UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Probabilités et statistiques pour informaticiens

Série 3

1. (Application de la formule de Bayes.) Pour $i = 1, 2$, on considère une urne U_i qui contient b_i boules blanches et n_i boules noires. On choisit au hasard de manière équiprobable une des deux urnes. Dans l'urne choisie, on tire au hasard de manière équiprobable une boule. Sachant que la boule tirée est noire, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne numéro i ?

2. **Indépendance**
   (a) Soit (Ω, P) un espace de probabilités dénombrable. Soient $A, B \subset \Omega$. Supposons que A et B sont indépendants. Prouver qu'alors A et $\Omega \setminus B$ sont indépendants. Prouver que $\Omega \setminus A$ et $\Omega \setminus B$ sont indépendants.
   (b) Un sondage a montré qu'une personne, prise au hasard, a une probabilité de $1/8$ de posséder un ordinateur personnel et une probabilité de $1/25$ d'être chauve. Si ces deux éventualités sont indépendantes, combien environ doit-on s'attendre à trouver de chauves possesseurs d'un ordinateur personnel dans un échantillon de 800 personnes prises au hasard ?
   (c) On jette deux fois un dé équilibré. Prouver que la probabilité d'obtenir un total de 7 points ne dépend pas de la valeur obtenue au premier jeté.

3. **Combinatoire.**
   (a) Une assemblée de 9 personnes doit élire 3 personnes parmi les personnes de l'assemblée : un président, un trésorier, un secrétaire. Combien existe-t-il de possibilités ?
   (b) Une urne contient 6 boules numérotées. Combien de tirages ordonnées de deux boules existe-t-il ?
   (c) Une personne veut emprunter 3 livres pour ses vacances dans un e bibliothèque qui contient 1000 livres. Combien cette personnes a-t-elle de choix possibles ?

4. **Anniversaires simultanés**
   (a) Soit $k, n \in \mathbb{N}$. Soit $\Omega = \{1; 2; \ldots; n\}^k$. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Soit P la probabilité uniforme sur Ω (c'est-à-dire que P prend la même valeur sur tout singleton). Soit

$$A = \{(x_1; \ldots; x_k) \in \Omega : \forall 1 \leq i < j \leq k, x_i \neq x_j\}.$$

   Prouver que

$$P(A) = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k}.$$

(b) On suppose pour simplifier qu'une année contient 365 jours et que la probabilité de naître un certain jour ne dépend pas du jour de l'année. Quelle est la probabilité que 2 personnes au moins parmi k soient nées le même jour ?

(c) A partir de quel nombre de personnes cette probabilité est-elle plus grande que $0,5$?

5. **Coefficients binomiaux et multinomiaux**

(a) Combien de mots de longueur n sur l'alphabet $\{0;1\}$ contiennent-ils k zéros ? Faire la liste de ces mots dans le cas où $n = 5$ et $k = 2$.

(b) Combien de distributions de cartes existe-t-il pour un jeu de jass ? (Le jeu de jass contient 36 cartes, il y a 4 joueurs, chacun reçoit 9 cartes).

(c) Soit $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Soit $n = p + q$. Prouver que

$$\binom{n}{p, q} = \binom{n}{p} = \binom{n}{q}.$$

(d) Calculer le coefficient du monôme $x^6 y z^3$ dans le développement de $(x + y + z)^{10}$.