МФТИ

Сверхпроводники. Куперовская пара.

Студент:	Ли Давид
Группа:	Б05-912

1 Введение

Электрон — элементарная частица, у которой есть электрический заряд и внутренний магнитный момент, связанный с ее спином (**моментом импульса**). Из-за кулоновского взаимодействия электроны в вакууме отталкиваются. Однако, в некоторых металлах суммарная сила, действующая на электроны, может стать силой притяжения из-за колебаний решетки. Когда температура металла достаточно низкая (ниже некоторой критической температуры T_c), электроны с противоположными импульсами и противоположными спинами могу образовывать куперовские пары. Образуя куперовскую пару, каждый из электронов уменьшает свою энергию на величину Δ по сравнению с электроном, свободно движущемся в металле. Энергия свободно движущегося электрона равна $\frac{p^2}{2m_e}$, где p — импульс электрона, а m_e — его масса. Куперовские пары могут перемещаться без сопротивления, и металл при этом становится сверхпроводником.

Однако, даже при температурах ниже T_c сверхпроводимость можно разрушить, если к сверхпроводнику приложить внешнее магнитное поле. В этой задаче мы исследуем разрушение куперовских пар посредством двух эффектов.

Первый эффект — парамагнитный. В нем электроны вместо создания куперовской пары с противоположными спинами, уменьшают свою энергию, выстраивая свой магнитный момент параллельно магнитному полю.

Второй эффект — диамагнитный. В нем магнитное поле изменяет орбитальное движение куперовских пар и увеличивает их энергию. Когда приложенное магнитное поле превысит некоторое критическое значение B_c, увеличение энергии становится больше чем 2Δ . В результате, электронам становится невыгодно образовывать куперовские пары.

Недавно был открыт новый тип сверхпроводников — сверхпроводники Изинга. Они не утрачивают свойство сверхпроводимости даже когда к ним приложено поле в 60 Тесла. А это сравнимо с максимальной силой полей, которые создаются сегодня в лабораториях. Мы исследуем, как сверхпроводники Изинга могут преодолеть парамагнитный и диамагнитный эффекты.

2 Электрон в магнитном поле

Рассмотрим виток радиуса r, полный заряд которого $-e$, а масса — m. Масса и заряд распределены по витку равномерно (Рис. 1).

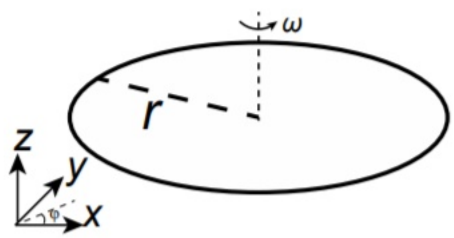

Рис. 1:

Подсчитаем угловой момент:

$$\vec{L} = \vec{r}\vec{e_r} \times \vec{e_\varphi} \int_0^{2\pi} \frac{mv}{2\pi r} r\, d\varphi.$$

Здесь $\vec{e_r}$ единичный вектор направлен от центра кольца к точке массы на кольце и $\vec{e_\varphi}$ является единичным вектором, параллельным направлению линейной скорости в точке массы.

Мы знаем, что $v = \omega r$,наконец ,мы можем получить:

$$\vec{L} = m\omega r^2 \vec{e_z},$$

где $\vec{e_z} = \vec{e_r} \times \vec{e_\varphi}$.

Величина магнитного момента определяется как $|\vec{M} = IA|$, где I — это ток, а A — площадь витка. Ток может быть выражен как:

$$I = -ef = -e\frac{\omega}{2\pi}.$$

Окончательно:

$$\vec{M} = -e\frac{\omega}{2\pi}\pi r^2 \vec{e_z} = -\frac{e\vec{L}}{2m}.$$

Пусть $\vec{n}$ — нормаль к витку, и она составляет угол θ с приложенным магнитным полем (Рис. 2).

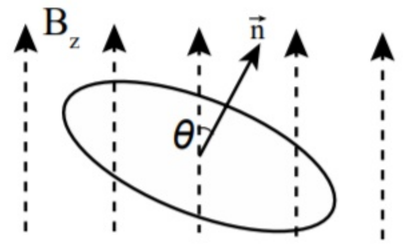

Рис. 2:

Рассмотрим кольцо, помещенное в однородное магнитное поле индукцией B_z, которое направлено вдоль оси z. Потенциальная энергия такой системы:

$$U = -W = -\vec{M} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} e\omega r^2 B_z cos\theta$$

У электрона есть собственный момент импульса (спин). **Его величина в определенном направлении равна** $\hbar/2$, где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка. Электроны помещены в магнитное поле. Вычислим тогда потенциальную энергию электронов U_{up} и U_{down}, чьи спины параллельны полю и антипараллельны, соответственно. Мы предполагаем, что магнитное поле находится вдоль направления z так, что $\vec{B} = B\vec{e_z}$ тогда в общем случае:

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -M_z B.$$

Магнитный момент электрона должен быть равен:

$$M_z = \frac{-e}{2m_e} S_z.$$

Следовательно

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\frac{-e}{2m_e} S_z B = \frac{\mu_B}{\hbar} S_z B = \frac{1}{2} \mu_B B.$$

Здесь $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ — это Магнетон Бора. Из квантовой механики известно, что потенциальные энергии $U_{up}^{\sim}$ и $U_{down}^{\sim}$ два раза больше значений U_{up} и U_{down}. Пусть приложено магнитное поле индукцией 1 Тесла. Тогда вычислим потенциальные энергии электрона $U_{up}^{\sim}$ и $U_{down}^{\sim}$, чей спин параллелен и антипараллелен приложенному полю соответственно. Для спинового параллельного состояния $S_z = \frac{1}{2}\hbar$ мы имеем:

$$U = 5.788 \times 10^{-5} eV.$$

Для спинового антипараллельного состояния $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$ мы имеем:

$$U = -5.788 \times 10^{-5} eV.$$

3 Парамагнитный эффект магнитного поля на куперовские пары

В этой части задачи мы исследуем парамагнитный эффект приложенного внешнего магнитного поля на куперовские пары (Рис. 3).

Рис. 3:

Теоретические расчеты показывают, что в сверхпроводниках два электрона могут образовывать куперовскую пару, при этом общая энергия системы уменьшается. Энергия куперовской пары может быть записана как

$$\frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} - 2\Delta$$

где первые два члена соответствуют кинетической энергии куперовской пары, а последний — уменьшению энергии из-за создания куперовской пары. Здесь, Δ — положительная постоянная.

Будем считать, что магнитное поле действует только на спин электронов, а не на их орбитальное движение. Тогда найдем энергию E_S куперовской пары, помещенной в однородное магнитное поле $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$. Напомним, что у электронов, образующих куперовскую пару, противоположные спины. В состоянии сверхпроводимости электроны, образующие Куперовскую пару, имеют противоположные спины, поэтому внешнее магнитное поле не может оказывать никакого влияния на куперовскую пару. Таким образом, энергия куперовской пары не изменяется.

$$E_s = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\Delta$$

В нормальном (не сверхпроводящем) состоянии электроны не образуют куперовские пары. Поле $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$ однородно и направлено вдоль плоскости в направлении оси x. Вычислим минимальную энергию двух электронов E_n в этом поле. Действием магнитного поля на орбитальное движение электронов будем пренебрегать. В нормальном состоянии два электрона будут выравнивать свои магнитные моменты параллельно внешнему магнитному полю. Поэтому мы имеем

$$E_N = \frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} + \frac{2\mu_B S_{1x} B_x}{\hbar} + \frac{2\mu_B S_{2x} B_x}{\hbar}$$

Здесь потенциальная энергия электронов должна быть вдвое больше классической оценки по квантовой механике. Поскольку $S_{1x} = S_{2x} = -\frac{1}{2}\hbar$ мы можем сделать магнитный момент выровненным вдоль направления x, в конечном итоге мы имеем

$$E_N = \frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} - 2\mu_B B_x = \frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} - \frac{e\hbar}{m_e} B_x$$

Когда температура равна нулю, система **займет** состояние с минимальной энергией. Сверхпроводимость исчезает, если индукция поля превысит критическое значение B_p (т.е. при $|\vec{B}| > B_p$). Вычислим критическое значение B_p. Зная, что:

$$E_N < E_S \Rightarrow 2B_x\mu_B > 2\Delta \Rightarrow B_x > \frac{\Delta}{\mu_B}.$$

Таким образом

$$B_p = \frac{\Delta}{\mu_B} = \frac{2m_e\Delta}{e\hbar}.$$

Примечание: приведенное выше простое рассмотрение верхнего критического поля B_p по сравнению с оценкой его значения. Строгий вывод с учетом намагниченности Паули и энергии конденсации сверхпроводимости даст

$$B_p = \frac{\Delta}{\sqrt{2}\mu_B} = \sqrt{2}\frac{m_e\Delta}{e\hbar}.$$

4 Диамагнитный эффект магнитного поля на куперовские пары

В этой части задачи можно пренебречь действием магнитного поля на спины электронов. Мы рассмотрим действие внешнего магнитного поля на орбитальное движение куперовских пар. Когда температура равна нулю, а сверхпроводник находится в магнитном поле $\overrightarrow{B} = (0, 0, B_z)$, то разность энергий между сверхпроводящим состоянием и нормальным состоянием может быть записана

$$F = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi \left(-\alpha\psi - \frac{\hbar^2}{4m_e}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{e^2 B_z^2 x^2}{m_e}\psi \right) dx$$

Здесь $\psi(x)$ - функция, зависящая от x и не зависящая от y. $\psi(x)^2$ задает вероятность найти куперовскую пару вблизи положения x. Здесь α — постоянная, и она связана с уменьшением энергии при образовании куперовской пары. Второй и третий члены в F связаны с кинетической энергией куперовской пары, учитывая действие магнитного поля. Когда температура равна нулю, система минимизирует свою энергию F. В этом случае функция $\psi(x)$ может быть записана в виде

$$\psi(x) = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\lambda x^2},$$

где $\lambda > 0$. Подставляя последнее выражение в $F(\psi)$, мы получим

$$F(\psi) = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \left[-\alpha e^{-\lambda x^2} - \frac{\hbar}{4m_e}(-2\lambda e^{-\lambda x^2} + 4\lambda^2 x^2 e^{-\lambda x^2}) + \frac{e^2 B_z^2 x^2}{m_e} e^{-\lambda x^2} \right] dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(-\alpha + \frac{\hbar^2\lambda}{2m_e}\right) e^{-2\lambda x^2} + \left(\frac{e^2 B_z^2}{m_e} - \frac{\hbar^2\lambda^2}{m_e}\right) x^2 e^{-2\lambda x^2} \right] dx =$$

$$= -\alpha + \frac{\hbar^2\lambda}{2m_e} + \left(\frac{e^2 B_z^2}{m_e} - \frac{\hbar^2\lambda^2}{m_e}\right) \cdot \frac{1}{4\lambda} =$$

$$= -\alpha + \frac{\hbar^2\lambda}{4m_e} + \frac{e^2 B_z^2}{4\lambda m_e}$$

Мы можем трактовать $F(\psi)$, как функцию, зависящую от λ. Таким образом, мы имеем

$$F(\psi) = -\alpha + \frac{\hbar^2\lambda}{4m_e} + \frac{e^2 B_z^2}{4\lambda m_e}$$

, и

$$\frac{dF}{d\lambda} = \frac{\hbar^2}{4m_e} - \frac{e^2 B_z^2}{4m_e\lambda^2}.$$

$F(\psi)$ принимает минимальное значение, когда

$$\frac{dF}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d^2F}{d\lambda^2} > 0.$$

Таким образом

$$\frac{\hbar^2}{4m_e} - \frac{e^2B_z^2}{4m_e\lambda^2} = 0$$

В конечном итоге, мы получаем

$$\lambda = \frac{eB_z}{\hbar}$$

Условие $\frac{d^2F}{d\lambda^2} > 0$ легко доказывается при $\lambda = \frac{eB_z}{\hbar}$

Вычислим критическое значение индукции поля B_zкогда сверхпроводящее состояние перестает быть энергетически выгодным. Минимум значения $F(\psi)$ равно

$$F_{\min}(\psi) = \frac{\hbar eB_z}{2m_e} - \alpha.$$

При критическом значении B_z, значение F равняется нулю, то есть

$$\frac{\hbar eB_z}{2m_e} - \alpha = 0.$$

Следовательно, $B_z = \frac{2m_e\alpha}{e\hbar}$.

5 Сверхпроводники Изинга

В веществах со спин-орбитальным взаимодействием (спин-спиновым взаимодействием можно пренебречь) на электрон, обладающий импульсом $\vec{p}$, действует внутреннее магнитное поле $\vec{B_{1\perp}} = (0, 0, -B_z)$. С другой стороны, на электрон, обладающий импульсом $-\vec{p}$, действует противоположно направленное магнитное поле $\vec{B_{2\perp}} = (0, 0, B_z)$. Эти внутренние магнитные поля действуют только на спины электронов(Рис. 4). Такие сверхпроводники называются сверхпроводниками Изинга.

Рис. 4: Два электрона образуют куперовскую пару. На электрон 1, обладающий импульсом $\vec{p}$ действует магнитное поле $\vec{B_{1\perp}} = (0, 0, -B_z)$, а на электрон 2, обладающий импульсом $-\vec{p}$,действует противоположно направленное магнитное поле $\vec{B_{2\perp}} = (0, 0, B_z)$. Внутренние магнитные поля обозначены штриховыми стрелками.

Найдем энергию E_I куперовской пары в сверхпроводнике Изинга.

$$E_I = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\Delta - \frac{2\mu_B S_{1z} B_z}{\hbar} + \frac{2\mu_B S_{2z} B_z}{\hbar}$$

Подставляя $S_{1z} = \frac{1}{2}\hbar, S_{2z} = -\frac{1}{2}\hbar$, получим

$$\begin{aligned} E_I = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\Delta - \frac{2\mu_B S_{1z} B_z}{\hbar} + \frac{2\mu_B S_{2z} B_z}{\hbar} = \\ = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\Delta - \frac{2\mu_B B_z}{2} - \frac{2\mu_B B_z}{2} = \\ = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\Delta - 2\mu_B B_z = \\ = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\Delta - \frac{e\hbar}{m_e} B_z \end{aligned}$$

Пусть к веществу, где есть спин-орбитальное взаимодействие, вдоль плоскости приложено однородное магнитное поле $B_{||} = (\vec{B}_x, 0, 0)$.. Найдем тогда энергию двух электронов $E_{||}$. Будем считать, что внутренние магнитные поля по-прежнему действуют и направлены перпендикулярно $\vec{B}_{||}$. Также будем пренебрегать действием поля, направленного вдоль плоскости, на орбитальное движение куперовских пар.

В нормальном состоянии электроны будут выравниваться по магнитному моменту параллельно общему магнитному полю, таким образом получаем

$$E_{||} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{2\mu_B \vec{S_1} \cdot \vec{B_1}}{\hbar} + \frac{2\mu_B \vec{S_2} \cdot \vec{B_2}}{\hbar}$$

Для первого электрона $\vec{B_1} = (B_x, 0, -B_Z)$,
Для второго электрона $\vec{B_2} = (B_x, 0, B_z)$.
Поэтому $\vec{S_1} = -\frac{1}{2}\hbar\left(\frac{B_x}{\sqrt{B_x^2+B_z^2}}, 0, \frac{-B_z}{\sqrt{B_x^2+B_z^2}}\right)$ и $\vec{S_2} = -\frac{1}{2}\hbar\left(\frac{B_x}{\sqrt{B_x^2+B_z^2}}, 0, \frac{B_z}{\sqrt{B_x^2+B_z^2}}\right)$.
Можно сделать их магнитные моменты параллельными общему магнитному полю. В конечном итоге получаем

$$E_{||} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2\mu_B\sqrt{B_x^2 + B_z^2} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{e\hbar}{m_e}\sqrt{B_x^2 + B_z^2}$$

Тогда вычислим наконец искомое критическое индукции B_I, при $|\vec{B_{||}}| > B_I, E_{||} < E_I$. Получим:

$$E_{||} < E_{Ising} \Rightarrow 2\mu_B\sqrt{B_x^2 + B_z^2} > 2\Delta + 2\mu_B B_z \Rightarrow B_x > \frac{\sqrt{\Delta^2 + 2\Delta\mu_B B_z}}{\mu_B}.$$

Другое правильное выражение:

$$B_1 > \frac{2m_e\sqrt{\Delta^2 + \frac{e\hbar}{m_e}\Delta B_z}}{e\hbar}$$

Таким образом мы исследовали, как сверхпроводники Изинга могут преодолеть парамагнитный и диамагнитный эффекты.