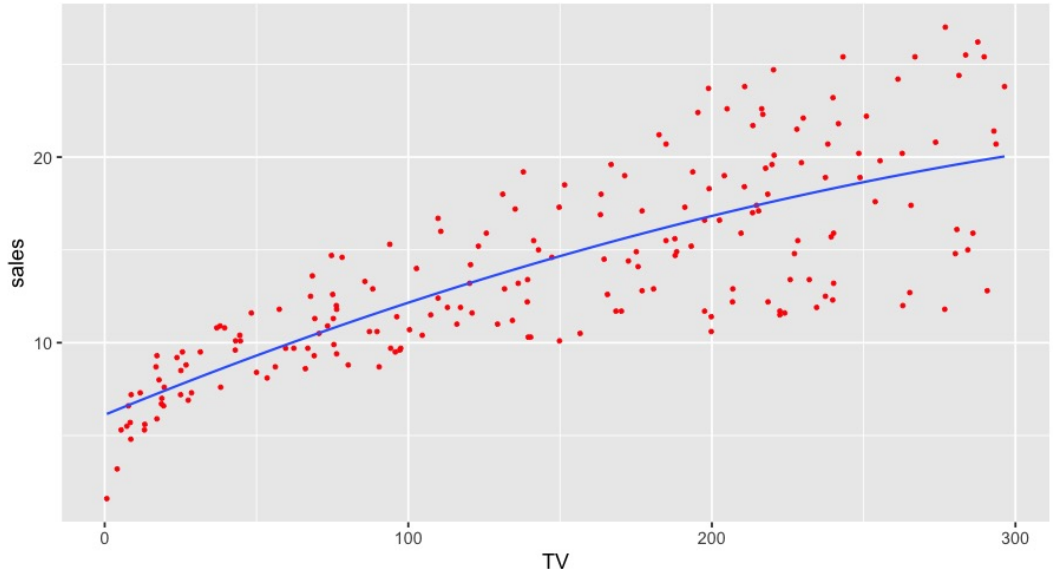


FIGURA 3. *Ajuste cuadratico.*

5.1. Compromisos

- El modelo lineal es "fácil"de interpretar. Sin embargo, puede no tener un buen desempeño.

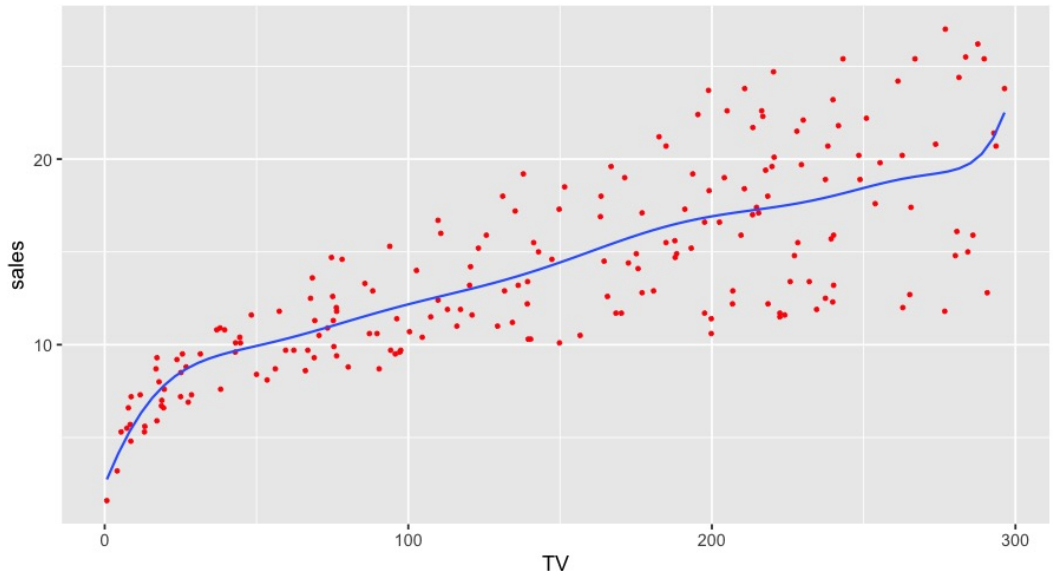


FIGURA 4. *Ajuste polinomial.*

- Hay un balance entre un *buen* ajuste y sobre(sub)-ajuste.
- Complejidad vs Simplicidad

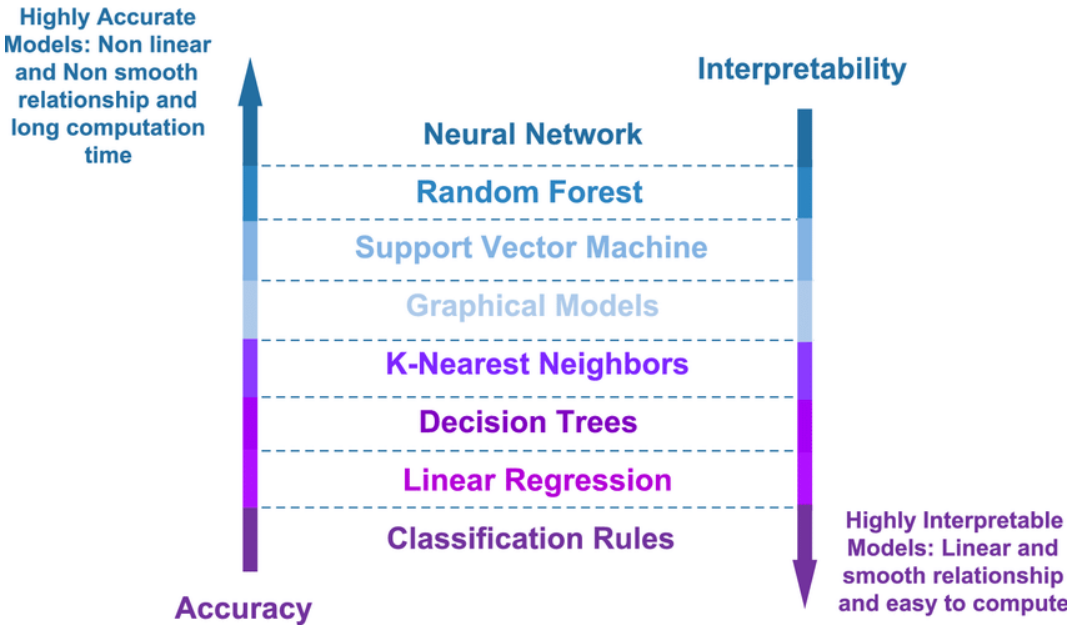


FIGURA 5. *Tomado de [1]*

Dificultad de interpretación cuando hay datos observacionales.

6. EVALUANDO LA PRECISIÓN DEL MODELO

Supongamos que entrenamos un modelo $\hat{f}(x)$ sobre $\mathcal{D}_n$. ¿Cómo evaluamos su desempeño bajo el conjunto que se utilizó para entrenar?

Función de pérdida / Error de entrenamiento / Error de prueba.

6.1. Ejemplo (Regresión)

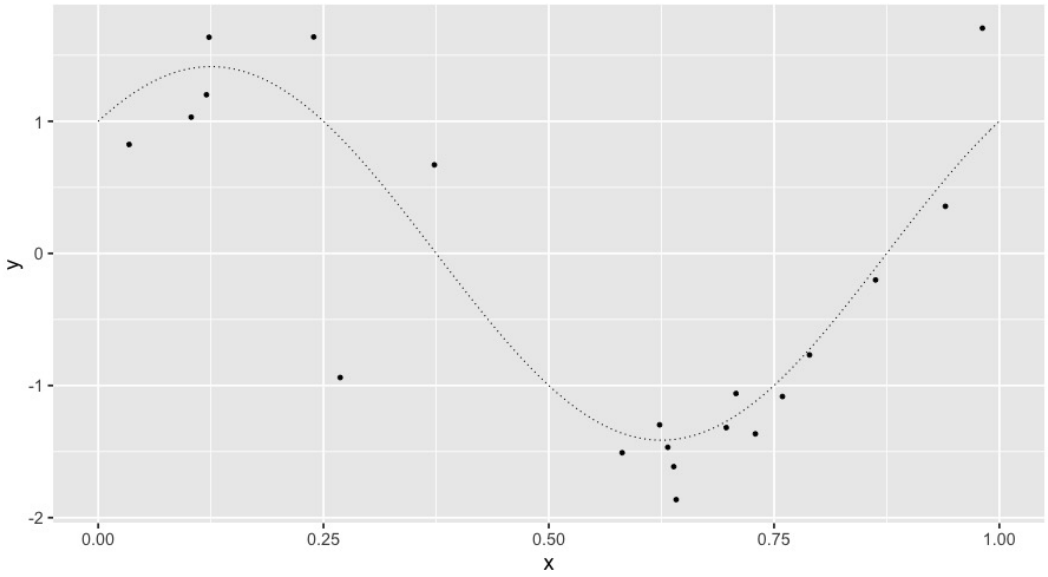


FIGURA 6. *Función latente y observaciones.*

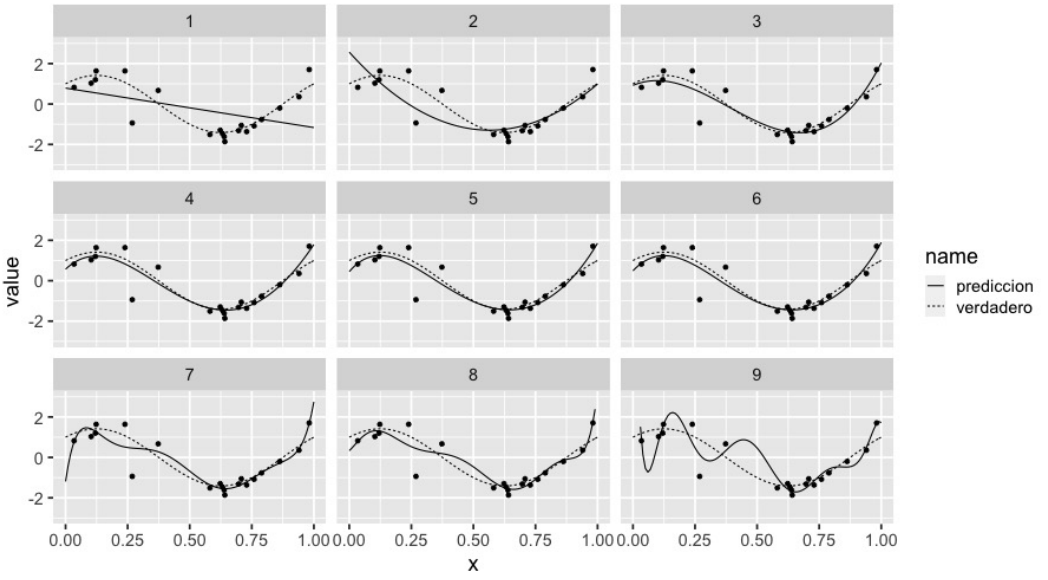


FIGURA 7. *Ajuste bajo distintos grados del polinomio*

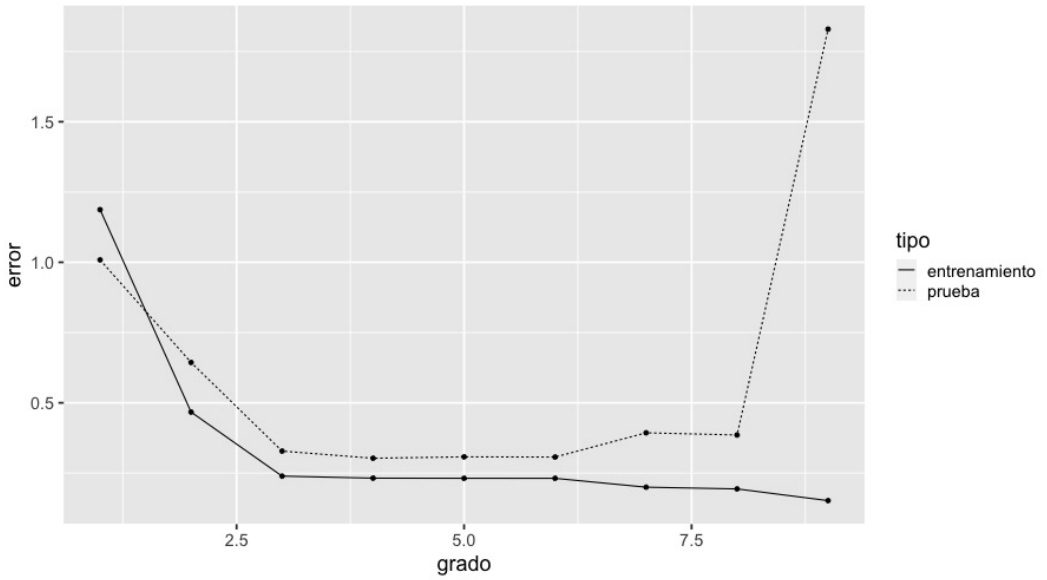


FIGURA 8. *Errores de entrenamiento / prueba*

7. COMPROMISO ENTRE SESGO Y VARIANZA

Supongamos que ajustamos un modelo $\hat{f}(x)$ a un conjunto de datos $\mathcal{D}_n$. Sea (x_0, y_0) un punto no utilizado en el conjunto de entrenamiento. Si el modelo es $Y = f(X) + \varepsilon$. Entonces

$$\mathbb{E}[(y_0 - \hat{f}(x_0))^2] = \mathbb{V}(\hat{f}(x_0)) + [\mathsf{Sesgo}(\hat{f}(x_0))]^2 + \mathbb{V}(\varepsilon)\,. \tag{8}$$

Valor esperado. Definición de Sesgo. Figura descomposición.

8. PROBLEMAS DE CLASIFICACIÓN

La predicción es sobre una y_n que es cualitativa. Nos interesa el `error de clasificación`.

Definir función de pérdida. Es decir nos interesa

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(y_i \neq \hat{y}_i)\,. \tag{9}$$

8.1. Objetivos

- Construir un clasificador $C(X)$.
- Medir la incertidumbre en la clase.
- Entender los roles de los predictores.

8.2. El clasificador óptimo

Supongamos que hay K clases en $\mathcal{C}$ las cuales están numeradas. Sea

$$p_k(x) = \mathbb{P}(Y = k|X = x) \qquad k = 1, \ldots, K\,. \tag{10}$$

El `clasificador óptimo Bayesiano` es

$$C(x) = j \text{ si } p_j(x) = \text{máx}\{p_1(x), \ldots, p_K(x)\}\,. \tag{11}$$

Prueba de optimalidad. Es el clasificador con menor error en la población. Se puede utilizar un modelo de `vecinos mas cercanos`.

REFERENCIAS

[1] H. Fourati, R. Maaloul, and L. Chaari. A survey of 5G network systems: Challenges and machine learning approaches. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 12(2):385–431, feb 2021. ISSN 1868-808X. . 4