Travaux pratiques 5 : Introduction à Maple

7. Exercices

```
restart; gc();
```

Exercice 1. Résolution d'une équation

Résolvez l'équation $4\,x^3 - 2\,x - 1 = 0$.

We solve the equation for x:

$solve(x^2 + 8 \cdot x + 8 = 0, x) = -4 + 2\sqrt{2}, -4 - 2\sqrt{2}$

On résout l'équation suivante directement:

$4 \cdot x^3 - 2 \cdot x - 1 = 0$

$$4\,x^3 - 2\,x - 1 = 0 \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve 4*x^3-2*x-1 = 0}}$

$$\left[\left[x = \frac{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}{6} + \frac{1}{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}\right], \left[x = -\frac{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}{12} - \frac{1}{2\,(27+3\sqrt{57})^{1/3}} + \frac{\mathrm{I}\sqrt{3}\left(\frac{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}{6} - \frac{1}{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}\right)}{2}\right], \left[x = -\frac{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}{12} - \frac{1}{2\,(27+3\sqrt{57})^{1/3}} - \frac{\mathrm{I}\sqrt{3}\left(\frac{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}{6} - \frac{1}{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}\right)}{2}\right]\right] \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

$\xrightarrow{\text{select entry 1}}$

$$\left[x = \frac{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}{6} + \frac{1}{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}\right] \qquad \textbf{(1.1.3)}$$

$x = \frac{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}{6} + \frac{1}{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}$
$x = -\frac{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}{12} - \frac{1}{2\,(27+3\sqrt{57})^{1/3}} + \frac{\mathrm{I}\sqrt{3}\left(\frac{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}{6} - \frac{1}{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}\right)}{2}$
$x = -\frac{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}{12} - \frac{1}{2\,(27+3\sqrt{57})^{1/3}} - \frac{\mathrm{I}\sqrt{3}\left(\frac{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}{6} - \frac{1}{(27+3\sqrt{57})^{1/3}}\right)}{2}$

```
> simplify( x = - (1/12)*(27 + 3 * sqrt(57))^(1/3) - (1/2)/(27 + 3 * sqrt(57))^(1/3) + ((1/2)* I)* sqrt(3)*((1/6)*(27 + 3 * sqrt(57))^(1/3) - 1/(27
    + 3 * sqrt(57))^(1/3)), 'size' )
```

$$x = \frac{\left(\mathrm{I}\,(27+3\sqrt{57})^{2/3} - 6\,\mathrm{I}\right)\sqrt{3} - (27+3\sqrt{57})^{2/3} - 6}{12\,(27+3\sqrt{57})^{1/3}} \qquad \textbf{(1.1.4)}$$

$x = -0.4423230885596578538 1 - 0.29487140251110275083\,\mathrm{I}$
$x = -0.44232308855965785381 + 0.29487140251110275083\,\mathrm{I}$
$x = 0.88464617711931570763$

Autre manière:

$4 \cdot x^3 - 2 \cdot x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{assign to a name}} eqn$

$eqn = 4\,x^3 - 2\,x - 1 = 0$

$fsolve(eqn, x) = 0.8846461771$

$fsolve(eqn, x, complex)$

$$-0.442323088559658 - 0.294871402511103\,I,\ -0.442323088559658 + 0.294871402511103\,I,\ 0.884646177119316 \quad \textbf{(1.1.5)}$$

$\{sol11, sol12, sol13\} := fsolve(eqn, x, complex) =$
$-0.442323088559658 - 0.294871402511103\,I,\ -0.442323088559658 + 0.294871402511103\,I,\ 0.884646177119316$

$fsolve(4\cdot x^3 - 2\cdot x - 1 = 0, x, complex) = -0.442323088559658 - 0.294871402511103\,I,\ -0.442323088559658 + 0.294871402511103\,I,\ 0.884646177119316$

Exercice 2. Dérivation

Soit $f(x, y, z) = \exp(2\cdot x^2 - 3\cdot y)\cdot\cos(3\cdot z)$
Calculez toutes les dérivées d'ordres 2 et vérifiez l'indépendances de l'ordre de dérivation pour les dérivées mixtes.

$f2 := (x, y, z) \to \exp(2\cdot x^2 - 3\cdot y)\cdot\cos(3\cdot z)$ $\quad (x, y, z) \to e^{2x^2 - 3y}\cos(3z)$

$\frac{d}{dx}(f2(x, y, z))$

$$4\,x\,e^{2x^2 - 3y}\cos(3z) \quad \textbf{(1.2.1)}$$

Vérification du Théorème de Schwarz (ordre 2):

1. Pour les dérivées selon x et y :

$\frac{d^2}{dxdy}(f2(x, y, z)) = -12\,x\,e^{2x^2 - 3y}\cos(3z)$
$\frac{d^2}{dydx}(f2(x, y, z)) = -12\,x\,e^{2x^2 - 3y}\cos(3z)$

$\left(\frac{d^2}{dxdy}(f2(x, y, z))\right) - \left(\frac{d^2}{dydx}(f2(x, y, z))\right) = 0$

2. Pour les dérives selon y et z:

$\frac{d^2}{dydz}(f2(x, y, z)) = 9\,e^{2x^2 - 3y}\sin(3z)$

$\frac{d^2}{dzdy}(f2(x, y, z)) = 9\,e^{2x^2 - 3y}\sin(3z)$

$\left(\frac{d^2}{dydz}(f2(x, y, z))\right) - \left(\frac{d^2}{dzdy}(f2(x, y, z))\right) = 0$

3. Pour les dérivées selon z et x:

$\frac{d^2}{dxdz}(f2(x, y, z)) = -12\,x\,e^{2x^2 - 3y}\sin(3z)$

$\frac{d^2}{dzdx}(f2(x, y, z)) = -12\,x\,e^{2x^2 - 3y}\sin(3z)$

$\left(\frac{d^2}{dxdz}(f2(x, y, z))\right) - \left(\frac{d^2}{dzdx}(f2(x, y, z))\right) = 0$

Exercice 3. Factorisation

On définit les polynômes ci-dessous, quel est leur plus grand divisieur commun ? (PGCD) Simplifiez le quotien $\frac{f}{g}$.

```
restart;
```

$f := x \to x^5 - 20\cdot x^3 + 64\cdot x$

$$f := x \mapsto x^5 - 20\cdot x^3 + 64\cdot x \quad \textbf{(1.3.1)}$$

$g := x \to x^4 + 10\cdot x^3 + 35\cdot x^2 + 50\cdot x + 24$

$$g := x \mapsto x^4 + 10\cdot x^3 + 35\cdot x^2 + 50\cdot x + 24 \quad \textbf{(1.3.2)}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{x^5 - 20x^3 + 64x}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24} \xrightarrow{\text{simplify symbolic}} \frac{(x^2 - 6x + 8)\,x}{x^2 + 4x + 3} \overset{\text{expand}}{=} \frac{x^3}{x^2 + 4x + 3} - \frac{6x^2}{x^2 + 4x + 3} + \frac{8x}{x^2 + 4x + 3}$$

$$h(x) := factor\left(\frac{f}{g}(x)\right) = x \rightarrow factor\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right)$$

$$h(x)$$

$$\frac{(x-2)\,(x-4)\,x}{(x+3)\,(x+1)} \qquad \textbf{(1.3.3)}$$

Le quotient $\frac{f}{g}$ a déjà été simplifié avec la demande de factorisation & appels à simplify ci-dessus.
Cependant, on peut quand même calculer le PGCD de f et g qui est de :

$$gcd(f(x), g(x)) = x^2 + 6x + 8$$