1 Linguagens Formais e Expressões Regulares

1.1 Seja $A = \{a, b\}$. Determine o número de palavras sobre A tais que:

a) o comprimento é 3;
b) o comprimento é no máximo 3;
c) o comprimento não excede um dado número natural m.

1.2 Responda ao exercício anterior assumindo que A é um alfabeto com n letras.

1.3 Seja $A = \{a, b\}$. Para cada um dos seguintes conjuntos de palavras, dê exemplos de elementos e apresente uma sua caracterização alternativa.

a) $\{u \in A^* : |u| \in \mathbb{N}\}$
b) $\{u \in A^* : |u| = |u|_a\}$
c) $\{u \in A^* : u = u^2\}$
d) $\{u \in A^* : |u|_a + |u|_b < 10\}$

1.4 Sejam A um alfabeto, $x, y, z \in A^*$ e $a \in A$. Prove por indução em palavras que:

a) $x.\epsilon = x = \epsilon.x$;
b) $|x.y|_a = |x|_a + |y|_a$;
c) $x.(y.z) = (x.y).z$.

1.5 Sejam A um alfabeto e $x, y, z \in A^*$. Prove por indução no comprimento de palavras que:

a) $x.y = x.z \Rightarrow y = z$;

b) $y.x = z.x \Rightarrow y = z$.

1.6 Sejam A um alfabeto, $u \in A^*$ e $n, m \in \mathbb{N}_0$. Prove que:

a) $|u^n| = n|u|$;

b) $u^n.u^m = u^{n+m}$;

c) $(u^n)^m = u^{n\times m}$.

1.7 Sejam A um alfabeto e $x, y \in A^*$. Prove que:

a) $|x^I| = |x|$;
b) $(x^I)^I = x$;
c) $(x.y)^I = y^I.x^I$.

1.8 Sejam A um alfabeto e $x \in A^*$. Prove que, para qualquer fator y de x, existe um prefixo w de x e existe um sufixo z de x tais que $x = w.y.z$.

1.9 Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$ e a condição $P(x)$, sobre palavras em A, dada por:

$$|x|_a > |x|_b \Longrightarrow \exists u, v \in A^* : x = uav \wedge |u|_a = |u|_b.$$

a) Verifique que $P(x)$ é verdadeira para $x \in \{baaab, baaa, baa, aab\}$.

b) Mostre que $P(x)$ é verdadeira, para todo $x \in A^*$, usando indução no comprimento de palavras.

1.10 Seja $A = \{a, b\}$. Dê uma caracterização indutiva de cada uma das seguintes linguagens sobre A.

a) $\{a^n : n \in \mathbb{N}_0\}$

b) A^+

c) $\{u \in A^* : bb \text{ é sufixo de } u\}$

d) $\{a^n b^m : n, m \in \mathbb{N} \wedge n > m\}$

1.11 Cada uma das alíneas seguintes define indutivamente uma linguagem L sobre $A = \{a, b\}$. Apresente uma caracterização não indutiva de cada uma destas linguagens.

a) 1. $a \in L$ 2. $x \in L \Rightarrow bx \in L$ 3. $x \in L \Rightarrow xb \in L$

b) 1. $a \in L$ 2. $x \in L \Rightarrow bx \in L$ 3. $x \in L \Rightarrow xb \in L$ 4. $x \in L \Rightarrow xa \in L$

c) 1. $a \in L$ 2. $b \in L$ 3. $x \in L$ e $y \in L \Rightarrow xay \in L$ 4. $x \in L$ e $y \in L \Rightarrow xby \in L$

1.12 Sejam $A = \{a, b\}$ e L a linguagem sobre A definida indutivamente pelas regras que se seguem.

1. $a \in L$ 2. $x \in L \Rightarrow xa \in L$ 3. $x \in L \Rightarrow xb \in L$

a) Prove que $ababa \in L$ e que $baba \notin L$.

b) Enuncie o Princípio de indução para L.

c) Prove que, para qualquer $x \in L$, existe $y \in A^*$ tal que $x = ay$.

d) Prove que $L = \{ay : y \in A^*\}$.

1.13 Sejam $A = \{0, 1\}$ e L a linguagem sobre A definida indutivamente pelas regras que se seguem.

1. $\epsilon \in L$ 2. $x \in L$ e $y \in L \Rightarrow 0x1y \in L$ 3. $x \in L$ e $y \in L \Rightarrow 1x0y \in L$

a) Determine $\{u \in L : |u| \leq 4\}$.

b) Enuncie o Princípio de indução para L.

c) Prove que, para qualquer $x \in L$, $|x|$ é par.

d) Apresente uma caracterização de L que não seja indutiva e prove que, de facto, a caracterização apresentada corresponde a L.

1.14 Seja $A = \{0, 1\}$ e sejam $L_1 = \{\epsilon, 1, 01\}$ e $L_2 = \{\epsilon, 0, 10\}$. Determine as seguintes linguagens sobre A: $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \backslash L_2$, $L_1.L_2$, $L_2.L_1$, $0L_1$ e $L_1 0 L_2$.

1.15 Sejam A um alfabeto e $L, L_1, L_2 \subseteq A^*$. Mostre que:

a) se $L_1 \subseteq L_2$, então $LL_1 \subseteq LL_2$ e $L_1 L \subseteq L_2 L$;

b) pode ter-se $LL_1 \subseteq LL_2$ e $L_1 L \subseteq L_2 L$ e $L_1 \not\subseteq L_2$;

c) se $L_1 \neq \emptyset$, então $L_1 \subseteq L_1 L_2$ se e só se $\epsilon \in L_2$.

1.16 Seja $A = \{0, 1\}$ e seja L a linguagem sobre A dada por $\{1^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$. Determine:

a) L^0, L^1 e L^2;

b) L^+ e L^*.

1.17 Seja A o alfabeto $\{0, 1\}$. Dê exemplos de linguagens L_1 e L_2 sobre A de tal modo que:

a) L_1 seja uma linguagem finita e $L_1^* = A^*$;

b) L_2 seja uma linguagem infinita e $L_2 \neq L_2^*$.

1.18 Sejam A um alfabeto e L uma linguagem sobre A. Mostre que $L = L^*$ se e só se são satisfeitas as seguintes condições:

i) $\epsilon \in L$; **ii)** para todo $u, v \in L$, $uv \in L$.

1.19 Sejam A um alfabeto e L uma linguagem sobre A. Mostre que:

a) para todo $n, m \in \mathbb{N}_0$, $L^n L^m = L^{n+m}$;

b) $L^* L^* = L^*$;

c) para todo $n \in \mathbb{N}$, $(L^*)^n = L^*$;

d) $(L^*)^* = L^*$.

1.20 Sejam A um alfabeto e L, L_1, L_2 linguagens sobre A. Mostre que:

a) $(L_1 \cup L_2)^I = L_1^I \cup L_2^I$;

b) $(L_1 L_2)^I = L_2^I L_1^I$;

c) para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $(L^n)^I = (L^I)^n$;

d) $(L^*)^I = (L^I)^*$.

1.21 Seja $A = \{0, 1\}$. Para cada uma das seguintes palavras u, sobre o alfabeto $A \cup \{\emptyset, \epsilon, (,), +, \cdot, {}^*\}$, indique: i) se $u \in \mathrm{ER}(A)$ e ii) se u abrevia um elemento de $\mathrm{ER}(A)$ (de acordo com as convenções estabelecidas), indicando um elemento de $\mathrm{ER}(A)$ abreviado por u.

a) $(\epsilon.1)$ **b)** $(0.)$ **c)** $({}^*0)$ **d)** $\emptyset^*\emptyset$ **e)** 10^3 **f)** $01^* + \epsilon + 10^+$

1.22 Para cada uma das seguintes expressões regulares r, sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$, determine $\mathcal{L}(r)$.

a) $abc\epsilon$ **b)** $a(b + \emptyset c)$
c) ab^*c **d)** $(a + b)^n a$ (com $n \in \mathbb{N}_0$)
e) $a(a + b + c)^+(b + c)$ **f)** $(a + b + c)^* aa(a + b + c)^*$

1.23 Dê exemplos de palavras de "comprimento mínimo", sobre o alfabeto $\{0, 1\}$, que não pertençam à linguagem representada por cada uma das seguintes expressões regulares:

a) $\epsilon + (0^* + 1^*)(0^* + 1^*)$; **b)** $1^*(01)^*0^*$; **c)** $0^*(100^*)^*1^*$.

1.24 Prove que cada uma das seguintes linguagens sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$ é regular.

a) O conjunto das palavras que têm, pelo menos, uma ocorrência de b ou de c.
b) O conjunto das palavras de comprimento ímpar.
c) O conjunto das palavras nas quais, pelo menos, uma das letras não ocorre.

1.25 Sejam A um alfabeto e $r, r_1, r_2, s, s_1, s_2 \in \mathrm{ER}(A)$. Prove que:

a) $r \leq r^*$; **b)** $r \leq s \Rightarrow r^* \leq s^*$;
c) $r_1 \leq s_1$ *e* $r_2 \leq s_2 \Rightarrow r_1 + r_2 \leq s_1 + s_2$; **d)** $r_1 \leq s_1$ *e* $r_2 \leq s_2 \Rightarrow r_1 r_2 \leq s_1 s_2$;
e) $r_1 \leq s$ *e* $r_2 \leq s \Rightarrow r_1 + r_2 \leq s$; **f)** $r_1 \leq s^*$ *e* $r_2 \leq s^* \Rightarrow r_1 r_2 \leq s^*$.

1.26 Seja A um alfabeto e sejam $r, s \in \mathrm{ER}(A)$. Prove que:

a) $r^* = r^* r^*$; **b)** $r^* = (r^*)^*$; **c)** $(r + s)^* = (r^* + s^* s)^* = (r^* s^*)^*$.

1.27 Prove que, dadas expressões regulares r e s sobre um alfabeto A, as seguintes igualdades não são necessariamente válidas:

a) $(r + s)^* = r^* + s^*$; **b)** $(rs)^* = r^* s^*$.

1.28 Prove que o conjunto das linguagens regulares sobre um alfabeto é fechado para as operações de *união*, *concatenação*, e *fecho de Kleene*.

1.29 Para cada uma das seguintes equações lineares à direita, indique soluções alternativas em $ER(\{a, b\})$, se possível, e determine uma solução mínima em $ER(\{a, b\})$.

a) $X_1 = aX_1 + a + \epsilon$; **b)** $X_2 = (b + a)X_2 + a^*$; **c)** $Y = (ab)^* Y + a + b$.

1.30 Utilize sistemas de equações para encontrar expressões regulares que provem que cada uma das seguintes linguagens sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$ é regular:

a) o conjunto das palavras onde o número de ocorrências de a é par;
b) o conjunto das palavras em que não ocorre o fator abc;
c) o conjunto das palavras nas quais o fator ab ocorre exatamente uma vez e c não ocorre.

2 Autómatos Finitos

2.1 Considere o autómato $\mathcal{A} = (\{0,1,2\}, \{a,b\}, \delta, 0, \{2\})$ em que a função transição δ é dada pela tabela que se segue.

δ	0	1	2
a	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
b	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$

a) Represente o autómato $\mathcal{A}$ através de um grafo.

b) Para $q \in \{0,1,2\}$ e $u \in \{\epsilon, a, b, ab, ba, aab, abb\}$, determine $\delta(q,u)$.

c) Dê exemplo de palavras u de comprimento 2 tais que:

i) u é etiqueta de caminho com origem 1 e destino 2;

ii) uba é etiqueta de caminho bem sucedido;

iii) não há caminhos com origem 0 e etiqueta ua;

iv) $0 \xrightarrow{abu} 2$;

v) au é aceite por $\mathcal{A}$;

vi) au é rejeitada por $\mathcal{A}$.

d) Mostre que:

i) $\forall u \in \{a,b\}^*.\, 1 \in \delta(0, au)$;

ii) $\forall n \in \mathbb{N}.\, 2 \in \delta(1, a^n)$;

e) Mostre que, para todo $u \in \{a,b\}^*, n \in \mathbb{N}$, a palavra aua^n é reconhecida por $\mathcal{A}$.

f) Mostre que:

i) $\forall x \in \{a,b\}^*.\ 0 \xrightarrow{x} 1 \implies \exists u \in \{a,b\}^*.\, x = au$;

ii) $\forall x \in \{a,b\}^*.\ 0 \xrightarrow{x} 2 \implies \exists u \in \{a,b\}^*, n \in \mathbb{N}.\, x = aua^n$.

g) Indique $L(\mathcal{A})$ e prove a sua afirmação.

2.2 Considere o autómato $\mathcal{A} = (\{0,1,2\}, \{a,b\}, \delta, 0, \{2\})$ em que a função transição δ é dada pela tabela que se segue.

δ	0	1	2
a	$\{0\}$	$\{2\}$	$\{2\}$
b	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{2\}$

a) Represente o autómato $\mathcal{A}$ através de um grafo.

b) Indique se $\mathcal{A}$ é: i) determinista; ii) completo; iii) acessível; iv) co-acessível.

c) Dê exemplos de palavras aceites por $\mathcal{A}$ e de palavras rejeitadas por $\mathcal{A}$.

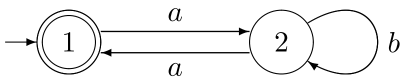
d) Descreva a linguagem reconhecida por $\mathcal{A}$ e prove a sua afirmação.

Univ. Minho — LCC/LMAT

Dep. Matemática — **Autómatos e Linguagens Formais** — 2022/2023

Exercícios — Folha 6

2.3 Considere o autómato $\mathcal{A} = (\{Q, \{a,b\}, \delta, i, F)$ representado pelo seguinte grafo.



- **a)** Explicite Q, δ, i e F.
- **b)** Dê exemplos de palavras aceites por $\mathcal{A}$ e de palavras rejeitadas por $\mathcal{A}$.
- **c)** Mostre que para qualquer $u \in \{a,b\}^*$ que seja não vazia e aceite por $\mathcal{A}$, existe $v \in \{a,b\}^*$ tal que $u = ava$.
- **d)** Descreva a linguagem reconhecida por $\mathcal{A}$.
- **e)** Classifique o autómato em relação a determinismo e a completude.

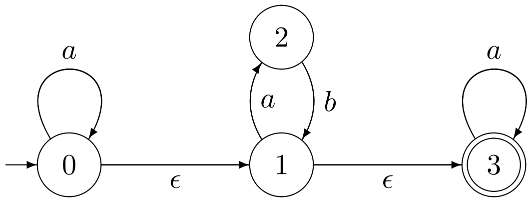
2.4 Seja $A = \{a,b\}$. Prove que é reconhecível por autómatos finitos a linguagem constituída por todas as palavras em que:

- **a)** ocorre o fator aa;
- **b)** não ocorre o fator aa;
- **c)** têm um número ímpar de ocorrências de a;
- **d)** cada ocorrência de a é precedida de uma ocorrência de b.

2.5 Para cada uma das linguagens dos dois exercícios anteriores, indique um autómato determinista e acessível que a reconheça.

2.6 Considere uma máquina de venda de café que aceita moedas de 10, 20 e 50 cêntimos, custando cada café 50 cêntimos e sendo as moedas depositadas sequencialmente. Quando a quantia depositada atinge ou excede os 50 cêntimos, a máquina fornece um café, mas não devolve troco. Construa um autómato que simule o funcionamento desta máquina.

2.7 Seja $\mathcal{A}$ o autómato com transições-ϵ e alfabeto $\{a,b\}$, dado pelo seguinte grafo:



- **a)** Calcule o fecho-ϵ de cada um dos estados de $\mathcal{A}$.
- **b)** Para cada $u \in \{a,b\}^*$ tal que $|u| \leq 2$, indique todos os caminhos com origem 0 e etiqueta u e diga se u é aceite por $\mathcal{A}$.
- **c)** Prove que $\mathcal{A}$ aceita todas as palavras da linguagem $\mathcal{L}((ab)^*)$.
- **d)** Indique uma expressão regular r tal que $L(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(r)$.
- **e)** Construa um autómato sem transições vazias que reconheça $L(\mathcal{A})$.

2.8 Seja $A = \{a,b\}$. Prove que as linguagens associadas às seguintes expressões regulares sobre A são reconhecíveis por autómatos com transições vazias:

a) $aa + ab^*$; **b)** $(aa + ab^*)^*$; **c)** $(aa + ab^*)^* bb$.