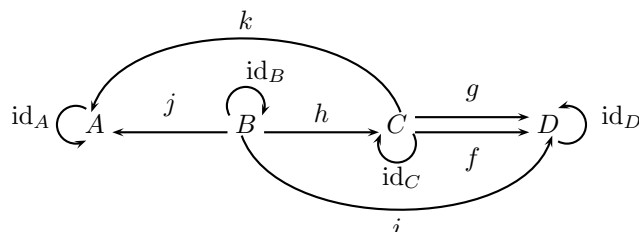


## Álgebra Universal e Categorias

2º teste (9 de junho de 2017) duração: 2 horas

1. Considere a categoria  $\mathbf{C}$  definida por

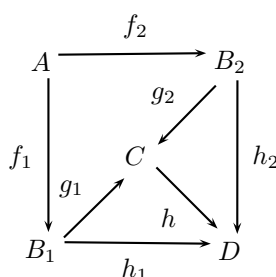


onde  $i = f \circ h = g \circ h$ ,  $j = k \circ h$ .

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- Para quaisquer  $\mathbf{C}$ -morfismos  $p : X \rightarrow Y$  e  $q : Y \rightarrow Z$ , se  $p$  não é um epimorfismo, então  $q \circ p$  não é um epimorfismo.
  - Para qualquer objeto  $X$  de  $\mathbf{C}$ , se  $X$  não é um objeto terminal da categoria  $\mathbf{C}$ , então  $(X, \text{id}_X)$  não é um objeto terminal da categoria  $\mathbf{C}/A$ . (Nota: Representa-se por  $\mathbf{C}/A$  a categoria dos objetos sobre  $A$ ).
  - O par  $(C, (\text{id}_C, f))$  é um produto de  $C$  e  $D$ .
2. Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria e  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  morfismos de  $\mathbf{C}$ . Mostre que se  $g \circ f$  é invertível à direita, então  $g$  é um epimorfismo.
3. Mostre que se  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  são categorias com objetos terminais, então a categoria  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$  também tem objetos terminais. Conclua que a categoria  $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$  tem objetos terminais. Dê um exemplo de um objeto terminal da categoria  $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$ . Justifique a sua resposta.
4. Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow A$  morfismos de uma categoria  $\mathbf{C}$  tais que  $f \circ g = \text{id}_B$ . Mostre que  $(B, f)$  é um coigualizador de  $g \circ f$  e  $\text{id}_A$ .

5. Numa categoria  $\mathbf{C}$ , considere o seguinte diagrama



Mostre que se o diagrama anterior é comutativo e  $(A, (f_1, f_2))$  é um produto fibrado de  $(h_1, h_2)$ , então  $(A, (f_1, f_2))$  é um produto fibrado de  $(g_1, g_2)$ .

6. Sejam  $X$  um conjunto e  $F_X$  a correspondência que

- a cada conjunto  $A$  associa o conjunto  $F_X(A) = A \times X$ ;
- a cada função  $f : A \rightarrow B$  associa a função

$$F_X(f) : \begin{array}{ccc} A \times X & \rightarrow & B \times X \\ (a, x) & \mapsto & (f(a), x) \end{array} .$$

- Mostre que, para qualquer conjunto  $X$ ,  $F_X$  é um funtor de  $\mathbf{Set}$  em  $\mathbf{Set}$ .
- Diga, justificando, se o funtor  $F_X$  é um funtor fiel quando: (i)  $X = \emptyset$ . (ii)  $X \neq \emptyset$ .