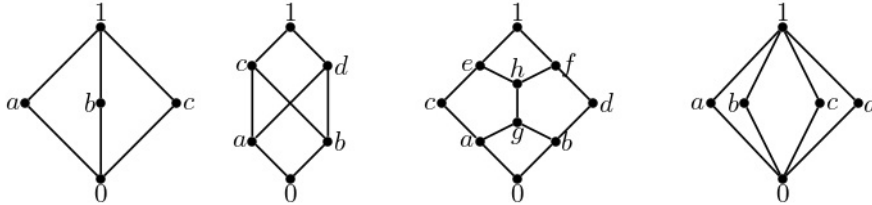


## Álgebra Universal e Categorias

### Exercícios - Folha 1

1. Diga, justificando, quais dos c.p.o.s a seguir representados são reticulados:



2. Mostre que cada um dos c.p.o.s a seguir indicados é um reticulado.

- (a)  $(\mathbb{N}, |)$ , onde  $|$  é a relação *divide* definida em  $\mathbb{N}$ .
- (b)  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ , onde  $\mathcal{P}(A)$  é o conjunto das partes de um conjunto  $A$  e  $\subseteq$  é a relação de inclusão usual.
- (c)  $(\text{Subg}(G), \subseteq)$ , onde  $\text{Subg}(G)$  representa o conjunto dos subgrupos de um grupo  $G$  e  $\subseteq$  é a relação de inclusão usual.

3. Prove que toda a cadeia é um reticulado.

4. Seja  $(P, \leq)$  um c.p.o. tal que, para todo  $H \subseteq P$ , existe  $\inf H$ . Mostre que  $(P, \leq)$  é um reticulado.

5. Uma estrutura algébrica  $(A; \wedge, \vee)$ , onde  $\wedge$  e  $\vee$  são operações binárias em  $A$ , satisfaz as leis *comutativas*, *associativas*, *de absorção* e *de idempotência* se, para quaisquer  $x, y, z \in A$ ,

- L1:  $x \vee y = y \vee x$ ,  $x \wedge y = y \wedge x$  (leis comutativas);
- L2:  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ,  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$  (leis associativas);
- L3:  $x \vee (x \wedge y) = x$ ,  $x \wedge (x \vee y) = x$  (leis de absorção);
- L4:  $x \vee x = x$ ,  $x \wedge x = x$  (leis de idempotência).

(a) Sejam  $(A_1, \wedge_1, \vee_1)$ ,  $(A_2, \wedge_2, \vee_2)$  e  $(A_3, \wedge_3, \vee_3)$  as seguintes estruturas algébricas:

- $A_1 = \{a, b\}$  e  $x \vee_1 y = x, \forall x, y \in A_1, a \wedge_1 x = a, b \wedge_1 x = x, \forall x \in A_1$ ;
  - $A_2 = \{a, b, c, d, e\}$  e
- | $\vee_2$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $\wedge_2$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $a$      | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $a$        | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$      | $b$ | $b$ | $e$ | $d$ | $e$ | $b$        | $a$ | $b$ | $a$ | $b$ | $b$ |
| $c$      | $c$ | $e$ | $c$ | $d$ | $e$ | $c$        | $a$ | $a$ | $c$ | $c$ | $c$ |
| $d$      | $d$ | $d$ | $d$ | $d$ | $e$ | $d$        | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $d$ |
| $e$      | $e$ | $e$ | $e$ | $e$ | $e$ | $e$        | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |

- $A_3 = \{a, b\}$  e  $b \vee a = b, a \vee_3 x = x, x \vee_3 b = b, x \wedge y = a, \forall x, y \in A_3$ .

Para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ , mostre que  $A_i$  satisfaz as leis indicadas em  $L_j$  para  $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$  e não satisfaz alguma das leis indicadas em  $L_i$ . Conclua que as leis L1, L2 e L3 são independentes.

(b) Mostre que as leis de idempotência são consequência das leis de absorção.

6. Seja  $(R; \wedge, \vee)$  o reticulado cujas operações  $\wedge$  e  $\vee$  são as descritas através das tabelas seguintes

$\wedge$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	b	b	b	b
c	0	a	b	c	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$\vee$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	c	c	1	1
b	b	c	b	c	d	1
c	c	c	c	c	1	1
d	d	1	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1

Considere o reticulado interpretado como um conjunto parcialmente ordenado e represente-o através de um diagrama de Hasse.