Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 3

13. Considere os reticulados $(R_1, \leq_1)$ e $(R_2, \leq_2)$ a seguir representados

$(P_1, \leq_1)$ $(P_2, \leq_2)$

Para cada uma das aplicações h seguintes, diga se: i. h é isótona; ii. h é um isomorfismo de reticulados.

(a) $h : R_1 \to R_1$, definida por $h(a) = a$, $h(b) = c$, $h(c) = d$, $h(d) = e$, $h(e) = e$.
(b) $h : R_1 \to R_2$, definida por $h(a) = x$, $h(b) = y$, $h(c) = z$, $h(d) = w$, $h(e) = v$.
(c) $h : R_2 \to R_1$, definida por $h(x) = a$, $h(y) = b$, $h(z) = c$, $h(w) = d$, $h(v) = e$.
(d) $h : R_2 \to R_2$, definida por $h(x) = x$, $h(y) = z$, $h(z) = y$, $h(w) = w$, $h(v) = v$.

14. Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1, \wedge_1, \vee_1)$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2, \wedge_2, \vee_2)$ reticulados e $h : R_1 \to R_2$ um homomorfismo de reticulados. Mostre que:

(a) Se $(S_1, \wedge_1', \vee_1')$ é um subreticulado de $\mathcal{R}_1$, então $(h(S_1), \wedge_2', \vee_2')$, onde $\wedge_2'$ e $\vee_2'$ são as correspondências definidas por
$$x \wedge_2' y = x \wedge_2 y, \quad x \vee_2' y = x \vee_2 y, \quad \forall x, y \in h(S_1),$$
é um subreticulado de $\mathcal{R}_2$.

(b) Se $(S_2, \wedge_2', \vee_2')$ é um subreticulado de $\mathcal{R}_2$ e $h^{\leftarrow}(S_2) \neq \emptyset$, então $(h^{\leftarrow}(S_2), \wedge_1', \vee_1')$, onde $\wedge_1'$ e $\vee_1'$ são as correspondências definidas por
$$x \wedge_1' y = x \wedge_1 y, \quad x \vee_1' y = x \vee_1 y, \quad \forall x, y \in h^{\leftarrow}(S_2),$$
é um subreticulado de $\mathcal{R}_1$.

15. Mostre que se $(P, \leq)$ é um c.p.o. tal que, para todo $H \subseteq P$, existe $\inf H$, então $(P, \leq)$ é um reticulado completo.

16. Mostre que todo o reticulado finito é algébrico.

17. Justifique que cada um dos reticulados a seguir indicados é algébrico:

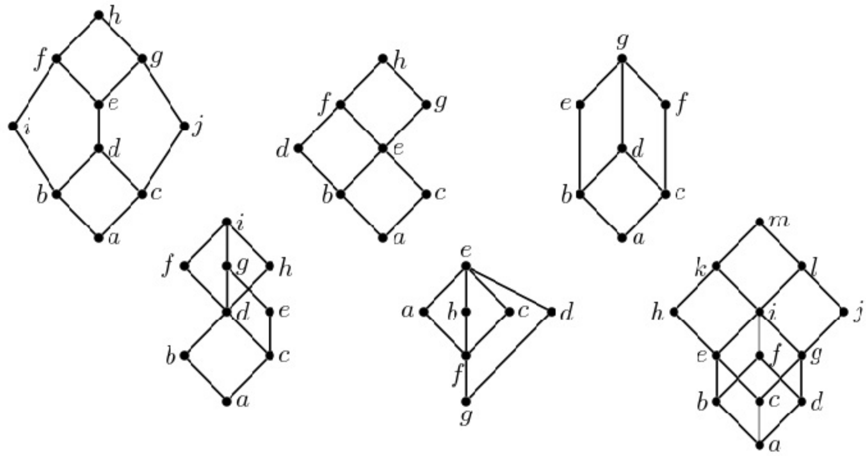
(a) $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$, onde $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ é o conjunto das partes de um conjunto A e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual (os elementos compactos de $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ são os subconjuntos finitos de A).

(b) $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$, onde $\mathrm{Subg}(G)$ representa o conjunto dos subgrupos de um grupo G e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual (os elementos compactos de $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$ são os subgrupos de G finitamente gerados).

18. Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ reticulados. Mostre que:

(a) Se $\mathcal{R}$ é distributivo (modular), então qualquer subreticulado de $\mathcal{R}$ é distributivo (modular).
(b) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são distributivos (modulares), então $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ é distributivo (modular).
(c) Se $\mathcal{R}$ é distributivo (modular) e $\mathcal{S}$ é uma imagem homomorfa de $\mathcal{R}$, então $\mathcal{S}$ é distributivo (modular).

19. Diga, justificando, quais dos seguintes reticulados são distributivos e quais são modulares.



20. Prove que

   (a) Um reticulado $(R; \wedge, \vee)$ é distributivo se e só se, para quaisquer $a, b, c \in R$,

$$(a \vee c = b \vee c \quad \text{e} \quad a \wedge c = b \wedge c) \Rightarrow a = b;$$

   (b) O reticulado $(\mathbb{N}, m.d.c., m.m.c.)$ é distributivo.