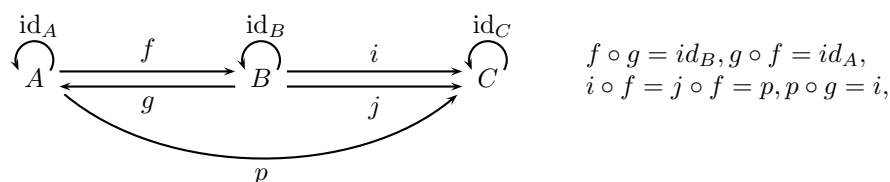


## Álgebra Universal e Categorias

2º teste (30 de maio de 2018) duração: 2 horas

1. (a) Seja  $\mathbf{C}$  a categoria definida pelo diagrama seguinte



**Diga, justificando, se é verdadeira a seguinte afirmação: A categoria  $\mathbf{C}/\mathbf{C}$  tem dois objetos iniciais.**

Os objetos da categoria  $\mathbf{C}/\mathbf{C}$  são todos os pares  $(X, h)$ , onde  $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$  e  $h \in \text{hom}(X, C)$ . Assim, os objetos de  $\mathbf{C}/\mathbf{C}$  são  $(A, p), (B, i), (B, j), (C, \text{id}_C)$ . Dados  $(X, h), (Y, k)$  objetos de  $\mathbf{C}/\mathbf{C}$ , um morfismo de  $(X, h)$  em  $(Y, k)$  é um  $\mathbf{C}$ -morfismo  $u : X \rightarrow Y$  tal que  $k \circ u = h$ . Então:

- $\text{hom}((C, \text{id}_C), (A, p)) = \emptyset;$
- $\text{hom}((B, i), (B, j)) = \emptyset;$
- $\text{hom}((B, j), (B, i)) = \emptyset;$
- $\text{hom}((A, p), (B, i)) = \{f : (A, p) \rightarrow (B, i)\}, \text{hom}((A, p), (B, j)) = \{f : (A, p) \rightarrow (B, j)\},$   
 $\text{hom}((A, p), (C, \text{id}_C)) = \{p : (A, p) \rightarrow (C, \text{id}_C)\}, \text{hom}((A, p), (A, p)) = \{\text{id}_{(A, p)}\}.$

Logo a categoria  $\mathbf{C}/\mathbf{C}$  tem um único objeto inicial, que é o objeto  $(A, p)$ .

Assim, a afirmação é falsa.

- (b) **Seja  $\mathbf{C}$  a categoria definida na alínea anterior. Dê um exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de uma subcategoria  $\mathbf{D}$  de  $\mathbf{C}$  tal que  $\mathbf{D}$  seja uma subcategoria plena de  $\mathbf{C}$ ,  $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{D})$  e  $A$  e  $B$  não sejam isomorfos em  $\mathbf{D}$ .**

Uma categoria  $\mathbf{D} = (\text{Obj}(\mathbf{D}), \text{hom}_{\mathbf{D}}, \text{id}^{\mathbf{D}}, \circ^{\mathbf{D}})$  diz-se uma subcategoria da categoria  $\mathbf{C} = (\text{Obj}(\mathbf{C}), \text{hom}_{\mathbf{C}}, \text{id}^{\mathbf{C}}, \circ^{\mathbf{C}})$  se:

- $\text{Obj}(\mathbf{D}) \subseteq \text{Obj}(\mathbf{C});$
- todo o morfismo de  $\mathbf{D}$  é um morfismo de  $\mathbf{C};$
- para qualquer  $X \in \text{Obj}(\mathbf{D})$ , o morfismo  $\text{id}_X^{\mathbf{D}}$  de  $\mathbf{D}$  é o mesmo que o morfismo  $\text{id}_X^{\mathbf{C}}$  de  $\mathbf{C};$
- para quaisquer  $\mathbf{D}$ -morfismos  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow D$ , o morfismo  $g \circ^{\mathbf{D}} f$  de  $\mathbf{D}$  é mesmo que o morfismo  $g \circ^{\mathbf{C}} f$  de  $\mathbf{C}.$

Uma subcategoria  $\mathbf{D}$  de  $\mathbf{C}$  diz-se uma subcategoria plena se, para quaisquer  $X, Y \in \text{Obj}(\mathbf{D})$ ,  $\text{hom}_{\mathbf{D}}(X, Y) = \text{hom}_{\mathbf{C}}(X, Y).$

Assim, se  $\mathbf{D}$  é uma subcategoria plena de  $\mathbf{C}$  tal que  $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{D})$ , segue que  $f, g, \text{id}_A, \text{id}_B$  são morfismos de  $\mathbf{D}$ . Então, como  $f \circ g = \text{id}_B$  e  $g \circ f = \text{id}_A$ , conclui-se que  $f$  é um isomorfismo de  $\mathbf{D}$  e, portanto,  $A$  e  $B$  são isomorfos em  $\mathbf{D}$ .

Logo a afirmação é falsa.

- (c) **Diga, justificando, se é verdadeira a seguinte afirmação: Na categoria  $\mathbf{Set}$ , todo o morfismo que tem por domínio um objeto terminal é um monomorfismo.**

Na categoria **Set**, os objetos terminais são os conjuntos singulares e os monomorfismos são as funções injetivas. Claramente, toda a função que tem por domínio um conjunto singular é uma função injetiva.

Assim, a afirmação é verdadeira.

2. Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria,  $A, B, C$  objetos de  $\mathbf{C}$  e  $f : A \rightarrow C$  e  $g : B \rightarrow C$  monomorfismos de  $\mathbf{C}$ . Mostre que se  $i : A \rightarrow B$  e  $j : B \rightarrow A$  são morfismos de  $\mathbf{C}$  tais que  $f \circ j = g$  e  $g \circ i = f$ , então  $i$  e  $j$  são invertíveis e  $i^{-1} = j$ .

Sejam  $f : A \rightarrow C$  e  $g : B \rightarrow C$  monomorfismos de  $\mathbf{C}$  e  $i : A \rightarrow B$  e  $j : B \rightarrow A$  morfismos de  $\mathbf{C}$  tais que  $f \circ j = g$  e  $g \circ i = f$ .

Pretende-se mostrar que  $i^{-1} = j$ , ou seja, que  $i \circ j = id_B$  e  $j \circ i = id_A$ .

Ora, de  $f \circ j = g$  e  $g \circ i = f$ , segue que  $(g \circ i) \circ j = g$ , pelo que  $g \circ (i \circ j) = g \circ id_B$  e, uma vez que  $g$  é monomorfismo, tem-se  $i \circ j = id_B$ .

De forma análoga, prova-se que  $j \circ i = id_A$ . De facto, de  $f \circ j = g$  e  $g \circ i = f$  também se tem  $f \circ (j \circ i) = f$ , donde  $f \circ (j \circ i) = f \circ id_A$  e, como  $f$  é monomorfismo, vem que  $j \circ i = id_A$ .

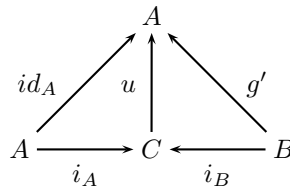
3. Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria e  $A, B$  e  $C$  objetos de  $\mathbf{C}$  tais que, para qualquer objeto  $X$  de  $\mathbf{C}$ ,  $\text{hom}(B, X) \neq \emptyset$  e  $i_A : A \rightarrow C$  e  $i_B : B \rightarrow C$  são morfismos de  $\mathbf{C}$ . Mostre que se  $(C, (i_A, i_B))$  é um coproduto de  $A$  e  $B$ , então  $i_A$  é invertível à esquerda.

Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria e  $A, B$  e  $C$  objetos de  $\mathbf{C}$  tais que, para qualquer objeto  $X$  de  $\mathbf{C}$ ,  $\text{hom}(B, X) \neq \emptyset$  e  $i_A : A \rightarrow C$  e  $i_B : B \rightarrow C$  são morfismos de  $\mathbf{C}$ .

Admitamos que  $(C, (i_A, i_B))$  é um coproduto de  $A$  e  $B$ . Então, para qualquer objeto  $X$  de  $\mathbf{C}$  e para quaisquer  $\mathbf{C}$ -morfismos  $f' : A \rightarrow X$  e  $g' : B \rightarrow X$ , existe um, e um só, morfismo  $u : C \rightarrow X$  tal que  $u \circ i_A = f'$  e  $u \circ i_B = g'$ .

Queremos mostrar que existe  $i' : C \rightarrow A$  tal que  $i' \circ i_A = id_A$ .

Uma vez que, para todo  $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ ,  $\text{hom}(B, X) \neq \emptyset$  e  $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ , existe  $g' \in \text{hom}(B, A)$ . Como  $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ , então, por definição de categoria,  $id_A : A \rightarrow A$  é um morfismo de  $\mathbf{C}$ . Logo, atendendo a que  $(C, (i_A, i_B))$  é um coproduto de  $A$  e  $B$ , existe um, e um só, morfismo  $u : C \rightarrow A$  tal que o diagrama seguinte comuta



i.e., tal que  $u \circ i_A = id_A$  e  $u \circ i_B = g'$ . Como  $u \circ i_A = id_A$ , então  $i_A$  é invertível à esquerda.

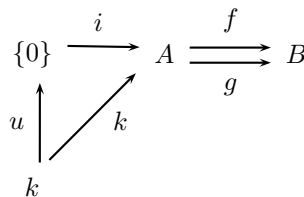
4. Na categoria **Set**, considere os conjuntos  $\{0\}$ ,  $\mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{Z}$  e as funções  $i$ ,  $f$  e  $g$  definidas por

$$\begin{array}{llll}
 i : \{0\} & \rightarrow & \mathbb{N}_0 & , \quad f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z} & , \quad g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z} \\
 0 & \mapsto & 0 & , \quad x & \mapsto 0 & , \quad x & \mapsto 3x
 \end{array}$$

Mostre que  $(\{0\}, i)$  é um igualizador de  $f$  e  $g$ .

Pretende-se mostrar que  $(\{0\}, i)$  é um igualizador de  $f$  e  $g$ , isto é, que:

- (i)  $f \circ i = g \circ i$ ;
- (ii) para qualquer  $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$  e para qualquer  $\mathbf{C}$ -morfismo  $k : K \rightarrow A$  tal que  $f \circ k = g \circ k$ , existe um, e um só, morfismo  $u : K \rightarrow \{0\}$  tal que  $i \circ u = k$ .



(i) A prova desta condição é imediata, pois as funções  $f \circ i$  e  $g \circ i$  têm o mesmo domínio e codomínio e, para qualquer  $x \in A$ ,

$$(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(0) = 0 = 3 \times 0 = 3 \times i(x) = g(i(x)).$$

(ii) Sejam  $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$  e  $k : K \rightarrow A$  um  $\mathbf{C}$ -morfismo tais que  $f \circ k = g \circ k$ . Então, para qualquer  $x \in K$ ,

$$(f \circ k)(x) = (g \circ k)(x),$$

donde resulta

$$0 = 3k(x)$$

e, portanto,  $k(x) = 0$ , para todo  $x \in K$ . Assim,  $k$  é a função definida por

$$\begin{array}{ccc} k : K & \rightarrow & A \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

Pretende-se mostrar que existe uma, e uma só, função  $u : K \rightarrow \{0\}$  tal que  $i \circ u = k$ . Claramente, existe uma única função de  $K$  em  $\{0\}$  - a função definida por

$$\begin{array}{ccc} k : K & \rightarrow & \{0\} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

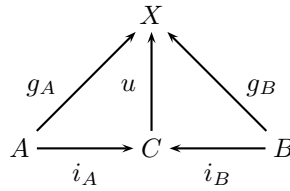
As funções  $i \circ u$  e  $k$  têm o mesmo domínio e codomínio e, para qualquer  $x \in K$ ,  $(i \circ u)(x) = 0 = k(x)$ . Logo  $i \circ u = k$ .

5. Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria com objeto inicial  $I$  e  $f_A : I \rightarrow A$  e  $f_B : I \rightarrow B$  morfismos de  $\mathbf{C}$ . Mostre que se  $(C, (i_A, i_B))$  é um coproduto de  $A$  e  $B$ , então  $(C, (i_A : A \rightarrow C, i_B : B \rightarrow C))$  é uma soma amalgamada de  $(f_A, f_B)$ .

Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria com objeto inicial  $I$  e morfismos  $f_A : I \rightarrow A$  e  $f_B : I \rightarrow B$ .

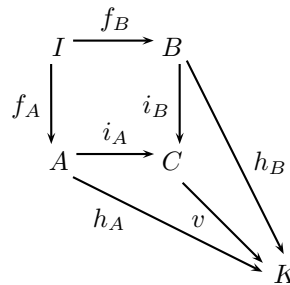
Admitamos que  $(C, (i_A, i_B))$  é um coproduto de  $A$  e  $B$ . Então,

- (1)  $i_A \in \text{hom}(A, C)$  e  $i_B \in \text{hom}(B, C)$ ,
- (2) para qualquer objeto  $X$  de  $\mathbf{C}$  e para quaisquer  $\mathbf{C}$ -morfismos  $g_A : A \rightarrow X$  e  $g_B : B \rightarrow X$ , existe um, e um só, morfismo  $u : C \rightarrow X$  tal que  $u \circ i_A = g_A$  e  $u \circ i_B = g_B$ .



Pretende-se mostrar que  $(C, (i_A, i_B))$  é uma soma amalgamada de  $(f_A, f_B)$ , ou seja, que

- (3)  $i_A \circ f_A = i_B \circ f_B$ ;
- (4) para qualquer objeto  $K$  de  $\mathbf{C}$  e para quaisquer  $\mathbf{C}$ -morfismos  $h_A : A \rightarrow K$  e  $h_B : B \rightarrow K$  tais que  $h_A \circ f_A = h_B \circ f_B$ , existe um, e um só, morfismo  $v : C \rightarrow K$  tal que  $v \circ i_A = h_A$  e  $v \circ i_B = h_B$ .



(3) Uma vez que  $i_A \circ f_A, i_B \circ f_B \in \text{hom}(I, C)$  e  $|\text{hom}(I, C)| = 1$ , pois  $I$  é um objeto inicial, então  $i_A \circ f_A = i_B \circ f_B$ .

(4) Sejam  $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$  e  $h_A : A \rightarrow K$  e  $h_B : B \rightarrow K$  morfismos de  $\mathbf{C}$  tais que  $h_A \circ f_A = h_B \circ f_B$ . Como  $h_A \in \text{hom}(A, K)$  e  $h_B \in \text{hom}(B, K)$ , então, por (2), existe um, e um só, morfismo,  $v : C \rightarrow K$  tal que  $v \circ i_A = h_A$  e  $v \circ i_B = h_B$ .

Logo  $(C, (i_A : A \rightarrow C, i_B : B \rightarrow C))$  é uma soma amalgamada de  $(f_A, f_B)$ .

6. Seja  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  o funtor que a cada conjunto  $A$  associa o produto cartesiano  $A \times A$  e que a cada função  $f : A \rightarrow B$  associa a função

$$\begin{aligned} F(f) : F(A) &\rightarrow F(B) \\ (x, y) &\mapsto (f(x), f(y)) \end{aligned}$$

Diga, justificando, se:

- (a) O funtor  $F$  é fiel.

O funtor  $F$  é fiel se, para quaisquer **Set**-morfismos  $f, g : A \rightarrow B$ ,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Uma vez que, para quaisquer **Set**-morfismos  $f, g : A \rightarrow B$ ,

$$\begin{aligned} F(f) = F(g) &\Rightarrow \forall x, y \in A, F(f)(x, y) = F(g)(x, y) \\ &\Rightarrow \forall x, y \in A, (f(x), f(y)) = (g(x), g(y)) \\ &\Rightarrow \forall x, y \in A, f(x) = g(x) \text{ e } f(y) = g(y) \\ &\Rightarrow \forall x \in A, f(x) = g(x) \\ &\Rightarrow f = g \quad (\text{as funções } f \text{ e } g \text{ têm o mesmo domínio e codomínio}), \end{aligned}$$

então o funtor  $F$  é fiel.

- (b) O funtor  $F$  preserva e reflete monomorfismos.

Todo o funtor fiel reflete monomorfismos. Uma vez que  $F$  é fiel, então  $F$  reflete monomorfismos.

Na categoria **Set** os monomorfismos são as funções injetivas. Se  $f : A \rightarrow B$  é um **Set**-monomorfismo, então  $f$  é uma função injetiva. Se  $f$  é uma função injetiva, então  $F(f)$  também é uma função injetiva; de facto, para quaisquer  $(x, y), (x', y') \in A \times A$ ,

$$\begin{aligned} F(f)(x, y) = F(f)(x', y') &\Rightarrow (f(x), f(y)) = (f(x'), f(y')) \\ &\Rightarrow f(x) = f(x') \text{ e } f(y) = f(y') \\ &\Rightarrow x = x' \text{ e } y = y' \\ &\Rightarrow (x, y) = (x', y'). \end{aligned}$$

Uma vez que  $F(f)$  é injetiva, então  $F(f)$  é um monomorfismo. Logo o funtor  $F$  preserva monomorfismos.