

# Model Predictive Control для управления мобильным роботом

Яхин Давид

25.11.2025

# Введение

- Мобильные роботы с дифференциальным приводом (DDMR) популярны благодаря простоте и манёвренности.
- Основное назначение — точное отслеживание траектории для:
  - следования по маршруту
  - обхода препятствий
  - картографирования
- Наличие неопределённостей усложняет задачу управления.

## Адаптивные методы

- **Model Predictive Control (MPC):**
  - Прогнозирует поведение робота на основе динамических моделей
  - Оптимизирует управляющие воздействия
- **Reinforcement Learning (RL):**
  - Адаптирует стратегии управления на основе данных с датчиков

# Цель и структура работы

## Цель работы

Разработать стратегию MPC для DDMR, эффективно справляющуюся с неопределённостями и обеспечивающую точное следование по траектории.

## Этапы исследования

- Моделирование
- Экспериментальная проверка
- Оценка эффективности

## Структура работы

- ❶ Кинематическая модель DDMR
- ❷ Конструкция управления MPC
- ❸ Эксперимент
- ❹ Выводы и направления будущих исследований



# Схема роботизированной платформы

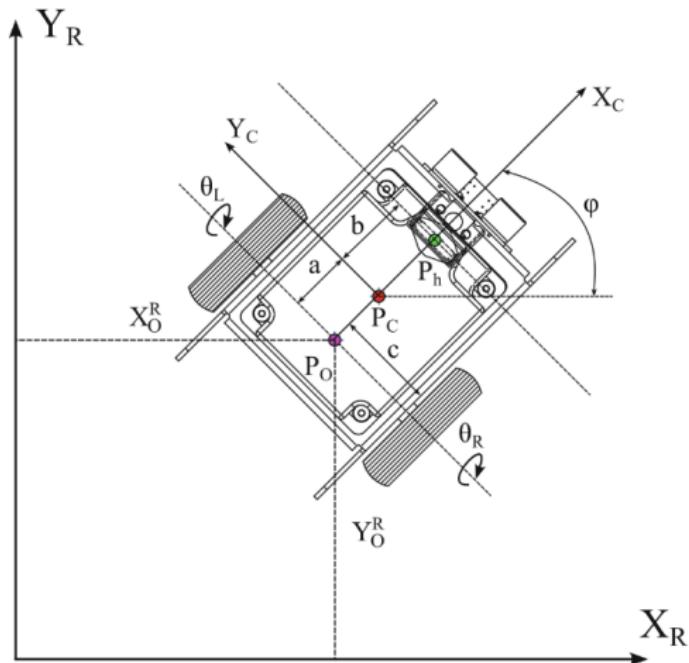


Рис.: Схема анализа робота с дифференциальным приводом

# Описание системы координат

## Системы отсчёта

- **Глобальная система отсчёта  $X_R Y_R$**
- **Локальная система отсчёта  $X_C Y_C$  в центре масс  $P_C$**

## Геометрические параметры

- $a$  - расстояние от  $P_C$  до  $P_O$  (точка пересечения оси симметрии с осью колёс)
- $b$  - расстояние от  $P_C$  до  $P_h$  (расположение поворотного колеса)
- $c$  - расстояние между колесами и осью симметрии робота

# Кинематические параметры

## Угловые параметры

- $\varphi$  - угол поворота платформы относительно оси  $X_R$
- $\theta_R$  - угловое смещение правого колеса
- $\theta_L$  - угловое смещение левого колеса

## Конструкция робота

- Два ведущих колеса с отдельными двигателями постоянного тока
- Двигатели оснащены энкодерами
- Одно пассивное опорное колесо

# Кинематическая модель - постановка задачи

## Цель кинематического моделирования

Установить взаимосвязь между скоростями точки управления и скоростями исполнительных механизмов в роботизированной системе.

## Основные допущения

- Силы, действующие на систему, не учитываются
- Робот рассматривается как точечная масса
- Моделирование массы зависит от конкретной анализируемой точки

## Точки анализа

- **Точка  $P_h$**  - анализ траектории поворотного колеса
- **Точка  $P_C$**  - для систем с дополнительными компонентами (роборука, камера)

# Математическое описание положения

## Координаты точки управления

Положение точки  $P_h$  относительно глобальной системы  $X_R Y_R$ :

$$h_x = x_O^R + d \cos \varphi \quad (1)$$

$$h_y = y_O^R + d \sin \varphi \quad (2)$$

где  $d = a + b$

## Обозначения

- $x_O^R, y_O^R$  - координаты точки  $P_O$  в глобальной системе
- $\varphi$  - угол поворота платформы
- $d$  - расстояние от  $P_O$  до  $P_h$

# Вывод уравнений скорости

## Производные по времени

Вычисляем производные системы уравнений (2):

$$\frac{dh_x}{dt} = \frac{\partial h_x}{\partial x_0^R} \frac{\partial x_0^R}{\partial t} + \frac{\partial h_x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{dh_y}{dt} = \frac{\partial h_y}{\partial y_0^R} \frac{\partial y_0^R}{\partial t} + \frac{\partial h_y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4)$$

## Результирующая система (3)

$$\dot{h}_x = \nu \cos \varphi - d\omega \sin \varphi \quad (5)$$

$$\dot{h}_y = \nu \sin \varphi + d\omega \cos \varphi \quad (6)$$

$$\dot{\varphi} = \omega \quad (7)$$

# Представление в пространстве состояний

Матричная форма (уравнение 4)

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_x \\ \dot{h}_y \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -d \sin \varphi \\ \sin \varphi & d \cos \varphi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix} \quad (8)$$

Физический смысл

- $\nu$  - линейная скорость платформы
- $\omega$  - угловая скорость платформы
- $J$  - матрица Якоби, связывающая скорости в неподвижной и подвижной системах отсчёта

# Блок-схема системы управления MPC

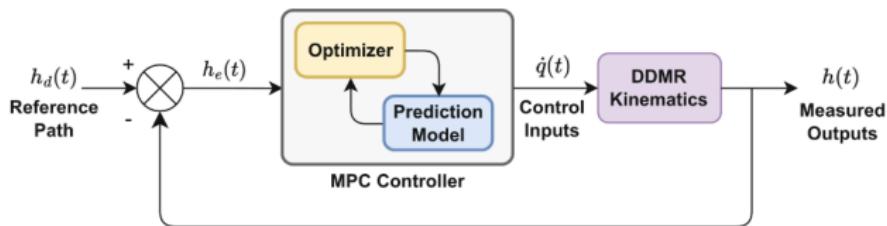


Рис.: Рис. 2: Блок-схема управления MPC для мобильного робота

# Модель прогнозирования

## Основная концепция

Модель прогнозирования отражает динамику и поведение мобильного робота, позволяя контроллеру предвидеть будущие состояния и планировать управляющие действия.

## Математическое представление (уравнение 5)

$$\dot{h}_e = f(h_e, u) \quad (9)$$

где:

$$\begin{cases} h_e = [h_{x_e} \quad h_{y_e}]^T \\ u = [v \quad \omega]^T \end{cases} \quad (10)$$

- Моделирует движение робота с учётом динамики колёс и кинематики
- Учитывает ограничения окружающей среды
- Даёт представление о поведении робота в течение

## Штраф за ошибку отслеживания ( $J$ )

Минимизация ошибки положения:

$$J_1 = \sum_{i=1}^{N_p} \|h_e(t + i|t)\|^2 \quad (11)$$

## Штраф за резкие изменения управления ( $J$ )

Обеспечение плавного движения:

$$J_2 = \sum_{i=1}^{N_p} \|\Delta u(t + i|t)\|^2 \quad (12)$$

Минимизирует резкие изменения или колебания траектории

# Функция оптимизации - дополнительные штрафные члены

## Штраф за угловую скорость ( $J$ )

Сохранение прямолинейной траектории:

$$J_3 = \sum_{i=1}^{N_p} \|\omega(t + i|t)\|^2 \quad (13)$$

Минимизирует отклонения от прямолинейного движения

## Штраф за отслеживание скорости ( $J$ )

Стабилизация продольной скорости:

$$J_4 = \sum_{i=1}^{N_p} \|v(t + i|t) - v_{ref}\|^2 \quad (14)$$

где  $N_p$  - горизонт прогнозирования



# Итоговая функция оптимизации и ограничения

## Общая функция оптимизации (уравнение 11)

$$J = \sum_{i=1}^4 J_i \quad (15)$$

## Ограничения управления (уравнение 12)

$$\Delta v \in (\Delta v_{min}, \Delta v_{max}) \quad (16)$$

$$\Delta \omega \in (\Delta \omega_{min}, \Delta \omega_{max}) \quad (17)$$

## Обозначения ограничений

- $\Delta v_{min}, \Delta v_{max}$  - границы приращения продольной скорости
- $\Delta \omega_{min}, \Delta \omega_{max}$  - границы приращения угловой скорости

# Алгоритм оптимизации MPC

---

**Algorithm 1:** Path Estimation for Differential Mobile Robot

---

**Require:** Path  $h$ , Initial angular speed  $\phi_{\text{init}}$ , Initial linear speed  $v_{\text{init}}$

**Ensure:** Estimated angular speed  $\phi_{\text{est}}$ , Estimated linear speed  $v_{\text{est}}$

- 1: Calculate the error in x-direction:  $h_{xe}(k) = h_{xd}(k) - h_x(k)$
  - 2: Calculate the error in y-direction:  $h_{ye}(k) = h_{yd}(k) - h_y(k)$
  - 3: Define the current position vector:  $h = [h_x(k), h_y(k)]$
  - 4: Define the cost function:  $J(q_p) = \text{costFunction}(h_d, h, \phi(k), q_p, a, t_s, k, N)$
  - 5: Set the optimization options for the `fmincon` function
  - 6: Optimize the cost function using `fmincon`:  
$$q_p = \mathbf{fmincon}(J, q_p, [\omega_{\text{min}}, \omega_{\text{max}}, v_{\text{min}}, v_{\text{max}}], \text{options})$$
  - 7: where:
    - 9:  $J$  is the cost function to minimize, which measures the error in following the path
  - 10:  $q_p = [\text{angular speed}, \text{linear speed}]$  is the initial guess for the angular and linear speeds
  - 11:  $[\omega_{\text{min}}, \omega_{\text{max}}, v_{\text{min}}, v_{\text{max}}]$  indicates no lower and upper bounds for the angular and linear speeds
  - 12: `options` specify the algorithmic options, such as maximum iterations, convergence tolerance, etc.
  - 13: Separate the control actions:
  - 14: Reference angular speed:  $u_{\text{Ref}}(k) = q_p(1)$
  - 15: Reference linear speed:  $w_{\text{Ref}}(k) = q_p(2)$
  - 16: **return**  $\varphi_{\text{est}}, v_{\text{est}}$
- 

Рис.: Алгоритм 1: Оптимизация управляющих воздействий с помощью `fmincon`

# Вычисление ошибок отслеживания

Ошибки по координатам (шаги 1-2)

$$h_{xe}(k) = h_{xd}(k) - h_x(k) \quad (18)$$

$$h_{ye}(k) = h_{yd}(k) - h_y(k) \quad (19)$$

Текущий вектор положения (шаг 3)

$$h = [h_x(k), h_y(k)] \quad (20)$$

Целевая функция (шаг 4)

$$J(q_p) = \text{costFunction}(h_d, h, \phi(k), q_p, a, t_s, k, N) \quad (21)$$

# Процесс оптимизации с fmincon

## Функция fmincon (шаги 5-7)

$$q_p = \text{fmincon}(J, q_p, [\omega_{min}, \omega_{max}, \nu_{min}, \nu_{max}], \text{options}) \quad (22)$$

## Параметры оптимизации

- $J$  - целевая функция для минимизации ошибки следования по пути
- $q_p = [\text{angular speed}, \text{linear speed}]$  - начальное предположение для угловой и линейной скоростей
- $[\omega_{min}, \omega_{max}, \nu_{min}, \nu_{max}]$  - ограничения на угловую и линейную скорости
- **options** - алгоритмические настройки (максимум итераций, допуск сходимости и т.д.)

# Среда моделирования

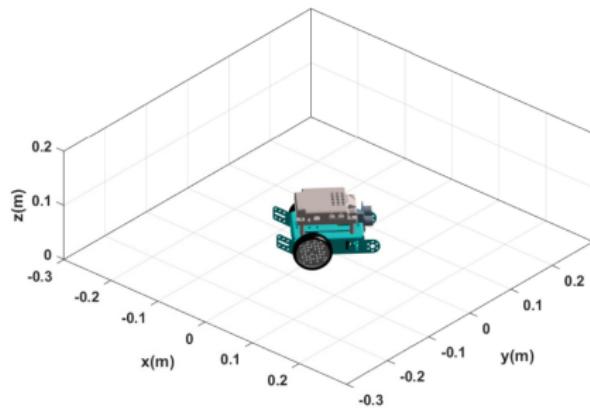


Рис.: Рис. 3: Визуальное отображение разработанной среды в масштабе одного метра

## Особенности моделирования

- Компоненты импортированы в двоичном формате STL

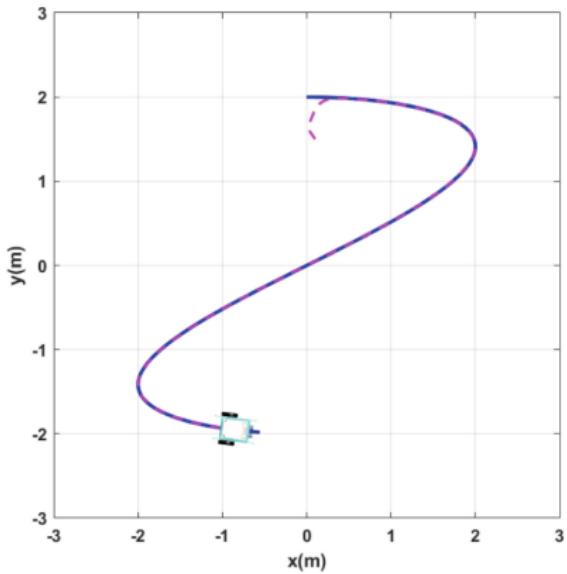


# Параметры системы управления

Таблица: Параметры системы управления

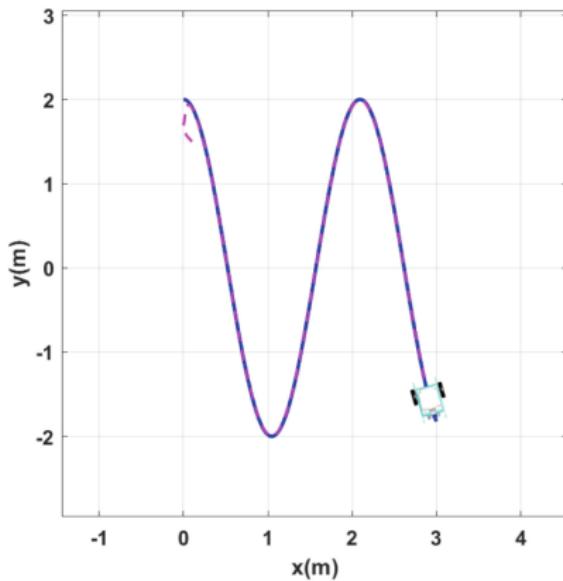
Параметр	Значение	Единицы измерения
$N_p$	5	–
$T$	0.05	секунда
$\Delta u_{min}$	0.1	м/сек
$\Delta u_{max}$	1	м/сек
$\Delta \omega_{min}$	3	рад/сек
$\Delta \omega_{max}$	13	рад/сек

# Планирование маршрута - тестовые траектории



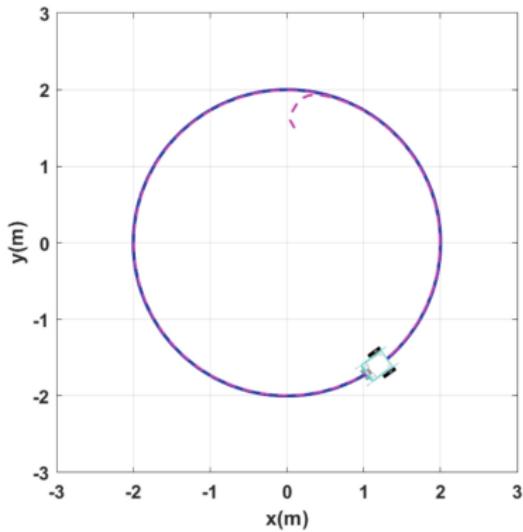
$$\begin{cases} y(t) = 2 \cos(0.3t) \\ x(t) = 2 \sin(0.3t) \end{cases}$$

# Планирование маршрута - тестовые траектории



$$\begin{cases} x(t) = 0.1t \\ y(t) = 2 \cos(0.3t) \end{cases}$$

# Планирование маршрута - сложная траектория



$$\begin{cases} y(t) = 2 \cos(0.2t) \\ x(t) = 2 \sin(0.1t) \end{cases}$$

# Эффективность управления - метрики ошибок

Таблица: Показатели погрешности для различных траекторий

Показатели ошибок	Путь 1		Путь 2		Путь 3	
	$X_C$	$Y_C$	$X_C$	$Y_C$	$X_C$	$Y_C$
MSE	$5.02 \times 10^{-5}$	$1.68 \times 10^{-4}$	$4.31 \times 10^{-5}$	$1.37 \times 10^{-4}$	$3.96 \times 10^{-4}$	$1.08 \times 10^{-5}$
RMSE	$7.08 \times 10^{-3}$	$1.29 \times 10^{-2}$	$6.57 \times 10^{-3}$	$1.17 \times 10^{-2}$	$1.99 \times 10^{-2}$	$3.29 \times 10^{-3}$
IAE	$3.14 \times 10^{-4}$	$6.57 \times 10^{-4}$	$8.15 \times 10^{-4}$	$1.65 \times 10^{-3}$	$4.52 \times 10^{-3}$	$7.03 \times 10^{-4}$
ISE	$2.66 \times 10^{-6}$	$8.92 \times 10^{-6}$	$6.39 \times 10^{-6}$	$2.03 \times 10^{-5}$	$9.18 \times 10^{-5}$	$2.51 \times 10^{-6}$

## Вывод

Полученные погрешности превышают порядок  $10^{-4}$ , что свидетельствует об эффективности разработанного элемента управления.

# Результаты отслеживания - Путь 1

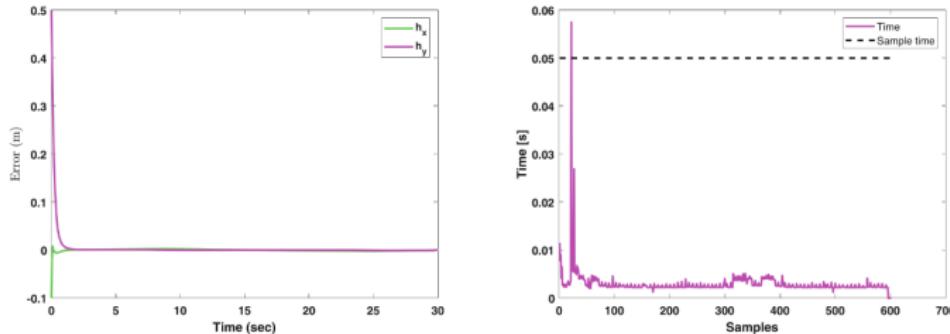


Рис.: Рис. 7: (а) Ошибки пути, (б) Время выполнения - Путь 1

## Параметры моделирования

- Время моделирования: 30 секунд
- Количество выборок: 600
- Высокие пики в начале пути соответствуют начальному переходу на траекторию

# Результаты отслеживания - Путь 2

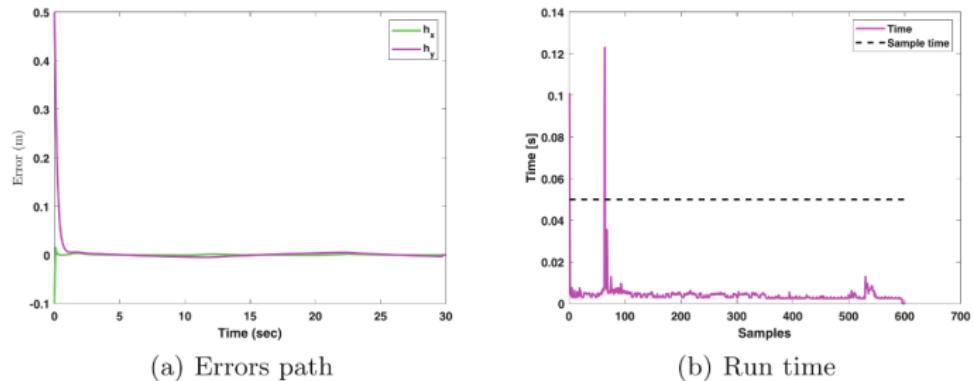


Рис.: Рис. 8: (а) Ошибки пути, (б) Время выполнения - Путь 2

## Особенности

- Намеренное отклонение стартовой позиции для оптимизации решения
- Пик соответствует времени достижения начальной точки траектории



## Результаты отслеживания - Путь 3

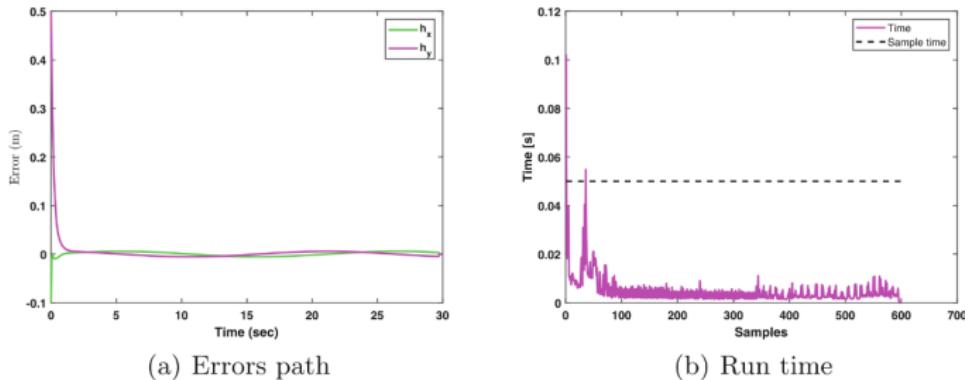


Рис.: Рис. 9: (а) Ошибки пути, (б) Время выполнения - Путь 3

### Наиболее сложная траектория

- Наибольшие трудности для контроллера
- Амплитуда выборок со временем искажается сильнее
- Сложность кругового пути требует постоянной коррекции



# Практическое применение и значимость

## Области применения

- **Автономная навигация в чувствительных средах:**
  - Больницы - точность crucial для обхода препятствий и безопасности
  - Склады - точное перемещение в ограниченном пространстве
- **Проверка критической инфраструктуры:**
  - Трубопроводы - точное следование траекториям
  - Линии электропередачи - сбор точных данных

## Преимущества подхода

- Исключительно низкие погрешности (порядка  $10^{-4}$ )
- Высокая точность управления мобильными роботами
- Большой потенциал для широкого спектра реальных приложений

# Выводы

## Основные достижения

- Разработана стратегия MPC для DDMR, эффективно справляющаяся с неопределённостями
- Обеспечено точное следование по траектории с погрешностями порядка  $10^{-4}$
- Проведено моделирование и экспериментальная проверка

## Направления будущих исследований

- Дальнейшее улучшение точности отслеживания траекторий
- Расширение метода для работы в более сложных условиях
- Интеграция с другими методами управления
- Применение в реальных промышленных сценариях

