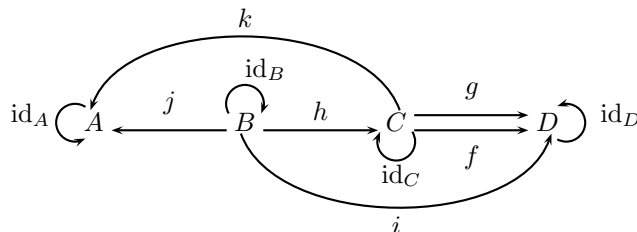


## Álgebra Universal e Categorias

2º teste (9 de junho de 2017) duração: 2 horas

### 1. Considere a categoria $\mathbf{C}$ definida por



onde  $i = f \circ h = g \circ h$ ,  $j = k \circ h$ .

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (a) Para quaisquer  $\mathbf{C}$ -morfismos  $p : X \rightarrow Y$  e  $q : Y \rightarrow Z$ , se  $p$  não é um epimorfismo, então  $q \circ p$  não é um epimorfismo

Um  $\mathbf{C}$ -morfismo  $r : X \rightarrow Y$  diz-se um epimorfismo se, para quaisquer  $\mathbf{C}$ -morfismos  $s, t : Y \rightarrow W$ ,

$$s \circ r = t \circ r \Rightarrow s = t.$$

Claramente, o  $\mathbf{C}$ -morfismo  $h$  não é um epimorfismo, pois

$$f \circ h = g \circ h \text{ e } f \neq g.$$

No entanto, o  $\mathbf{C}$ -morfismo  $i = f \circ h$  é um epimorfismo. De facto, para quaisquer  $\mathbf{C}$ -morfismos  $s, t : D \rightarrow W$ ,

$$s \circ i = t \circ i \Rightarrow s = \text{id}_D = t,$$

uma vez que  $\text{id}_D$  é o único  $\mathbf{C}$ -morfismo com domínio  $D$ .

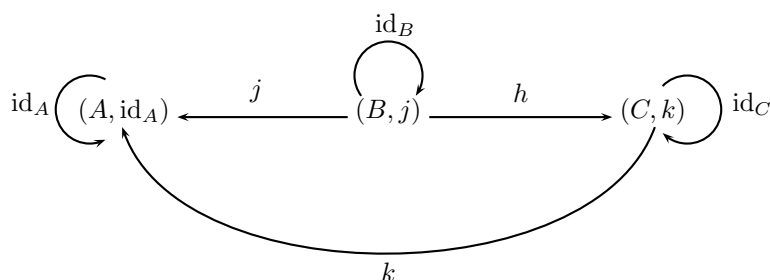
Logo a afirmação é falsa, pois  $h$  não é um epimorfismo, mas  $f \circ h$  é um epimorfismo.

- (b) Para qualquer objeto  $X$  de  $\mathbf{C}$ , se  $X$  não é um objeto terminal de  $\mathbf{C}$ , então  $(X, \text{id}_X)$  não é um objeto terminal da categoria  $\mathbf{C}/A$  dos objetos sobre  $A$ .

Sendo  $\mathbf{C} = (\text{Obj}(\mathbf{C}), \text{hom}_{\mathbf{C}}, \text{id}^{\mathbf{C}}, \circ^{\mathbf{C}})$  a categoria dada no enunciado, a categoria dos objetos sobre  $A$  é a categoria  $\mathbf{C}/A = (\text{Obj}(\mathbf{C}/A), \text{hom}, \text{id}^{\mathbf{C}/A}, \circ^{\mathbf{C}/A})$  tal que

- os objetos de  $\mathbf{C}/A$  são todos os pares  $(X, f)$ , onde  $X$  é um objeto de  $\mathbf{C}$  e  $f : X \rightarrow A$  é um morfismo de  $\mathbf{C}$ ;
- dados objetos  $(X, f)$  e  $(Y, g)$  de  $\mathbf{C}/A$ , um  $\mathbf{C}/A$ -morfismo de  $(X, f)$  em  $(Y, g)$  é um  $\mathbf{C}$ -morfismo  $j : X \rightarrow Y$  tal que  $g \circ^{\mathbf{C}} j = f$ ;
- para cada objeto  $(X, f)$  de  $\mathbf{C}/A$ , o morfismo identidade  $\text{id}_{(X, f)}^{\mathbf{C}/A}$  é o  $\mathbf{C}$ -morfismo  $\text{id}_X^{\mathbf{C}} : X \rightarrow X$ ;
- dados morfismos  $j : (X, f) \rightarrow (Y, g)$  e  $k : (Y, g) \rightarrow (Z, h)$  a sua composição  $k \circ^{\mathbf{C}/A} j : (X, f) \rightarrow (Z, h)$  é o  $\mathbf{C}$ -morfismo  $k \circ^{\mathbf{C}} j : X \rightarrow Z$ .

Ou seja,  $\mathbf{C}/A$  é a categoria representada por



Um objeto  $T$  de uma categoria  $\mathbf{D}$  diz-se um objeto terminal se, para qualquer objeto  $X$  de  $\mathbf{D}$ , existe um, e um só,  $\mathbf{D}$ -morfismo de  $X$  em  $T$ .

Na categoria  $\mathbf{C}$ , o objeto  $A$  não é terminal, pois  $D$  é um objeto de  $\mathbf{C}$  e não existe morfismo de  $D$  em  $A$ .

Na categoria  $\mathbf{C}/A$ , o objeto  $(A, \text{id}_A)$  é terminal, pois, para qualquer objeto  $(X, q)$  de  $\mathbf{C}/A$ , existe um, e um só, morfismo de  $(X, q)$  em  $(A, \text{id}_A)$ .

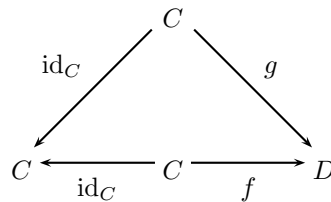
Logo a afirmação é falsa, pois  $A$  é um objeto de  $\mathbf{C}$  que não é objeto terminal, mas  $(A, \text{id}_A)$  é objeto terminal de  $\mathbf{C}/A$ .

(c) O par  $(C, (\text{id}_C, f))$  é um produto de  $C$  e  $D$ .

O par  $(C, (\text{id}_C, f))$  é um produto de  $C$  e  $D$  se forem satisfeitas as seguintes condições:

- (i)  $C$  é um objeto de  $\mathbf{C}$ ;
- (ii)  $\text{id}_C$  é um  $\mathbf{C}$ -morfismo de  $C$  em  $C$  e  $f$  é um  $\mathbf{C}$ -morfismo de  $C$  em  $D$ ;
- (iii) para quaisquer  $\mathbf{C}$ -morfismos  $p : X \rightarrow C$  e  $q : X \rightarrow D$ , existe um, e um só, morfismo  $u : X \rightarrow C$  tal que  $\text{id}_C \circ u = p$  e  $f \circ u = q$ .

Ora, embora as condições (i) e (ii) sejam satisfeitas, verifica-se que a condição (iii) não se verifica. De facto, como  $\text{id}_C : C \rightarrow C$  e  $g : C \rightarrow D$  são morfismos de  $\mathbf{C}$ , tem-se o seguinte diagrama em  $\mathbf{C}$



Como  $\text{id}_C$  é o único morfismo de  $C$  em  $C$  e  $f \circ \text{id}_C \neq g$ , concluímos que não existe qualquer  $\mathbf{C}$ -morfismo  $u : C \rightarrow C$  tal que  $f \circ u = g$  e  $\text{id}_C \circ u = \text{id}_C$ . Por conseguinte,  $(C, (\text{id}_C, f))$  não é um produto de  $C$  e  $D$ .

Logo a afirmação é falsa.

2. Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria e  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  morfismos de  $\mathbf{C}$ . Mostre que se  $g \circ f$  é invertível à direita, então  $g$  é um epimorfismo.

Um  $\mathbf{C}$ -morfismo  $p : X \rightarrow Y$  diz-se invertível à direita se existe um  $\mathbf{C}$ -morfismo  $q : Y \rightarrow X$  tal que  $p \circ q = \text{id}_Y$ .

Um  $\mathbf{C}$ -morfismo  $p : X \rightarrow Y$  diz-se um epimorfismo se, para quaisquer  $\mathbf{C}$ -morfismos  $i, j : Y \rightarrow Z$ ,

$$i \circ p = j \circ p \Rightarrow i = j.$$

Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  morfismos de  $\mathbf{C}$  tais que  $g \circ f$  é invertível à direita. Uma vez que  $g \circ f : A \rightarrow C$  é invertível à direita, então existe um morfismo  $h : C \rightarrow A$  tal que  $(g \circ f) \circ h = \text{id}_C$ .

Sejam  $i, j : C \rightarrow D$  morfismos de  $\mathbf{C}$  tais que  $i \circ g = j \circ g$ . Então

$$(i \circ g) \circ (f \circ h) = (j \circ g) \circ (f \circ h)$$

donde segue que

$$i \circ ((g \circ f) \circ h) = j \circ ((g \circ f) \circ h).$$

Logo

$$i \circ \text{id}_C = j \circ \text{id}_C$$

e, portanto,  $i = j$ .

Desta forma, provámos que  $g$  é um epimorfismo.

3. Mostre que se  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  são categorias com objetos terminais, então a categoria  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$  também tem objetos terminais. Conclua que a categoria  $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$  tem objetos terminais. Dê um exemplo de um objeto terminal de  $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$ . Justifique a sua resposta.

Um objeto  $T$  de uma categoria  $\mathbf{C}$  diz-se um objeto terminal se, para qualquer objeto  $X$  de  $\mathbf{C}$ , existe um, e um só,  $\mathbf{C}$ -morfismo  $f : X \rightarrow T$ .

Suponhamos que  $T_1$  e  $T_2$  são objetos terminais de  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ , respetivamente.

Facilmente se prova que  $(T_1, T_2)$  é um objeto terminal de  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ . De facto, como  $T_1$  é um objeto de  $\mathbf{C}$  e  $T_2$  é um objeto de  $\mathbf{D}$ , o par  $(T_1, T_2)$  é um objeto de  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ . Além disso, para qualquer objeto  $(X, Y)$  de  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ , existe um, e um só,  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ -morfismo de  $(X, Y)$  em  $(T_1, T_2)$ . Com efeito, como  $X$  é objeto de  $\mathbf{C}$  e  $T_1$  é objeto terminal de  $\mathbf{C}$ , existe um  $\mathbf{C}$ -morfismo  $f : X \rightarrow T_1$ . De modo análogo, como  $Y$  é um objeto de  $\mathbf{D}$  e  $T_2$  é um objeto terminal de  $\mathbf{D}$ , existe um  $\mathbf{D}$ -morfismo  $g : Y \rightarrow T_2$ . Logo existe um  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ -morfismo de  $(X, Y)$  em  $(T_1, T_2)$ : o morfismo  $(f, g)$ . O morfismo  $(f, g)$  é o único  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ -morfismo de  $(X, Y)$  em  $(T_1, T_2)$ . Se admitirmos que  $(f', g')$  é um  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ -morfismo de  $(X, Y)$  em  $(T_1, T_2)$ , segue que  $f'$  é um  $\mathbf{C}$ -morfismo de  $X$  em  $T_1$  e que  $g'$  é um  $\mathbf{D}$ -morfismo de  $Y$  em  $T_2$ . Mas  $f$  é o único  $\mathbf{C}$ -morfismo de  $X$  em  $T_1$  (pois  $T_1$  é um objeto terminal de  $\mathbf{C}$ ), pelo que  $f = f'$ . De forma semelhante, conclui-se que  $g = g'$  (pois  $T_2$  é um objeto terminal de  $\mathbf{D}$ ). Logo  $(f, g) = (f', g')$ . Desta forma, provámos que, para qualquer objeto  $(X, Y)$  de  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ , existe um, e um só,  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ -morfismo de  $(X, Y)$  em  $(T_1, T_2)$ .

Logo  $(T_1, T_2)$  é um objeto terminal de  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ .

A categoria **Set** tem objetos terminais: os conjuntos singulares. Logo, pelo que foi provado anteriormente, a categoria **Set**  $\times$  **Set** tem objetos terminais. Uma vez que  $\{1\}$  e  $\{2\}$  são objetos terminais de **Set**, o par  $(\{1\}, \{2\})$  é um objeto terminal de **Set**  $\times$  **Set**.

4. Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow A$  morfismos de uma categoria  $\mathbf{C}$  tais que  $f \circ g = id_B$ . Mostre que  $(A, f)$  é um coigualizador de  $g \circ f$  e  $id_A$ .

Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow A$  morfismos de uma categoria  $\mathbf{C}$  tais que  $f \circ g = id_B$ . Pretendemos mostrar que  $(A, f)$  é um coigualizador de  $g \circ f$  e  $id_A$ , i.e., pretendemos mostrar que:

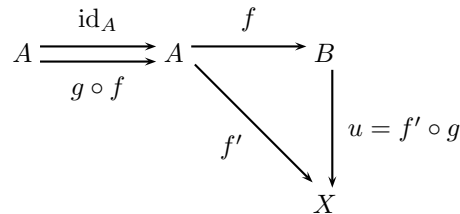
- (1)  $f \circ (g \circ f) = f \circ id_A$ ;
- (2) para qualquer  $\mathbf{C}$ -morfismo  $f' : A \rightarrow X$ , se  $f' \circ (g \circ f) = f' \circ id_A$ , então existe um, e um só morfismo,  $u : B \rightarrow X$  tal que  $u \circ f = f'$ .

Mostremos (1) e (2).

- (1) Uma vez que  $f \circ g = id_B$ , tem-se

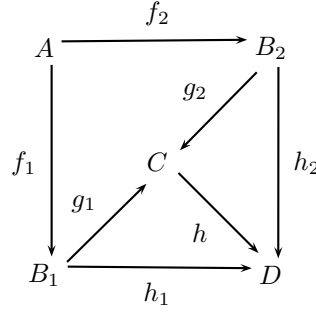
$$f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f = id_B \circ f = f = f \circ id_A.$$

- (2) Seja  $f' : A \rightarrow X$  um  $\mathbf{C}$ -morfismo tal que  $f' \circ (g \circ f) = f' \circ id_A$ . Então  $f' \circ (g \circ f) = f'$  e, portanto, existe o  $\mathbf{C}$ -morfismo  $u = f' \circ g$  tal que  $u \circ f = f'$ .



Além disso, o morfismo  $f' \circ g$  é o único  $\mathbf{C}$ -morfismo  $u : B \rightarrow X$  tal que  $u \circ f = f'$ . De facto, se  $f'' : B \rightarrow X$  é um morfismo tal que  $f'' \circ f = f'$ , tem-se  $f'' \circ f \circ g = f' \circ g$ , donde segue que  $f'' \circ id_B = f' \circ g$ . Logo  $f'' = f' \circ g$ .

5. Numa categoria  $\mathbf{C}$ , considere o seguinte diagrama



Mostre que se o diagrama anterior é comutativo e  $(A, (f_1, f_2))$  é um produto fibrado de  $(h_1, h_2)$ , então  $(A, (f_1, f_2))$  é um produto fibrado de  $(g_1, g_2)$ .

Admitamos que o diagrama anterior é comutativo e que  $(A, (f_1, f_2))$  é um produto fibrado de  $(h_1, h_2)$ . Pelo facto de  $(A, (f_1, f_2))$  ser um produto fibrado de  $(h_1, h_2)$ , tem-se que:

- (1)  $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$ ;
- (2) para quaisquer  $\mathbf{C}$ -morfismos  $i_1 : X \rightarrow B_1$ ,  $i_2 : X \rightarrow B_2$ , se  $h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2$ , então existe um, e um só,  $\mathbf{C}$ -morfismo  $u : X \rightarrow A$  tal que  $f_1 \circ u = i_1$  e  $f_2 \circ u = i_2$ .

Pretende-se mostrar que  $(A, (f_1, f_2))$  é um produto fibrado de  $(g_1, g_2)$ , isto é, pretende-se mostrar que:

- (3)  $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ ;
- (4) para quaisquer  $\mathbf{C}$ -morfismos  $j_1 : X \rightarrow B_1$ ,  $j_2 : X \rightarrow B_2$ , se  $g_1 \circ j_1 = g_2 \circ j_2$ , então existe um, e um só,  $\mathbf{C}$ -morfismo  $v : X \rightarrow A$  tal que  $f_1 \circ v = j_1$  e  $f_2 \circ v = j_2$ .

Mostremos (3) e (4).

(3) A igualdade  $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$  é imediata, uma vez que o diagrama anterior é comutativo e  $g_1 \circ f_1$  e  $g_2 \circ f_2$  são morfismos com o mesmo domínio e o mesmo codomínio.

(4) Sejam  $j_1 : X \rightarrow B_1$  e  $j_2 : X \rightarrow B_2$  morfismos de  $\mathbf{C}$  tais que  $g_1 \circ j_1 = g_2 \circ j_2$ . Então  $h \circ g_1 \circ j_1 = h \circ g_2 \circ j_2$ , donde segue que  $h_1 \circ j_1 = h_2 \circ j_2$  (note-se que  $h \circ g_1 = h_1$  e  $h \circ g_2 = h_2$ , pois o diagrama é comutativo). Então, atendendo a (2) segue que existe um, e um só, morfismo  $v : X \rightarrow A$  tal que  $f_1 \circ v = j_1$  e  $f_2 \circ v = j_2$ .

6. Sejam  $X$  um conjunto e  $F_X$  a correspondência que

- a cada conjunto  $A$  associa o conjunto  $F_X(A) = A \times X$ ;
- a cada função  $f : A \rightarrow B$  associa a função

$$F_X(f) : A \times X \rightarrow B \times X \\ (a, x) \mapsto (f(a), x)$$

(a) Mostre que, para qualquer conjunto  $X$ ,  $F_X$  é um funtor de **Set** em **Set**.

Dado um conjunto  $X$ , a correspondência  $F_X$  é um funtor de **Set** em **Set** se  $F_X$  é uma correspondência que a cada objeto  $A$  de **Set** associa um objeto de **Set**, a cada morfismo  $f : A \rightarrow B$  de **Set** associa um morfismo  $f(f) : F_X(A) \rightarrow F_X(B)$  de **Set** e tal que:

- para qualquer objeto  $A$  de **Set**,  $F_X(\text{id}_A) = \text{id}_{F_X(A)}$ ;
- para quaisquer **Set**-morfismos  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $F_X(g \circ f) = F_X(g) \circ F_X(f)$ .

Facilmente se verifica que  $F_X$  é um funtor de **Set** em **Set**. De facto:

(1) Para cada conjunto  $A$  de **Set**,  $A \times X$  é um conjunto, logo  $A \times X$  é um objeto de **Set**. Assim, a cada objeto  $A$  de **Set**, a correspondência  $F_X$  associa um objeto de **Set**.

(2) Para qualquer função  $f : A \rightarrow B$ , a correspondência  $F_X(f)$  é uma função, logo  $F_X(f)$  é um morfismo de **Set**. Assim, a cada morfismo  $f : A \rightarrow B$  de **Set**, a correspondência  $F_X$  associa um morfismo  $F_X(f) : F_X(A) \rightarrow F_X(B)$  de **Set**.

(3) Para qualquer objeto  $A$  de **Set**, tem-se  $F_X(\text{id}_A) = \text{id}_{F_X(A)}$ .

Com efeito, como  $\text{id}_A$  é a função definida por

$$\begin{aligned} \text{id}_A : A &\rightarrow A \\ a &\mapsto a \end{aligned}$$

da definição de  $F_X$  segue que a função  $F_X(\text{id}_A)$  é a função dada por

$$\begin{aligned} F_X(\text{id}_A) : A \times X &\rightarrow A \times X \\ (a, x) &\mapsto (\text{id}_A(a), x) = (a, x) \end{aligned} \quad .$$

A função  $\text{id}_{F_X(A)}$  é a função definida por

$$\begin{aligned} \text{id}_{F_X(A)} : F_X(A) &\rightarrow F_X(A) \\ u &\mapsto u \end{aligned} \quad ,$$

ou seja,  $\text{id}_{F_X(A)}$  é a função

$$\begin{aligned} \text{id}_{F_X(A)} : A \times X &\rightarrow A \times X \\ (a, x) &\mapsto (a, x) \end{aligned} \quad .$$

Obviamente, as funções  $F(\text{id}_A)$  e  $\text{id}_{F(A)}$  são iguais.

(4) Para quaisquer funções  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$ ,  $F_X(g \circ f) = F_X(g) \circ F_X(f)$ .

Por definição de composição de funções,  $g \circ f$  é a função definida por

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\rightarrow C \\ a &\mapsto g(f(a)) \end{aligned}$$

donde segue que  $F_X(g \circ f)$  é a função

$$\begin{aligned} F_X(g \circ f) : A \times X &\rightarrow C \times X \\ (a, x) &\mapsto (g(f(a)), x) \end{aligned}$$

Atendendo a que  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  são funções, pela definição de  $F_X$  temos

$$\begin{aligned} F_X(f) : A \times X &\rightarrow B \times X & F_X(g) : B \times X &\rightarrow C \times X \\ (a, x) &\mapsto (f(a), x) & (b, x) &\mapsto (g(b), x) \end{aligned}$$

e por definição de composição de funções segue que

$$\begin{aligned} F_X(g) \circ F_X(f) : A \times X &\rightarrow C \times X \\ (a, x) &\mapsto (F_X(g) \circ F_X(f))(a, x) \end{aligned}$$

onde

$$(F_X(g) \circ F_X(f))(a, x) = F_X(g)(F_X(f)(a, x)) = F_X(g)(f(a), x) = (g(f(a)), x).$$

Claramente, as funções  $F_X(g \circ f)$  e  $F_X(g) \circ F_X(f)$  são iguais.

(b) **Diga, justificando, se o funtor  $F_X$  é um funtor fiel quando:** (i)  $X = \emptyset$ . (ii)  $X \neq \emptyset$ .

Dado um conjunto  $X$ , o funtor  $F_X$  é fiel se, para quaisquer funções  $f, g : A \rightarrow B$ ,

$$F_X(f) = F_X(g) \Rightarrow f = g.$$

(i) Se  $X = \emptyset$ , o funtor  $F_X$  não é fiel, pois as funções  $f$  e  $g$  definidas por

$$\begin{aligned} f : \{1\} &\rightarrow \{2, 3\} & g : \{1\} &\rightarrow \{2, 3\} \\ 1 &\mapsto 2 & 1 &\mapsto 3 \end{aligned}$$

não são iguais e  $F_X(f) = \emptyset = F_X(g)$ .

(ii) Se  $X \neq \emptyset$ , o funtor  $F_X$  é fiel.

De facto, se  $X \neq \emptyset$ , então existe  $x \in X$ . Logo, para quaisquer funções  $f, g : A \rightarrow B$  tais que  $F_X(f) = F_X(g)$ , tem-se  $f = g$ . Com efeito:

- $f$  e  $g$  são funções com o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada,
- para qualquer  $a \in A$ ,  $f(a) = g(a)$  (se  $a \in A$ , tem-se  $(a, x) \in A \times X$  e de  $F_X(f) = F_X(g)$  segue que  $(f(a), x) = (g(a), x)$ ; por conseguinte,  $f(a) = g(a)$ ).

Cotação: 1.(1.5+1.5+1.5); 2.(2.0); 3.(2.25); 4.(2.25); 5.(2.5); 6.(2.5); 6.(2.0+2.0).