

Tópicos de Matemática

Exercícios

5. Relações binárias

5.1 Para cada uma das relações seguintes indique o respetivo domínio e imagem.

(a) S é a relação de $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ em $B = \{1, 2, 3\}$ dada por

$$S = \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 3)\}.$$

(b) R é a relação em \mathbb{R} dada por $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.

(c) $|$ é a relação “divide” em $\{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 20\}$ definida por

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad b = na.$$

(d) Dado um conjunto A , T é a relação de A em $\mathcal{P}(A)$ dada por $\{(x, X) \mid x \in X\}$.

(e) $<$ é a relação “menor” usual em \mathbb{N} .

5.2 Seja $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Considere as seguintes relações em A : $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (10, 8)\}$, $S = \{(10, 2), (10, 8)\}$ e $T = \{(6, 2), (6, 4), (8, 10)\}$. Determine

(a) R^{-1} (b) $R^{-1} \cup S^{-1}$

(c) $T \setminus S^{-1}$ (d) $T^{-1} \cap S$

(e) $S \circ T$ (f) $R \circ T$

(g) $S^{-1} \circ T^{-1}$ (h) $S^{-1} \circ S$

5.3 Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, w, z\}$. Considere as relações binárias de A em B e de B em A , respetivamente:

$$R = \{(1, x), (1, z), (2, y), (2, z)\}$$

$$S = \{(x, 1), (x, 3), (y, 2), (w, 2), (z, 3)\}.$$

Sejam $T = S \circ R$ e $U = R \circ S$.

(a) Determine:

$$\text{i) } R^{-1} \quad \text{ii) } S^{-1} \quad \text{iii) } T \quad \text{iv) } T \circ T \quad \text{v) } U \quad \text{vi) } U \circ U.$$

(b) Verifique que $T^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

(c) Indique o domínio e a imagem de R .

(d) Dê um exemplo de relações binárias não vazias R' de A em B e S' de B em A , tais que $S' \circ R' \neq \emptyset$ e $R' \circ S' = \emptyset$.

5.4 Investigue se as igualdades que se seguem são verdadeiras, para quaisquer relações R_1, R_2 e R_3 definidas em conjuntos apropriados.

(a) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_1^{-1} \circ R_2^{-1})$

(b) $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

(c) $(R_1 \cap R_2) \cup R_3 = R_1 \cap (R_2 \cup R_3)$

(d) $(R_1 \cup R_2) \cup R_3 = R_1 \cup (R_2 \cup R_3)$

5.5 Sejam A um conjunto e R, S e T relações binárias definidas em A . Mostre que:

- (a) $(R^{-1})^{-1} = R$; (b) Se $R \subseteq S$ então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$;
 (c) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$; (d) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
 (e) $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$; (f) $T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$;
 (g) $(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$; (h) $T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$.

5.6 Seja A um conjunto. Diga, justificando, se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas.

- (a) Para qualquer relação binária R definida em A , $R \circ R^{-1} = id_A$.
 (b) Para qualquer relação binária R definida em A , $R \circ id_A = id_A \circ R = R$.
 (c) Para qualquer relação binária R definida em A , $R \subseteq R \circ \omega_A$.

5.7 Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações em A :

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}, \\ R_2 &= \{(2, 3)\}, \\ R_3 &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}, \\ R_4 &= \{(a, a) \mid a \in A\} = id_A. \end{aligned}$$

Diga, justificando, se cada uma das relações apresentadas é ou não uma relação

- (a) reflexiva; (b) simétrica;
 (c) antissimétrica; (d) transitiva.

5.8 Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 2), (3, 1)\}$ uma relação binária em A . Determine a menor relação binária em A que inclua R e que seja reflexiva (respetivamente, simétrica, transitiva e de equivalência).

5.9 Sejam A um conjunto e R uma relação simétrica e transitiva em A . Mostre que

- (a) R não é necessariamente reflexiva.
 (b) Se o domínio de R é A , então R é reflexiva.

5.10 Seja $A = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e considere a relação de equivalência R em A definida por $x R y$ se e só se $x^2 = y^2$. Indique todos os elementos da classe $[-3]_R$ e determine o conjunto quociente A/R .

5.11 Seja $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$ e considere a relação de equivalência \sim em A definida por $x \sim y$ se e só se $x + y = 2n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Indique todos os elementos da classe $[2]_{\sim}$ e determine o conjunto quociente A/\sim .

5.12 Considere as relações R_1, R_2 e R_3 apresentadas a seguir:

- R_1 é a relação em $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ definida por $x R_1 y$ se e só se x e y têm o mesmo resto na divisão inteira por 3;
- R_2 é a relação em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $(x, y) R_2 (z, w)$ se e só se $y = w$;
- R_3 é a relação em $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definida por $(a, b) R_3 (c, d)$ se e só se $ad = bc$.

- (a) Verifique que R_1, R_2 e R_3 são relações de equivalência.
 (b) Para as relações R_1 e R_2 descreva cada classe de equivalência e indique o conjunto quociente.

5.13 Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e considere a relação \sim em $\mathcal{P}(A)$ definida por

$$X \sim Y \text{ se e só se } X \cup \{1, 2\} = Y \cup \{1, 2\}.$$

- (a) Mostre que \sim é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$.
- (b) Indique todos os elementos da classe $[\{1\}]_{\sim}$ e determine o conjunto quociente $\mathcal{P}(A) / \sim$.

5.14 Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ e sejam

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{\{2, 4\}, \{3\}, \{4, 6\}, \{3, 6, 7\}\}, & \Pi_2 &= \{\{2, 4, 6\}, \{3, 7\}\}, \\ \Pi_3 &= \{\{2\}, \{3, 4, 7\}\}, & \Pi_4 &= \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}\}, \\ \Pi_5 &= \{\{2\}, \emptyset, \{3, 4\}, \{6, 7\}\}, & \Pi_6 &= \{\{2, 6\}, \{3, 7\}, \{4\}\}. \end{aligned}$$

- (a) Diga, justificando, quais dos conjuntos Π_j ($1 \leq j \leq 6$) são partições de A .
- (b) Para os conjuntos Π_j ($1 \leq j \leq 6$) que são partições, determine a relação de equivalência em A associada a Π_j .

5.15 Sejam $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 26\}$ e \sim a relação de equivalência em A definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ têm o mesmo número de divisores naturais}$$

Determine a partição de A associada a \sim , isto é, o conjunto quociente A / \sim .

5.16 Considere a relação \sim em \mathbb{Z} definida por

$$x \sim y \text{ se e só se } |x| = |y|.$$

- (a) Mostre que \sim é uma relação de equivalência.
- (b) Determine a partição de \mathbb{Z} associada a \sim , isto é, o conjunto quociente \mathbb{Z} / \sim .

5.17 Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e sejam ρ_1, ρ_2, ρ_3 e ρ_4 as seguintes relações em A :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \{(1, 1), (4, 1), (2, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 4)\} \\ \rho_2 &= \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 4)\} \\ \rho_3 &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \\ \rho_4 &= \{(1, 1), (2, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4), (3, 1)\} \end{aligned}$$

Indique se cada uma destas relações é ou não uma ordem parcial e, para cada ordem parcial, apresente o correspondente diagrama de Hasse.

5.18 Mostre que os seguintes pares são c.p.o.'s:

- (a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde A é um conjunto;
- (b) $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação “divide”.

5.19 Construa diagramas de Hasse para os seguintes c.p.o.'s:

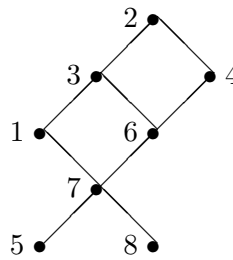
- (a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
- (b) $(A, |_A)$, onde $A = \{2, 3, 4, 6, 10, 12, 20\}$ e $|_A$ é a relação binária em A definida por

$$a |_A b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \ b = ka.$$

5.20 Seja (A, \leq) um c.p.o.. Mostre que o supremo (ínfimo) de um subconjunto X de A , caso exista, é único.

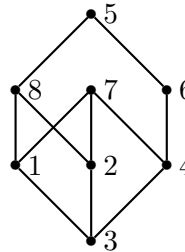
5.21 Sejam (A, \leq) um c.p.o.. e $X \subseteq A$. Mostre que se m é o elemento máximo de X , então m é o supremo de X .

- 5.22 Sejam $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X = \{1, 3, 6\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 7\}$. Considere o c.p.o. (P, \leq) com o seguinte diagrama de Hasse:



Para cada um dos conjuntos X e Y determine, caso existam, os majorantes e minorantes, o supremo e o ínfimo, os elementos maximais e minimais e o máximo e o mínimo.

- 5.23 Seja $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Considere o c.p.o. (P, \leq) cuja relação de ordem parcial é dada pelo diagrama de Hasse



- (a) Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine, caso existam, $\text{Maj}(X)$, $\text{Min}(X)$, $\max(X)$ e $\min(X)$.
- (b) Justifique que $\sup(\emptyset) = 3$ e que não existe $\inf(\emptyset)$.
- (c) Dê exemplo de um subconjunto de P com exatamente 3 elementos e que tenha 2 elementos minimais e 2 elementos maximais.
- 5.24 Sejam (A, \leq) um c.p.o. e $X \subseteq A$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira para qualquer c.p.o. (A, \leq) e para qualquer conjunto $X \subseteq A$:
- (a) Se X tem um elemento maximal então X tem elemento máximo;
- (b) Se X tem elemento máximo então X tem um elemento maximal;
- (c) Se existe $\sup(X)$ então X tem um elemento maximal;
- (d) Se X tem um elemento maximal então existe $\sup(X)$;
- 5.25 (a) Sejam (P, \leq) um c.p.o. e \leq_d a relação binária definida em P por

$$a \leq_d b \text{ se e só se } b \leq a.$$

Mostre que \leq_d é uma relação de ordem parcial.

- (b) Considere o c.p.o. (P, \leq) definido no exercício 5.22. e construa o diagrama de Hasse de (P, \leq_d) .
- 5.26 Seja A um conjunto. Mostre que $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado com elemento máximo e elemento mínimo.
- 5.27 Seja (A, \leq) um c.p.o.. Mostre que se (A, \leq) é um conjunto bem ordenado, então (A, \leq) é uma cadeia.

5.28 Considere em \mathbb{N} a relação $|$ definida por

$$x|y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = kx.$$

- (a) Mostre que o c.p.o. $(\mathbb{N}, |)$ não é uma cadeia.
- (b) Diga, justificando, se $(\mathbb{N}, |)$ tem elemento máximo ou elemento mínimo.
- (c) Mostre que $(\mathbb{N}, |)$ é um reticulado, indicando para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, o supremo e o ínfimo de $\{a, b\}$.
- (d) Considere $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 36\}$ e $Y = \{1, 2, 5, 6, 12, 20, 30, 120\}$.
 - (i) Construa os diagramas de Hasse de $(X, |_X)$ e de $(Y, |_Y)$.
 - (ii) Indique, caso existam, os elementos minimais e os elementos maximais de X .
 - (iii) Indique, caso existam, elementos $a, b \in Y$ tais que:
 - (α) exista supremo de $\{a, b\}$ em $(Y, |_Y)$ e este supremo seja diferente do supremo de $\{a, b\}$ em $(\mathbb{N}, |)$;
 - (β) não exista supremo de $\{a, b\}$ em $(Y, |_Y)$.
 - (iv) Dê exemplo de um subconjunto Z de X tal que $(Z, |_Z)$ tenha elemento máximo e elemento mínimo e não seja um reticulado.