

Resolução explicada dos exercícios 1, 2 e 3 da folha 3 (resolvidos nas aulas PL dos dias 24, 25, 26 e 27 de novembro)

exercício 1) O código seguinte está disponível na área "Matlab" da Blackboard

```
function [raiz, funevals] = bisec(f, a, b, tol)
% function [raiz, funevals]=bisec(fun, a, b, tol)
% Dados:
%     uma função continua fun
%     os extremos a e b de um intervalo que contém pelo menos um zero de
%     fun
%     a tolerância tol,
% esta função implementa o método da biseção para aproximar um zero de f;
% termina quando obtem um intervalo de amplitude menor que tol e toma como
% aproximação raiz o valor médio desse intervalo; funevals é o número de
% vezes que a função é calculada.

fa=f(a), fb=f(b);
if fa==0
    raiz=a;
    funevals= 'Não foram feitas iterações';
elseif fb==0
    raiz=b;
    funevals= 'Não foram feitas iterações';
elseif fa*fb >0
    raiz=' fa*fb >0: não há garantia de existir uma raiz entre a e b';
    funevals= 'Não foram feitas iterações';
else
    funevals=0;                                % numero de vezes que se calcula f
    while b-a > tol
        med = (a + b)/2;    % o ponto médio do intervalo [a,b] que contem o zero
        fmed=f(med);
        funevals=funevals+1;
        if fmed*fa < 0                                % há um zero de f em [a, med]
            b=med;
            fb=fmed;
        elseif fmed*fb < 0                            % há um zero de f em [med, b]
            a=med;
            fa=fmed;
        else                                           % med é zero de p
            a=med;
            b=med;
        end
    end
    raiz=(a+b)/2;
end
```

exercício 2.a) Começamos por definir a função com

```
f=inline('x*log(x)-1')
```

ou, com

```
f=@(x) x*log(x)-1
```

(nota: esta alternativa é preferível nas versões mais recentes do Matlab).

De

```
>> f(1), f(2)
```

```
ans =
```

```
-1
```

```
ans =
```

```
0.3863
```

conclui-se (por ser f contínua no intervalo $[1,2]$) que existe uma raiz da equação entre 1 e 2.

exercício 2.b) Uma vez que em cada iteração o método da bisseção reduz a metade a amplitude do intervalo que contem a raiz, ao fim de k iterações a amplitude é, neste caso (a amplitude do intervalo inicial é igual a 1) dada por $1/2^k$. De

$$\frac{1}{2^k} < 10^{-10}$$

resulta

$$k > \log_2(10^{10})$$

e, tendo em conta

```
>> log2(10^10)
```

```
ans =
```

```
33.2193
```

concluimos que $k = 34$.

exercício 2.c)

```
>> [raiz, funevals] = bisec(f, 1, 2, 1e-10)
```

```
raiz =
```

```
1.7632
```

```
funevals =
```

```
34
```

exercício 2.d) A execução não termina. Interrompemos a execução pressionando em simultâneo as teclas Ctrl e C.

```
>> [raiz, funevals] = bisec(f, 1, 2, 1e-20)
Operation terminated by user during bisec (line 39)
```

O critério de paragem nunca é cumprido porque o valor de $tol = 10^{-10}$ é demasiado pequeno. Isto acontece porque a raiz está entre 1 e 2, e neste intervalo a distância entre um número de \mathcal{F} e o seu sucessor é $2^{-52} \approx 2.2 \times 10^{-16}$. Assim, o mais pequeno valor de tol que pode ser usado é 2^{-52} (o critério de paragem será cumprido com $tol = 10^{-15}$ mas não com $tol = 10^{-16}$).

exercício 3.a) Está resolvido nas páginas 67 e 68 do ficheiro apresenta.pdf que serve de suporte às aulas TP on-line.

exercício 3.b)

```
>> fi3=@(x) (x+exp(-x))/2
```

```
fi3 =
```

```
@(x)(x+exp(-x))/2
```

```
>> x(1)=0.5; x(2)=fi3(x(1)); k=2; while abs(x(k)-x(k-1))>0.5*1e-3, k=k+1;...
x(k)=fi3(x(k-1)); end, x'
```

```
ans =
```

```
0.5000
0.5533
0.5642
0.5665
0.5670
0.5671
```

A expressão (ver p. 70 das notas)

$$r - x^{(k)} = \frac{1}{1 - \phi'(\theta)} (x^{(k+1)} - x^{(k)})$$

permite-nos fazer a estimativa do erro $|r - x^{(5)}|$ a partir da diferença entre $x^{(6)}$ e $x^{(5)}$.

Com $\phi'(x) = (1 - e^{-x})/2$ e θ próximo de $x^{(5)}$, será

$$|r - x^{(5)}| \approx \frac{1}{|1 - \phi'(x^{(5)})|} |x^{(6)} - x^{(5)}|$$

```
>> (1-exp(-x(5)))/2
```

```
ans =
```

```
0.2164
```

```
>> 1/(1-ans)*(x(6)-x(5))
```

ans =

1.3907e-04

Resolução explicada dos exercícios 5, 6, 7 e 8 da folha 3 (resolvidos nas aulas PL dos dias 2, 3 e 4 de dezembro)

exercício 5) Uma vez que

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})},$$

de (1) resulta

$$r - x^{(k+1)} = -\frac{f''(\theta)}{2f'(x^{(k)})} (r - x^{(k)})^2$$

que relaciona o erro numa iteração com o quadrado do erro na iteração anterior. Por exemplo, se $|r - x^{(k)}| \approx 10^{-3}$ e $\left| \frac{f''(\theta)}{2f'(x^{(k)})} \right|$ (este valor varia de iteração para iteração uma vez que o ponto θ não é sempre o mesmo) não for muito maior do que 1, então será $|r - x^{(k+1)}| \approx 10^{-6}$, isto é, o número de algarismos corretos praticamente duplica de uma iteração para a seguinte. Em termos mais formais, um método iterativo tem convergência quadrática (ver p. 55 das notas das aulas) se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|r - x^{(k+1)}|}{|r - x^{(k)}|^2} = C > 0$$

Ora, no caso do método de Newton-Raphson tem-se

$$\frac{|r - x^{(k+1)}|}{|r - x^{(k)}|^2} = \left| \frac{f''(\theta)}{2f'(x^{(k)})} \right|,$$

donde, tomando limites, resulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|r - x^{(k+1)}|}{|r - x^{(k)}|^2} = \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|.$$

exercício 6.a) Com

$$f(x) = b - \frac{1}{x}$$

a fórmula iterativa

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

dá

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{b - 1/x^{(k)}}{1/(x^{(k)})^2} = x^{(k)} - (x^{(k)})^2 (b - 1/x^{(k)}) = x^{(k)} (2 - bx^{(k)})$$

exercício 6.b) Partindo da aproximação inicial, repetimos o comando $x = x * (2 - 7 * x)$ até que duas iteradas sucessivas coincidam em todos os algarismos no format long.

```
>> format long, x=0.1;
```

```
>> x=x*(2-7*x)
```

```
x =
```

```

0.13000000000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

0.14170000000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

0.14284777000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

0.142857142242190

>> x=x*(2-7*x)

x =

0.142857142857143

>> x=x*(2-7*x)

x =

0.142857142857143

```

exercício 6.c) Com $e^{(k)} = r - x^{(k)}$ e $x^{(k)}$ próximo de r a expressão

$$r - x^{(k+1)} = -\frac{f''(\theta)}{2f'(x^{(k)})} \left(r - x^{(k)}\right)^2$$

dá

$$e^{(k+1)} = -\frac{f''(r)}{2f'(r)} \left(e^{(k)}\right)^2$$

e para $f(x) = b - 1/x$ é

$$-\frac{f''(r)}{2f'(r)} = 1/r = b.$$

exercício 6.d) O método diverge como se pode concluir de

```

>> x=0.3;
>> x=x*(2-7*x)

x =

```

```

-0.030000000000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

-0.066300000000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

-0.163369830000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

-0.513567569479603

>> x=x*(2-7*x)

x =

-2.873396677907512
....

```

exercício 7.a) Tem-se

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)} - a)^m}{m(x^{(k)} - a)^{m-1}} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)} - a)}{m}$$

e subtraindo a em ambos os membros

$$x^{(k+1)} - a = x^{(k)} - a - \frac{(x^{(k)} - a)}{m} = (x^{(k)} - a) \left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

Isto mostra que a ordem de convergência do método é $p = 1$ (veja-se de novo a definição), isto é, a convergência é linear.

exercício 7.b) Em cada iteração do método da bisseção, a amplitude do intervalo que contem a raiz é reduzida para metade. Por outro lado, para $m = 2$ tem-se $e^{(k+1)} = e^{(k)}/2$ e é neste sentido que podemos dizer, neste caso, que o método de Newton-Raphson não converge mais rapidamente do que o método da bisseção. Para $m > 2$ a convergência é mais lenta uma vez que $1 - 1/m > 1/2$. Observe-se que $1 - 1/m$ aproxima-se de 1 quando m cresce e a convergência é, portanto, tanto mais lenta quanto maior for a multiplicidade m da raiz a . Em conclusão, é preferível usar o método da bisseção que converge mais rapidamente e não requer o cálculo de derivadas.

exercício 8) A função poly dá os coeficientes do polinómio mónico cujos zeros são dados. Por exemplo,

```

>> p=poly([1 2])

p =

```

uma vez que $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$.

A função `roots` calcula os zeros de um polinómio a partir dos respetivos coeficientes:

```
>> roots(p)
```

```
ans =
```

```
    2  
    1
```

Neste caso, a função `roots` dá exatamente as raízes iniciais. Mas isto nem sempre acontece.

```
>> p=poly([2 2 2 2 2 2 2 2 2])
```

```
p =
```

```
          1          -18          144          -672          2016          -4032          5376
```

```
>> r= roots(p)
```

```
r=
```

```
2.0689 + 0.0000i  
2.0518 + 0.0449i  
2.0518 - 0.0449i  
2.0100 + 0.0668i  
2.0100 - 0.0668i  
1.9655 + 0.0566i  
1.9655 - 0.0566i  
1.9383 + 0.0218i  
1.9383 - 0.0218i
```

Neste caso, as raízes têm erros importantes e a razão é o mau condicionamento da raiz igual a 2 que tem multiplicidade nove. Com efeito, as raízes múltiplas são sempre mal-condicionadas e quanto maior for a multiplicidade de uma raiz mais mal condicionada ela é.