UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Probabilités et statistiques pour informaticiens

Série 4

1. (Combinatoire.) Soient $0 \leq k \leq n$ des entiers. Prouver que le nombres suivants sont égaux.
   (a) Le nombre de choix non-ordonnés avec répétions de k objets parmi n.
   (b) Le nombre de solutions entières positives ou nulles de l'équation
   $$x_1 + \cdots + x_n = k.$$
   (c) (Mots abéliens.) Le nombre de mots, sur un alphabet ordonné de n lettres, constitués de k lettres qui apparaissent dans un ordre croissant (on ne demande pas strictement croissant donc AA est accepté).
   (d) Le nombre d'arrangements de k boules indiscernables dans n urnes.
   (e) Le coefficient binomial
   $$\binom{n+k-1}{k}.$$
2. (Densité de probabilités.) Soit Ω un ensemble dénombrable. Soit $f : \Omega \to [0,1]$ telle que
   $$\sum_{x \in \Omega} f(x) = 1,$$
   On définit
   $$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$
   $$\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A} f(x).$$
   Vérifier que $(\Omega, P(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.
3. (Densité de Poisson.) Soit $\lambda \geq 0$. Soit $\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, posons
   $$f(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$
   Vérifier que f est une densité de probabilités.
4. (Loi de probabilité d'une variable aléatoire ou poussé avant d'une mesure de probabilités.) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{B})$ un ensemble muni d'une tribu. Soit
   $$X : \Omega \to E$$

une variable aléatoire. On définit la loi de X par les conditions :

$$\mathbb{P}_X : \mathcal{B} \to [0,1]$$

$$B \mapsto \mathbb{P}(X^{-1}(B)).$$

Prouver que $(E, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$ est un espace probabilisé.

5. Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli modélisant chacune le jet d'une pièce équilibrée (pile $= 0$, face $= 1$, avec même probabilité). On suppose que les jetés des deux pièces sont indépendants. Soit $Z = X + Y$ modulo 2. C'est-à-dire que $Z = 0$ si $X = Y = 0$ ou si $X = Y = 1$ et $Z = 1$ si les valeurs de X et Y sont distinctes. Montrer que les variables aléatoires X, Y, Z sont deux-à-deux indépendantes mais qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes.