



## MATURITNÍ PRÁCE

Geometrická posloupnost a posloupnosti z ní odvozené

**David Kolář**

vedoucí práce: Mgr. Michaela Petrová

# Prohlášení

Prohlašuji, že tato maturitní práce je mým původním autorským dílem, které jsem vypracoval samostatně. Všechny zdroje, prameny a literaturu, které jsem při vypracování používal nebo z nich čerpal, v práci řádně cituji s uvedením úplného odkazu na příslušný zdroj.

V Českých Budějovicích dne ..... podpis .....

David Kolář

# Abstrakt

## Klíčová slova

# Poděkování

Rád bych vyjádřil hlubokou vděčnost vedoucí mojí práce, paní Michaela Petrové, za její neocenitelné vedení, mnoho užitečných rad a hlavně za její trpělivost. Dále bych rád poděkoval svému dobrému příteli Lukáši Knotovi, velkému zdroji inspirace, za poskytnutí nového pohledu na mou práci, konstruktivní kritiku a zpětnou vazbu.

# Obsah

<b>I</b>	<b>Teoretická část</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Zavedení pojmu posloupnost</b>	<b>3</b>
1.1	Definice a vysvětlení pojmu funkce . . . . .	3
1.1.1	Formální definice . . . . .	3
1.1.2	Definiční obor . . . . .	3
1.1.3	Obor hodnot . . . . .	3
1.1.4	Zadání funkce . . . . .	4
1.2	Vysvětlení pojmu posloupnost . . . . .	5
1.3	Značení . . . . .	5
1.3.1	Značení nekonečné posloupnosti . . . . .	5
1.3.2	Značení konečné posloupnosti . . . . .	5
1.4	Zadání posloupnosti . . . . .	5
<b>II</b>	<b>Praktická část</b>	<b>7</b>
1.5	Generátor vzorců v Pythonu . . . . .	8
1.6	Výpisy použitých programů . . . . .	8
	<b>Bibliografie</b>	<b>10</b>
	<b>Přílohy</b>	<b>13</b>
A	Fotky z pokusů	14
B	Příloha další	15

# Úvod

Vždy mě fascinovaly matematické posloupnosti a jejich součty, a proto jsem se rozhodl na toto téma zpracovat svou maturitní práci. V matematice a informatice se při určování časové a prostorové složitosti algoritmu často spoléháme na vyhodnocení právě součtu členů posloupností. Proto může být nalezení uzavřeného tvaru, neboli součtového vzorce posloupnosti, nesmírně užitečné.

Moje maturitní práce je rozdělena na dvě části: teoretickou část a praktickou část. V teoretické části začnu definicí toho, co je to matematická posloupnost a pojednám o jejích různých typech a vlastnostech. Poté se budu věnovat specifickým vlastnostem geometrické a aritmetické posloupnosti, včetně jejich součtových vzorců, a ukážu uplatnění geometrické posloupnosti při určování časové a prostorové složitosti. Dále představím pojem aritmeticko-geometrické posloupnosti a vysvětlím, čím se liší od ostatních typů posloupností. Nakonec ukážu svou vlastní posloupnost, kterou jsem objevil při studiu.

V praktické části své práce uvedu důkaz součtu geometrické, aritmeticko-geometrické a mojí posloupnosti.

Celkově si má maturitní práce klade za cíl poskytnout základní přehled týkající se matematických posloupností, konkrétně geometrické, aritmeticko-geometrické a mojí posloupnosti a představit mé poznatky a myšlenky na toto téma.

# Část I

## Teoretická část

# 1 Zavedení pojmu posloupnost

## 1.1 Definice a vysvětlení pojmu funkce

Pro zavedení pojmu posloupnost je nutné nejprve zavést a vysvětlit obecnější pojem funkce. V matematice označuje pojem funkce vztah mezi množinou vstupů a množinou výstupů s vlastností, že každému vstupu je přiřazen právě s jeden výstup. Vstup funkce se nazývá argument a výstup se nazývá hodnota funkce.

Funkce jsou důležitým nástrojem v matematice a používají se v mnoha různých oblastech, včetně fyziky, inženýrství, ekonomie a dalších. Lze je analyzovat pomocí různých matematických technik jako je infinitezimální počet a algebra. Nejprve zavedeme základní pojmy týkající se funkcí.

### 1.1.1 Formální definice

Definice 1 [funkce]: Funkce na množině  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$  je předpis, který každému číslu z množiny  $\mathbb{D}$  přiřazuje právě jedno reálné číslo.

### 1.1.2 Definiční obor

Pokud máme funkci  $f$ , pak množině  $D$ , na které je funkce  $f$  definována, se říká *definiční obor* funkce  $f$  a značí se  $D(f)$ .

### 1.1.3 Obor hodnot

Obor hodnot je množina všech reálných čísel  $y$ , která lze dostat jako výstupní hodnotu funkce  $f$ , jestliže se za  $x$  dosadí všechny přípustné hodnoty z  $D(f)$ . Obor hodnot funkce  $f$  se značí  $H(f)$ .



### 1.1.4 Zadání funkce

Funkci lze zadat několika způsoby, ty nejvýznamnější si ukážeme na funkci  $\sin(x)$ .

#### Předpisem

- $f : y = \sin(x)$
- $y = \sin(x)$
- $x \rightarrow \sin(x)$

Toto vše jsou validní notace předpisu funkce. Při používání předpisu je nezbytné určit definiční obor.

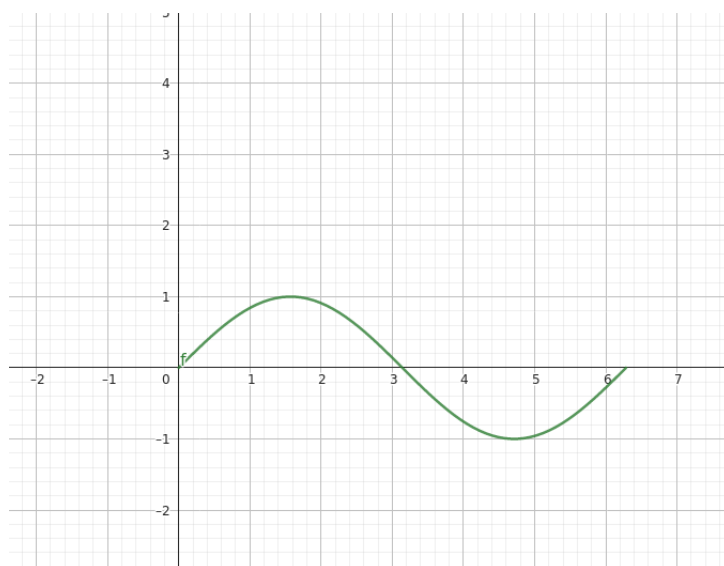
#### Tabulkou

První řádek představuje vstup funkce  $x$  a druhý řádek výstup funkce  $\sin(x)$ .

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

#### Grafem

Graf funkce  $\sin(x)$  s oborem definice  $D(f) = \langle 0, 2\pi \rangle$ . Pro vizualizaci jsem použil program Geogebra.



## 1.2 Vysvětlení pojmu posloupnost

Posloupnost je funkce definovaná na množině přirozených čísel, což jsou celá kladná čísla (1, 2, 3 atd.). Stejně jako u funkce tedy platí, že se jedná o vztah mezi množinou vstupů a množinou možných výstupů s vlastností, že ke každému vstupu je přiřazený právě jeden výstup. Definiční obor posloupnosti může být buď konečná množina, pak se posloupnost nazývá *konečná*, nebo *nekonečná* množina, pak se posloupnost nazývá *nekonečná*.

## 1.3 Značení

Prvky z definičního oboru posloupnosti  $(a_n)$  budu označovat  $n$  a funkční hodnoty posloupnosti  $(a_n)$  označovat  $a_n$ . Platí tedy, že  $n$ -tému prvku je přiřazena hodnota  $a_n$ .

### 1.3.1 Značení nekonečné posloupnosti

Nekonečné posloupnosti budu značit  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

### 1.3.2 Značení konečné posloupnosti

Konečné posloupnosti budu značit jako  $(a_n)_{n=1}^k$  kde přirozené číslo  $k$  označuje maximální velikost  $n$ . Definiční obor posloupnosti  $(a_n)$  tedy zahrnuje všechna přirozená čísla od 1 do  $k$ .

Zápisem ve tvaru  $n \in \{1, \dots, k\}$  vyjadřuji, že  $n$  nabývá hodnotu všech přirozených čísel od 1 do  $k$ .

## 1.4 Zadání posloupnosti

Posloupnost lze zadat různými způsoby v závislosti na povaze posloupnosti, potřebách dané situace a preferencích osoby, která je používá.

Jedním ze způsobů vyjádření posloupnosti je rekurentní vzorec, který definuje každý člen posloupnosti pomocí jeho předchozích členů.

Dalším způsobem vyjádření posloupnosti je pomocí vzorce, který definuje  $n$ -tý člen posloupnosti an pomocí proměnné  $n$ . Tento způsob může být užitečný třeba pro posloupnosti, které mají jednoduchý vzorec a lze je snadno definovat. To platí například pro aritmetickou nebo geometrickou posloupnost. Posloupnost lze také vyjádřit výčtem hodnot a to buď

graficky, nebo pomocí tabulky.

## Část II

### Praktická část

## 1.5 Generátor vzorců v Pythonu

Na závěr implementuji algoritmus, který jsem dokázal v předchozí kapitole.

## 1.6 Výpisy použitých programů

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Výpis programu generator.py naleznete ve výpise 1.1.

```
1 import sympy
2 from math import comb
3
4 def hrubou_silou(vzorec, q, exp):
5     vzorec = vzorec.replace("q", str(q))
6     soucet = 0
7     for i in range(exp+1):
8         soucet += eval(vzorec.replace("x", str(i)))
9     return soucet
10
11 def spocitej_mocniny(stupen):
12     nulty_clen = "(q**(x+1) - 1)/(q - 1)"
13     stupne = [sympy.simplify(nulty_clen)]
14     for exp in range(1, stupen+1):
15         novy_clen = sympy.simplify("0")
16         for k in range(exp):
17             novy_clen += sympy.simplify(comb(exp, k)*stupne[k])
18         novy_clen = sympy.simplify(f"((x+1)**{exp}*q**(x+1)) - sympy.simplify('q')*novy_clen")
19         novy_clen /= sympy.simplify("q - 1")
20         stupne.append(sympy.simplify(novy_clen))
```

```

21     return stupne
22
23
24 def vyres(clen):
25     clen = sympy.simplify(clen)
26
27     q = 12
28     x = 4
29     s = 3
30     vzorec = str(spcitej_mocniny(s)[s])
31     print(vzorec)
32     print(eval(vzorec.replace("q", str(q)).replace("x", str(x))))
33     print(hrubou_silou(f"x**{s}*q**x", q, x))

```

Zdrojový kód 1.1: generator.py

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

```

11.0524
5.5954
6.7996
13.8584
15.1357
Soucet: 52.4415

```

Příklad výstupního souboru

## Závěr

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## Seznam obrázků



## Seznam tabulek

# Přílohy

## A Fotky z pokusů

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## B Příloha další