Probas-Stats Série 02

Ex 1

(a) Soit Ω la classe, $|\Omega| = 67$, $|F| = 47$ (FR), $|D| = 35$ (DE)

$|F \cap D| = 23$

$|\Omega \setminus (F \cup D)| = ?$

$$|\Omega \setminus (F \cup D)| = |\Omega| - |F \cup D| = |\Omega| - (|F| + |D| - (|F \cap D|)$$

$$= 67 - (47 + 35 - 23)$$

$$= 8$$

(b) $|\Omega| = 67$, $|F| = 47$, $|D| = 35$, $|R| = 20$, $|F \cap D| = 23$

$|R \cap F| = 12$, $|R \cap D| = 11$, $|R \cap D \cap F| = 5$

$|\Omega \setminus (R \cup F \cup D)|$ Soit $\{A_i\}_{i \leq 3} = \{F, D, R\}$ (dans cet ordre)

On a $|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{3} A_i| = |\Omega| \setminus |\bigcup_i A_i|$

$$|\bigcup_i A_i| = \underset{F}{|A_1|} + \underset{D}{|A_2|} + \underset{R}{|A_3|} - (\underset{F\ D}{|A_1 \cap A_2|} + \underset{D\ R}{|A_2 \cap A_3|} + (|A_1 \cap A_3|)) + (\underset{F\ D\ R}{|A_1 \cap A_2 \cap A_3|})$$

$$= 47 + 35 + 20 - (23 + 11 + 12) + (5)$$

$$= 61$$

Donc on obtient $67 - 61 = \boxed{6}$

Ex 2

likelihood Prior

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\ P(A)}{P(B)}$$

Evidence/marginalization

$A :=$ " loin mais pas trop "
$B :=$ " Proche "
$C :=$ " très loin "
$R :=$ " Retrouver le terroriste "

$P(A) = 1/4$
$P(B) = 1/2$
$P(C) = 1/4$

$P(R|B) = 0.9$, $P(R|C) = 0.5$, $P(R|A) = 1$

$P(A \cap R) = ?$ $P(B \cap R) = ?$ $P(R^c) = ?$

On sait que $\forall A, B$ $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B)$

$P(A \cap R) = P(R|A) \cdot P(A) = 1 \cdot 1/4 = \boxed{1/4}$

$P(B \cap R) = P(R|B) \cdot P(B) = 0.9 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{0.45}$

$$P(R^c) = 1 - P(R) = 1 - \sum_n P(R \cap A_n)$$

$$= 1 - \left(P(R \cap A) + P(R \cap B) + P(R|C) \cdot P(C)\right)$$

Donc $P(R^c) = 1 - \left(\frac{1}{4} + 0.45 + 0.5 \cdot \frac{1}{4}\right)$

$= \boxed{0.175}$

Ex 3

On cherche $\max(\{n : P(E_n) \leq p\})$.

$P(E_1) := \nu$ (déf de ν i.e. deathrate)

On a : $\nu = 0.03$

(a) $p = 0.5$

On sait que $P(E_n) \leq n \cdot P(E_1) = n \cdot \nu$

or $n\nu \leq p \Leftrightarrow n \leq \frac{p}{\nu} = \frac{0.5}{0.03} = \frac{50}{3} \simeq 16.67$

On a donc que n est au moins 17

$P(E_n) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} S_i)$ où $S_i :=$ "la i-ème personne survit"

(NB: $P(S_i) = 1 - \nu$)

$= 1 - (1-\nu)^n$ (les S_i sont mutuellements indépendants)

$$1-(1-\nu)^n \leq p \Leftrightarrow (1-\nu)^n \leq 1-p$$

$$\Leftrightarrow n \log(1-\nu) \leq \log(1-p)$$

$$\Leftrightarrow n \leq \frac{\log(1-p)}{\log(1-\nu)}$$

On obtient donc $\max(\{n : P(E_n) \leq p\}) = \left\lfloor \frac{\log(1-p)}{\log(1-\nu)} \right\rfloor$