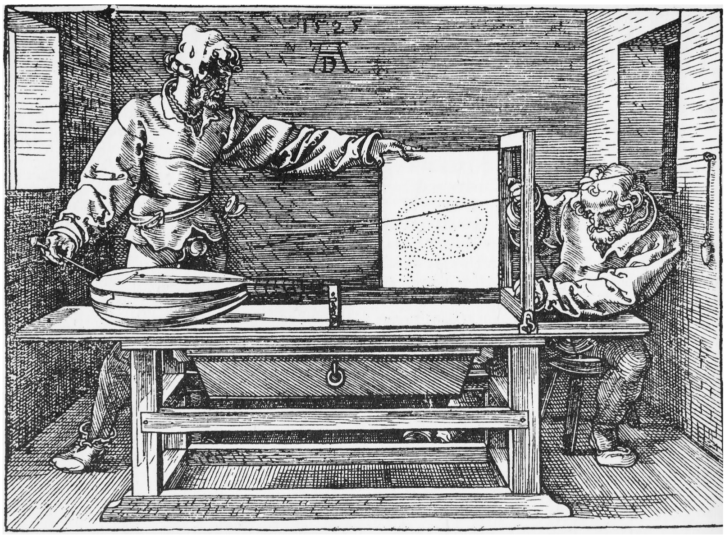
Université de Genève — Semestre de printemps 2022
Laboratoire de programmation

Travaux pratiques 2 : La perspective

Depuis les temps les plus reculés, l'homme a essayé de représenter son environnement, en particulier par la peinture. Il lui fallait donc représenter l'espace sur un plan. La technique permettant d'effectuer cela de manière réaliste s'appelle la *perspective.*



Dans le tableau de Dürer ci-dessus, on voit comment deux personnes essaient de représenter une mandoline sur un plan. Ils déterminent physiquement, à l'aide d'un fil fixé en un point du mur d'un côté et touchant un point de la mandoline de l'autre, le point d'intersection du plan avec le fil. Le point fixe représente l'oeil de l'observateur et le fil représente le rayon de lumière allant de l'objet à l'oeil. Le but de ce TP est de construire un modèle mathématique de cette expérience.

Mathématiquement, la perspective est une projection centrale de centre A sur un plan de projection π. Le point A représente l'oeil de l'observateur, le plan π le dessin. Un point P de l'espace doit apparaître sur le dessin en P', sa projection sur π de centre A (voir la Figure 1).

Les données sont les suivantes : les coordonnées du point A, et le plan π, déterminé par trois points P_1, P_2 et P_3.

Exercice 1 Base orthonormée adaptée à un plan.

1. Etant donnés trois points non alignés $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$, écrivez une fonction `BaseR3` retournant une base orthonormée $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{n}\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ soient parallèle au plan π engendré par P_1, P_2 et P_3, et que $\overrightarrow{n}$ soit un vecteur de norme 1 normal à π. Utilisez l'entête suivant :

```
function [u1,u2,n] = BaseR3(P1,P2,P3)
...
end
```

Sauvez la fonction dans un fichier `BaseR3.m` dans le répertoire courant. Vous pourrez utiliser cette fonction dans tout script comme si vous l'aviez définie dans le script.

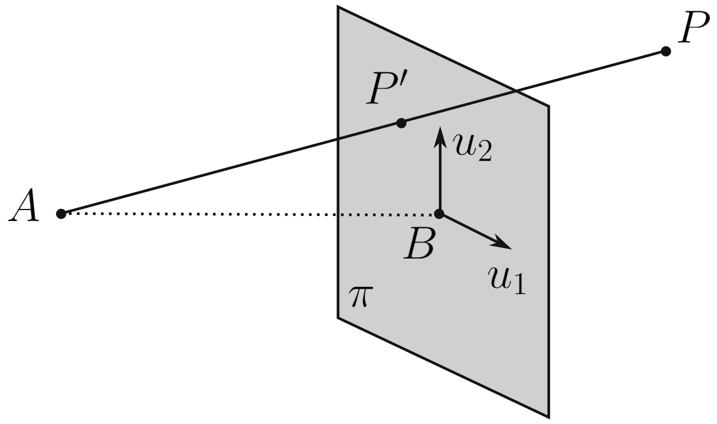


FIGURE 1 – Projection centrale de centre A de P sur le plan π. La projection de P est P'. B est la projection perpendiculaire de A sur π. u_1 et u_2 forment une base orthonormée des vecteurs parallèles à π.

Indication : Matlab a une fonction appelée `cross` retournant le produit vectoriel de deux vecteur tridimensionnels. Tapez `help cross` pour plus d'informations.

2. Dans un script, définissez $P_1 = (3, 4, -1)^\mathsf{T}$, $P_2 = (5, 3, -1)^\mathsf{T}$ et $P_3 = (5, 5, 1)^\mathsf{T}$. Évaluez votre fonction sur (P_1, P_2, P_3) et vérifiez que les vecteurs retournés sont orthogonaux et de norme 1.

Exercice 2 Projection perpendiculaire sur un plan.

1. Écrivez une fonction `ProjPointPlan` qui retourne le point B, étant donnés trois points P_1, P_2, P_3 de π et un point A hors de π. Sauvez la fonction dans un fichier `ProjPointPlan.m` dans le répertoire courant.

   Indication : Pour écrire la fonction `ProjPointPlan`, il sera utile d'utiliser la fonction `BaseR3` de l'exercice précédent.

2. Dans le script de l'exercice, définissez $A = (2, 0, 1)^\mathsf{T}$ ainsi que les points (P_1, P_2, P_3) de l'exercice précédent et vérifiez que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est perpendiculaire au plan π.

Exercice 3 Visualisation. Nous allons visualiser les constructions déjà effectuées au moyen d'un script utilisant la fonction `ProjPointPlan` et la fonction d'affichage 3D de Matlab.

Pour A, P_1, P_2, P_3 comme définis précédemment, écrivez un script qui affiche sur un même graphique les points A et B, ainsi que le plan π, en suivant les indications ci-dessous.

1. On commence avec le préambule

```
% On veut dessiner en 3d
view(3);
% Pour afficher plusieurs éléments sur le même plot.
hold on
% Met tous les axes à la même échelle.
axis equal
```

2. Pour dessiner les points A et B, on utilise la fonction `plot3`. Ses trois premiers arguments sont les coordonnées du point que l'on veut dessiner. Pour dessiner un point, on ajoute l'argument supplémentaire `'.'` (en incluant les apostrophes). Dans notre cas, on veut dessiner A en rouge, et B en bleu : on utilise donc les arguments `'.r'` et `'.b'`. Tapez `help plot3`, ouvrez la page d'aide de `plot3` et suivez le lien vers `LineSpec` pour plus d'information sur ces commandes.
3. Pour afficher les labels "A" et "B" des points sur le graphique 3d, utilisez la fonction `text` (cf. `help text`). Pour afficher ces labels dans la couleurs de leurs points respectifs, ajoutez les deux arguments `'Color', 'r'` ou `'Color', 'b'` à la fonction `text`.
4. On veut aussi afficher le vecteur $\overrightarrow{AB}$, afin de vérifier visuellement qu'il est perpendiculaire à π. Utilisez pour ceci la fonction `quiver3` (cf. `help quiver3`). Les trois premiers arguments sont les coordonnées du point de départ du vecteur, et les trois derniers sont les coordonnées du vecteur lui-même (déterminant sa direction). On veut l'afficher en noir, donc on ajoute l'argument `'k'` à la fonction `quiver3`.
5. Finalement, affichez le plan π à l'aide de la fonction `AffichagePlan(B,u1,u2,3)`, que vous pouvez télécharger sur Moodle.

Vérifiez visuellement que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est perpendiculaire à π. Pour ceci, cliquez sur le bouton montrant un cube entouré d'une flèche dans la fenêtre du graphique. En cliquant et faisant glisser sur le graphique, vous pouvez le faire tourner dans les trois dimensions.

Exercice 4 Courbe tridimensionelle. (Pas besoin de créer un nouveau fichier .m pour cet exercice, continuez avec le fichier de l'Exercice 3.) Ajoutez la courbe paramétrique suivante à votre graphique :

$$\begin{aligned} C : [0,\, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ t &\longmapsto \big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big)^{\mathsf{T}} = \big(5 + \sin(20\pi t),\ 5.5 + \sin(18\pi t),\ -4 + \sin(22\pi t)\big)^{\mathsf{T}}. \end{aligned}$$

Coloriez-la en vert en ajoutant l'argument supplémentaire `'g'` à la fonction `plot3` utilisée pour dessiner la courbe. Nommez-la sur votre graphique en utilisant la fonction `text`.

Soit P un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AP}$ ne soit pas parallèle au plan π. Notons P' le point d'intersection de $\overrightarrow{AP}$ avec π. L'Exercice 1 nous fournit un repère orthonormé $\{\overrightarrow{u_1},\, \overrightarrow{u_2}\}$ sur le plan π, que l'on imagine centré au point B. On cherche à déterminer dans ce repère les coordonnées $(p'_1,\, p'_2)$ de P'.

On remarque que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AP'}$ sont colinéaires, c'est-à-dire il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AP'}$. Ce λ peut être déterminé par le fait que

$$0 = \langle \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP'} | \overrightarrow{AB} \rangle$$

Exercice 5 Projection sur le plan.

1. Trouvez la formule pour calculer λ, ainsi que celles pour calculer les coordonnées $(p'_1,\, p'_2)$.
2. Ecrivez une fonction qui étant donné A, P_1, P_2, P_3 et P, calcule les coordonnées par rapport à la base $\{\overrightarrow{u_1},\, \overrightarrow{u_2}\}$ de la projection centrale de P de centre A sur le plan π.

Comme on va le voir, il est plus pratique de passer P à la fonction par ses coordonnées (x, y, z). Il est également utile de pouvoir utiliser un ensemble de points P pour les projeter tous a la fois. Il est donc utile de pouvoir entrer les coordonnées x, y et z en tant que listes. Utilisez donc l'entête suivant :

```
function [xp,yp]=Perspective(A,B,u1,u2,x,y,z)
...
end
```

3. Avec les données fournies précédemment, utilisez la fonction `Perspective` pour calculer la projection centrale de la courbe C et afficher le résultat obtenu dans un graphique en 2D.

   Comme on va afficher deux graphique, utilisez les commandes suivantes avant d'utiliser la commande `plot` :

   ```
   % Pour dessiner sur le graphique de gauche
   subplot(1,2,1)
   % Pour garder les axes à la même échelle
   axis equal
   ```

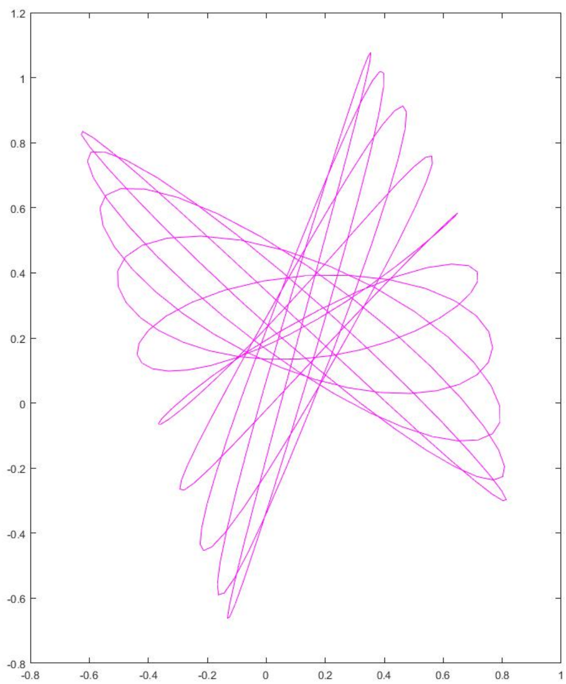
   Affichez votre courbe en magenta (argument supplémentaire `'m'`).

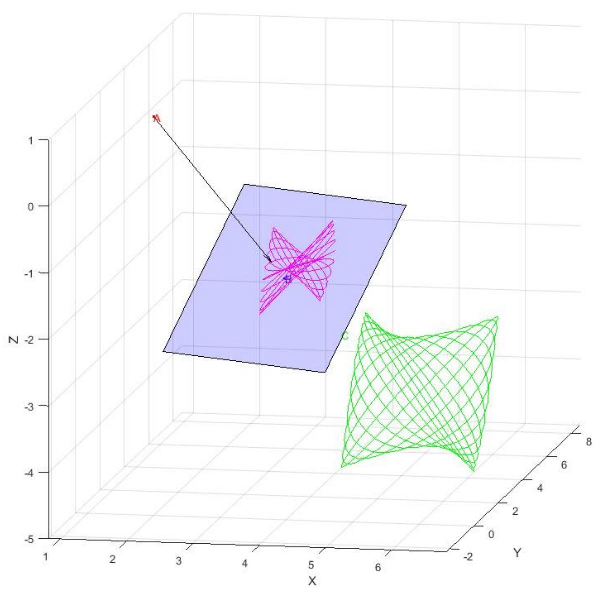
4. Recopiez les commandes d'affichage de l'exercice 3 en les faisant précéder de la commande suivante :

   ```
   % Pour dessiner sur le graphique de droite
   subplot(1,2,2)
   % Il semble nécessaire de répéter la commande hold on
   hold on
   ```

   En plus, affichez la projection centrale de la courbe C sur votre graphique en 3D (en magenta également, avec l'argument supplémentaire `'m'`).

Le résultat devrait ressembler à ceci :


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


1
0
-1
-2
-3
-4
-5
Z
1
2
3
4
5
6
X
8
6
4
2
0
-2
Y