Universidad San Carlos de Guatemala

Matemática de Computo II

Ing. Diego Esteban Orozco Orozco

David Enrique Lux Barrera Carnet: 201931344

Formula de recurrencia:

(1) $C_n = 2C_{n-1} + 1$, para cualquier n mayor a 1

Dado que:

El número total mínimo de movimientos necesarios para mover la torre de n discos de una varilla a otra C_n, viene dado por la relación de recurrencia:

$$\begin{cases} C_n = 2C_{n-1} + 1 & \text{si } n \geq 1 \\ C_0 = 0 \end{cases}$$

Analizando.

$n=0 \quad C_0 = 0$

$n=1 \quad C_1 = 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2C_0 + 1$

$n=2 \quad C_2 = 3 = 2 \cdot 1 + 1 = 2C_1 + 1$

$n=3 \quad C_3 = 7 = 2 \cdot 3 + 1 = 2C_2 + 1$

$n=4 \quad C_4 = 15 = 2 \cdot 7 + 1 = 2C_3 + 1$

Demostrando claramente $n=0$ y $n=1$ es verdadero por la teoría

$$C_n = C_{n-1} + 1 + C_{n-1} = 2C_{n-1} + 1$$

Resumiendo: $C(n) = 2C_{n-1} + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k + 1$

→ El numero de movimientos minimos de cada pieza.

(2) $$C_n^p = \begin{cases} 2C_{n-1}^p & \text{si } n>p \\ 1 & \text{si } n=p \\ 0 & \text{si } n<p \end{cases}$$

Analizando:

$C_1^1 = 1$ $\quad C_1^2 = 0$ $\quad C_1^3 = 0$ $\quad C_1^4 = 0$

$C_2^1 = 2 = 2 \cdot C_1^1$ $\quad C_2^2 = 1$ $\quad C_2^3 = 0$ $\quad C_2^4 = 0$

$C_3^1 = 4 = 2 \cdot C_2^1$ $\quad C_3^2 = 2 = 2 \cdot C_2^2$ $\quad C_3^3 = 1$ $\quad C_3^4 = 0$

$C_4^1 = 8 = 2 \cdot C_3^1$ $\quad C_4^2 = 4 = 2 \cdot C_3^2$ $\quad C_4^3 = 2 = 2C_3^3$ $\quad C_4^4 = 1$

Demostrando: $n<p$, no hay pieza cuando jugamos y se verifica que no se mueve

$$C_n^p = 0$$

$n=p$, si el disco es mayor y solamente se mueve 1 vez de la varilla inicial.

$$C_p^p = 1$$

$n>p$, primero se mueve la torre de $n-1$ a la varilla inicial a la varilla siguiente, para despues la varilla inicial a la final.

$$C_n^p = 2C_{n-1}^p$$