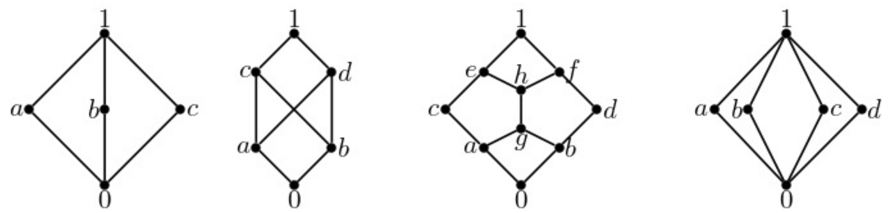
Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 1

1. Diga, justificando, quais dos c.p.o.s a seguir representados são reticulados:



2. Mostre que cada um dos c.p.o.s a seguir indicados é um reticulado.
   (a) $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação *divide* definida em $\mathbb{N}$.
   (b) $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$, onde $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ é o conjunto das partes de um conjunto A e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual.
   (c) $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$, onde $\mathrm{Subg}(G)$ representa o conjunto dos subgrupos de um grupo G e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual.

3. Prove que toda a cadeia é um reticulado.

4. Seja $(P, \leq)$ um c.p.o. tal que, para todo $H \subseteq P$, existe $\inf H$. Mostre que $(P, \leq)$ é um reticulado.

5. Uma estrutura algébrica $(A; \wedge, \vee)$, onde $\wedge$ e $\vee$ são operações binárias em A, satisfaz as leis *comutativas*, *associativas*, *de absorção* e *de idempotência* se, para quaisquer $x, y, z \in A$,

L1:	$x \vee y = y \vee x$,	$x \wedge y = y \wedge x$	(leis comutativas);
L2:	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	(leis associativas);
L3:	$x \vee (x \wedge y) = x$,	$x \wedge (x \vee y) = x$	(leis de absorção);
L4:	$x \vee x = x$,	$x \wedge x = x$	(leis de idempotência).

   (a) Sejam $(A_1, \wedge_1, \vee_1)$, $(A_2, \wedge_2, \vee_2)$ e $(A_3, \wedge_3, \vee_3)$ as seguintes estruturas algébricas:
   - $A_1 = \{a, b\}$ e $x \vee_1 y = x, \forall x, y \in A_1$, $a \wedge_1 x = a, b \wedge_1 x = x, \forall x \in A_1$;
   - $A_2 = \{a, b, c, d, e\}$ e

$\vee_2$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	b	e	d	e
c	c	e	c	d	e
d	d	d	d	d	e
e	e	e	e	e	e

$\wedge_2$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	b	b
c	a	a	c	c	c
d	a	b	c	d	d
e	a	b	c	d	e

;

   - $A_3 = \{a, b\}$ e $b \vee a = b$, $a \vee_3 x = x, x \vee_3 b = b, x \wedge y = a, \forall x, y \in A_3$.

   Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, mostre que A_i satisfaz as leis indicadas em Lj para $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ e não satisfaz alguma das leis indicadas em Li. Conclua que as leis L1, L2 e L3 são independentes.
   (b) Mostre que as leis de idempotência são consequência das leis de absorção.

6. Seja $(R; \wedge, \vee)$ o reticulado cujas operações $\wedge$ e $\vee$ são as descritas através das tabelas seguintes

$\wedge$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	b	b	b	b
c	0	a	b	c	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$\vee$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	c	c	1	1
b	b	c	b	c	d	1
c	c	c	c	c	1	1
d	d	1	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1

Considere o reticulado interpretado como um conjunto parcialmente ordenado e represente-o através de um diagrama de Hasse.