

Model Predictive Control для управления мобильным роботом

Яхин Давид

25.11.2025

- Мобильные роботы с дифференциальным приводом (DDMR) популярны благодаря простоте и манёвренности.
- Основное назначение — точное отслеживание траектории для:
 - следования по маршруту
 - обхода препятствий
 - картографирования
- Наличие неопределённостей усложняет задачу управления.

Адаптивные методы

- **Model Predictive Control (MPC):**
 - Прогнозирует поведение робота на основе динамических моделей
 - Оптимизирует управляющие воздействия
- **Reinforcement Learning (RL):**
 - Адаптирует стратегии управления на основе данных с датчиков

Цель и структура работы

Цель работы

Разработать стратегию MPC для DDMR, эффективно справляющуюся с неопределённостями и обеспечивающую точное следование по траектории.

Этапы исследования

- Моделирование
- Экспериментальная проверка
- Оценка эффективности

Структура работы

- 1 Кинематическая модель DDMR
- 2 Конструкция управления MPC
- 3 Эксперимент
- 4 Выводы и направления будущих исследований

Схема роботизированной платформы

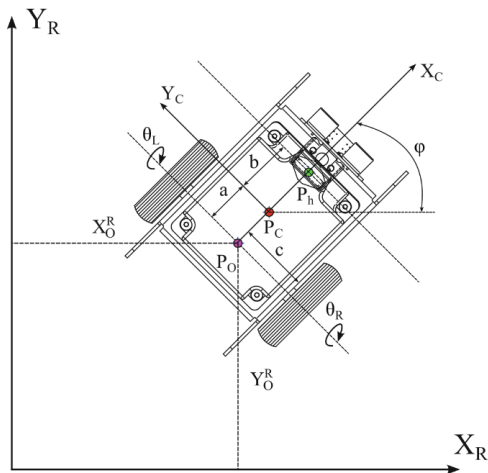


Рис.: Схема анализа робота с дифференциальным приводом

Системы отсчёта

- Глобальная система отсчёта $X_R Y_R$
- Локальная система отсчёта $X_C Y_C$ в центре масс P_C

Геометрические параметры

- a - расстояние от P_C до P_O (точка пересечения оси симметрии с осью колёс)
- b - расстояние от P_C до P_h (расположение поворотного колеса)
- c - расстояние между колесами и осью симметрии робота

Угловые параметры

- φ - угол поворота платформы относительно оси X_R
- θ_R - угловое смещение правого колеса
- θ_L - угловое смещение левого колеса

Конструкция робота

- Два ведущих колеса с отдельными двигателями постоянного тока
- Двигатели оснащены энкодерами
- Одно пассивное опорное колесо

Кинематическая модель - постановка задачи

Цель кинематического моделирования

Установить взаимосвязь между скоростями точки управления и скоростями исполнительных механизмов в роботизированной системе.

Основные допущения

- Силы, действующие на систему, не учитываются
- Робот рассматривается как точечная масса
- Моделирование массы зависит от конкретной анализируемой точки

Точки анализа

- **Точка P_h** - анализ траектории поворотного колеса
- **Точка P_C** - для систем с дополнительными компонентами (роборука, камера)

Координаты точки управления

Положение точки P_h относительно глобальной системы $X_R Y_R$:

$$h_x = x_O^R + d \cos \varphi \quad (1)$$

$$h_y = y_O^R + d \sin \varphi \quad (2)$$

где $d = a + b$

Обозначения

- x_O^R, y_O^R - координаты точки P_O в глобальной системе
- φ - угол поворота платформы
- d - расстояние от P_O до P_h

Вывод уравнений скорости

Производные по времени

Вычисляем производные системы уравнений (2):

$$\frac{dh_x}{dt} = \frac{\partial h_x}{\partial x_0^R} \frac{\partial x_0^R}{\partial t} + \frac{\partial h_x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{dh_y}{dt} = \frac{\partial h_y}{\partial y_0^R} \frac{\partial y_0^R}{\partial t} + \frac{\partial h_y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4)$$

Результирующая система (3)

$$\dot{h}_x = \nu \cos \varphi - d\omega \sin \varphi \quad (5)$$

$$\dot{h}_y = \nu \sin \varphi + d\omega \cos \varphi \quad (6)$$

$$\dot{\varphi} = \omega \quad (7)$$

Матричная форма (уравнение 4)

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_x \\ \dot{h}_y \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -d \sin \varphi \\ \sin \varphi & d \cos \varphi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix} \quad (8)$$

Физический смысл

- ν - линейная скорость платформы
- ω - угловая скорость платформы
- J - матрица Якоби, связывающая скорости в неподвижной и подвижной системах отсчёта

Блок-схема системы управления МРС

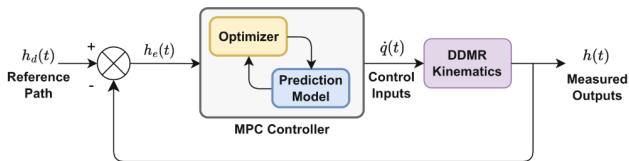


Рис.: Рис. 2: Блок-схема управления МРС для мобильного робота

Модель прогнозирования

Основная концепция

Модель прогнозирования отражает динамику и поведение мобильного робота, позволяя контроллеру предвидеть будущие состояния и планировать управляющие действия.

Математическое представление (уравнение 5)

$$\dot{h}_e = f(h_e, u) \quad (9)$$

где:

$$\begin{cases} h_e = [h_{x_e} & h_{y_e}]^T \\ u = [v & \omega]^T \end{cases} \quad (10)$$

- Моделирует движение робота с учётом динамики колёс и кинематики
- Учитывает ограничения окружающей среды
- Даёт представление о поведении робота в течение

Функция оптимизации - основные штрафные члены

Штраф за ошибку отслеживания (J)

Минимизация ошибки положения:

$$J_1 = \sum_{i=1}^{N_p} \|h_e(t + i|t)\|^2 \quad (11)$$

Штраф за резкие изменения управления (J)

Обеспечение плавного движения:

$$J_2 = \sum_{i=1}^{N_p} \|\Delta u(t + i|t)\|^2 \quad (12)$$

Минимизирует резкие изменения или колебания траектории

Функция оптимизации - дополнительные штрафные члены

Штраф за угловую скорость (J)

Сохранение прямолинейной траектории:

$$J_3 = \sum_{i=1}^{N_p} \|\omega(t + i|t)\|^2 \quad (13)$$

Минимизирует отклонения от прямолинейного движения

Штраф за отслеживание скорости (J)

Стабилизация продольной скорости:

$$J_4 = \sum_{i=1}^{N_p} \|v(t + i|t) - v_{ref}\|^2 \quad (14)$$

где N_p - горизонт прогнозирования

Итоговая функция оптимизации и ограничения

Общая функция оптимизации (уравнение 11)

$$J = \sum_{i=1}^4 J_i \quad (15)$$

Ограничения управления (уравнение 12)

$$\Delta v \in (\Delta v_{min}, \Delta v_{max}) \quad (16)$$

$$\Delta \omega \in (\Delta \omega_{min}, \Delta \omega_{max}) \quad (17)$$

Обозначения ограничений

- $\Delta v_{min}, \Delta v_{max}$ - границы приращения продольной скорости
- $\Delta \omega_{min}, \Delta \omega_{max}$ - границы приращения угловой скорости

Algorithm 1: Path Estimation for Differential Mobile Robot

Require: Path h , Initial angular speed ϕ_{init} , Initial linear speed v_{init}
Ensure: Estimated angular speed ϕ_{est} , Estimated linear speed v_{est}

- 1: Calculate the error in x-direction: $h_{xe}(k) = h_{xd}(k) - h_x(k)$
- 2: Calculate the error in y-direction: $h_{ye}(k) = h_{yd}(k) - h_y(k)$
- 3: Define the current position vector: $h = [h_x(k), h_y(k)]$
- 4: Define the cost function: $J(q_p) = \text{costFunction}(h_d, h, \phi(k), q_p, a, t_s, k, N)$
- 5: Set the optimization options for the **fmincon** function
- 6: Optimize the cost function using **fmincon**:
 - 7: $q_p = \text{fmincon}(J, q_p, [\omega_{\min}, \omega_{\max}, \nu_{\min}, \nu_{\max}], \text{options})$
 - 8: where:
 - 9: J is the cost function to minimize, which measures the error in following the path
 - 10: $q_p = [\text{angular speed}, \text{linear speed}]$ is the initial guess for the angular and linear speeds
 - 11: $[\omega_{\min}, \omega_{\max}, \nu_{\min}, \nu_{\max}]$ indicates no lower and upper bounds for the angular and linear speeds
 - 12: **options** specify the algorithmic options, such as maximum iterations, convergence tolerance, etc.
- 13: Separate the control actions:
 - 14: Reference angular speed: $u_{\text{Ref}}(k) = q_p(1)$
 - 15: Reference linear speed: $w_{\text{Ref}}(k) = q_p(2)$
- 16: **return** $\phi_{\text{est}}, v_{\text{est}}$

Рис.: Алгоритм 1: Оптимизация управляющих воздействий с помощью **fmincon**

Ошибки по координатам (шаги 1-2)

$$h_{xe}(k) = h_{xd}(k) - h_x(k) \quad (18)$$

$$h_{ye}(k) = h_{yd}(k) - h_y(k) \quad (19)$$

Текущий вектор положения (шаг 3)

$$h = [h_x(k), h_y(k)] \quad (20)$$

Целевая функция (шаг 4)

$$J(q_p) = \text{costFunction}(h_d, h, \phi(k), q_p, a, t_s, k, N) \quad (21)$$

Функция fmincon (шаги 5-7)

$$q_p = \text{fmincon}(J, q_p, [\omega_{min}, \omega_{max}, \nu_{min}, \nu_{max}], \text{options}) \quad (22)$$

Параметры оптимизации

- J - целевая функция для минимизации ошибки следования по пути
- $q_p = [\text{angular speed}, \text{linear speed}]$ - начальное предположение для угловой и линейной скоростей
- $[\omega_{min}, \omega_{max}, \nu_{min}, \nu_{max}]$ - ограничения на угловую и линейную скорости
- **options** - алгоритмические настройки (максимум итераций, допуск сходимости и т.д.)

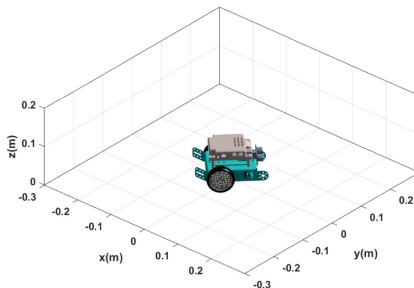


Рис.: Рис. 3: Визуальное отображение разработанной среды в масштабе одного метра

Особенности моделирования

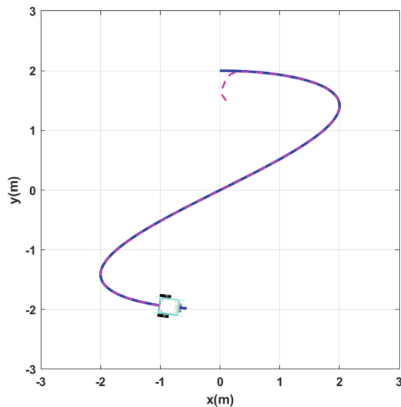
- Компоненты импортированы в двоичном формате STL

Параметры системы управления

Таблица: Параметры системы управления

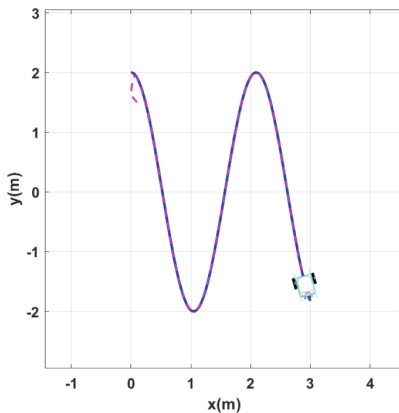
Параметр	Значение	Единицы измерения
N_p	5	—
T	0.05	секунда
Δu_{min}	0.1	м/сек
Δu_{max}	1	м/сек
$\Delta \omega_{min}$	3	рад/сек
$\Delta \omega_{max}$	13	рад/сек

Планирование маршрута - тестовые траектории



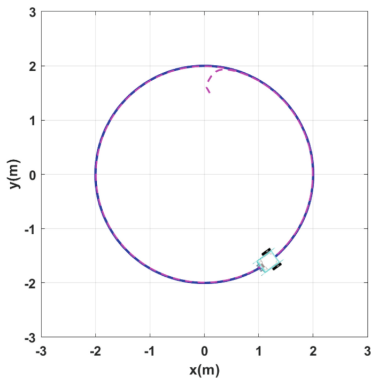
$$\begin{cases} y(t) = 2 \cos(0.3t) \\ x(t) = 2 \sin(0.3t) \end{cases}$$

Планирование маршрута - тестовые траектории



$$\begin{cases} x(t) = 0.1t \\ y(t) = 2 \cos(0.3t) \end{cases}$$

Планирование маршрута - сложная траектория



$$\begin{cases} y(t) = 2 \cos(0.2t) \\ x(t) = 2 \sin(0.1t) \end{cases}$$

Эффективность управления - метрики ошибок

Таблица: Показатели погрешности для различных траекторий

Показатели ошибок	Путь 1		Путь 2		Путь 3	
	X_C	Y_C	X_C	Y_C	X_C	Y_C
MSE	5.02×10^{-5}	1.68×10^{-4}	4.31×10^{-5}	1.37×10^{-4}	3.96×10^{-4}	1.08×10^{-5}
RMSE	7.08×10^{-3}	1.29×10^{-2}	6.57×10^{-3}	1.17×10^{-2}	1.99×10^{-2}	3.29×10^{-3}
IAE	3.14×10^{-4}	6.57×10^{-4}	8.15×10^{-4}	1.65×10^{-3}	4.52×10^{-3}	7.03×10^{-4}
ISE	2.66×10^{-6}	8.92×10^{-6}	6.39×10^{-6}	2.03×10^{-5}	9.18×10^{-5}	2.51×10^{-6}

Вывод

Полученные погрешности превышают порядок 10^{-4} , что свидетельствует об эффективности разработанного элемента управления.

Результаты отслеживания - Путь 1

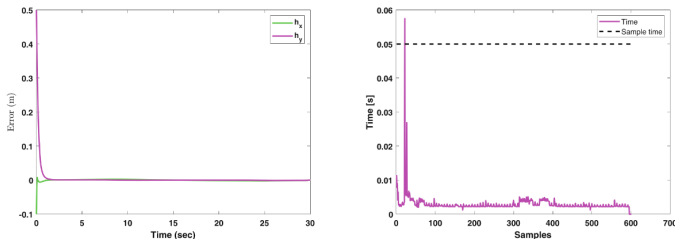
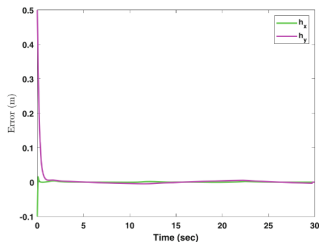


Рис.: Рис. 7: (а) Ошибки пути, (б) Время выполнения - Путь 1

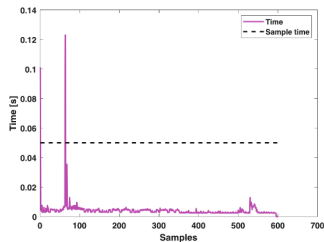
Параметры моделирования

- Время моделирования: 30 секунд
- Количество выборок: 600
- Высокие пики в начале пути соответствуют начальному переходу на траекторию

Результаты отслеживания - Путь 2



(a) Errors path



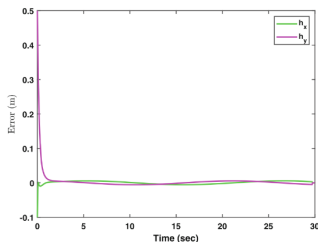
(b) Run time

Рис.: Рис. 8: (a) Ошибки пути, (b) Время выполнения - Путь 2

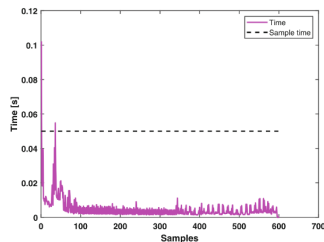
Особенности

- Намеренное отклонение стартовой позиции для оптимизации решения
- Пик соответствует времени достижения начальной точки траектории

Результаты отслеживания - Путь 3



(a) Errors path



(b) Run time

Рис.: Рис. 9: (a) Ошибки пути, (b) Время выполнения - Путь 3

Наиболее сложная траектория

- Наибольшие трудности для контроллера
- Амплитуда выборок со временем искажается сильнее
- Сложность кругового пути требует постоянной коррекции

Области применения

- **Автономная навигация в чувствительных средах:**
 - Больницы - точность crucial для обхода препятствий и безопасности
 - Склады - точное перемещение в ограниченном пространстве
- **Проверка критической инфраструктуры:**
 - Трубопроводы - точное следование траекториям
 - Линии электропередачи - сбор точных данных

Преимущества подхода

- Исключительно низкие погрешности (порядка 10^{-4})
- Высокая точность управления мобильными роботами
- Большой потенциал для широкого спектра реальных приложений

Основные достижения

- Разработана стратегия MPC для DDMR, эффективно справляющаяся с неопределённостями
- Обеспечено точное следование по траектории с погрешностями порядка 10^{-4}
- Проведено моделирование и экспериментальная проверка

Направления будущих исследований

- Дальнейшее улучшение точности отслеживания траекторий
- Расширение метода для работы в более сложных условиях
- Интеграция с другими методами управления
- Применение в реальных промышленных сценариях