Université de Genève — Semestre de printemps 2022
Laboratoire de programmation

Test Matlab

Laboratoire de programmation mathématique

A lire avant de commencer.

Commencez par bien lire l'énoncé puis répondez aux questions en n'oubliant pas de commenter ce que vous faites. Bien que tout commenter puisse parfois paraitre inutile, pensez que votre correcteur aura beaucoup de copies à corriger et que tout ce qui peut l'aider dans sa lecture de votre copie jouera en votre faveur.

Rendez un script pour chaque exercice. Vous devez ainsi rendre six fichiers. Une fois votre travail terminé, téléchargez vos fichiers réponse dans l'onglet "rendu devoir Matlab" du moodle correspondant à votre spécialité. Une fois ceci fait, n'oubliez pas de cliquer sur le bouton permettant de rendre le devoir.

Le devoir est noté sur 25. La note sera ensuite ramené à une note sur 6 comptant pour moitié dans votre note finale. La seconde moitié viendra d'un devoir équivalent sous Maple.

En cas de probème technique, vous pouvez toujours me faire parvenir votre devoir par e-mail en dernier recours à l'adresse nicolas.orantin@unige.ch .

Vous avez jusqu'au dimanche 10 Avril au soir (minuit) pour rendre votre devoir.

Exercice 1 Construction de matrices (3 pts).
Remarque : Vous devez rendre un script intitulé `Exercice1.m` pour cet exercice.

Construisez les matrices suivantes. (Il existe toujours une méthode plus efficace que la construction élément par élément. Utilisez la méthode efficace.)

1. Construisez une matrices 20×20 dont tous les éléments de matrice valent 1, excepté ceux sur la diagonale, valant 0.
2. Construisez une matrice 5×10 dont les éléments de matrice valent 1 dans les colonnes impaires, et 2 dans les colonnes paires.
3. Construisez une matrice 7×7 avec des 1 au dessus de la diagonale et des zeros partout ailleurs.
   Indication : Etant donné deux vecteurs colonne `v` et `w`, `[v w]` est la matrices dont les colonnes sont données par `v` et `w`.

Exercice 2 Orthocentre d'un triangle (6 pts).
Remarque : Vous devez rendre un script intitulé `Exercice2.m` pour cet exercice. Toutes les fonctions demandées doivent être définies dans ce même fichier script.

Dans le plan, considérons les points A de coordonnées (x_1, y_1), B de coordonnées (x_2, y_2) et C de coordonnées (x_3, y_3).

1. Créez une fonction `projection(x,y)` prenant comme variables les vecteurs $x = [x_1, x_2, x_3]$ et $y = [y_1, y_2, y_3]$ et retournant les coordonnées (x_P, y_P) de la projection P du point A sur la droite (BC).
   Testez cette fonction avec les points $A = (1, 2)$, $B = (0, 0)$ et $C = (2, 0)$. Puis dessinez le triangle ABC correspondant ainsi que le segment AP.

2. En vous aidant de la question précédente, définissez une fonction `triangle(x,y)` prenant comme variables la position des points A, B et C et dessinant le triangle ABC correspondant ainsi que ses trois hauteurs. Le dessin obtenu doit faire apparaitre le nom des points A, B et C ainsi que noter O le point d'intersection des trois hauteurs. Testez cette fonction pour $A = (1, 2)$, $B = (0, 0)$ et $C = (2, 0)$.

   Indication : Utilisez la fonction `text` pour afficher le nom des points comme dans le TP 2.

3. Un point de coordonnées (X, Y) appartient a la hauteur issue de A dans le triangle ABC si et seulement si X et Y satisfont l'équation

$$(X - x_1)(x_2 - x_3) + (Y - y_1)(y_2 - y_3) = 0.$$

   En utilisant cette information, demandez à Matlab de trouver la position de l'orthocentre $O = (X, Y)$ du triangle ABC avec $A = (1, 2)$, $B = (0, 0)$ et $C = (2, 0)$. Vérifiez que ce point appartient bien aux trois hauteurs du triangle.

   Indication : Le fait que $O = (X, Y)$ soit l'orthocentre du trianngle ABC implique que X et Y sont solution d'un système de deux équations linéaires que l'on peut mettre sous la forme d'une équation matricielle de taille 2×2.

Exercice 3 Graphe de fonctions (3 pts).
Remarque : Vous devez rendre un script intitulé `Exercice3.m` pour cet exercice.

Tracez le graphe des fonctions suivantes (faire en sorte qu'il y ait la même échelle sur les deux axes) :

1. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2+1}$, $x \in [0, 2\pi]$;
2. $x \mapsto \sqrt{x^2}$, $x \in [-2, 2]$;
3. $x \mapsto \sqrt[n]{nx}$, $x \in [0, 1]$ et $n = 1, \ldots, 5$ (tous sur la même figure).

Exercice 4 Suite et récurrence (3 pts).
Remarque : Vous devez rendre un script intitulé `Exercice4.m` pour cet exercice.

Considérons la suite (x_i, y_i) définie par récurrence par les équations

$$\begin{cases} x_{n+1} = k(\cos(\theta)\, x_n - \sin(\theta)\, y_n) \\ y_{n+1} = k(\sin(\theta)\, x_n + \cos(\theta)\, y_n) \end{cases}$$

pour des paramètres k et θ donnés.

Construisez une fonction `spir(N,k,`θ, x_0, y_0`)` dessinant les points (x_i, y_i) pour i compris entre 0 et N définis par la suite ci-dessus avec donnée initiale (x_0, y_0) et paramètres k, θ. Testez cette fonction pour $N = 80$, $k = 0.95$, $\theta = \pi/10$ et $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Exercice 5 Croissance de champignons (4 pts).
Remarque : Vous devez rendre un script intitulé `Exercice5.m` pour cet exercice.

Nous allons étudier la croissance de champignons dans un environnement protégé. Pour cela, on mesure la densité de champignon $d(t)$ pour différentes valeurs du temps t. Le résultat de l'expérience est présenté dans le fichier `datachampi.dat` disponible sur le moodle. On s'attend à ce que cette densité suive une loi logistique en fonction du temps, c'est à dire qu'elle soit de la forme

$$d(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{d_0} - 1\right) e^{-rt}}$$

pour certaines valeurs des paramètres (d_0, K, r).

1. En utilisant la fonction `nlinfit` comme dans le TP 3, effectuez une regression pour trouver des valeurs optimales des paramètres (d_0, K, r). Pour cela, vous prendrez comme valeurs de reférence pour `nlinfit`, $d_0 = 1$, $K = 100$ et $r = 1.5$.
2. Représentez sur le même graphique le nuage de donnés fournies par `datachampi.dat` ainsi que la courbe de la fonction logistique $d(t)$ pour les paramètres trouvés dans la question précédente. Les donnés seront représentées par des ronds rouges et la fonction logistique par une courbe bleue.

Exercice 6 Simulation d'une loi Gaussienne (6 pts).
Remarque : Vous devez rendre un script intitulé `Exercice6.m` pour cet exercice.

Dans cet exercice, nous allons simuler une variable aléatoire suivant une loi Gaussienne à partir d'une simple loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour ce faire, nous allons utiliser le résutat suivant.

Si U_1 et U_2 sont deux variables alétoires indépendantes suivant chacune une loi uniforme sur $[0, 1]$, alors

$$X = \sqrt{-2\ln(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée.

1. En utilisant le résultat ci-dessus, construisez une fonction `normal(n)` prenant comme paramètre n et créant un vecteur colonne de taille n dont les entrées suivent une loi normal centrée.

   Indication : Votre fonction devra d'abord créer deux vecteurs dont les entrées suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$ puis les combiner en utilisant la formule ci-dessus.
2. Avec votre function créez un vecteur de taille $n = 2000$ puis construisez un histogramme `h` avec les valeurs obtenus.
3. A partir de l'histogramme obtenu, avec `nlinfit` comme dans le TP 3 exercice 3, effectuez une regression sur une famille de fonctions Gaussiennes

   $$f_{A,\mu,\sigma}(x) = A \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right).$$

   Quelles valeurs de A, μ et σ trouvez-vous ? Représentez sur un même graphique la Gaussienne obtenue et le nuage de points venant de l'histogramme.