Programació 2
Lliurament 1

David Martínez Carpena

26 d'octubre de 2015

Índex

1 §Espais afins

Definició 1.1 (Espai afí)**.** Sigui K un cos, E un K-espai vectorial de dimensió finita i A un cojunt tal que $A \neq \phi$. Un espai afí sobre un cos K de espai director E és una terna (A, E, ϕ) tal que:

$$\begin{array}{rcl} \phi : A \times E & \longrightarrow & A \\ (p, \vec{v}) & \longmapsto & \phi(p, \vec{v}) := p + \vec{v} \end{array}$$

Anomenarem punts als elements del conjunt A. A més, es verifiquen els següents axiomes:

(A1) $\forall p \in A$, la aplicació

$$\begin{array}{rcl} \phi_p : E & \longrightarrow & A \\ \vec{v} & \longmapsto & p + \vec{v} \end{array}$$

és bijectiva.

(A2) $\forall p \in A,\ \vec{u}, \vec{v} \in E$,

$$\phi(p, \vec{u} + \vec{v}) = \phi(\phi(p, \vec{u}), \vec{v})$$
$$p + (\vec{u} + \vec{v}) = (p + \vec{u}) + \vec{v}$$

Sigui $dim(E) = n$, definirem la dimensió de l'espai afí A com $dim(A) = dim(E) = n$.

Exemple 1.1. $dim(A) = 0 \Leftrightarrow E = \{0\} \Leftrightarrow A = \{p\}$

Exemple 1.2. $dim(A) = 1 \Leftrightarrow E \cong K \Rightarrow A$ és una recta

Lema 1.1. *1. $\forall p, q \in A$, $\exists!\, \vec{v} \in E$ tal que $p = q + \vec{v}$, i definim aquest vector com $\vec{v} = \overrightarrow{qp}$*

2. (Llei de Chasles) $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$

Demostració. 1. Per $(A1)$ sabem que,

$$\begin{array}{rcl} \phi_p : E & \longrightarrow & A \\ \vec{v} & \longmapsto & q + \vec{v} \end{array} \quad \text{és bijectiva} \Rightarrow \exists! \vec{v} \text{ tal que } \vec{v} = \phi_p^{-1}(p) = \phi_p^{-1}(q + \vec{v})$$

2.

□

1.1 Varietats lineals

Definició 1.2. Sigui A un espai afí, amb $dim(A) = n$, i de espai director E. Una (sub)varietat lineal de A és un subconjunt $\mathbb{L} \subseteq A$ de la forma $\mathbb{L} = p + F$, amb $p \in A$ com a punt de pas de $\mathbb{L}$ i F un subespai vectorial de E com a espai director

$$\mathbb{L} = \{q \in A | \exists \vec{v} \in F, q = p + v\} \subseteq A$$

Si una subvarietat lineal és de dimensió $n - 1$, l'anomenem hiperpla.

Lema 1.2. *Sigui A un espai afí d'espai director E i $\mathbb{L}$ una subvarietat lineal de A amb espai director F, llavors $dim(\mathbb{L}) = dim(F) \leq dim(E) = dim(A)$.*

Proposició 1.3. *1. Si $q \in \mathbb{L}$, llavors $\mathbb{L} = p + F = q + F$, i per tant el punt de pas d'una subvarietat lineal no és únic.*

2. Sigui $F = \{\overrightarrow{pq} \in E$ on $p, q \in \mathbb{L}\} \Rightarrow$ El espai director d'una subvarietat lineal és únic.

Demostració. 1. $q \in \mathbb{L} \Rightarrow \exists \overrightarrow{v} \in F$ tal que $q = p + \overrightarrow{v} \Rightarrow p = q - \overrightarrow{v}$

$p + F \subseteq q + F?$ $w \in F$, $p + w = q - v + w = q + (-v + w) \in q + F$

$q + F \subseteq p + F?$ $w \in F$, $q + w = (p + v) + w = p + (v + w) \in p + F$

2.

□

Proposició 1.4. *Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal i $b \in Im(f) = f(E) \subseteq F$, llavors $f^{-1}(b) = a + Nuc(f)$ i $f(a) = b$ i $f(a') = b$, amb $a \in E$, tal que $f^{-1}(b)$ és una varietat lineal de E amb $dim(Nuc(f)) = dim(E) - rang(f)$.*

Exemple 1.3. 1. El sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 3y + 2z & = & 1 \\ y - z & = & 0 \end{array}\right\}$$

defineix una subvarietat lineal de $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{L} = (2,1,1) + < (1,1,1) >$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad b = (1,0)$

2. Una sola equació

$$x - 3y + 4z + w = 6$$

$f^{-1}(6) = \mathbb{L} = (6,0,0,0) + Nuc(f) = (6,0,0,0) + < (...), (...), (...) >$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad b = 6$

1.2 Referències cartesianes

Definició 1.3. Un sistema de coordenades de A ve donat per:

- Un punt P de A, que anomenem l'origen del sistema.
- Una base $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ de E.

$$\mathcal{R} = \{P; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$$

Com la aplicació

$$\begin{array}{rcl} \phi_p : E & \longrightarrow & A \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \phi_p(\overrightarrow{u}) = p + \overrightarrow{u} \end{array}$$

és bijectiva.
$\forall q \in A, \exists! \overrightarrow{u} \in E$ tal que $\phi_p = p + \overrightarrow{u} = q$, com $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ és base de E

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + ... + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$$

i així

$$q = p + \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + ... + \lambda_1 \overrightarrow{e_n}$$

Anomenem les coordenades del punt q en la referència $\mathcal{R}$ a $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. Per tant les coordenades de q són els components del vector $\overrightarrow{pq}$ en la base $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ de E.

1.3 Equacions paramètriques de una varietat lineal

Definició 1.4. Sigui A un espai afí de espai director E, $\mathcal{R} = \{P; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ una referència, $\mathbb{L} = a + F$ una subvarietat lineal de A i el conjunt de vectors $\{\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_r}\}$ una base de F. En la referencia $\mathcal{R}$ el punt de pas de $\mathbb{L}$ s'expressarà:

$$a = P + \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{e_i}$$

Per tant les coordenades de a en la referència $\mathcal{R}$ seràn $(a_1, ..., a_n)$. Ara expressem la base de F en la de E que hem utilitzat a la referència:

$$\overrightarrow{v_j} = \sum_{i=1}^{n} v_j^i \overrightarrow{e_i},\ j = 1, ..., r$$

Llavors, sigui $\overrightarrow{w} = \sum_{i=1}^{r} w^i \overrightarrow{v_i} \in F$, podem expressar un punt qualsevol $x \in \mathbb{L}$ com:

$$x = a + \overrightarrow{w} = P + \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{e_i} + \sum_{j=0}^{r} w^j \overrightarrow{v_j} = P + \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{e_i} + \sum_{j=0}^{r} w^j (\sum_{k=0}^{n} v_j^k \overrightarrow{e_k}) = P + \sum_{i=0}^{n} (a_i + \sum_{j=0}^{r} w^j v_j^i) \overrightarrow{e_i}$$

Per tant, si anomenem $(x_1, ..., x_n)$ a les coordenades de x en la referència $\mathcal{R}$, tenim:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & a_1 + w^1 v_1^1 + w^2 v_2^1 + ... + w^r v_r^1 \\ x_2 & = & a_1 + w^1 v_1^2 + w^2 v_2^2 + ... + w^r v_r^2 \\ & \vdots & \\ x_n & = & a_n + w^1 v_1^n + w^2 v_2^n + ... + w^r v_r^n \end{array}$$

Les equacions formades per les coordenades de x a partir de les coordenades de a, w i la base de F en la referència $\mathcal{R}$ les anomenem equacions paramètriques de $\mathbb{L}$.

Exemple 1.4. Sigui $\mathbb{L} = a + F$ una recta en $\mathbb{R}^5$, en la referència $\mathcal{R}$, $a = (1, 3, 5, 2, 8)$, $F =< (3, 2, 0, 6, 9) >$, les coordenades d'un punt $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{L}$ vindràn expressades per les equacions:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 + 3\overrightarrow{w} \\ x_2 & = & 3 + 2\overrightarrow{w} \\ x_3 & = & 5 + 0\overrightarrow{w} \\ x_4 & = & 2 + 6\overrightarrow{w} \\ x_5 & = & 8 + 9\overrightarrow{w} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \mathbb{L} = (1, 3, 5, 2, 8) + < (3, 2, 0, 6, 9) >$$

1.4 Equacions implícites de una varietat lineal

Definició 1.5.

1.5 Combinacions lineals de punts

Lema 1.5. $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{pq_i} = \left(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i\right) \overrightarrow{pr} + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{rq_i}$

Demostració.

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq}$$

$$\overrightarrow{pq_i} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq_i}$$

$$\lambda_i \overrightarrow{pq_i} = \lambda_i \overrightarrow{pr} + \lambda_i \overrightarrow{rq_i}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{pq_i} = \left(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i\right) \overrightarrow{pr} + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{rq_i}$$

□

Corol·lari. *Si* $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$, $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{pq_i} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{rq_i}$, *definim* $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i q_i = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{pq_i}$ *si* $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$.
Si $\sum_{i=o}^{k} \lambda_i = 1$, $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{pq_i} = \overrightarrow{pr} + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{rq_i}$, *i per tant* $p + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{pq_i} = r + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{rq_i}$,
definim $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i q_i = p + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{pq_i}$ *si* $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$.

$$\lambda_i \in K \text{ i } \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = x, \text{ si } \begin{cases} x = 0 & \text{llavors } \sum \lambda_i p_i \text{ és un vector.} \\ x = 1 & \text{llavors } \sum \lambda_i p_i \text{ és un punt.} \\ x \neq 0 \wedge x \neq 1 & \text{llavors } \frac{1}{\sum \lambda_i} \sum \lambda_i p_i \text{ és un punt.} \end{cases}$$

Exemple 1.5. (Baricentre de m punts de A)
Siguin $p_1, p_2, \ldots, p_m \in A$, es defineix el baricentre d'aquests punts per

$$b = bar(p_1, \ldots, p_m)) = \frac{1}{m} p_1 + \cdots + \frac{1}{m} p_m = \frac{p_1 + \cdots + p_m}{m}$$

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{m} = \frac{m}{m} = 1 \Rightarrow b \text{ és un punt de } A.$$

Exemple 1.6. (Çentre de masses"d'un sistema amb k punts de A)
Siguin $p_1, p_2, \ldots, p_k \in A$, i $m_1, \ldots, m_k \in K$, considerem els punts p_i amb "masses"m_i respectivament, llavors definim el çentre de massesçom el punt b tal que

$$b = \frac{1}{\sum m_i} (\sum m_i p_i), \qquad \sum \frac{m_i}{\sum m_i} = 1 \Leftrightarrow \sum m_i \neq 0$$

$$\sum m_i p_i = (\sum m_i) b$$

1.6 Independència afí

Definició 1.6. Siguin $p_1, \ldots, p_m \in A$, diem que aquests punts son afinment independents si

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0, \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \ \forall i = 1, \ldots, m$$

I són afinment dependents en el cas contrari.

Lema 1.6. *Les següents proposicions són equivalents:*

1. $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0, \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \ \forall i = 1, \ldots, m$
2. *Si* $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \ \sum_{i=0}^{m} \mu_i = 1, \ i \ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i = \sum_{i=0}^{m} \mu_i p_i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i, \ \forall i$
3. *Si* $\sum_{i=2}^{m} \lambda_i \overrightarrow{p_1 p_i} = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \ \forall i = 2, \ldots, m$

Demostració. (1) $\implies$ (2)

$$\sum \lambda_i p_i = \sum \mu_i p_i, \ \sum \lambda_i = \sum \mu_i \implies \sum (\lambda_i - \mu_i) p_i = 0, \ \sum (\lambda_i - \mu_i) = 0$$
$$\overset{(1)}{\implies} \lambda_i - \mu_i = 0 \implies \lambda_i = \mu_i$$

(2) $\implies$ (1)
Suposem

$$\sum \lambda_i p_i = 0, \text{ amb } \sum \lambda_i = 0$$

Agafem un q diferent dels p_i

$$\sum \lambda_i p_i + q = q, \ \sum \lambda_i + 1 = 1 \overset{(2)}{\implies} \lambda_i = 0$$

□

Corol·lari. *Si $dim(A) = n$, el major nombre de punts afinment independents entre ells és $n + 1$*

Definició 1.7. Sigui A un conjunt de $n + 1$ punts afinment independents en A^n, s'anomena referència afí(o sistema de coordenades o coordenades baricèntriques).

Proposició 1.7. *Si $p_0, \ldots, p_n$ és una referència afí de A y q és qualsevol altre punt, llavors*

$$q = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i, \ amb \ \sum \lambda_i = 1$$

i a més els λ_i són únics.

Demostració. Considerem:
$$\overrightarrow{p_0q} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{p_0p_i},\ \lambda_i \in K$$
llavors $p_0, \dots, p_n$ és base de E, així:
$$q - p_0 = \sum \lambda_i \overrightarrow{p_0p_i} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (p_i - p_0)$$
$$q = (p_0 - \sum \lambda_i p_0) + \sum \lambda_i p_i = (1 - \sum \lambda_i) p_0 + \sum \lambda_i p_i$$
□

Definició 1.8. Fixada la referència $p_0, \dots, p_n$ de A, s'anomenen coordenades afins o baricèntriques de $q \in A$ als escalars $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ tals que:
$$q = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i$$

Exemple 1.7. Siguin $p_0, \dots, p_n$ punts afinment independent de A, el baricentre b té coordenades baricèntriques:
$$b = (\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$$

Proposició 1.8. *Sigui $\mathbb{L} \subset A$ un subvarietat lineal, amb $dim(A) = n$ i $dim(\mathbb{L}) = 1$, per tant $\mathbb{L}$ és una recta. Siguin $P, Q \in \mathbb{L}$, amb $P \neq Q$, (P, Q) és una referència afí de $\mathbb{L}$.*
A més, donat un altre punt $X \in A$
$$X = \lambda P + (1 - \lambda) Q \iff \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ} \textit{ són l.d.}$$

Exemple 1.8. Si $dim(A) = 2$ i $\mathcal{R}$ és una referència cartesiana i $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2), X = (x_1, x_2)$ punts de A, sabem que:
$$rang \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & q_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 & q_2 - p_2 \end{pmatrix} = 1 \iff \begin{vmatrix} x_1 - p_1 & q_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 & q_2 - p_2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & x_1 & q_1 \\ p_2 & x_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} p_0 & x_0 & q_0 \\ p_1 & x_1 & q_1 \\ p_2 & x_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$
si p_0, p_1, p_2 són les coordenades baricèntriques de P, i així respectivament pels tres punts.

Definició 1.9. Siguin $a, b, c \in A$ 3 punts alineats amb $b \neq c$ i $\lambda \in K$, definim la raó simple com $(a, b, c) := \lambda$ tal que
$$\overrightarrow{ac} = (a, b, c)\overrightarrow{bc} \iff \overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{bc}$$

Proposició 1.9. *Siguin $a, b, c \in A$ 3 punts alineats amb $b \neq c$ i raó simple $\lambda = (a, b, c) \in K$, podem expressar a com:*
$$a = (a, b, c) b + (1 - (a, b, c)) c$$

Demostració. Com b i c formen una referència afí de la recta que els uneix, podem expressar a com

$$a = \lambda b + (1-\lambda)c$$

$$\begin{aligned}
\vec{ac} &= c - a = c - (\lambda b + (1-\lambda)c) \\
&= (\lambda c + (1-\lambda)c) - (\lambda b + (1-\lambda)c) \\
&= \lambda(c-b) \\
&= \lambda\vec{bc}
\end{aligned}$$

Per tant $\lambda = (a,b,c)$, i així:

$$a = (a,b,c)b + (1-(a,b,c))c$$

$\square$

Proposició 1.10. *Sigui $A, B, C \in A$, $dim(A) = n$, i $A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_n), C = (c_1, \dots, c_n)$ les coordenades dels punts en un sistema de coordenades, la raó simple serà:*

$$(A,B,C) = \lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \dots = \frac{c_n - a_n}{c_n - b_n}$$

Demostració. $(A,B,C) = \lambda \implies \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{BC}$

$$\implies (c_1 - a_1, \dots, c_n - a_n) = \lambda(c_1 - b_1, \dots, c_n - b_n) \implies \lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \dots = \frac{c_n - a_n}{c_n - b_n}$$

$\square$

1.7 Operacions amb subvarietats

Definició 1.10. (Intersecció de subvarietats lineals) Sigui A un espai afí de espai director E, i $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2 \in A$ dos subvarietats lineals que podem expressar com $\mathbb{L}_1 = p_1 + F_1$ i $\mathbb{L}_2 = p_2 + F_2$, amb $p_1 \in \mathbb{L}_1$, $p_2 \in \mathbb{L}_2$ i $F_1, F_2 \subseteq E$. Definirem la intersecció de dos subvarietats lineals com la subvarietat lineal més gran que conté només punts de les dues, i la denotarem per $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ o $\mathbb{L}_1 \wedge \mathbb{L}_2$.

Proposició 1.11. *Sigui A un espai afí de espai director E, $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2 \in A$ dos subvarietats lineals de espais directors $F_1, F_2 \in E$ respectivament, i $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing$, $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ és una subvarietat lineal de A de espai director $F_1 \cap F_2$.*

Demostració.

$$\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing \implies \exists c \in A : c \in \mathbb{L}_1 \wedge c \in \mathbb{L}_2 \implies \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{L}_1 & = & c + F_1 \\ \mathbb{L}_2 & = & c + F_2 \end{array} \right. \implies \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = (c + F_1) \cap (c + F_2)$$

$$u_1 \in F_1, u_2 \in F_2, p \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} p & = & c + u_1 \\ p & = & c + u_2 \end{array} \right\} \iff \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = c + F_1 \cap F_2$$

$\square$

Proposició 1.12. $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing \iff \overrightarrow{p_1p_2} \in (F_1 + F_2)$

Demostració. $\Longrightarrow)$ $\quad \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing \implies \exists c \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \implies$

$$\implies \left\{ \begin{array}{lll} c & = & p_1 + u_1, \quad u_1 \in F_1 \\ c & = & p_2 + u_2, \quad u_2 \in F_2 \end{array} \right\} \implies p_1 + u_1 = p_2 + u_2 \implies u_1 - u_2 = p_2 - p_1$$

$$\left. \begin{array}{c} u_1 - u_2 \in F_1 \cap F_2 \\ u_1 - u_2 = p_2 - p_1 \\ p_2 - p_1 = \overrightarrow{p_1p_2} \end{array} \right\} \implies \overrightarrow{p_1p_2} \in (F_1 + F_2)$$

$\Longleftarrow)$ $\quad \overrightarrow{p_1p_2} \in (F_1 + F_2) \implies \overrightarrow{p_1p_2} = p_2 - p_1 = u_1 - u_2 \implies p_2 + u_2 = p_1 + u_1 = c$

$$\left. \begin{array}{r} p_1 + u_1 \in F_1 \\ p_2 + u_2 \in F_2 \\ p_2 + u_2 = p_1 + u_1 = c \end{array} \right\} \implies c \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L} \implies \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L} \neq \varnothing$$

□

Definició 1.11. (Paral·lelisme entre varietats lineals) Diem que dues subvarietats lineals tenen una relació de paral·lelisme, i per tant són paral·leles, si

$$\mathbb{L}_1 \parallel \mathbb{L}_2 \iff (F_1 \subseteq F_2) \vee (F_2 \subseteq F_1)$$

Proposició 1.13. *La relació de paral·lelisme és de tipus:*

1. *Reflexiva:* $\forall \mathbb{L}_1[\mathbb{L}_1 \parallel \mathbb{L}_1]$

2. *Simètrica:* $\forall \mathbb{L}_1, \forall \mathbb{L}_2[\mathbb{L}_1 \parallel \mathbb{L}_2 \implies \mathbb{L}_2 \parallel \mathbb{L}_1]$

En canvi, no és transitiva, i per tant no és relació de equivalència.

Demostració. 1. Reflexiva: $\mathbb{L}_1 \parallel \mathbb{L}_1 \iff (F_1 \subseteq F_1) \vee (F_1 \subseteq F_1)$

2. Simètrica: $\mathbb{L}_1 \parallel \mathbb{L}_2 \iff (F_1 \subseteq F_2) \vee (F_2 \subseteq F_1) \implies \mathbb{L}_2 \parallel \mathbb{L}_1$
Contraxemple de transitivitat: $\mathbb{L}_1 \parallel \mathbb{L}_2, \mathbb{L}_2 \parallel \mathbb{L}_3 \iff ((F_1 \subseteq F_2) \vee (F_2 \subseteq F_1)) \wedge ((F_2 \subseteq F_3) \vee (F_3 \subseteq F_2))$ Si $F_2 \subseteq F_3$ i $F_2 \subseteq F_1 \implies \mathbb{L}_1 \parallel \mathbb{L}_2 \wedge \mathbb{L}_2 \parallel \mathbb{L}_3$ però $\mathbb{L}_1 \nparallel \mathbb{L}_3$ ja que $(F_1 \nsubseteq F_3) \vee (F_3 \nsubseteq F_1)$. □

Definició 1.12. (Suma de subvarietats lineals) Definim la suma de dos subvarietats lineals $\mathbb{L}_1$ i $\mathbb{L}_2$, com la subvarietat lineal més petita que les conté, i la denotem per $\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2$ o $\mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_2$.

Proposició 1.14. $\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 = p_1 + < \overrightarrow{p_1p_2} > +F_1 + F_2$

Demostració. Per definició, $p_1 + < \overrightarrow{p_1p_2} > +F_1 + F_2$ és una subvarietat lineal i conté $\mathbb{L}_1$ i $\mathbb{L}_2$:
$\mathbb{L}_1 = p_1 + F_1 \subseteq p_1 + (< \overrightarrow{p_1p_2} > +F_1 + F_2)$
$\mathbb{L}_2 = p_2 + F_2 \subseteq p_2 + (< \overrightarrow{p_1p_2} > +F_1 + F_2)$
Falta comprovar que $p_1 + < \overrightarrow{p_1p_2} > +F_1 + F_2$ és la més petita que les conté:

Definim un subvarietat lineal $\mathbb{M} = p_1 + H = p_2 + H$ tal que $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{M}$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbb{L}_1 = p_1 + F_1 \subseteq p_1 + H \implies F_1 \subseteq H \\ \mathbb{L}_2 = p_2 + F_2 \subseteq p_2 + H \implies F_2 \subseteq H \\ p_1, p_2 \in \mathbb{M} \implies \overrightarrow{p_1p_2} \in H \implies <\overrightarrow{p_1p_2}> \subseteq H \end{array}\right\} \implies <\overrightarrow{p_1p_2}> + F_1 + F_2 \subseteq H$$

$$\implies p_1 + (<\overrightarrow{p_1p_2}> + F_1 + F_2) \subseteq p_1 + H = \mathbb{M}$$

Per tant, $p_1 + <\overrightarrow{p_1p_2}> + F_1 + F_2$ conté qualsevol subvarietat lineal que contingui $\mathbb{L}_1$ i $\mathbb{L}_2$, i per definició és la suma de $\mathbb{L}_1$ i $\mathbb{L}_2$. □

Exemple 1.9. $dim(A) = 1, \mathbb{L}_1 = \{p_1\}, \mathbb{L}_2 = \{p_2\}$, amb $p_1 \neq p_2$
$\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \varnothing$
$\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 = \{p_1\} + \{p_2\} = "p_1 + p_2" = \{p_1\} \vee \{p_2\} = p_1 \vee p_2 = p_1 + <\overrightarrow{p_1p_2}> = A$

Exemple 1.10. $dim(A) = 2, \mathbb{L}_1 = \{p_1\}, \mathbb{L}_2 = p_2 + <u>$, amb $\overrightarrow{p_1p_2} \neq \lambda u$
$\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \varnothing$
$\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 = p_1 + <\overrightarrow{p_1p_2}> + <u> = A$

1.8 Fòrmules de Grassman afins

Teorema 1.15. a) *Si $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing$, llavors*

$$dim(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2) = dim(\mathbb{L}_1) + dim(\mathbb{L}_2) - dim(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2)$$

b) *Si $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \varnothing$, llavors*

$$dim(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2) = dim(\mathbb{L}_1) + dim(\mathbb{L}_2) + 1 - dim(F_1 \cap F_2)$$

Demostració. $dim(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2) = dim(p_1 + <\overrightarrow{p_1p_2}> + F_1 + F_2) = dim(<\overrightarrow{p_1p_2}> + F_1 + F_2) = (*)$

a) $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing \implies \overrightarrow{p_1p_2} \in F_1 + F_2$
$(*) = dim(F_1 + F_2) = dim(F_1) + dim(F_2) - dim(F_1 \cap F_2) = dim(\mathbb{L}_1) + dim(\mathbb{L}_2) - dim(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2)$

b) $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \varnothing \implies \overrightarrow{p_1p_2} \notin F_1 + F_2$
$(*) = 1 + dim(F_1 + F_2) = 1 + dim(F_1) + dim(F_2) - dim(F_1 \cap F_2)$

□

Exemple 1.11. (Posició relativa d'un hiperpla i una recta a A^n) Siguin $\mathbb{L}_1$ un hiperpla i $\mathbb{L}_2$ una recta, per tant $dim(\mathbb{L}_1) = n - 1$ i $dim(\mathbb{L}_2) = 1$, i podem diferenciar dos casos:

- $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing \implies \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_2 \left\{ \begin{array}{l} dim(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2) = 0 \implies \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{p\} \\ dim(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2) = 1 \implies \mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_1 \end{array} \right.$

- $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \varnothing \implies dim(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2) = n - 1 + 1 + 1 - dim(F_1 \cap F_2) = n + 1 - dim(F_1 \cap F_2)$

$$\left.\begin{aligned} dim(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2) = n + 1 - dim(F_1 \cap F_2) \\ dim(\mathbb{L}_2) = 1 \implies dim(F_2) = 1 \\ \mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 \subseteq A \implies dim(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2) \leq n \end{aligned}\right\} \implies dim(F_1 \cap F_2) = 1 \implies F_2 = F_1 \cap F_2$$

$$\implies F_2 \subseteq F_1 \implies \mathbb{L}_1 \parallel \mathbb{L}_2$$

1.9 Teoremes clàssics

Teorema 1.16 (de Tales). *Siguin r, s dos rectes en un pla afí i l_1, l_2, l_3 3 rectes paral·leles i que tallen a r en p_1, p_2, p_3, i a s en q_1, q_2, q_3, respectivament; llavors $(p_1, p_2, p_3) = (q_1, q_2, q_3)$.*

Demostració. Suposant $p_1 \neq q_1$, definim la referència $\mathcal{R} = \{p_1, \overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1q_1}\}$, i expressem els punts p_i i q_i en aquesta referència:

$$\begin{aligned} &p_1 = (0,0) \quad q_1 = (0,1) \\ &p_2 = (1,0) \quad q_2 = p_1 + \overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2q_2} = p_1 + \overrightarrow{p_1p_2} + b\overrightarrow{p_1q_1} = (1,b) \\ &p_3 = (a,0) \quad q_3 = p_1 + \overrightarrow{p_1p_3} + \overrightarrow{p_3q_3} = p_1 + a\overrightarrow{p_1p_2} + c\overrightarrow{p_1q_1} = (a,c) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} (p_1, p_2, p_3) = \tfrac{a-0}{a-1} = \tfrac{0-0}{0-0} \\ (q_1, q_2, q_3) = \tfrac{a-0}{a-1} = \tfrac{c-1}{c-b} \end{aligned}\right\} \implies (p_1, p_2, p_3) = (q_1, q_2, q_3)$$

□

Teorema 1.17 (de Menelao). *Siguin A_1, A_2, A_3 3 punts afinment independents en un pla afí, i sigui l una recta que talla amb els costats $a_1 = \{A_2\} + \{A_3\}, a_2 = \{A_3\} + \{A_1\}, a_3 = \{A_1\} + \{A_2\}$ del triangle que formen A_1, A_2, A_3, en els punts B_1, B_2, B_3, respectivament; llavors*

$$(A_1, A_2, B_3)(A_2, A_3, B_1)(A_3, A_1, B_2) = 1$$

Demostració. $\mathcal{R} = \{A_1, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\}$

$$\begin{aligned} &A_1 = (0,0) \quad B_1 = (x,y) = \lambda B_3 + (1-\lambda)B_2 = (\lambda a, (1-\lambda)b) \\ &A_2 = (1,0) \quad B_2 = (0,b) \\ &A_3 = (0,1) \quad B_3 = (a,0) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &x + y = 1 \\ &(x,y) = (\lambda a, (1-\lambda)b) \end{aligned}\right\} \implies \lambda a + (1-\lambda)b \implies \lambda = \frac{1-b}{a-b}, \text{ amb } a \neq b$$

$$B_1 = \left(\frac{1-b}{a-b}a, \left(1 - \frac{1-b}{a-b}\right)b\right) = \left(\frac{1-b}{a-b}a, \frac{a-b-1+b}{a-b}b\right) = \left(\frac{1-b}{a-b}a, \frac{a-1}{a-b}b\right)$$

$$(A_1, A_2, B_3) = \frac{a}{a-1}$$

$$(A_2, A_3, B_1) = \frac{\frac{1-b}{a-b}a - 1}{\frac{1-b}{a-b}a} = \frac{a - ab - a + b}{a - ab} = \frac{b(1-a)}{a(1-b)}$$

$(A_3, A_1, B_2) = \dfrac{b-1}{b}$

$$(A_1, A_2, B_3)(A_2, A_3, B_1)(A_3, A_1, B_2) = \left(\frac{a}{a-1}\right)\left(\frac{b(1-a)}{a(1-b)}\right)\left(\frac{b-1}{b}\right) = 1$$

□

Teorema 1.18 (de Ceva). *Siguin A_1, A_2, A_3 3 punts afinment independents en un pla afí, i sigui P un punt del pla*

$$\begin{aligned} B_1 &= (\{A_2\} + \{A_1\}) \cap (\{A_1\} + \{P\}) \\ B_2 &= (\{A_3\} + \{A_1\}) \cap (\{A_2\} + \{P\}) \\ B_3 &= (\{A_1\} + \{A_2\}) \cap (\{A_3\} + \{P\}) \end{aligned}$$

Llavors

$$(A_1, A_2, B_3)(A_2, A_3, B_1)(A_3, A_1, B_2) = -1$$

Demostració. $\mathcal{R} = \{A_1, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\}$

$$\begin{array}{rlrl} P & = (a, b) & & \\ A_1 & = (0, 0) & B_1 & = (x, y), \text{ amb } x + y = 1 \implies B_1 = (x, 1-x) \\ A_2 & = (1, 0) & B_2 & = (0, d) \\ A_3 & = (0, 1) & B_3 & = (c, 0) \end{array}$$

$$\mu_1 = (B_1, P, A_1) = \frac{\overrightarrow{B_1A_1}}{\overrightarrow{PA_1}} = \frac{x}{a} = \frac{x-1}{-b} \implies \frac{-b}{a} = \frac{x-1}{x}$$
$$\mu_2 = (B_2, P, A_2) = \frac{\overrightarrow{B_2A_2}}{\overrightarrow{PA_2}} = \frac{1}{1-a} = \frac{d}{b} \implies d = \frac{b}{1-a}$$
$$\mu_3 = (B_3, P, A_3) = \frac{\overrightarrow{B_3A_3}}{\overrightarrow{PA_3}} = \frac{1}{1-b} = \frac{c}{a} \implies c = \frac{a}{1-b}$$

$$\lambda_1 = (A_1, A_2, B_3) = \frac{\overrightarrow{A_1B_3}}{\overrightarrow{A_2B_3}} = \frac{c}{c-1} = \frac{\left(\frac{a}{1-b}\right)}{\left(\frac{a}{1-b}\right) - 1} = \frac{a}{a+b-1}$$
$$\lambda_2 = (A_2, A_3, B_1) = \frac{\overrightarrow{A_2B_1}}{\overrightarrow{A_3B_1}} = \frac{x-1}{x} = \frac{-b}{a}$$
$$\lambda_3 = (A_3, A_1, B_2) = \frac{\overrightarrow{A_3B_2}}{\overrightarrow{A_1B_2}} = \frac{d-1}{d} = \frac{\left(\frac{b}{1-a}\right) - 1}{\left(\frac{b}{1-a}\right)} = \frac{a+b-1}{b}$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \left(\frac{a}{a+b-1}\right)\left(\frac{-b}{a}\right)\left(\frac{a+b-1}{b}\right)$$

□

1.10 Aplicacions afins

Siguin $\mathbb{A}, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ espais afins de espai director $E, E_1, \ldots, E_n$ respectivament

Definició 1.13. Una aplicació afí $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ és una aplicació de conjunts tal que $\exists$ una aplicació lineal

$$\widetilde{f} : E_1 \to E_2$$

que verifica

$$\forall p \in \mathbb{A}_1, \forall \vec{u} \in E_1 [f(p+\vec{u}) = f(p) + \widetilde{f}(\vec{u})]$$

Proposició 1.19. $\exists \widetilde{f} : f(p+\vec{u}) = f(p) + \widetilde{f}(\vec{u}) \implies \widetilde{f}$ *és única, i en efecte*

$$\forall \vec{u} \in E_1 [\widetilde{f} = f(p+\vec{u}) - f(p)]$$

i així $\widetilde{f}$ queda determinada per f, i l'anomenem l'aplicació lineal associada a f.

Altres formes d'expressar-ho:

Si $q = p + \vec{u} = p + \vec{pq}$, $\left.\begin{array}{ll} f(q) = & f(p+u) = f(p) + \widetilde{f}(\vec{pq}) \\ f(q) = & f(p) + \overrightarrow{f(p)f(q)} \end{array}\right\} \implies \widetilde{f}(\vec{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$

Usant els axiomes dels espais afins:

Sabem que $\forall p \in \mathbb{A}_1$, la aplicació

$$\begin{array}{rcl} \phi_p : E_1 & \to & \mathbb{A}_1 \\ \vec{v} & \mapsto & q + \vec{v} \end{array}$$

és bijectiva.

$$\forall \vec{u} \in E_1 [f(\phi_p(\vec{u})) = \phi_{f(p)}(\widetilde{f}(\vec{u})) \implies (f \circ \phi_p)(\vec{u}) = (\phi_{f(p)} \circ \widetilde{f})(\vec{u})]$$

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\phi_p"] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & \mathbb{A}_1 \arrow[d, "f"] \\ E_2 \arrow[r, "\phi_{f(p)}"'] & \mathbb{A}_2 \end{tikzcd}$$

$f \circ \phi_p = \phi_{f(p)} \circ \widetilde{f}$

Corol·lari. $f = \phi_{f(p)} \circ \widetilde{f} \circ \phi_p^{-1}$

$\widetilde{f} = \phi_{f(p)}^{-1} \circ f \circ \phi_p$

i així:

$$\begin{array}{lcl} f \text{ bijectiva} & \iff & \widetilde{f} \text{ bijectiva} \\ f \text{ injectiva} & \iff & \widetilde{f} \text{ injectiva} \\ f \text{ exhaustiva} & \iff & \widetilde{f} \text{ exhaustiva} \end{array}$$

i per tant, f determina $\widetilde{f}$, i $\widetilde{f}$ junt amb un punt p i la seva imatge $f(p)$ determina f.

Exemple 1.12.

$$\begin{array}{rcl} id : \mathbb{A} & \to & \mathbb{A} \\ p & \mapsto & id(p) = p \end{array}$$

$id(p+\vec{u}) = p + \vec{u} = id(p) + \vec{u} \implies \widetilde{id}(\vec{u}) = \vec{u}$

Per tant la identitat de $\mathbb{A}$ és afí.

Exemple 1.13. Si f i g són afins, $g \circ f$ és afí i $\widetilde{g \circ f} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$
En efecte, $\mathbb{A}_1 \xrightarrow{f} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{g} \mathbb{A}_3$

$$(g \circ f)(p + \overrightarrow{u}) = g(f(p + \overrightarrow{u})) = g(f(p) + \widetilde{f}(\overrightarrow{u})) = (g \circ f)(p) + (\widetilde{g} \circ \widetilde{f})(\overrightarrow{u}) \implies \widetilde{g \circ f} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$$

Definició 1.14. Sigui $w \in E$, $w \neq 0$, definim

$$\begin{array}{rcl} z_{\overrightarrow{w}} : \mathbb{A} & \to & \mathbb{A} \\ p & \mapsto & p + \overrightarrow{w} \end{array}$$

Proposició 1.20. *$z_{\overrightarrow{w}}$ és una aplicació afí.*

Demostració. $z_{\overrightarrow{w}}(p + \overrightarrow{u}) = p + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = p + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u} = z_{\overrightarrow{w}}(p) + \overrightarrow{u} = z_{\overrightarrow{w}}(p) + id_E(\overrightarrow{u}) \implies z_{\overrightarrow{w}}$ és afí i $\widetilde{z_w} = id_E$ □

Proposició 1.21. *Si f és afí i $\widetilde{f} = id$, llavors f és una translació.*

Demostració. En efecte, considerem un punt p, i la seva imatge $f(p)$.
Llavors $f(p) = p + \overrightarrow{w} \implies \overrightarrow{w} = \overrightarrow{pf(p)}$.
Si ara agafem un altre punt $q = p + \overrightarrow{pq}$ tindrem

$$f(q) = f(p) + \widetilde{f}(\overrightarrow{pq}) = f(p) + \overrightarrow{pq} = p + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{pq} = q + \overrightarrow{w} \implies \forall q, f = z_{\overrightarrow{w}}$$

□

Proposició 1.22. *f, g translacions $\implies$ $g \circ f$ translació*

Demostració. $\forall p[f(p) = p + \overrightarrow{w_1}], \forall p[g(p) = p + \overrightarrow{w_2}]$
$(g \circ f)(p) = g(f(p)) = g(p + \overrightarrow{w_1}) = (p + \overrightarrow{w_1}) + \overrightarrow{w_2} = p + (\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}) \implies g \circ f$ és la translació de vector $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ □

Proposició 1.23. *Les translacions amb l'identitat i la composició d'aplicacions formen un grup.*

Demostració. $(z_{-w} \circ z_w)(p) = p$
FALTA ACABAR □

Definició 1.15. Sigui $r \neq 0, 1$ i sigui O,p dos punt de $\mathbb{A}$. Definim l'homotècia de centre O i raó r com

$$\begin{array}{rcccl} f : & \mathbb{A} & \to & \mathbb{A} \\ & p = O + \overrightarrow{Op} & \mapsto & f(p) = O + r\overrightarrow{Op} \end{array}$$

Si $r > 1$ diem que f és una dilatació.
Si $1 > r > 0$ diem que f és una contracció
Si $r = -1$ diem que f és una simetria central

Proposició 1.24. *f és una homotècia $\iff$ és una aplicació afí amb $\widetilde{f} = r \cdot id_E$.*

Demostració. $\Longrightarrow)$ $\quad f(p+\vec{u}) = O + r\overrightarrow{O(p+\vec{u})} = O + r(\overrightarrow{Op} + \vec{u}) = O + r\overrightarrow{Op} + r\vec{u} = f(p) + r\vec{u} \implies f$ és afí i $\widetilde{f} = r \cdot id_E$

$\Longleftarrow)$ $\quad f$ és afí i $\widetilde{f} = r \cdot id_E \implies$ FALTA ACABARLO □

Proposició 1.25. *El centre de la homotècia queda determinat per un punt p i la seva imatge $f(p)$.*

Demostració.

$$f(p) = O + rp - rO = (1-r)O + rp \implies -rp + f(p) = (1-r)O \implies O = \frac{-r}{1-r}p + \frac{1}{1-r}f(p)$$

□

Proposició 1.26. *El centre O de una homotècia verifica $f(O) = O$, i per tant és un punt fix.*

Demostració.

$$O = \frac{-r}{1-r}p + \frac{1}{1-r}p - \frac{1}{1-r}p + \frac{1}{1-r}f(p) = p + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{pf(p)}$$

$$f(O) = f(p) + \frac{r}{1-r}\overrightarrow{pf(p)} = \frac{1-r}{1-r}f(p) + \frac{r}{1-r}f(p) - \frac{r}{1-r}p = \frac{1}{1-r}f(p) - \frac{r}{1-r}p = O$$

□

Donat un p qualsevol, $p = O + \overrightarrow{Op}$, per tant $f(p) = f(O + \overrightarrow{Op}) = f(O) + \widetilde{f}(\overrightarrow{Op}) = O + r\overrightarrow{Op}$

Proposició 1.27. *f, g homotecies amb el mateix origen $O \implies g \circ f$ homotècia*

Demostració. $f(p) = O + r\overrightarrow{Op}, g(p) = O + s\overrightarrow{Op}$
$(g \circ f)(p) = g(f(p)) = g(O + r\overrightarrow{Op}) = g(O) + sr\overrightarrow{Op} = O + sr\overrightarrow{Op} \implies g \circ f$ és una homotècia de centre O i raó rs □

Proposició 1.28. *Les homotècies de mateix origen formen un grup amb l'identitat i la composició.*

Demostració. FALTA ACABAR □

Proposició 1.29. *f, g homotecies tals que $f(x) = P + r\overrightarrow{Px}, g(x) = Q + s\overrightarrow{Qx}$*

$$\begin{cases} rs = 1 \implies g \circ f \text{ és una translació de vector de translació} w = (s-1)\overrightarrow{QP} \\ rs \neq 1 \implies g \circ f \text{ és una homotècia} \end{cases}$$

Demostració. $f(x) = P + r\overrightarrow{Px}, g(x) = Q + s\overrightarrow{Qx}$

$(g \circ f)(x) = g(P + r\overrightarrow{Px}) = Q + s\overrightarrow{Q(P + r\overrightarrow{Px})} = Q + s(P + r\overrightarrow{Px}) - sQ = Q + s\overrightarrow{QP} + sr\overrightarrow{Px} =$
FALTA ACABARLO
$\implies \widetilde{g \circ f} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f} = srid_E$

$\implies \begin{cases} rs = 1 \implies g \circ f \text{ és una translació} \\ rs \neq 1 \implies g \circ f \text{ és una homotècia} \end{cases}$ Si $g \circ f$ és una translació amb $rs = 1$, el seu vector de translació serà
$(g \circ f)(P) = g(P) = Q + s\overrightarrow{QP}$
Així el vector de la translació que busquem és $w = (g \circ f)(P) - P = Q + s\overrightarrow{QP} - P = -\overrightarrow{QP} + s\overrightarrow{QP} = (s-1)\overrightarrow{QP}$ □

Definició 1.16. Sigui $\mathbb{L} = p + F$ una subvarietat lineal de $\mathbb{A}$, i tenim una descomposició $E = F \oplus G$, llavors un punt $x \in \mathbb{A}$

$$x = p + \overrightarrow{px} = p + \overrightarrow{px_F} + \overrightarrow{px_G}$$

Definim la simetria respecte de $\mathbb{L}$ i en la direcció G com

$$s(x) = p + \overrightarrow{px_F} - \overrightarrow{px_G}$$

Proposició 1.30. *1.* $x \in \mathbb{L} \implies s(x) = x$

2. $\forall x, s \neq id[s^2(x) = x] \implies s^2 = id \implies \widetilde{s}^2 = id$

Demostració. 1. FALTA ACABARLO

2. $s(s(x)) = s(p + \overrightarrow{px_F} - \overrightarrow{px_G}) = p + \overrightarrow{px_F} + \overrightarrow{px_G} = x$

□

Definició 1.17. Sigui $x = p + \overrightarrow{px} = p + \overrightarrow{px_F} + \overrightarrow{px_G}$, definim la projecció sobre $\mathbb{L}$ en la direcció de G com

$$\pi(x) = p + \overrightarrow{px_F}$$

Proposició 1.31. $x \in \mathbb{L} \implies \pi(x) = x$

Demostració. FALTA ACABAR □

Definició 1.18. Una aplicació afí diem que és una afinitat si f és bijectiva(equivalentment $\widetilde{f}$ és bijectiva).

Proposició 1.32. *Siguin $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ espais afins, $p_1 \in \mathbb{A}_1, p_2 \in \mathbb{A}_2, h : E_1 \to E_2$ una aplicació lineal. Llavors $\exists!$ aplicació afí $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ tal que $f(p_1) = p_2$ i $\widetilde{f} = h$.*

Demostració. Existència de f:
Definim f per

$$\forall x \in \mathbb{A}_1[f(x) = f(p_1 + \overrightarrow{p_1x}) = f(p_1) + h(\overrightarrow{p_1x}) = p_2 + h(\overrightarrow{p_1x})]$$

Veiem que f és afí

$$f(x + \overrightarrow{u}) = p_2 + h(\overrightarrow{p_1(x + \overrightarrow{u})}) = p_2 + h(\overrightarrow{p_1x} + \overrightarrow{u}) = p_2 + h(\overrightarrow{p_1x}) + h(\overrightarrow{u}) = f(x) + h(\overrightarrow{u})$$

Llavors f és afí i $\widetilde{f} = h$ □

Corol·lari. *1. Si $p_1 \in \mathbb{A}_1, p_2 \in \mathbb{A}_2$, i $e_1, \ldots, e_n$ és una base de E_1 i $w_1, \ldots, w_n$ n vectors de E_2, llavors $\exists!$ aplicació afí $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ tal que $f(p_1) = p_2, \widetilde{f}(e_i) = w_i, i = 1, \ldots, n$*

Corol·lari. *2. Si $p_0, p_1, \ldots, p_n$ són $n+1$ punts afinment indep de $\mathbb{A}_1, dim(\mathbb{A}_1) = n$, i $q_0, q_1, \ldots, q_n$ $n+1$ punts de $\mathbb{A}_2$, llavors $\exists!$ aplicació afí $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ tal que $f(p_i) = q_i, i = 0, \ldots, n$*

Demostració. Siguin $p_i = p_0 + \overrightarrow{p_0p_i}$, com els punts p_i són afinment independent, els n vectors $e_i = \overrightarrow{p_0p_i}$ són l.i.
Per tant formen una base

$$f(p_i) = q_i = q_0 + \overrightarrow{q_0q_i} = f(p_0 + \overrightarrow{p_0p_i}) = q_0 + \widetilde{f}(\overrightarrow{p_0p_i})$$

Després apliquem el cor.1 amb $\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{p_0p_i}$ i $\overrightarrow{w_i} = \overrightarrow{q_0q_i}$. □

Proposició 1.33. *Si $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ és afí llavors*

- $f(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(p_i)$, *si* $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$
- $\widetilde{f}(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(p_i)$, *si* $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 0$

Demostració. $f(\sum \lambda_i p_i) = f(\sum \lambda_i p_i - \sum \lambda_i p_0 + p_0) = f(\sum \lambda_i \overrightarrow{p_0p_i} + p_0) = f(p_0) + \widetilde{f}(\sum \lambda_i \overrightarrow{p_0p_i}) = f(p_0) + \sum \lambda_i \widetilde{f}(\overrightarrow{p_0p_i}) = f(p_0) + \sum \lambda_i \overrightarrow{f(p_0)f(p_i)} = f(p_0) + \sum \lambda_i (f(p_i) - f(p_0)) = \sum \lambda_i f(p_i)$
FALTA ACABAR □

Corol·lari. *Siguin p_1, p_2, p_3 3 punts alineats de $\mathbb{A}_1, p_2 \neq p_3$, i sigui $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ una aplicació afí, llavors*

- *Si $f(p_2) \neq f(p_3), f(p_1)$ està sobre la recta que defineixen $f(p_2)$ i $f(p_3)$, i a més $(p_1, p_2, p_3) = (f(p_1), f(p_2), f(p_3))$*
- *Si $f(p_2) = f(p_3), f(p_1) = f(p_2) = f(p_3)$*

Demostració. $p_1 = \lambda p_2 + (1-\lambda)p_3 \implies f(p_1) = \lambda f(p_2) + (1-\lambda) f(p_3)$
$f(p_2) = f(p_3) \implies f(p_1) = f(p_2)$ □

1.11 Expressió d'una aplicació afí en coord. cartesianes

Sigui $\mathbb{A}_1$ un espai afí amb un sistema de cordenades $\mathcal{R}_1 = \{O_1; e_1, dotsc, e_n\}, \mathcal{R}_2 = \{O_2; f_1, dotsc, f_m\}$.
Si $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ és una aplicació afí amb una aplicació lineal associada $\widetilde{f}$ té una matriu $M = (a^i_j)$ en aquestes bases.

$$\widetilde{f}(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{j=1}^{m} a^j_i f_j, i = 1, \ldots, n$$

$$M = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Si $x \in E_1$, llavors $x = \sum x^i \vec{e_i}$, i així $\widetilde{f}(x) = \sum \widetilde{f}(\vec{e_i})x^i = MX$
Si P és un punt de $\mathbb{A}_1$

$$P = O_1 + \overrightarrow{O_1P} = O_1 + \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e_i}$$

aquestes x^i son les coordenades de P en la referència $\mathcal{R}_1$
Apliquem f a P, tenim

$$f(P) = f(O_1) + \widetilde{f}(\overrightarrow{O_1P}) = O_2 + \sum_{j=1}^{m} b^j f_j + MX$$

Llavors (b_j) són les coordenades de $f(O_1)$ en $\mathcal{R}_2$ En forma matricial resulta

- Si X és el vector columna de coordenades de P
- Si B és el vector columna de coordenades de $f(O_1)$
- Si Y és el vector columna de coordenades de $f(P)$

$$Y = B + MX \iff \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Això equival a la equació matricial

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m & b^m \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

1.12 Matriu d'una aplicació afí

Sigui $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ espais afins de referecies $\mathcal{R}_1 = \{O_1; e_1, \ldots, e_n\}, \mathcal{R}_2 = \{O_2; e'_i, \ldots, e'_n\}$ amb una aplicació afí $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2, \widetilde{f} : E_1 \to E_2$ aplicació lineal, la matriu de f serà

$$M(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} \ddots & & \iddots & \vdots \\ & M(\widetilde{f}) & & f(O_1) \\ \iddots & & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad M(\widetilde{f}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{f}(e_1) & \widetilde{f}(e_2) & \widetilde{f}(e_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

Exemple 1.14. f translació de vector $w = w_1, \dots, w_n$

$$M(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & w_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & w_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple 1.15. f homotècia de raó r i centre O', amb la referència $\mathcal{R}_1 = \{O_1; e_1, \dots, e_n\}$

$$M(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} r & & 0 & \vdots \\ & \ddots & & f(O_1) \\ 0 & & r & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple 1.16. Simetria respecte a $\mathbb{L} = a+F$ i en la direcció de G, amb $E = F \oplus G$, $s(a+\overrightarrow{u}) = a + \overrightarrow{u_f} - \overrightarrow{u_G}$, amb la referència $\mathcal{R}_1 = \{O_1; e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, en\}$ amb $\{e_1, \dots, e_{r+1}\}$ base de F i $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ base de G

$$M(s) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & & 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & 0 & & \vdots \\ 0 & & 1 & & & & \vdots \\ \hline & & & -1 & & 0 & \vdots \\ & 0 & & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & & -1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple 1.17. Projecció sobre $\mathbb{L} = a + F$ en la direcció de G amb $E = F \oplus G, \pi(a + \overrightarrow{u}) = a + \overrightarrow{u_F}$, en la referència anterior tindrem

$$M(\pi) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & & 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & 0 & & \vdots \\ 0 & & 1 & & & & \vdots \\ \hline & & & & & & \vdots \\ & 0 & & & 0 & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Lema 1.34. *Si $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2, g : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_3$ aplicacions afins, amb referencies $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ per als espais afins $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3$ respectivament. Llavors*

$$M(g \circ f) = M(g)M(f)$$

Demostració. FALTA ACABARLO □

Definició 1.19 (Punts fixos d'una aplicació afí)**.** Sigui $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicació afí, diem que un punt $p \in \mathbb{A}$ és un punt fix si $f(p) = p$. Anomenem Γ_f al conjunt de tots el punts fixos de f.

$$\Gamma_f = \{x \in \mathbb{A} : f(x) = x\} \subseteq \mathbb{A}$$

Proposició 1.35. *1. Si $\Gamma_f \neq \varnothing$, llavors Γ_f és una subvarietat lineal de $\mathbb{A}$ de espai director $Ker(\widetilde{f} - 1)$, així $\Gamma_f = p + Ker(\widetilde{f} - 1)$, amb $f(p) = p$, i per tant $dim(\Gamma_f) = dim(Ker(\widetilde{f} - 1))$*

Demostració. $\Gamma_f \neq \varnothing \implies \exists p : f(p) = p$
Qualsevol altre $x \in \Gamma_f$ s'expressa com $x = p + \overrightarrow{px}$
Aplicant la f tenim

$$x = f(x) = f(p + \overrightarrow{px}) = f(p) + \widetilde{f}(\overrightarrow{px}) = p + \widetilde{f}(\overrightarrow{px})$$

$$\overrightarrow{px} = \widetilde{f}(\overrightarrow{px}) \implies (\widetilde{f} - 1)(\overrightarrow{px}) = 0 \implies \overrightarrow{px} \in Ker(\widetilde{f} - 1)$$

□

Exemple 1.18.
1. Translació $\implies \Gamma_f = \varnothing$
2. Homotècia $\implies \Gamma_f = centre$
3. Simetria $\implies \Gamma_f = \mathbb{L} = a + F$
4. Projecció $\implies \Gamma_f = \mathbb{L} = a + F$

Proposició 1.36. *2. Si $\widetilde{f}$ no té el 1 com a valor propi, llavors $\Gamma_f = \{p\}$, o sigui f té un únic punt fix.*

Demostració. En efecte, tenim un punt $q \in \mathbb{A}$ qualsevol i els possibles punts fixos de f,p, seràn

$$p = q + \overrightarrow{qp} = f(p) = f(q) + \widetilde{f}(\overrightarrow{qp}) \implies q - f(q) = \widetilde{f}(\overrightarrow{qp}) - \overrightarrow{qp} = (\widetilde{f} - 1)(\overrightarrow{qp})$$

$$\implies \overrightarrow{qp} = (\widetilde{f} - 1)^{-1}(\overrightarrow{f(q)q})$$

Per tant $\overrightarrow{qp}$ és únic □

Definició 1.20 (Sistema de punts fixos)**.** Sigui $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}, \mathcal{R}$ referencia de $\mathbb{A}$, i M la matriu de f. Anomenem sistema de punts fixos a $M(X) = X$, que és un sistema de n equacions amb n incognites.

Probar que si $p_1, \ldots, p_s$ són punts fixos, tota combinació afí dels p_i també és un punt fix. Sigui $p = \sum\limits_{i=0}^{s} \lambda_i p_i$, amb $\sum\limits_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$

$$f(p) = f(\sum \lambda_i p_i) = \sum \lambda_i f(p_i) = \sum \lambda_i p_i = p$$

Definició 1.21. Diem que $\mathbb{L}$ és una subvarietat lineal invariant per f si $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$
Les subvarietats lineals invariants de $dim(\mathbb{L}) = 0$ són els punts fixos
Les subvarietats lineals invariants de $dim(\mathbb{L}) = 1$ són els rectes fixes

Proposició 1.37. *Sigui $\mathbb{L}$ una subvarietat lineal de $\mathbb{A}$, llavors $\mathbb{L}$ és invariant per f* $\iff$ $(\widetilde{f}(F) \subseteq F) \wedge (\overrightarrow{af(a)} \in F)$

Demostració. $\implies$) Suposem $\mathbb{L}$ invariant per $f \implies f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$

$$f(\mathbb{L}) = f(a+F) = f(a) + \widetilde{f}(F) \subseteq a + F \implies \begin{cases} \widetilde{f}(F) \subseteq F \\ \overrightarrow{af(a)} \in F \end{cases}$$

$\impliedby$) Suposem $(\widetilde{f}(F) \subseteq F) \wedge (\overrightarrow{af(a)} \in F)$

$$f(\mathbb{L}) = f(a) + \widetilde{f}(F) \subseteq f(a) + F = a + F = \mathbb{L}$$

□

Corol·lari. *Sigui $\mathbb{L} = a + < u >$ una recta de A, llavots $\mathbb{L}$ és invariant per f* $\iff$ ($\vec{u}$ *és vector propi de* $\widetilde{f}$) $\wedge$ ($\overrightarrow{af(a)} \in < u >$) $\iff$ ($\vec{u}$ *és vector propi de* $\widetilde{f}$) $\wedge$ ($rang \begin{pmatrix} \overrightarrow{af(a)} \\ \vec{u} \end{pmatrix} = 1$)

Exemple 1.19. 1.

$$M(f) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Punts fixos?

$$\left.\begin{array}{r} x + 2 = x \\ y + 1 = y \end{array}\right\} \text{No té solució} \implies \Gamma_f = \varnothing$$

Rectes fixes? $\vec{u} = (u, v) \neq 0$ és vector propi de $\widetilde{f}$

Per tant, $\mathbb{L}$ és invariant $\iff$ $rang \begin{pmatrix} \overrightarrow{af(a)} \\ \vec{u} \end{pmatrix} = 1$

$$f(a,b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ b+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{af(a)} = (a+2, b+1) - (a,b) = (2,1)$$

$$rang \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ u & v \end{pmatrix} = 1 \iff \text{Agafem } (u,v) = (2,1)$$

Per tant les rectes invariants són:

$$\mathbb{L} = (a,b) + < (2,1) > \text{, amb un } (a,b) \text{ qualsevol}$$

Exemple 1.20. 2.

$$M(f) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Punts fixos?

$$\left.\begin{aligned} x+y+2&=x \\ y+1&=y \end{aligned}\right\} \text{No té solució} \implies \Gamma_f = \varnothing$$

Rectes fixes?$\vec{u} = e_1 = (1,0)$ és vector propi del valor propi $\lambda = 1$ de $\widetilde{f}$

Per tant, $\mathbb{L}$ és invariant $\iff rang \begin{pmatrix} \overrightarrow{af(a)} \\ \vec{u} \end{pmatrix} = 1$

$$f(a,b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+2 \\ b+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{af(a)} = (a+b+2, b+1) - (a,b) = (b+2, 1)$$

$$rang \begin{pmatrix} b+2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 1 \implies \nexists \text{ rectes invariants}$$

Exemple 1.21. 3.

$$M(f) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Punts fixos?

$$\left.\begin{aligned} x+y&=x \\ y&=y \end{aligned}\right\} \implies y = 0 \text{ recta de putns fixos}$$

Rectes fixes? $\vec{u} = e_1 = (1,0)$ és vector propi del valor propi $\lambda = 1$ de $\widetilde{f}$

Per tant, $\mathbb{L}$ és invariant $\iff rang \begin{pmatrix} \overrightarrow{af(a)} \\ \vec{u} \end{pmatrix} = 1$

$$f(a,b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{af(a)} = (a+b, b) - (a,b) = (b, 0)$$

$$rang \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \forall a, b$$

Per tant les rectes invariants són:

$$\mathbb{L} = (a,b) + < (2,1) > \text{, amb un } (a,b) \text{ qualsevol}$$

Definició 1.22. Sigui $\mathbb{A}$ un espai afí amb $dim(\mathbb{A}) = n$, un hiperpla $\mathbb{H}$ és una subvarietat lineal de $dim(\mathbb{H}) = n-1$

Proposició 1.38. *Sigui $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicació afí, que en una referència $\mathcal{R}$ té matriu M. Llavors, els hiperplans invariants per f són els de l'equació*

$$A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + B = 0$$

amb $(A_1, \ldots, A_n, B)$ un vector propi de M^T i $(A_1, \ldots, A_n) \neq 0$

Demostració. Anomenem $V = (A_1 \dots A_n B)$ i $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$, de forma que la equació del hiperpla

$$A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n + B = 0 \iff V \cdot X = 0$$

Com M és la matriu de f, les coordenades de $f(x) = y$ en funció de les x són, si X són les coordenades de x, Y les coordenades de y:

$$Y = M \cdot X$$

Per tant si $\mathbb{H}$ és l'hiperpla $VX = 0$

$$f^{-1}(\mathbb{H}) = \{x \in \mathbb{A} : f(x) \in \mathbb{H}\} = \{X : V \cdot M \cdot X = 0\}$$

Així $\mathbb{H}$ és invarriant $\iff f(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{H} \iff \mathbb{H} \subseteq f^{-1}(\mathbb{H})$
Per tant el sistema

$$\left.\begin{aligned} VMX = 0 \\ VX = 0 \end{aligned}\right\} \text{és de rang 1} \iff VM = \lambda V$$

Com V són vectors fila, transposem tota la equació

$$M^T V^T = \lambda V^T$$

On V^T és un vector director propi de M^T amb $(A_1, \dots, A_n) \neq 0$ $\square$

Exemple 1.22. Trobar els hiperplans invariants de l'aplicació

$$M(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1. Trobem M^T

$$M(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Trobem els valors propis de M^T: 3, 2 i 1
veps de 1:

$$e_4 = (0,0,0,1) \implies \nexists \text{ hiperplans invariants per } \lambda = 1$$

veps de 3:

$$Ker(M^T - 3I) = Ker\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ y - 2t = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow V_3 = (1, 1, 1, \frac{1}{2})$$

$$\Longrightarrow x + y + z + \frac{1}{2} = 0$$

veps de 2:

$$\dots$$

Proposició 1.39. *$\forall f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ aplicació afí, $\exists$ una referencia (de Jordan) tal que la matriu de f en aquesta referència és una matriu de Jordan superior*

Aplicacions afins de dim 1

Sigui $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicació afí en una referència de Jordan $\mathcal{R}$, amb $dim(A) = 1$, la matriu M podria ser dels següents tipus:

- Si f té punts fixos és
  - La identitat $\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$
  - Una homotècia de rao $\lambda \neq 1 \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$
- Si f no té punts fixos és una translació $\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$

Aplicacions afins de dim 2

Sigui $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicació afí en una referència de Jordan $\mathcal{R}$, amb $dim(A) = 2$, la matriu M podria ser dels següents tipus:

- $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
  - $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} \text{Amb punts fixos:} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow f \text{ identitat} \\ \text{Sense punts fixos:} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow f \text{ translació} \end{cases}$

– $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} \text{Amb punts fixos:} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff f \text{ homologia especial} \\ \text{Sense punts fixos:} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff f \text{ composició de una homologia especial i una translació} \end{cases}$

- $\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} \text{Amb punts fixos:} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff f \text{ homologia general} \\ \text{Sense punts fixos:} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff f \text{ composició d'homologia general i translació} \end{cases}$

- $\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & & \\ 0 & \mu & \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

  – Amb punts fixos: $\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff f$ homotècia

  – Amb punts fixos: $\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

  – Amb punts fixos: $\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

2 Espais euclidis

2.1 Producte escalar

Sigui E un e.v. sobre $\mathbb{R}$

Definició 2.1. Un producte escalar sobre E és una aplicació $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ tal que

- ϕ bilineal $\iff \begin{cases} \phi(\vec{x} + \vec{x}', \vec{y}) & = & \phi(\vec{x}, \vec{y}) + \phi(\vec{x}', \vec{y}) \\ \phi(\lambda\vec{x}, \vec{y}) & = & \lambda\phi(\vec{x}, \vec{y}) \\ \phi(\vec{x}, \vec{y} + \vec{y}') & = & \phi(\vec{x}, \vec{y}) + \phi(\vec{x}, \vec{y}') \\ \phi(\vec{x}, \lambda\vec{y}) & = & \lambda\phi(\vec{x}, \vec{y}) \end{cases}$

- ϕ simètrica $\iff \phi(\vec{x},\vec{y}) = \phi(\vec{y},\vec{x})$

- ϕ definida positiva $\iff (\vec{x} = \vec{0} \iff \phi(\vec{x},\vec{x}) = 0) \wedge (\vec{x} \neq \vec{0} \implies \phi(\vec{x},\vec{x}) > 0)$

Denotem el producte escalar per $\phi(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y} =< \vec{x},\vec{y} >=< \vec{x}|\vec{y} >$

Exemple 2.1. Sigui $E = \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in E$, $\vec{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in E$, definim

$$\phi(\vec{x},\vec{y}) =< \vec{x},\vec{y} >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=0}^{n} x_iy_i$$

Veiem que és un producte escalar sobre E:

- ϕ bilineal?

$$\begin{array}{rcl} < \vec{x}+\vec{x}',\vec{y} > & = & \sum(x_i+x_i')y_i = \sum x_iy_i + \sum x_i'y_i =< \vec{x},\vec{y} > + < \vec{x}',\vec{y} > \\ < \lambda\vec{x},\vec{y} > & = & \sum \lambda x_iy_i = \lambda\sum x_iy_i = \lambda < \vec{x},\vec{y} > \\ < \vec{x},\vec{y}+\vec{y}' > & = & \sum x(y_i+y_i') = \sum x_iy_i + \sum x_iy_i' =< \vec{x},\vec{y} > + < \vec{x},\vec{y}' > \\ < \vec{x},\lambda\vec{y} > & = & \sum x_i\lambda y_i = \lambda\sum x_iy_i = \lambda < \vec{x},\vec{y} > \end{array}$$

- ϕ simètrica?
  Per la commutativa de la $\cdot$ en els $\mathbb{R}$

$$< \vec{x},\vec{y} >= \sum x_iy_i = \sum y_ix_i =< \vec{y},\vec{x} >$$

- ϕ definida positiva?

$$\vec{x} = 0 \iff < \vec{x},\vec{x} >= 0\cdot 0 + \cdots + 0\cdot 0 = 0$$

$$\vec{x} \neq 0 \implies < \vec{x},\vec{x} >= x_1x_1 + \cdots + x_nx_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0$$

Definició 2.2. Sigui ϕ una forma bilineal sobre E amb $dim(E)$ finita, agafem $e_1,\ldots,e_n$ una base de E y dos vectors qualsevol $x = \sum x_ie_i, y = \sum y_ie_i$. Per tant

$$\phi(x,y) = \phi(\sum x_ie_i, \sum y_ie_i) = \sum x_iy_i\phi(e_i,e_j) =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(e_1,e_1) & \cdots & \phi(e_1,e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(e_n,e_1) & \cdots & \phi(e_n,e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T\cdot G\cdot Y$$

Anomenem matriu de Gramm de ϕ en la base $\{e_i\}$ a la matriu G

$$G = (a_{ij}) = (\phi(e_i,e_j))$$

Proposició 2.1. *La forma bilineal ϕ és simètrica $\iff \phi(e_i,e_j) = \phi(e_j,e_i) \implies G$ és simètrica*

Definició 2.3. Sigui E un e.v. sobre $\mathbb{R}$ i fixem un producte vectorial sobre E, dos vectors $\vec{x}, \vec{y} \in E$ diem que són ortogonals si $< \vec{x}, \vec{y} >= 0$, i ho denotarem per $\vec{x} \perp \vec{y}$
Una base de $E, v_1, \ldots, v_n$ diem que és ortogonal si $< v_i, v_j >= 0$, si $i \neq j$
Una base de $E, v_1, \ldots, v_n$ diem que és unitaria o normalitzada si $\forall i[< v_i, v_j >= 1]$
Una base de $E, v_1, \ldots, v_n$ diem que és ortonotmal si $< v_i, v_j >= 0$, si $i \neq j$ i $\forall i[< v_i, v_j >= 1]$

$$< v_i, v_j >= \delta_{ij} \text{ delta de Kronecker}$$

Proposició 2.2. *La matriu de $<,>$ en una base ortonormal és*

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

i per tant en questa base el producte escalar és calcula, sigui $\vec{x} = \sum x_i v_i$, $\vec{y} = \sum y_i v_i$

$$< \vec{x}, \vec{y} >= \sum x_i y_i$$

Definició 2.4. Sigui A un subconjunt de E, definim l'ortogonal de A per

$$A^{\perp} = \{x \in E : \forall a \in A[< x, a >= 0]\}$$

Proposició 2.3. *1. $A^{\perp}$ és un subespai vectorial de E*

Demostració. 1. $x, y \in A^{\perp}, \lambda \in \mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} x + \lambda y \in A^{\perp}$

$$\forall a \in A[< x + \lambda, a >= \underbrace{< x, a >}_{0} + \underbrace{\lambda < y, a >}_{0} = 0] \implies x + \lambda y \in A^{\perp}$$

□