

Exercice 1. Dans chacune des deux situations données plus bas, comment placer 10 boules dont 5 sont noires et 5 sont blanches dans deux urnes de manière à maximiser la probabilité de tirer une boule blanche dans l'expérience suivante : « on choisit d'abord une urne au hasard, chaque urne ayant même probabilité d'être tirée puis on tire une boule dans l'urne choisie »

1. Première situation : on est contraints à placer 3 boules dans une urne et 7 dans l'autre ;
2. Deuxième situation : on n'a pas de contrainte sur le nombre de boules à placer dans chaque urne.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

1. Quelle est la loi de $V = X^3$?
2. Calculer $\mathbb{E}[V]$.

Exercice 3. On lance n fois ($n > 0$) une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur « Pile » est $p \in]0, 1[$. On suppose que les résultats de ces n tirages sont indépendants les uns des autres et on note X le nombre de « Pile » et Y le nombre de « Face » observés.

1. Quelles sont les lois de X et Y ?
2. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

On suppose à présent que la pièce est lancée N fois où N est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les résultats des N tirages sont indépendants les uns des autres et indépendants de la valeur de N . On note U le nombre de « Pile » et V le nombre de « Face » observés.

3. Quelle est la loi jointe de (U, N) ?
4. Quelle est la loi de U et celle de V ?
5. Montrer que U et V sont indépendantes.