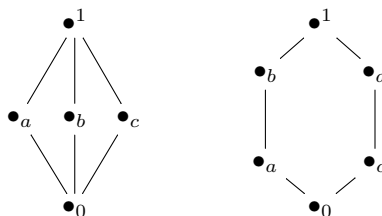


Lic. em Ciências da Computação e Lic. em Matemática 2023/2024
Exame de Álgebra Universal e Categorias
15 Junho 2024

Nome e No.: _____

Este teste é constituído por 3 grupos. O grupo I é para responder neste enunciado. Os grupos II e III devem ser respondidos na folha de teste providenciada.
Duração: 2 horas

Em todo este teste, \mathcal{N} denota a álgebra $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ de tipo 2,0; M_3 denota o conjunto $\{0, a, b, c, 1\}$ e O_6 denota o conjunto $\{0, a, b, c, d, 1\}$; e $\mathcal{M}_3 = (M_3; \wedge, \vee)$ e $\mathcal{O}_6 = (O_6; \wedge', \vee')$ são os reticulados dados respectivamente pelos dois diagramas seguintes.



I

1. Diga se cada uma das seguintes 6 afirmação é verdadeira ou falsa. Cada resposta correcta vale 1 valor, cada resposta errada vale -0.25 valores, a ausência de resposta vale 0 valores.

	V	F
a) Existe um homomorfismo $\alpha : \mathcal{O}_6 \rightarrow \mathcal{M}_3$ tal que $\ker(\alpha) = \nabla_{O_6}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) $Sg^{\mathcal{O}_6}(\{a, c\}) = O_6$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) \mathcal{O}_6 é um reticulado distributivo.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) Existem reticulados não triviais \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 tais que o reticulado $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ é isomorfo a \mathcal{O}_6 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) No monóide \mathcal{N} , visto como categoria, 0 é epimorfismo.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
f) Em \mathcal{M}_3 , $\Theta(a, a) = \Delta_{M_3}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

II

Para cada uma das seguintes afirmações, escreva **duas linhas** para justificar a veracidade ou falsidade das mesmas. (2 valores cada).

2. Se (P, \leq) é um reticulado, $Q \subseteq P$ e \leq' é a ordem induzida em Q , então (Q, \leq') é um reticulado.
3. Existe um mergulho $\alpha : \mathcal{M}_3 \rightarrow \mathcal{O}_6$.
4. A álgebra \mathcal{N} tem um par de congruências-factor.
5. Na categoria Set , existe um monomorfismo que é um epimorfismo.

III

Demonstre as seguintes afirmações (2 valores cada).

6. Todo o reticulado finito é algébrico.
7. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo, S um sub-universo de \mathcal{B} e $h : A \rightarrow B$ um homomorfismo de \mathcal{A} em \mathcal{B} . O conjunto $h^{\leftarrow}(S) = \{a \in A \mid h(a) \in S\}$ é um sub-universo de \mathcal{A} .
8. Se \mathcal{C} é uma categoria onde todo o morfismo é invertível à esquerda, então em \mathcal{C} todo o morfismo é invertível à direita.