Resumo Cap 4º

Notas Iniciais: $\mathbb{R}^n$ → espaço real de coordenadas, em que $\mathbb{R}^2$ corresponde a (x,y), $\mathbb{R}^3$ a (x,y,z) e et cetera.

Pode ser representado em matriz da seguinte forma: $\mathbb{R}^n \in M_{n\times 1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Um espaço vetorial é definido por $(V, \oplus, \odot, \mathbb{R}, +, \cdot)$ na sua forma mais explícita.

- escalar → elemento de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^1$)
- vetor → elemento de V, sendo V um subconjunto genérico $V \subset \mathbb{R}^n$.
- soma de vetores → operação $\oplus$.
- multiplicação de escalar e vetor → operação $\odot$.

A expressão "seja o espaço vetorial definido por $(V, \ldots)$" pode ser simplificada para "seja V um espaço vetorial".

As operações $\oplus$ e $\odot$ podem ser substituídas por $+$ e $\cdot$ se não causarem confusão.

Ex: $x \oplus y \rightarrow x + y$

$x \oplus (y) \rightarrow x - y$

$\alpha \odot x \rightarrow \alpha \cdot x$ ou αx

Generalização destas operações:

$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$

Propriedades / Regras da Operação Vetorial:

(sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $a, b \in \mathbb{R}$)

- $x + y = y + x$ (comutatividade)
- $x + (y + z) = (x + y) + z$
- $x + 0_V = x$

vetor nulo $\vec{0}$ num espaço vetorial V

- $x + (-x) = 0_V$
- $(ab)x = a(bx)$
- $a(x+y) = ax + ay$ (distributividade)
- $x \in \mathbb{R}^n \wedge a \in \mathbb{R}$, $ax \in \mathbb{R}^n$
- $1x = x$

Neste curso, consideram-se espaços vetoriais apenas os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Seja F um subconjunto dum espaço vetorial V. Tal título de subconjunto só é válido se:

- $0_V \in F$
- $\forall x, y \in F : x + y \in F$
- $\forall x \in F, \forall a \in \mathbb{R} : ax \in F$

Exemplo: "Seja $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$. Mostre que F é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$."

Resposta: F é subconjunto de $\mathbb{R}^2$ tal que...

... $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$

... $\forall x, y \in F$, $x = (x_1, 0)$, $y = (y_1, 0) \rightarrow x + y =$
$= (x_1, 0) + (y_1, 0) = (x_1 + y_1, 0) \in F$

... $\forall x \in F$, $x = (x_1, 0) \rightarrow \forall a \in \mathbb{R}$, $ax = a(x_1, 0) =$
$= (ax_1, 0) \in F$

Desta forma $F \subset \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2: "Seja $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 1\}$. Mostre que G não é subconjunto de $\mathbb{R}^2$."

Resposta: G não é subconjunto de $\mathbb{R}^2$ tal que...

... $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \notin G$

alternativamente...

... $\forall x, y \in G, x = (x_1, 1), y = (y_1, 1) \rightarrow x + y =$

$= (x_1 + y_1, 2) \notin G$

alternativamente...

... $\forall x \in G, x = (x_1, 1) \rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, ax = a(x_1, 1) =$

$= (ax_1, a) \notin G$ caso $a \neq 1$

OBSERVAÇÃO: Basta ser quebrada uma condição.

Observação sobre V:

- $V \subseteq V$ (V está contido e é igual a V, por abrangerem o mesmo.)
- $\{0_V\} \subset V$

Seja $A \in M_{m \times n}$. $CS_{(Ax = \underline{0})} \subset \mathbb{R}^n$. Tal é verdade porque...

... $A\, 0_{n \times 1} = \underline{0}$, logo $0_{\mathbb{R}^n} = 0_{n \times 1} \in CS_{(Ax = \underline{0})}$.

... sejam $x_1, x_2 \in CS_{(Ax = \underline{0})}$; como $A(x_1, x_2) = Ax_1 + Ax_2 =$
$= \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$, tem-se que $x_1 + x_2 \in CS_{(Ax = \underline{0})}$.

... $\forall x \in CS_{(Ax = \underline{0})}, \forall a \in \mathbb{R}$: como $A(ax) = a(Ax) = a \cdot$
tem-se que $ax \in CS_{(Ax = \underline{0})}$

*todo ... sev ... mes...

combinação linear

→ Dados $u, v \in \mathbb{R}^3$, $u = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$,

uma combinação linear de u e v possível é:

$$2u + 3v = 2\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 31 \end{bmatrix}$$

De modo geral, dados n vetores e n escalares, uma combinação linear b é:

$$b = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n$$

Exemplo de prova dum vetor e como comb linear de x_1, x_2 e x_3:

$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

a) Provar que e é comb linear de x_1 e x_2.

$$e = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 - \alpha_2 \\ 2(1 - \alpha_2) + \alpha_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2 - 2\alpha_2 + \alpha_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ -\alpha_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases} \longrightarrow \underbrace{e = 3x_1 - 2x_2}_{\text{escrita de } e \text{ como comb linear de } x_1 \text{ e } x_2}$$

PROCESSO ALTERNATIVO:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \end{cases} \xrightarrow{Ax = b} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1]{\text{ATEsc}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Note-se que car(A) = car(A|b) = n = 2 logo o sistema é PD.
Sendo α_1 e α_2 as incógnitas do sistema...

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ -\alpha_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases} \longrightarrow e = 3x_1 - 2x_2$$

b) Provar que é comb linear de x_1, x_2 e x_3.

$$e = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 4 \end{cases} \xrightarrow{Ax=b} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

livre

$car(A) = car(A|b) = 2 < n = 3$, logo o sistema é PI.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ -\alpha_2 - 2\alpha_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 - 2\alpha_3 - \alpha_2 \\ \alpha_2 = -2 - 2\alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 - 2\alpha_3 + 2 + 2\alpha_3 \\ \end{cases}$$

$-x - 2y = 2$

$\Leftrightarrow -x = 2 + 2y$

$\Leftrightarrow x = -2 - 2y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -2 - 2\alpha_3 \end{cases} \rightarrow e = 3x_1 + (-2 - 2\alpha_3)x_2 + \alpha_3 x_3, \ \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

---

espaço gerado $\rightarrow$ Dado $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$ (conjunto que inclue tudo o que o o espaço vetorial abrange), o espaço gerado por X representado por $L(X)$ ou $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ corresponde ao conjunto de todas as combs lineares dos elementos de X, ou seja,

$$L(X) = \langle x_1, \dots, x_2 \rangle$$
$$= \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

Provar que um vetor pertence a determinado espaço gerado:

"Sendo $C = \{[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}2\\5\end{smallmatrix}]\}$, prove que o vetor $e = [\begin{smallmatrix}20\\4\end{smallmatrix}]$ pertence a $L(C)$."

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 20 \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 = 4 \end{cases}$$

$$Ax = b \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 20 \\ 3 & 5 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 3l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 20 \\ 0 & -1 & -56 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 20 \\ -\alpha_2 = -56 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 20 + 124 = 144 \\ \alpha_2 = 56 \end{cases}$$

para estes escalares, $[\begin{smallmatrix}20\\4\end{smallmatrix}] \in L(C)$.

propriedades do espaço gerado → Seja V um espaço vetorial e $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $X \subseteq U \subseteq V$. Então:

- $L(X)$ é subespaço de V.
- se U é subspaço de V, então $L(X) \subseteq U$.

Observação:

$A \subset B$ → A é um subconjunto de B, mas B abrange mais

$A \subseteq B$ → A é um subconjunto de B pois ambos abrangem o mesmo, o que torna esta afirmação recíproca.

A designação "espaço gerado" vem do facto de $L(X)$ ser um subespaço de V, pelo que conta como espaço vetorial também.

$L(X)$ é o subespaço menos abrangente de V a conter X.

conjunto gerador → Um conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$ é gerador de V caso $V = L(X)$. Ou seja, caso o sistema $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = e$ seja possível para qualquer vetor $e \in V$.

Prova de que X é conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$:

$X = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ↪ verificar que X é gerador de $\mathbb{R}^2$ é provar que qualquer $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ resulta na possibilidade do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = b_1 \\ 4\alpha_2 + \alpha_3 = b_2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{Ax=b} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & b_1 \\ 0 & 4 & 1 & b_2 \end{array}\right] \text{ (já está em escada)}$$

note-se que $car(A) = car(A|b) = 2$ e $n = 3$, logo o sistema S_3 é indeterminado, mas possível, pelo que quaisquer b_1 e b_2 são válidos. Desta forma, X é gerador de V.

Prova contrária:

$X = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \}$

$\hookrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\downarrow$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 4\alpha_2 = b_1 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = b_2 \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & b_1 \\ -1 & 2 & b_2 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 + \frac{1}{2} l_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 + \frac{1}{2} b_1 \end{array}\right]$$

Repare-se que $car(A) = car(A|b) = 2$ apenas caso $b_2 + \frac{1}{2} b_1 \neq 0$, pelo que S_b não é universalmente possível, impedindo X de ser o gerador do espaço V.

---

propriedades dos conjuntos geradores → Conjuntos geradores distintos podem gerar o mesmo espaço (os espaços não são característicos dum conjunto)

→ Se $F = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, então $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ é seu conjunto gerador.

Indicar gerador de V com o número mínimo de elementos:

$V = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \rangle$

$$\longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 + 2l_1]{\text{1ºTEsc}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B \in fe(A)$$

Em B, a 2ª coluna é a única coluna pivô. Assim, $X' = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \}$ é um conjunto gerador de V com o nº mínimo de elementos.

---

vetores linearmente (in)dependentes → Em determinado $X = \{x_1, x_2\}$, se x_2 conseguir ser expresso por meio de uma combinação linear de x_1, então é linearmente dependente, ou seja, não contribui para um maior espaço gerado. Caso contrário, denomina-se independente.

conjs. linearmente (in)dependentes → Conjunto com pelo menos um vetor linearmente dependente é ld ele próprio; caso contrário é li.

Determinar se um conjunto X é li ou ld:

a) $X = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \}$

Como $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, X é <u>independente</u>.

b) $X = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \}$

Determinação da dependência dum conjunto resume-se à verificação de se é PI ou PD, quando igualado a 0_V.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 0 = 4\alpha_2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \text{(já está em escada)} \rightarrow car(A) = car(A|b) = n = 2$$

S_2 é PD, logo X é <u>independente</u>.

c) $X = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 + \frac{1}{2} l_1]{\text{Alt.Esc}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow car(A) = car(A|b) = 1 < n = 2$$

S_2 é PI, logo X é <u>dependente</u>.

Observações sobre dependência linear → Seja $X = \{x_1, \dots, x_p\} \subseteq V$ e o sistema S correspondente a $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p = 0_V$.

S é sempre possível, dado que admite pelo menos a solução trivial.

→ X é li só se S for PD.

→ X é ld só se S for PI.

→ Se V é subespaço de $\mathbb{R}^n$ e $p < n$, então S é um sistema PI, pelo que X é dependente.

→ Seja $X = \{x\} \subseteq V$. X só é independente caso $x \neq 0_V$.

→ Um qualquer $X \subseteq V$ que inclua 0_V é dependente.

Determinar se X é ou não dependente:

$X = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

↪ como $X \subset \mathbb{R}^2$ e $\#X = 3 \neq n = 2$, X é dependente.

Sejam $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Verificar se x_1 é combo linear de x_2 e x_3:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = \underline{1} \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = \underline{-1} \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 = \underline{1} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_3 \to l_3 - \frac{l_1}{2}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{l_2 \to l_2 + \frac{1}{2} l_1} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{l_3 \to l_3 - l_2} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Conclui-se que $car(A) < car(A|b)$. Assim, o sistema é impossível, pelo que x_1 não é combo linear de x_2 e x_3.

b) Verificar se x_2 é combo linear de x_1 e x_3:

...

Conclui-se que x_2 não é combo linear de x_1 e x_3.

c) Verificar se x_3 é combo linear de x_1 e x_2:

...

Conclui-se que x_3 não é combo linear de x_2 e x_1.

d) Indicar se $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ é conjunto li ou ld:

Nenhum dos vetores é combinação linear dos outros dois. Por isso, o conjunto é li.

---

dependência entre conjuntos → Se X é dependente e $X' \subseteq X$, então X' é dependente.

Se X é independente e $X' \subseteq X$, então X' é independente.

base → Um conjunto $\mathcal{B}$ é uma base do espaço vetorial V caso seja um conj gerador independente. Ou seja, deve passar ambas provas de igualagem a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, sendo PD.

base ordenada → Base em que a ordem dos vetores é fixa. Dada uma base ordenada, cada vetor é escrito de maneira única como combinação linear dos elementos dessa base.

Indique o valor lógico da proposição:

"Seja $B = \{ \binom{1}{2}, \binom{2}{3} \}$ uma base de $\mathbb{R}^2$.

Então, $B_1 = (\binom{1}{2}, \binom{2}{3})$ e $B_2 = (\binom{2}{3}, \binom{1}{2})$ são bases ordenadas distintas de $\mathbb{R}^2$."

Resposta: Verdade, pois assumem ordem diferente de vetores.

---

coordenadas de vetor em base ordenada → Seja $B = (b_1, \dots, b_n)$ uma base ordenada de V, e x um vetor em V.

$$x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

As coordenadas do vetor x relativamente à prévia base ordenada B representam-se por:

$$[x]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

obs: uma base é um conjunto indepdt, portanto as coordenadas dum vetor numa base ordenada são únicas.

Determinar coords de vetor em base ordenada B:

nota: se um espaço tem uma base de n vetores, então todos têm o mesmo nr.

seja $B = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$

seja o vetor $\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$

$\left[\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} \right]_B$ 1º Passo: $\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$

como A está em escada reduzida é fácil de verificar que:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 3 \end{cases} \longrightarrow \text{pelo que } [x]_B = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$$

---

dimensão dum espaço finito

→ Seja um espaço V.

→ Se $V = \{0_V\}$, a sua dimensão é nula, $\dim(V) = 0$.

→ Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma base de V, $\dim(V) = n$.

→ Diz-se ainda que V é de dimensão finita.

obs: intuitivamente, dim corresponde ao nr de elementos escalares necessários para caracterizar um vetor nesse espaço; $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

$X_1 = \{\binom{2}{0}\}$ é base de $\mathbb{R}^2$?

Resposta: $\# X_1 = 1 \neq \dim(\mathbb{R}^2) = 2$, logo não.

$X_4 = \{\binom{2}{0}, \binom{3}{4}, \binom{0}{1}\}$ é base de $\mathbb{R}^2$?

Resposta: $\# X_4 = 3 \neq \dim(\mathbb{R}^2) = 2$, logo não.

---

base canónica → Seja V de $\dim = n$. A sua base canónica é uma base ordenada dos vetores $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ no seguinte formato:

$$e_1 = [1, 0, \cdots, 0]^T$$
$$e_2 = [0, 1, \cdots, 0]^T$$
$$\cdots$$
$$e_n = [0, 0, \cdots, 1]^T$$

Ex: base canónica (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

nota: seja B a base can de $\mathbb{R}^n$, então $[x]_B = x$

Encontrar uma base B e a dimensão dum espaço vetorial que abrange os vetores:

$(1, 1, -2, 0, -1)$
$(1, 2, 0, -4, 1)$
$(0, 1, 3, -3, 2)$
$(2, 3, 0, -2, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdots} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

linhas pivô

uma base para o espaço vetorial são os vetores que as linhas pivô contêm:

$$B = \{(1, 1, -2, 0, -1), (0, 1, 2, -4, 2), (0, 0, 1, 1, 0)\}$$

como se obtiveram 3 vetores independentes, $\dim(V) = 3$.

espaço das linhas duma matriz $\rightarrow$ Lin(A) corresponde ao espaço gerado pelas linhas da matriz A.

$$\text{Lin}(A) = \langle l_{1,A} ; \cdots ; l_{m,A} \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$$

espaço das colunas duma matriz $\rightarrow$ Col(A) corresponde ao espaço gerado pelas colunas da matriz A.

$$\text{Col}(A) = \langle c_{1,A} ; \cdots ; c_{n,A} \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$$

Determine Col e Lin das matrizes seguintes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \cdot \text{Col}(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

$\cdot \text{Lin}(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mesma história

---

núcleo/espaço nulo duma matriz $\rightarrow$ Nuc(A) é o conj-solução do sistema homogéneo cuja matriz de coeficientes é A, ou seja,

$$\text{Nuc}(A) = CS_{(Ax=\underline{0})} \quad (\subseteq \mathbb{R}^n)$$

Determine Nuc(A):

seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Ax=\emptyset} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$

Verifique-se que o sistema é PD pois $car(A) = car(A|0) = n = 2$.

$\begin{cases} \alpha + 0 = 0 \\ 0 + \beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix} \rightarrow \text{Nuc}(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Determine Nuc(B):

seja $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Ax=\emptyset} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

verifique-se que $\underbrace{car(B) = car(B|0)}_{2} < \underbrace{n}_{4}$, logo o sistema é PI e de variáveis x_2 e x_4 livres.

$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cancel{x_3} + x_4 = 0 \\ \cancel{-2x_3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Nuc}(B) = \begin{pmatrix} -x_2 - x_4 \\ x_2 \\ \emptyset \\ x_4 \end{pmatrix}$

notas sobre Lin e Col → $\dim(\mathrm{Lin}(A)) = \mathrm{car}(A)$

→ $\dim(\mathrm{Col}(A)) = \mathrm{car}(A)$

→ $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) = n - \mathrm{car}(A)$ (sendo n o nr de variáveis livres em $Ax = \emptyset$)

Determinar dimensões do espaço das linhas e colunas para as matrizes seguintes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ATEsc}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{car}(A) = 2 = \dim(\mathrm{Lin}(A)) = \dim(\mathrm{Col}(A))$

$\dim(\mathrm{Nuc}(A)) = 2 - 2 = \emptyset$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ATEsc}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{car}(B) = 2 = \dim(\mathrm{Lin}(A)) = \dim(\mathrm{Col}(A))$

$\dim(\mathrm{Nuc}(B)) = n - \mathrm{car}(B) = 4 - 2 = 2$

→ Seja V um espaço vetorial finito e $X \subseteq V$. Nestas condições, $\dim(X) \leq \dim(V)$.

→ Para uma matriz A quadrada:

a) $\{l_{1,A} \dots l_{n,A}\}$ e $\det(A) = 0$ → conj dependente

b) $\{c_{1,A} \dots c_{n,A}\}$ e $\det(A) = 0$ → conj dependente

caso contrário, cada conj é independente.

Indique o valor lógico da proposição seguinte:

"Seja $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Então, $\mathrm{Col}(B) = \mathbb{R}^2$"

Resposta: $\mathrm{Col}(B) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \rightarrow \dim(\mathrm{Col}(B)) = 2$

como $\dim(\mathrm{Col}(B)) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$ implica que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Col}(B)$, a afirmação confirma-se verdade.

Conclua por duas formas diferentes que $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ é independente.

processo 1:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{l_2 \to l_2 - 2l_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|B) = 2$ logo o sistema é PD e o conj independente.

processo 2: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \neq 0$ logo o conj é independente.

observações → Seja um espaço V em que $\dim(V) = n$.

a) Quaisquer vetores $m > n$ em V são dependentes.

b) Se C gera V, então $\#C \geq n$.

c) Se C é conj li de V com n vetores, então gera V.

d) Se C gera V, então é conj. li de V com n vetores.

Resumo Cap 5°

função dum conjunto noutro → Seja $x \in A$, f diz-se uma função de A em B caso tenha A como domínio e B como conjunto de chegada.

Calcule segundo a função $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x-y, 0, x)$:

a) $T(2,1) = (2-1, 0, 2) = (1, 0, 2)$

b) $T(x+2y, 2y-x) = (x+2y-2y+x, 0, x+2y) = (2x, 0, x+2y)$

Considere a função $F: \{a, b, c\} \to \{a, z\}$, $a \mapsto a$, $b \mapsto z$, $c \mapsto z$.
Indique a imagem de $\underline{b}$ por F.

Resposta: $F(b) = z$.

Considere a função $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^2$. Indique -2 por φ.

Resposta: $\varphi(-2) = 4$.

---

composição de funções → Para $f: A \to B$ e $g: B \to C$.

Uma composição de f com g é:

$$g \circ f: A \to C$$

$$x \to g(f(x))$$

Considerando as definições das funções, determine $f_2 \circ f_1$.

$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$

Resposta: $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(x^2) = 2x^2$

---

associatividade das compostas → $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

comutatividade das compostas → não é regra geral que $f \circ g = g \circ f$.

soma de função → Sejam f e g função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$,

$$f+g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto f(x)+g(x)$$

produto de função → Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e f de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

$$\alpha f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \to \alpha f(x)$$

transformação linear/homomorfismo → Para $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diz-se que T é uma transf. linear caso:

i) $T(x+y) = T(x) + T(y)$

ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

O conjunto de todas as transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Para a seguinte definição de T, mostre que se trata duma transformação linear.

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_2, 0, x_1+x_2)$

Resposta: 1ª condição → $T(x+y) = T(x) + T(y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow T((x_1, x_2)+(y_1, y_2)) = T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2)$

$\Leftrightarrow T(x_1+y_1, x_2+y_2) = (x_2, 0, x_1+x_2) + (y_2, 0, y_1+y_2)$

$\Leftrightarrow (x_2+y_2, 0, x_1+y_1+x_2+y_2) = (x_2+y_2, 0, x_1+x_2+y_1+y_2)$

provado

2ª condição → $T(\alpha x) = \alpha T(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha x_2, 0, \alpha(x_1+x_2)) = (\alpha x_2, 0, \alpha(x_1+x_2))$

provado

Desta forma, T é uma trans. linear. de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$.

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2) = (x_2, 1, x_1+x_2)$, mostre que não é trans. linear.

Resposta: 2ª condição → $f(\alpha x_1, \alpha x_2) = \alpha f(x_1, x_2)$

$\Leftrightarrow (\alpha x_2, 1, \alpha(x_1+x_2)) = (\alpha x_2, \alpha, \alpha(x_1+x_2))$

proposição falsa, logo f não é trans. linear

→ Um processo alternativo para verificar se T é uma trans linear:

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ só se:

$$\underline{T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)}$$

para $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

endomorfismo → Transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

propriedades das t. lineares → $T(\emptyset_{\mathbb{R}^n}) = \emptyset_{\mathbb{R}^m}$

→ $T(-x) = -T(x)$

→ $T(x-y) = T(x) - T(y)$

→ Estes também servem de contraargumentos do não-estatuto duma função como trans linear.

Prove que $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(a,b) = (a,1,b)$ não é trans linear.

Resposta: $g(\emptyset_{\mathbb{R}^2}) = \underline{\underline{(\emptyset, 1, \emptyset)}} \neq \emptyset_{\mathbb{R}^3}$

---

matriz de trans linear → Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x,y,z) = (x+2z, 3x-y)$, determine-se a sua matriz de transformação relativamente a $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

logo $A_T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\3 & -1 & 0\end{pmatrix}$

Observação: Foi determinada a matriz relativa às bases canónicas do domínio, que são as pretendidas caso não se refiram bases explicitamente.

Para $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (x+2z, 3x-y)$ determine a matriz relativamente às bases ordenadas $B = ((1,2,1), (1,1,1), (2,-1,1))$ de $\mathbb{R}^3$ e $B' = ((1,2),(3,1))$ de $\mathbb{R}^2$.

(v_1, v_2, v_3; v_1', v_2')

Resposta: Tem de se calcular primeiro as imagens dos elementos de B para se determinar as coordenadas destes vetores em B'.

- Para v_1: $T(v_1) = T\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ logo $[T(v_1)]_{B'}$ é:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 3\\2 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{ATECL}} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 3\\0 & -5 & -5\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 3 \\ -5\beta = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 5/5 \end{cases}$$

pelo que $[T(v_1)]_{B'} = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sejam T e S trans/s lineares $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com bases B e B' uma pra cada conjunto, e A_T e A_S como matrizes de transformação B, B'. Então,

a) $T+S$ é trans linear

b) $A_{T+S} = A_T + A_S$

Sejam T e S:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

Determine A_{T+S} de dois processos diferentes.

Resposta:

Proc 1 $\rightarrow (T+S)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ y \end{pmatrix}$

$(T+S)(1,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $(T+S)(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

logo $A_{T+S} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Proc 2 $\rightarrow T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad S\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow A_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A_{T+S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

imagem de transformação linear $\rightarrow \mathrm{Im}(T) = \{T(x) \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\}$

Indique o valor lógico da proposição: seja $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+2y-z \end{pmatrix}$. Então, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$.

Resposta: $\mathrm{Im}(T) = \left\{ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x+z \\ x+2y-z \end{pmatrix} : \text{''} \right\}$

$= \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \text{''} \right\}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ATEsc}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

note-se que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{car}(A) = 2$. como a imagem de T é subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\mathrm{Im}(T))$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$.

logo é verdadeiro.

Resumo Cap 6°

vetor próprio duma matriz associado a um valor próprio → Seja $A \in M_{n \times n}$. Diz-se que $x \in \mathbb{C}^n / \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ é um vetor próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{C}$, se $Ax = \lambda x$.

espetro duma matriz → Seja $A \in M_{n \times n}$. O espetro de A, $\lambda(A)$, é o conjunto dos valores próprios de A, ou seja,

$$\lambda(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ é valor próprio de } A\}$$

espaço próprio → Seja $\lambda \in \lambda(A)$. Chama-se espaço próprio associado a λ ao conjunto:

$$E_{\lambda, A} = \{x \in \mathbb{C} : Ax = \lambda x\}$$

Obs: $E_{\lambda, A}$ é subespaço de $\mathbb{C}^n$.

notas → Existem matrizes reais de valores próprios complexos.

→ Cada vetor próprio associa-se a um único valor próprio.

→ E_λ chama-se espaço próprio por ser subespaço de $\mathbb{C}^n$.

→ Para $A \in M_{n \times n}$, $\lambda \in \lambda(A)$ apenas se $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

polinómio característico duma matriz → Para uma matriz A, o seu $\Pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

equação característica duma matriz → $\Pi_A(\lambda) = 0$

multiplicidade algébrica de valor próprio → Designação da multiplicidade de λ enquanto raiz da equação característica.

valor próprio simples → λ é um valor simples se de multiplicidade 1.

multiplicidade geométrica de valor próprio → Designação de $\dim(E_\lambda)$.

Seja $A_{n \times n}$. O coeficiente de grau n do polinómio característico da matriz A é $(-1)^n$ e o seu termo independente de λ é $\det(A)$.

→ $\Pi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \cdots + \det(A)$

→ Os valores próprios da matriz são as raízes do seu polinómio característico.

→ Para λ que seja val. próprio de A, os vetores a ele associados são soluções não-nulas do sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)x = 0$ (sistema PI)

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Determine o seu espetro (a) e o espaço próprio associado ao valor próprio de menor módulo da matriz. (b)

a) $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \end{matrix}$

$\det(A - \lambda I_3) = \dots = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 3 \longrightarrow$ logo $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$

pelo que:

$\det(A - \lambda I_3) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$

Deste modo, $\lambda(A) = \{2, 3\}$, $\lambda_1 = 2$ é vp de multiplicidade algébrica 2, $\lambda_2 = 3$ é vp simples.

b) $\lambda = 2$ é o vp de menor módulo. Para determinar o seu espaço próprio associado, resolve-se o sistema dado por:

$(A - 2I_3)x_1 = \emptyset$, ou seja $A_1 x_1 = b_1$, em que $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}$ e $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 2l_1]{l_2 \to l_2 + l_1} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[l_3 \to l_3 + 2l_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $car(A) = car(A|b) < n$

$\begin{cases} x_{12} = 0 \\ x_{13} = 0 \end{cases}$ e x_{11} é incógnita livre pois o resto é pivô.

pelo que $E_2 = \{(x_{11}, 0, 0) : x_{11} \in \mathbb{C}\}$

Seja $A = [a]_{ij} \in M_{n \times n}$.

→ A só é invertível se $0 \notin \lambda(A)$.

→ Se A é invertível e $\lambda \in \lambda(A)$, então $\frac{1}{\lambda} \in \lambda(A^{-1})$ e $E_{\lambda, A} = E_{\frac{1}{\lambda}, A^{-1}}$

→ Se $k \in \mathbb{N}$ e $\lambda(A)$, então $\lambda^k \in \lambda(A^k)$ e $E_{\lambda, A} = E_{\lambda^k, A^k}$.

→ Se A for triangular ou diagonal, então $\lambda(A) = \{a_{ii} : i = 1 \dots n\}$

→ Vetores próprios associados a valores próprios distintos são l.i.

→ Se A for real e simétrica, os seus valores próprios são reais.

Considere $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; indique a hipótese verdadeira:

a) $\lambda(A) = \{-1, 2, 3\}$

b) 2 é valor próprio simples.

c) $\lambda(A^{-1}) = \{-2, 1\}$

d) $\lambda(A^2) = \{1, 4\}$

Resolução: Como a matriz é triangular, $\lambda(A)$ abrange os elementos da sua diagonal. Logo $\lambda(A) = \{-1, 2\}$, onde -1 é vp simples e 2 de mult 2.
↪ b incorreto   ↪ a incorreto

nota: multiplicidade verifica-se por quantas vezes se multiplica o respetivo fator ao apresentar desse modo o polinómio característico da matriz.

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \pi_A = \det(A - \lambda I_2) = (x+1)(x-5)$

daqui tira-se que $\lambda(A) = \{-1, 5\}$ e são ambos simples pois nenhum fator tem expoente.

continuando:

$\lambda(A^{-1}) = \{\frac{1}{-1}, \frac{1}{2}\} = \{-1, \frac{1}{2}\} \rightarrow$ c incorreto

$\lambda(A^2) = \{(-1)^2, 2^2\} = \{1, 4\} \rightarrow$ d correto

---

matriz diagonalizável → A é diagonalizável se existir uma matriz P invertível tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

As seguintes características são equivalentes:

- A tem n vetores próprios linearmente independentes
- A mult geométrica de cada valor é igual à sua algébrica.

Obs: mult geométrica é a dimensão de $E_{\lambda, A}$. nunca supera a algébrica.

A só é diagonalizável caso a soma das mults geométricas der n, seja $A_{n \times n}$.

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

a) Mostre que é diagonalizável.

Resposta: $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 2 & -5-\lambda \end{bmatrix}$

$$\det(\;) = (2-\lambda)(-5-\lambda) - (-3)(2) =$$

$$= 16 \cdot (-10)(-2\lambda)(5\lambda) \cdot \lambda^2$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda - 4$$

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -4$$

Logo $\lambda(A) = \{1, -4\}$