Seja $\boldsymbol{f}$ uma função de domínio **X** e contradomínio **Y**, $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$.

A função $\boldsymbol{f}$ diz-se **injetiva** se p/ cada elemento $x \in X$, existe um <u>único</u> $y \in Y$ tq $f(x) = y$.
Ou seja: $\forall a, b \in X,\ \ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

A função $\boldsymbol{f}$ diz-se **sobrejetiva** se p/ cada elemento $y \in Y$, existe <u>pelo menos</u> um $x \in X$ tq $f(x) = y$.
Ou seja: $\forall y \in Y, \exists x \in X,\ \ f(x) = y.$

A função $\boldsymbol{f}$ diz-se **bijetiva** se for injetiva e sobrejetiva.

Nota

- p/ - para
- qq - qualquer
- tq - tal que
- i.e. - isto é
- sse - se e só se (⇔)
- então (⇒)

Dados um subconjunto A de P e $m \in P$, diz-se que m é:

- **majorante** de A se, para todo $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a} \leq \mathbf{m}$;
- **minorante** de A se, para todo $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, $\mathbf{m} \leq \mathbf{a}$;
- **maximal** de A se $\mathbf{m} \in \mathbf{A}$ e $\neg(\exists a \in A,\ m < a)$;
- **minimal** de A se $\mathbf{m} \in \mathbf{A}$ e $\neg(\exists a \in A,\ a < m)$;
- **máximo** de A se m é um <u>majorante</u> de A e $\mathrm{m} \in \mathrm{A}$;
- **mínimo** de A se m é um <u>minorante</u> de A e $\mathrm{m} \in \mathrm{A}$;
- **supremo** de A se m é um <u>majorante</u> de A e $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{m}'$, para qualquer <u>majorante</u> m' de A;
- **ínfimo** de A se m é um <u>minorante</u> de A e $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{m}'$, para qualquer <u>minorante</u> m' de A;

Os **Rericulados** podem ser definidos de duas formas <u>equivalents</u>:

- **Conjunto Parcialmente Ordenado (c.p.o)**
- **Estruturas Algébricas**

Num c.p.o. (P; ≤) são <u>equivalentes as seguintes afirmações</u>, p/ qq $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{P}$:

I) $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$
II) $\mathbf{sup}\ \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} = \boldsymbol{b}$
III) $\mathbf{inf}\ \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} = \boldsymbol{a}$

Um c.p.o. (P; ≤) tq P tem elemento máximo e elemento mínimo diz-se um **Conjunto Parcialmente Ordenado Limitado.**

<u>Um Reticulado é um c.p.o.</u> tal que para cada dois elementos ***a,b*** existe **supremo** e **ínfimo** de **{a,b}**

De maneira equivalente <u>um Reticulado pode ser definido como uma **Estrutura Algébrica**</u>, consistindo de um conjunto e duas operações - usaremos **(R; ∧ , ∨)** como exemplo – se todos elementos ***a,b*** e ***c*** de **C**, <u>se verifiquem as seguintes equações</u>:

Leis Comutativas (R1) > $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{a}$
Leis Associativas (R2) > $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} \qquad \boldsymbol{a} \vee (\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \vee \boldsymbol{c}$
Leis de Idempotência (R3) > $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
Leis de Absorção (R4) > $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{a} \vee (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$

Princípio da Dualidade de Reticulados: Uma afirmação é verdadeira em qualquer Reticulado sse o mesmo acontece com a respetiva afirmação dual. Este princípio também se aplica para os c.p.o.

Princípio da Boa Organização: todo subconjunto não-vazio formado por $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}_{0^+}$) possuí um menor elemento

Seje **(R; ∧ , ∨)** um Reticulado, e **R'** um Subconjunto não vazio de R.
Diz-se que **(R'; ∧', ∨')** é um **Subreticulado** de **R** se $\wedge'$ e $\vee'$ são Operações Binárias em **R'** tais que p/ qq $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}'$, $\boldsymbol{a} \wedge' \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ **e** $\boldsymbol{a} \vee' \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$

Dados um Reticulado **(R; ≤)** e um Subconjunto não vazio **R'** de **R**, um c.p.o **(R'; ≤')** diz-se **Subreticulado** de **(R; ≤)** se $\leq' = \leq_{\boldsymbol{R}}$, e, p/ qq $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}'$, o Supremo e Ínfimo de **{a,b}** (determinados em **(R; ≤)**) pertencem a **R'**.

Um Reticulado $(R_1, \wedge, \vee)$ diz-se **Modular** se p/ de $x, y, z \in R$:

$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{x} \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y} \wedge (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{z})$ (tb é o suficiente mostrar o contrário)

Sejam $(R_1, \wedge_{R_1}, \vee_{R_1})$, $(R_2, \wedge_{R_2}, \vee_{R_2})$ Reticulados e $\wedge_{R_1 \times R_2}$ e $\vee_{R_1 \times R_2}$ as operações binárias de $R_1 \times R_2$, definidas por:

$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) \wedge_{R_1 \times R_2} (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}) = (\boldsymbol{a_1} \wedge_{R_1} \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{a_2} \wedge_{R_2} \boldsymbol{b_2})$$
$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) \vee_{R_1 \times R_2} (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}) = (\boldsymbol{a_1} \vee_{R_1} \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{a_2} \vee_{R_2} \boldsymbol{b_2})$$

Então $(\boldsymbol{R_1} \times \boldsymbol{R_2}; \wedge_{\boldsymbol{R_1} \times \boldsymbol{R_2}}, \vee_{\boldsymbol{R_1} \times \boldsymbol{R_2}})$ é um Reticulado, designado por **Reticulado Produto** de R_1 d R_2 – representado por $R_1 \times R_2$.

Sejam $(R_1, \wedge_{R_1}, \vee_{R_1})$ e $(R_2, \wedge_{R_2}, \vee_{R_2})$ Reticulado, $\leq_1$ e $\leq_2$ as relações de ordem associadas, e seja $\leq$ a relação de ordem definida em $R_1 \times R_2$ por:

$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) \leq (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}) \ \boldsymbol{sse} \ \boldsymbol{a_1} \leq \boldsymbol{b_1} \ \boldsymbol{e} \ \boldsymbol{a_2} \leq \boldsymbol{b_2}$$

Então $(\boldsymbol{R_1} \times \boldsymbol{R_2}; \leq)$ é um Reticulado.
Além disso:

$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) \wedge_{R_1 \times R_2} (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a_1} \wedge_{R_1} \boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{a_1} \ \ \boldsymbol{e} \ \ \boldsymbol{a_2} \wedge_{R_2} \boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{a_2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a_1} \leq_1 \boldsymbol{b_1} \ \ \boldsymbol{e} \ \ \boldsymbol{a_2} \leq_2 \boldsymbol{b_2} \Leftrightarrow (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) \leq (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2})$$

Por conseguinte o Reticulado $(\boldsymbol{R_1} \times \boldsymbol{R_2}; \wedge_{R_1 \times R_2}, \vee_{R_1 \times R_2})$ coincide com o Reticulado $(\boldsymbol{R_1} \times \boldsymbol{R_2}; \leq)$.

Sejam $(\boldsymbol{P_1}; \leq)$ e $(\boldsymbol{P_2}; \leq)$ dois c.p.o. e $\boldsymbol{\alpha}: \boldsymbol{P_1} \rightarrow \boldsymbol{P_2}$ uma **aplicação**, que se designa:

Aplicações entre c.p.o.'s

- **Isótona**, ou <u>preserva a ordem</u>, se p/ qq $a, b \in P_1$, $\boldsymbol{a} \leq_1 \boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}) \leq_2 \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{b})$
- **Antítona**, se p/ qq $a, b \in P_1$, $\boldsymbol{a} \leq_1 \boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}) \geq_2 \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{b})$
- **Mergulho de Ordem** se p/ qq $a, b \in P_1$, $\boldsymbol{a} \leq_1 \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}) \leq_2 \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{b})$
- **Isomorfismo de c.p.o.'s** se α é um mergulho de ordem e uma aplicação sobrejetiva

Sejam $(R_1, \wedge, \vee)$ e $(R_2, \wedge, \vee)$ Reticulados e $\alpha: R_1 \rightarrow R_2$ uma aplicação, que se designa:

Aplicações entre reticulados

- **Homomorfismo**, se p/ qq $a, b \in R_1$,
$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a} \wedge_{R_1} \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}) \wedge_{R_2} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{b}) \ \ \boldsymbol{e} \ \ \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a} \vee_{R_1} \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}) \vee_{R_2} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{b})$$
- **Isomorfismo**, se α é bijetiva e um homomorfismo
(de reticulados ou também um reticulado isomorfo)

Seja (R; $\leq$) um Reticulado.
Um elemento $a \in R$ diz-se **compacto** se sempre que existe $\vee a$ e $a \leq \vee a$ p/ algum A ⊆ R , então $a \leq \vee B$ p/ algum conjunto finito A ⊆ B.
Um Reticulado diz-se **Compactamente Gerado** se, p/ todo $a \in R$, $a = \vee S$, p/ algum subconjunto S de R formado por elementos compactos de D.
Um Reticulado diz-se **Reticulado Algébrico** <u>se é um Reticulado Completo e Compactamente gerado</u>.

Um Subreticulado (R′; $\leq'$) de (R; $\leq$) diz-se um **Subreticulado Completo** se p/ qq subconjunto S de R', $\wedge S$ e $\vee S$, como definidos em (R; $\leq$), pertencem a R'.

Todos elementos de um Reticulado Finito são compactos.

Um Reticulado diz-se **Distributivo** se satisfaz uma das seguintes condições:

- **D1 >** $\boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) \vee (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{z}), \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}$
- **D2 >** $\boldsymbol{x} \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \wedge (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{z}), \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}$

Estas afirmações são equivalentes.

Subuniverso: Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma *álgebra*, e B um subconjunto $(B \subseteq A)$, B diz-se um subuniverso de $\mathcal{A}$ se B é fechado p/ toda a operação de F. Representa-se por $\boldsymbol{Sub}\mathcal{A}$.

Subálgebra: B é subálgebra de A se:

1) B é subuniverso de A
2) p/ qq $f \in \sigma_n$, e qq $b_1, \dots, b_n \in B$: $f^B(b_1, \dots, b_n) = f^A(b_1, \dots, b_n)$

Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma *álgebra*, e X um subconjunto. $\boldsymbol{Sg^A(X)}$ - **subuniverso de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$** uma *álgebra* **gerado por $\boldsymbol{X}$** - é por definição o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ gerado por $X \to Sg^{\mathcal{A}}(X)$ que contém X.

$$Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcap \{B \mid B \text{ é subuniverso de } \mathcal{A} \text{ e } X \subseteq B\}$$

Uma **Congruência** numa álgebra é uma **Relação de Equivalência** que é compatível com as operações da álgebra.
Sendo A um conjunto e θ uma relação binária em A, diz-se que θ é uma **Relação de Equivalência** em A se são satisfeitas as seguintes condições:

I) **Simetria:** p/ qq $a, b \in A$, $\boldsymbol{a\theta b \Rightarrow b\theta a}$ ou $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{\theta} \Rightarrow (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{\theta}$
II) **Reflexividade:** p/ todo $a \in A$, $\boldsymbol{a\theta a}$ ou $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{\theta}$
III) **Transitividade:** p/ qq $a, b, c \in A$, $\boldsymbol{a\theta b}$ e $\boldsymbol{b\theta c} \Rightarrow \boldsymbol{a\theta c}$ ou $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{\theta}$ e $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{\theta} \Rightarrow (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{\theta}$

Demodemodemo, Demode de Demodemodemo de x, demo dem demo demodemodem.

Dado um elemento $x \in A$, chama-se **Classe de Equivalência de $\boldsymbol{x}$ Módulo $\boldsymbol{\theta}$** ao conjunto:

$$[x]_\theta = \{y \in A \mid x\, \theta\, y\}$$

O conjunto de todas as relações de equivalência definidas em A representa-se por **Eq(A).**

Para $\mathcal{A} = (A; F)$, θ é uma **congruência** em $\mathcal{A}$ se θ satisfaz a propriedade de substituição, i.e.:

$$\boldsymbol{a_i\, \theta\, b_i \Rightarrow f^A(a_1, \dots, a_n)\, \theta\, f^B(b_1, \dots, b_n)} \quad \textbf{ou} \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{\theta} \Rightarrow (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})) \in \boldsymbol{\theta}$$

ou seja

$$\left.\begin{array}{l} (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}) \in \boldsymbol{\theta} \\ (\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b_2}) \in \boldsymbol{\theta} \end{array}\right| \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} (\boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1} \wedge \boldsymbol{b_2}) \in \boldsymbol{\theta} \\ (\boldsymbol{a_1} \vee \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1} \vee \boldsymbol{b_2}) \in \boldsymbol{\theta} \end{array}\right.$$

O conjunto de todas congruências da álgebra $\mathcal{A}$ é denotado por $\boldsymbol{Con\mathcal{A}}$.
E ao reticulado $Con\mathcal{A} = (Con\mathcal{A}, \subseteq)$ dá-se a designação de **reticulado de congruências de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.**

Se $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ é um reticulado, então $\theta \in Eq(R)$ é uma congruência em $\mathcal{R}$ sse:

I) cada classe de θ é um subreticulado
II) cada classe de θ é um **subconjunto convexo** de R

(i.e., $a\,\theta\, b$ e $a \leq c \leq b \Rightarrow a\,\theta\, c$)

III) as classes de equivalência de θ são fechadas para os quadriláteros

(i.e. sempre que a, b, c, d são elementos de R distintos e tais que $a < b,\ c < d$ *e* $(a \vee d = b \text{ e } a \wedge d = c)$ *ou* $(b \vee c = d \text{ e } b \wedge c = a)$, *então* $a\,\theta\, b$ *sse* $c\,\theta\, d$*).*

Teoremas:

1.

- Se (R; ∧ , ∨) é um Reticulado, então a relação $\leq$ definida em **R** por - $\boldsymbol{x \leq y}$ **sse** $\boldsymbol{x = x \wedge y}$ **e** $\mathbf{sup}\{\boldsymbol{x, y}\} = \boldsymbol{x \vee y}$
- Se (R; $\leq$) é um c.p.o., então (R; ∧ , ∨) – onde $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ e $x \vee y = \sup\{x, y\}$ – é um Reticulado, e p/ qq $x, y \in R$: $\boldsymbol{x \leq y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x = x \wedge y} \Leftrightarrow \boldsymbol{y = x \vee y}$

2.

1. Dem d.d.d. (D; $\leq$) demod d, d, d d d demodemod de P tais que $a \leq b$ e $c \leq d$.
    1. Se existem $Inf\{a, c\}$ e $Inf\{b, d\}$, então $Inf\{a, c\} \leq Inf\{b, d\}$
    2. Se existem $Sup\{a, c\}$ e $Sup\{b, d\}$, então $Sup\{a, c\} \leq Sup\{b, d\}$

3.

- Sejam $(R_1; \wedge_1, \vee_1)$ e $(R_2; \wedge_2, \vee_2)$ Reticulados e $\leq_1$ e $\leq_2$ relações de ordem definidos em R_1 e R_2:
    - $a \leq b\ sse\ a = a \wedge_{R_1} b, \forall a, b \in R_1$
    - $a \leq b\ sse\ a = a \wedge_{R_2} b, \forall a, b \in R_2$

  Então os Reticulados R_1 e R_2 são **isomorfos** sse os c.p.o. $(R_1; \leq_1)$ e $(R_2; \leq_2)$ são isomorfos.

4.

- Todo o Reticulado <u>Finito</u> é **completo**.

5.

- Seje (R; $\leq$) um Reticulado tq exite $\wedge \boldsymbol{S}$ e $\vee \boldsymbol{S}$ p/ qq subconjunto S de R. Então (R; $\leq$) é um **Reticulado Completo.**
- ∧: **ínfimo** ∨: **supremo**

6.

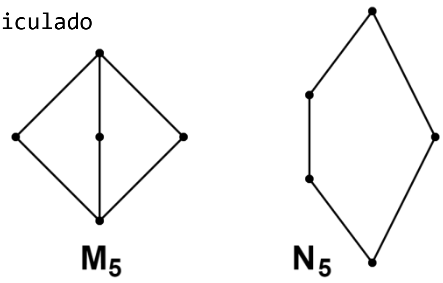
- Todo o Reticulado Distributivo é um Reticulado Modular (contrário não se verifica)

7.

- Sejam R e S reticulados, então:
    1. Se R é Distributivo (modular), então qq subreticulado de R é Distributivo (modular)
    2. Se R e S são Distributivos (modulares), então R×S é Distributivo (modular)
    3. Se R é Distributivo (modular) e S é uma imagem homomorfa de R (i.e., se $S = \alpha(R)$) p/ algum homomorfismo $\alpha: R \to S$, então S é Distributivo (modular)

8.

- Seja (R; ∧ , ∨) um Reticulado. Então R é Modular sse não tem qq Subreticulado isomorfo a N_5



9. Seja (R; ∧ , ∨) Reticulado. Então R é Distributivo sse não tem qq Subreticulado isomorfo a M_5/N_5

10.

- Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma *álgebra* e $X \subseteq A$. Definem-se recursivamente,

$$X_0 = X$$
$$X_{i+1} = X_i \cup \{\, f(x) \mid f\ é\ operação\ n - ária\ em\ \mathcal{A}\ e\ x \in (X_i)^n, n \in \mathbb{N}_0\}$$

  Então $Sg^A(X) = \cup_{i \in \mathbb{N}_0} X_i$.

11.

1. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma *álgebra* e $X, Y \subseteq A$, então:
    1. $X \subseteq Sg^A(X)$
    2. $X \subseteq Y \Rightarrow Sg^A(X) \subseteq Sg^A(Y)$
    3. $Sg^A(Sg^A(X)) = Sg^A(X)$
    4. $Sg^A(X) = \cup\{\, Sg^A(Z) \mid Z\ é\ subconjunto\ finito\ de\ X\}$

12.

- Sejam $\mathcal{A}$ uma *álgebra*, então $(Con\mathcal{A}, \subseteq)$ é um reticulado, tendo-se p/ qq $\theta_1, \theta_2 \in Con\mathcal{A}$

  $\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2$ e

  $\theta_1 \vee \theta_2 = \{(x, y) \in A^2 \mid \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, z_0, z_1, \ldots, z_n \in A : x = z_0, y = z_n \quad \forall 1 \leq k \leq n, z_{k-1}\, \theta_1\, z_k \text{ ou } z_{k-1}\, \theta_2\, z_k\}.$