

# Determinación de los parámetros cosmológicos a partir del análisis de datos de Supernovas tipo Ia

David Tacero Puerto

11 de mayo de 2020

## 1. Introducción

En la presente práctica, vamos a determinar los parámetros cosmológicos  $\Omega_M$  (densidad de materia) y  $\omega$  (ecuación de estado de la energía oscura) para distintos modelos con secciones espaciales planas, en particular, se analizarán para los modelos  $\Lambda$ CDM, *Einstein-de Sitter* y finalmente el modelo  $\omega$ CDM.

La distancia por luminosidad en un modelo cosmológico a una supernova, en función del redshift  $z$ , la densidad de materia  $\Omega_m$  y ecuación de estado para la energía oscura  $\omega$  viene dada por

$$d_L = (1+z) H_0^{-1} \int^z dy \frac{1}{\sqrt{\Omega_M(1+y)^3 + (1-\Omega_M)(1+y)^{3(1+\omega)}}} \quad (1)$$

en unidades naturales, y donde  $H_0$  es la constante de Hubble, la cual también nos indica el ritmo de expansión. A partir de (1), podemos definir el módulo de distancias

$$\mu_{th}(z, \Omega_M, \omega, \tilde{M}) = m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{Mpc} \right) + 25 = 5 \log_{10}(d_L H_0) + \tilde{M} \quad (2)$$

donde  $\tilde{M}$  en general depende de cantidades astrofísicas y de  $H_0$ , por lo que podemos suponer que es independiente del *redshift*. A partir de las medidas del módulo de distancias que observamos,  $\mu_i^{obs}$  con su error  $\sigma_{\mu i}$  para cada supernova, se puede construir la función  $\chi^2$  para (1), siendo así

$$\chi^2(\Omega_M, \omega, \tilde{M}) = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i^{obs} - \mu_{th}(z_i, \Omega_M, \omega, \tilde{M}))^2}{\sigma_{\mu i}^2} \quad (3)$$

El objetivo de la presente práctica será analizar esta función  $\chi^2$  y sacar los parámetros que mejor se ajustan a los modelos mencionados anteriormente.

## 2. Distancia por luminosidad, $d_L$ , en función del redshift $z$

Para comenzar, vamos a construir la la función (1) en unidades e  $H_0^{-1}$  y posteriormente realizar un plot de dicha función. El resultado de la gráfica se muestra en la Figura 1

Vemos el crecimiento de la distancia por luminosidad en función del redshift, que coincide para un universo con  $k=0$ , y con materia y densidad de energía oscura. El valor de  $d_L$  para  $(z, \Omega_M, \omega) = (0.5, 0.3, -1)$  está representado en la figura con la cruz naranja, y tiene un valor de

$$d_L(z, \Omega_M, \omega) = 0.66 H_0^{-1} \quad (c=1) \quad (4)$$

Encontramos que la luminosidad aparente de las Supernovas tipo Ia con  $z \ll 1$  es menor que en un modelo vacío, por lo que las observaciones conducen a un modelo en expansión.

## 3. Construcción de la función $\tilde{M}_m$ que minimiza $\chi^2$

A continuación, vamos a calcular la función  $\tilde{M}$  que minimiza la función  $\chi^2$  para ver qué valores se ajustan más a los modelos cosmológicos. Las ecuaciones usadas se complementarán en el archivo Python, por lo que no aparecerán aquí. Únicamente daremos los datos y comentaremos los resultados.

Una vez hemos definido el módulo de distancias (2) en nuestro programa, junto con la función  $\tilde{M}$  que minimiza  $\chi^2$ , obtenemos que el valor de  $\chi_m^2$  para valores de  $(\Omega_M, \omega) = (0.3, -1)$  es

$$\tilde{M}_M(z, m, dm, 0.3, -1) = 23.81, \quad \chi_M^2(0.3, -1) = 1037.178 \quad (5)$$

Al ya tener todas las funciones necesarias, comencemos a analizar los distintos modelos. Empezaremos por el modelo  $\Lambda$ CDM.

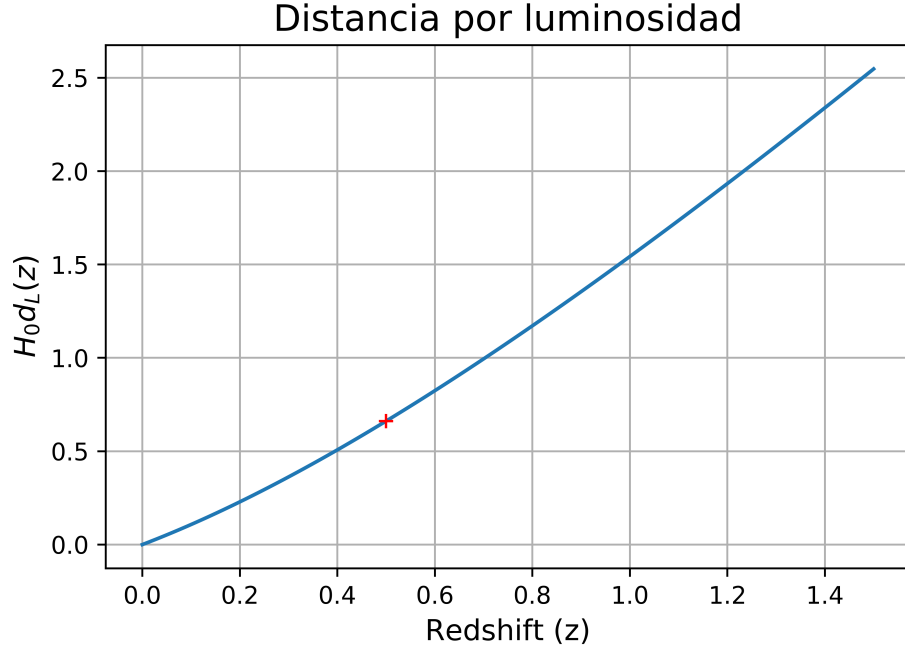


Figura 1: Distancia por luminosidad,  $d_L$ . La cruz denota el punto  $(z, \Omega_M, \omega) = (0.5, 0.3, -1)$

#### 4. Modelo $\Lambda$ CDM

En este modelo, únicamente tenemos como parámetro libre la densidad de materia,  $\Omega_M$ , ya que la densidad de energía oscura está fijada,  $\omega = -1$ .

Reescribiendo la función  $\chi^2$ , fijando el valor de  $\omega = -1$  para dejar como único parámetro libre  $\Omega_M$ , encontramos que el valor de densidad de materia que mejor se ajusta a los datos es

$$\chi_M^2 = 1036,6217, \quad \Omega_M = 0,29420 \quad (6)$$

donde para calcular el resultado en el programa, hemos hecho uso de la función *minimize*, la cuál nos proporciona directamente los valores de  $\Omega_M$  y  $\chi_M^2$ .

Podemos representar nuestra función  $\chi^2$  frente a  $\Omega_M$  y ver cómo efectivamente nuestros datos en (6) coinciden. Los resultados se muestran en la Figura 2

Observamos que el valor mínimo se corresponde con nuestros datos en (6). Calculamos ahora los errores de  $1\sigma$ , tanto por la derecha como por la izquierda. Para modelos donde tenemos un único parámetro libre, tenemos que los errores a  $1\sigma$  son

$$\Delta\chi^2(\sigma_k) = k^2, \quad \Delta\chi^2(\sigma_1) = 1 \quad (7)$$

Para el cálculo de estos valores, se ha procedido de una manera un poco diferente; se ha hecho uso de la función de interpolación *interp1d*, del programa Python. Se ha hecho uso de esta función ya que, al tratarse  $\chi^2 = \chi^2(\Omega_M)$ , para el valor de conocido de  $\chi^2$ , ( $y$ ), nos da su valor de  $\Omega_M$  correspondiente, ( $x$ ). De modo que ahora, los nuestro valor de  $\chi^2$  a  $1\sigma$  es

$$\chi_{1\sigma}^2 = \chi_{2M}^2 + 1 = 1037,62 \quad (8)$$

y su correspondiente valor de  $\Omega_M$  a  $1\sigma$  por la izquierda nos lo da la función *interp1d* y es

$$\Omega_M^- = 0,288. \quad (9)$$

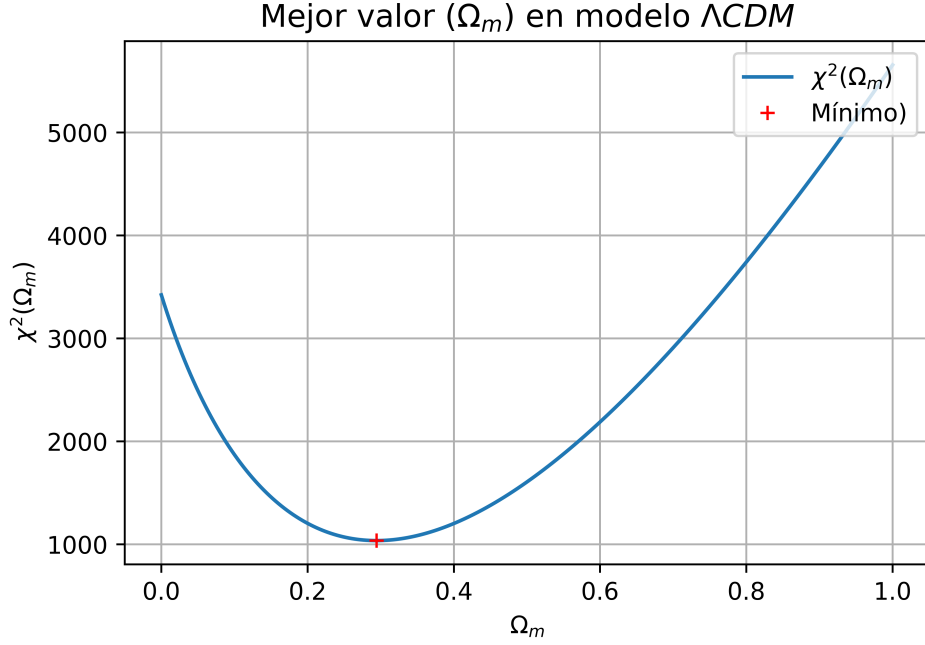


Figura 2: Mejor valor de  $\Omega_M$  en el modelo  $\Lambda$ CDM

Para calcular el valor por la derecha, si entendemos que la gráfica es simétrica respecto a su origen, la desviación del mínimo hacia la izquierda ha de ser la misma que hacia la derecha, de modo que, el error a  $1\sigma$  por la derecha es

$$\Omega_M^+ = 0,300 \quad (10)$$

De modo que, a  $1\sigma$ , tenemos un valor de  $\Omega_M$  de

$$\Omega_M(1\sigma) = [0,288, 0,300] \quad (11)$$

## 5. Modelo Einstein-de Sitter

El modelo Einstein-de Sitter es probablemente el modelo más sencillo en el que podemos trabajar, en el que se supone que el universo consiste principalmente en materia fría no relativista con densidad crítica ( $\Omega_M = 1$ ) y con  $\Omega_\Lambda = \Omega_{rad} = 0$ , y donde  $w = 0$ . Obviamente este es un modelo descartado actualmente, ya que el modelo supone un universo dominado por materia, claramente en desacuerdo con las observaciones. El modelo de Einstein-de Sitter sigue siendo una buena aproximación a nuestro universo en el pasado, en *redshift* entre 300 y 2, es decir, mucho después de la era dominada por la radiación pero antes de que la energía oscura se volviera importante. Cabe mencionar en este caso que, debido a que en un Universo Einstein-de Sitter, los cálculos no se alteran al poner  $w = 0$  o  $w = 1$ , ya que debido a que es un universo dominado por la materia, la contribución de la energía oscura es nula, por lo que, a efectos prácticos, estableceremos  $w = 0$  y será tratada como materia no relativista, cuya densidad de energía escala como  $\rho \propto a^{-3}$ . Calculando de nuevo el valor de  $\chi^2$  para este modelo, obtenemos que nos da un valor de

$$\chi^2(1, 0) = 2482,66 \quad (12)$$

y vemos que, comparando con el modelo  $\Lambda$ CDM en (6), se desvía bastante del valor. Lógico, pues sabemos que no es un modelo válido del universo actual, ya que no tuvieron en cuenta la

contribución de energía oscura.

Para calcular la desviación, tendremos en cuenta que el incremento de  $\chi^2$  es

$$\chi^2(\sigma_z) = z^2 \quad (13)$$

de modo que los sigmas que les separan a ambos modelos son

$$\delta\sigma = \sqrt{(\chi^2(1, 0) - 543) - (\chi^2(0,3, 1) - 543)} = 38,02 \quad (14)$$

Para una mejor visualización de esta desviación, vamos a representar el módulo de distancias  $\mu$  en función del redshift  $z$  para el mejor ajuste, y para el Universo de Einstein-de Sitter, justificando observacionalmente que no es el modelo correcto. Los datos de presentan en la Figura 3

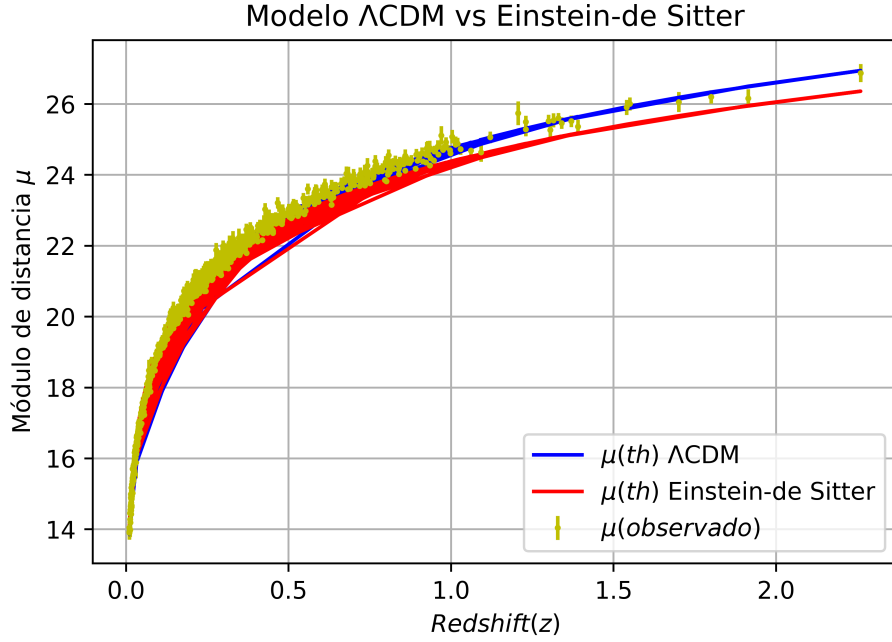


Figura 3: Módulo de distancias  $\mu$  para los modelos  $\Lambda CDM$  y Einstein-de Sitter junto con los datos de Supernovas

Como vemos, el modelo que mejor se ajusta a los datos que obtenemos de las Supernovas es el modelo  $\Lambda CDM$ , mientras que el modelo Einstein-de Sitter aparece con mucha desviación.

Podemos determinar la distancias por luminosidad,  $d_L$ , y distancia comóvil,  $d_C$  a una Supernova con  $z = 1$  para el modelo  $\Lambda CDM$  y compararlas que las que obtendríamos para un Universo Einstein-de Sitter. Sabiendo que  $H_0^{-1} = 4285 \text{ Mpc}$ , y que la distancia comóvil viene dada por

$$d_C(z) = \frac{d_L(z)}{1+z} \quad (15)$$

obtenemos, para el modelo  $\Lambda CDM$

$$d_L^\Lambda(z=1) = 6634,01 \text{ Mpc} \quad d_C^\Lambda(z=1) = \frac{d_L^\Lambda(z=1)}{2} = 3317,00 \text{ Mpc} \quad (16)$$

mientras que para el modelo Einstein-de Sitter

$$d_L^{EdS}(z=1) = 5020,18 \text{ Mpc} \quad d_C^{EdS}(z=1) = \frac{d_L^{EdS}(z=1)}{2} = 2510,09 \text{ Mpc} \quad (17)$$

donde vemos que la distancia aparente es menor para un universo de Einstein-de Sitter.

## 6. Modelo $\omega CDM$

Para finalizar, vamos a estudiar el modelo  $\omega CDM$ . En este modelo, ya no fijamos la ecuación de estado para la energía oscura  $\omega$ , si no que lo dejamos libre para obtener el mejor valor de esta. Por lo que ahora, tenemos dos parámetros libres,  $\Omega_M$  y  $\omega$ . Sabemos que la condición de aceleración de tiempo tardío, establece un valor de la ecuación del parámetro de estado  $\omega < -1/3$  ( la ecuación del parámetro de estado puede ser una constante, o bien una función del tiempo). Estableciendo ahora en nuestro programa una malla de los distintos valores que pueden tomar  $\Omega_M$  y  $\omega$ , los valores que mejor se ajustan a los datos de Supernovas de estos son

$$(\Omega_M, \omega) = (0.35, -1.23), \chi^2 = 1032.46 \quad (18)$$

Vamos a representar ahora los un gráfico de  $(\Omega_M, \omega)$  junto con los contornos de 1,2 y 3  $\sigma$ . Cabe mencionar que, al tener ahora 2 parámetros libres,  $\Delta\chi^2$  para  $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$  es

$$[2.30, 6.18, 11.83] \quad (19)$$

Presentamos los contornos, junto con los valores del mejor ajuste, en la Figura 4

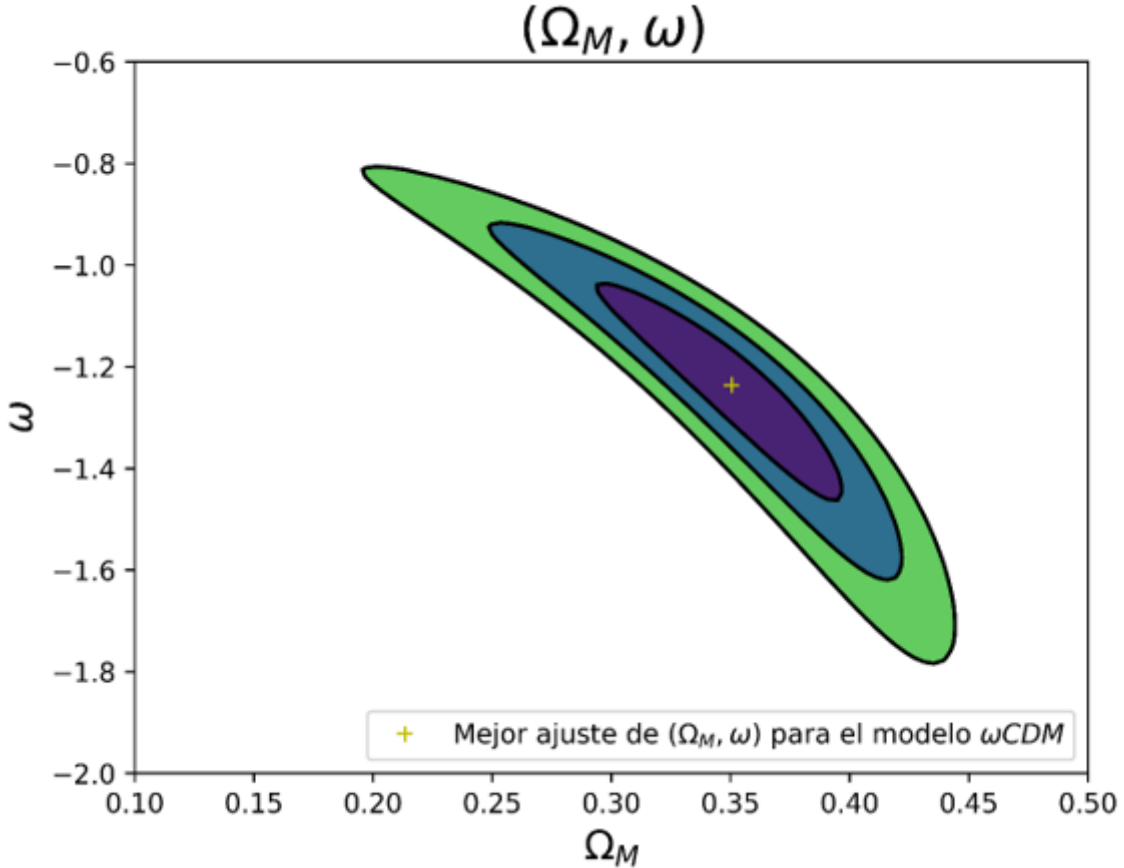


Figura 4: Contornos de 1, 2 y 3  $\sigma$  junto con el mejor ajuste de  $(\Omega_M, \omega)$  para el modelo  $\omega CDM$

En la misma gráfica, es fácil leer los errores a  $1\sigma$ . Podemos concluir que los valores que mejor se ajustan al modelo  $\omega CDM$ , con sus errores a  $1\sigma$  son

$$\Omega_M = 0.35^{+0.01}_{-0.17} \quad \omega = -1.23^{+0.19}_{-0.21} \quad (20)$$

Vemos que  $w$  cumple con la condición  $w < -1/3$ . A la vista de los datos del mejor ajuste junto con los errores, podemos concluir que el modelo  $\omega CDM$  tiene un ajuste bastante fiable de los datos observados. Actualmente, vivimos en un universo dominado por energía oscura, y con un poco de materia.