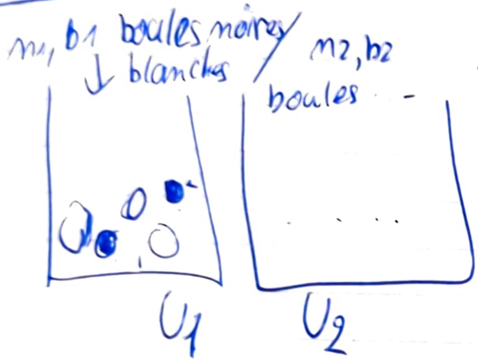
Probastats Série 03

Ex 1

$P(U_1) = P(U_2) = 1/2$



Soit X la v.a. VA associée à la couleur de la boule tiré. $X \in \{b, n\}$

On a que "$X = n$"

On cherche $P(U_i | X=n)$

$$P(U_i | X=n) = \frac{P(X=n | U_i) \cdot P(U_i)}{P(X=n)} = \frac{\frac{(n_i)}{n_i+b_i} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot P(X=n|U_1) + \frac{1}{2} \cdot P(X=n|U_2)}$$

Loi des probabilités totales, on a bien $\Omega = \bigsqcup_i U_i$ |

$$\hookrightarrow P(U_i | X=n) = \frac{\frac{(n_i)}{n_i+b_i}}{\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}} = \frac{n_i (n_1+b_1)(n_2+b_2)}{(n_i+b_i)(n_2(n_1+b_1)+n_1(n_2+b_2))}$$

Ex 2

(a) (Ω, P). $A, B \subset \Omega$

Soit $I(X,Y) :=$ "X et Y sont indépendants"

Prouver $I(A,B) \to I(A^c, B^c)$

En prenant la plus grande σ-algèbre $\mathcal{A} = 2^\Omega$
on a que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ respecte les axiomes de Kolmogorov. $(A, B \in \mathcal{A})$.

On a que $I(A,B)$ donc $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
et $P(A|B) = P(A)$ et $P(B|A) = P(B)$

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) \\
&= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \quad \text{(car } I(A,B)\text{)} \\
&= P(A)(-1 + P(B)) - P(B) + 1 \\
&= 1 - P(B) - P(A)(1 - P(B)) \\
&= P(B^c) - P(A) P(B^c) \\
&= P(B^c)(1 - P(A)) \\
&= P(B^c) \cdot P(A^c)
\end{aligned}
$$

Donc $I(A^c, B^c)$ (déf) ∎

(b) Soit $C :=$ "Chauve"

$O :=$ "ordinateur personnel"

Soit x_i une personne

$P(C(x_i)) = \frac{1}{8}$ $\quad$ $P(O(x_i)) = \frac{1}{25}$

et on suppose $P(C, O) = P(C)\, P(O)$

Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_{800}\}$ le set des 800 personnes

$P(C(x_1), O(x_1) \cup C(x_2), O(x_2) \cup \dots C(x_{800}), O(x_{800}))$

$= P\left(\bigcup_{i=1}^{800} (C(x_i), O(x_i))\right)$

$= \sum_{i=1}^{800} P(C(x_i), O(x_i)) = \sum_{i=1}^{800} P(C(x_i)) \cdot P(O(x_i))$

$= 800 \cdot P(C) \cdot P(O)$ $\quad$ {C, O ne dépendent pas de x_i }

$= \frac{800}{200} = \boxed{4}$

La proba "est de 4"

(C) Soit S la VA associé à la somme des 2 dés

i.e. $S := x_1 + x_2$ où $(x_1, x_2) \in \Omega = [\![1,6]\!]^2$

Prouver $P(S=7 | x_1) = P(S=7)$

(où $P(A|x_1)$ est la probabilité que A arrive en connaissant la valeur qu'a prise x_1) (i.e. $P(A | x_1 = k)$) $k \in [\![1,6]\!]$

$$P(S=7 | x_1) = \frac{P(x_1 | S=7) \cdot P(S=7)}{P(x_1)}$$

Où on sait que $P(x_1) = \frac{1}{6}$

Calculons $P(S=7)$:

$x_1 + x_2 = 7 \quad x_1, x_2 \in [\![1,6]\!] \Leftrightarrow (x_1 - 1) + (x_2 - 1) = 5 \quad x_1, x_2 \in [\![0,5]\!]$

Ce problème revient à celui de choisir n éléments identique dans k boites distinctes.

Ici $n = 5$ $k = 2$, on a donc $\binom{n+k-1}{n} = \binom{6}{5} = 6$

On a donc que $P(S=7) = \binom{6}{5} / 36 = 6/36 = \frac{1}{6}$

On retrouve donc $P(S=7 | x_1) = \frac{P(x_1 | S=7) \cdot 1/6}{1/6} = P(x_1 | S=7)$

$P(S=7 | x_1) = \frac{P(S=7 \cap x_1)}{P(x_1)} = P(x_1 | S=7) = \frac{P(x_1 \cap S=7)}{P(S=7)}$

$P(S=7 \cap X_1) \Rightarrow$

$X_1 + X_2 = 7 \wedge X_1 = k$

donc $\underline{X_2 = 7-k}$ seule solution

Donc on en conclus que $P(S=7 \cap X_1) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(S=7) \cdot P(X_1)$

Et $P(S=7 | X_1) = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} = P(S=7)$

Donc les 2 sont indépendants.

Exo 3

(a) On ordonne 3 personnes parmi 9 sans répétition

$\hookrightarrow \quad \dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{9!}{6!} = \underline{504}$

(b) On ordonne 2 éléments parmi 6 sans répétition :

$\hookrightarrow \quad \dfrac{6!}{4!} = \underline{30}$

(C) On effectue une combinaison de 3 livres parmis 1000 (sans répétitions) :

$\hookrightarrow \quad \binom{1000}{3} = \dfrac{1000!}{997!\,3!} = 166\,167\,000$

Exo 4

b) La proba que 2 personnes au moins aient leur anniversaire en même temps est équivalent au complément de "tout le monde en a 1 différent".

i.e. Soit A l'évenement dans l'énoncé.

$$P(A) = 1 - P(A^C)$$

S'il n'y a aucune "colisions" sur les anniversaires on a le cas suivant :

À 1 personne la proba d'avoir aucune collision est $\frac{365}{365}$

À 2 : $\frac{365 \cdot 364}{365^2}$, À 3 : $\frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3}$

(chaque personne "occupe" une nouvelle date)

↳ À k : $\frac{1}{365^k} \cdot \frac{365}{(365-k)!} = P(A^C)$

donc $P(A) = 1 - \frac{1}{365^k} \cdot \frac{365}{(365-k)!}$

(c) On cherche k t.q. $365^{-k} \frac{365}{(365-k)!} < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 365^{-k+1} < \frac{1}{2} (365-k)!$

$\Leftrightarrow \log(365)(1-k) < -\log(2) + \log((365-k)!)$

$$1-k < \frac{\log((365-k)!) - \log(2)}{\log(365)}$$

$$1 - \left(\frac{\log((365-k)!) - \log(2)}{\log(365)}\right) < k$$

(a) $k, n \in \mathbb{N}$, $\Omega = [\![1, n]\!]^k$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. $P \equiv$ uniforme(Ω)

$$A := \{(x_1, \dots, x_k) \in \Omega \mid x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_k\}$$

A est simplement l'ensemble des k-tuples où tous les éléments sont différents. C'est en fait l'ensemble des $\neq$ arrangements sans répétitions de taille k, d'éléments de $[\![1, n]\!]$

(ensemble des mapping injectifs de $[\![1, k]\!] \to (x_1, \dots x_k)$ $(x_i \in [\![1, n]\!])$)

On a donc que $|A| = \frac{n!}{(n-k)!}$, or comme P est uniforme, on obtient que $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = (n^{-k}) \cdot \frac{n!}{(n-k)!}$

Ex 5

(a) $n=5$, $k=2$, $\Omega = \{0,1\}^n$

00111 01011 01101 01110
10011 10101 10110
11001 11100 11010

} 10 ≠

Soit $E_k = \{ \omega \in \Omega \mid |\omega|_0 = k \}$

Construire un élément ω de E_k revient à choisir k éléments de ω.

Il y a donc $\binom{n}{k}$ manières de le faire, donc $|E_k| = \binom{n}{k}$

↳ $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 2}{2!} = 10$

↳ bien le résultat qu'on a trouvé.

(b) # mains de 9 cartes, 4 joueurs, (36 total)

On cherche le nombre de combinaison non ordonnées de 36 cartes en groupes de 4.

On a donc que $|E_k|$ vaut le coefficient multinomial

$$\binom{36}{9,9,9,9} = \frac{36!}{(9!)^4} \simeq 2.15 \cdot 10^{19} \text{ distributions}$$

(C) Soit $p, q \in \mathbb{N}$ i.e. $p, q \in [\![0, +\infty[\![$

et Soit $m = p+q$

prouver:

$$\binom{m}{p,q} = \binom{m}{p} = \binom{m}{q}$$

$\Rightarrow \binom{m}{p,q} = \frac{m!}{p!q!}$ ' $\wedge$ $\binom{m}{p} = \frac{m!}{(m-p)!\cdot p!} = \frac{(p+q)!}{q!\cdot p!}$

$\hookrightarrow \binom{m}{p,q} = \frac{(p+q)!}{p!q!} = \binom{m}{p} = \frac{(p+q)!}{(p+q-q)!\cdot q!}$

$\binom{m}{p} = \frac{(p+q)!}{p!\cdot q!} = \binom{m}{p,q} = \frac{(p+q)!}{(p+q-q)!\cdot q!} = \binom{m}{q}$ $\boxed{}$

(d) Coeff de $x^6 y z^3$ dans le dvlpmt de $(x+y+z)^{10}$

Soit $\lambda = y+z$, $(x+\lambda)^{10} = \sum_{i=0}^{10} x^i \cdot \lambda^{10-i} \cdot \binom{10}{i}$

Seule manière d'avoir $x^6 \Rightarrow \underline{i=6}$

$\hookrightarrow$ on developpe donc $x^6 \cdot \lambda^4 \binom{10}{6} = x^6 (y+z)^4 \cdot \binom{10}{6}$

$\Rightarrow (y+z)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} y^k z^{m-k}$

$k=1$, $m-k=3 \Rightarrow k=1$ et coeff est $\binom{4}{1} = 4$

On obtient donc coeff$(x^6 y z^3) = \binom{4}{1} \cdot \binom{10}{6} = 4 \cdot \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10!}{3!\cdot 6!}$

$= \frac{4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{2} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 4}{3} = 10 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 4 = 210 \cdot 4 = \underline{840}$