

Álgebra Universal e Categorias

Exame de recurso (23 de junho de 2017) duração: 2h30

1. (a) Considere a álgebra $\mathcal{A} = (A; +^{\mathcal{A}})$ de tipo (2), onde $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $+^{\mathcal{A}}$ é a operação binária definida por

$$a +^{\mathcal{A}} b = \text{resto de } a + b \text{ na divisão inteira por } 6, \text{ para quaisquer } a, b \in A.$$

Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: Para quaisquer subconjuntos S_1 e S_2 de A , se S_1 e S_2 são subuniversos de \mathcal{A} , então $S_1 \cup S_2$ é um subuniverso de \mathcal{A} .

- (b) Seja $\mathcal{B} = (B; F)$ uma álgebra. Mostre que se S_1 e S_2 são subuniversos de \mathcal{B} , então $S_1 \cap S_2$ é um subuniverso de \mathcal{B} .

2. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo. Seja $\alpha : A \times B \rightarrow A$ a aplicação definida por $\alpha((a, b)) = a$, para todo $(a, b) \in A \times B$.

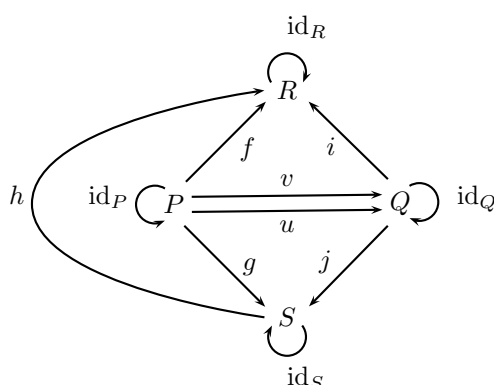
- (a) Mostre que α é um homomorfismo sobrejetivo de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ em \mathcal{A} . Justifique que $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})/\ker \alpha \cong \mathcal{A}$.
(b) Mostre que α é um monomorfismo se e só se \mathcal{B} é uma álgebra trivial.

3. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo (1, 1) tal que $A = \{a, b, c, d\}$ e $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por

$$\begin{array}{c|cccc} x & a & b & c & d \\ \hline f^{\mathcal{A}}(x) & a & a & a & a \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} x & a & b & c & d \\ \hline g^{\mathcal{A}}(x) & a & b & a & b \end{array}$$

- (a) Considere as congruências $\theta_1 = \triangle_A \cup \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$ e $\theta_2 = \theta(c, d)$. Mostre que (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator.
(b) Diga, justificando, se existem álgebras não triviais \mathcal{B} e \mathcal{C} tais que $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$.
(c) A álgebra \mathcal{A} é sudiretamente irredutível? Justifique a sua resposta.

4. Seja \mathbf{C} a categoria definida pelo diagrama seguinte

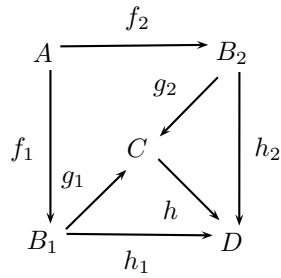


$$\begin{aligned} \text{onde } f &= i \circ u = i \circ v = h \circ g, \\ g &= j \circ u = j \circ v, \\ i &= h \circ j. \end{aligned}$$

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (a) Todo o morfismo de \mathbf{C} que é um bimorfismo também é um isomorfismo.
(b) O par (R, i) é um coigualizador de u e v .
5. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathbf{C} . Mostre que se $g \circ f$ é invertível à esquerda e f é invertível à direita, então f é um bimorfismo.
6. Sejam \mathbf{C} uma categoria e A, B e P objetos de \mathbf{C} tais que $\text{hom}(A, B) \neq \emptyset$ e $f : P \rightarrow A$ e $g : P \rightarrow B$ são morfismos de \mathbf{C} . Mostre que se $(P; (f, g))$ é um produto de A e B , então f é invertível à direita.

7. Numa categoria \mathbf{C} , considere o seguinte diagrama



Mostre que se o diagrama anterior é comutativo, h é um monomorfismo e $(A, (f_1, f_2))$ é um produto fibrado de (g_1, g_2) , então $(A, (f_1, f_2))$ é um produto fibrado de (h_1, h_2) .

8. Sejam \mathbf{C} e \mathbf{D} categorias. Diz-se que um funtor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ *reflete objetos iniciais* se, para todo $I \in \text{Obj}(\mathbf{C})$,

$F(I)$ é objeto inicial de $\mathbf{D} \Rightarrow I$ é objeto inicial de \mathbf{C} .

Mostre que se F é um funtor fiel e pleno, então F reflete objetos iniciais.