



Nome:

Número:

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (1 valor) Represente o número racional $2,33(4)$ sob a forma de quociente de dois números inteiros.

Exercício 2. (1 valor) Resolva a inequação $|2x + 1| \leq |x + 2|$, com $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. (2.5 valores) Considere o conjunto

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left([\sqrt{2}, 3] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \right).$$

- (a) Indique, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo do conjunto A .
- (b) Determine o derivado (A') do conjunto A .

Exercício 4.

1. (2 valores) Considere o conjunto $S =]2, 3[\cup]4, +\infty[$. Em cada alínea apresente um exemplo, justificando, de uma sucessão de termos em S que seja:
- (a) não monótona e convergente para 6; (b) não majorada e admita uma subsucessão convergente para 3.

2. (1 valor) Diga, justificando, se a proposição seguinte é **verdadeira** ou **falsa**:

A sucessão $(u_n)_n$ de termo geral
$$u_n = \begin{cases} n^3 & \text{se } n \leq 70 \\ \frac{1 - \cos n}{n^2} & \text{se } n > 70 \end{cases}$$
 é divergente.

Exercício 5.

1. (1.5 valores) Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5^{n-1}}{7^n} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right)$.

2. (2 valores) Responda a uma e uma só das duas questões seguintes:

- I. Estude a natureza da série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin n}{(n+2)!}$. II. Verifique se a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{n}{n^3 + 4}$ é absolutamente convergente.

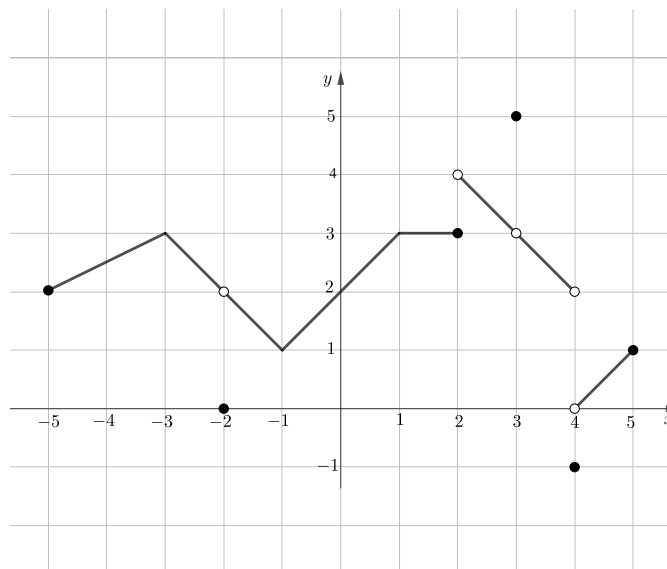
Exercício 6. (3 valores) Considere a função $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.

(a) Determine $f([-1, 4])$.

(b) Determine $f^{-1}([1, 3])$.

(c) Indique os pontos de mínimo (minimizantes) local de f .

(d) Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x^2 + 1}{x^2}\right)$.



(e) Determine, justificando, o maior valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x + 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < 2.$$

Exercício 7. (3 valores) Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ -x^2 + 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \\ |x + 1| & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Determine, justificando, o domínio de continuidade da função f .

Exercício 8. (3 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

- (a) Se $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são tais que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq -2 \\ 4 + \cos x & \text{se } -2 < x < 0 \\ \frac{1}{x+3} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, então $g \circ f$ é limitada.
- (b) Existe uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores positivos e negativos.
- (c) A soma de duas funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monótonas é uma função monótona.

FIM