

Álgebra Universal e Categorias

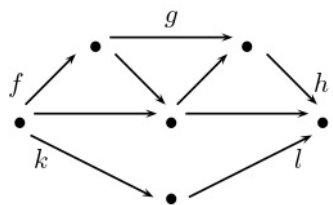
Exercícios - Folha 8

51. Justifique que cada uma das estruturas seguintes define uma categoria.

- (a) $\mathbf{M} = (\{\mathcal{M}\}, \text{hom}, \text{id}, \circ)$, onde $\mathcal{M} = (M; \cdot, 1_M)$ é um monóide; hom associa a $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ o conjunto M ; id associa a \mathcal{M} o elemento $\text{id}_{\mathcal{M}} = 1_M$; \circ é a operação binária do monóide.
- (b) $\mathbf{P} = (P, \text{hom}, \text{id}, \circ)$, onde (P, \leq) é um conjunto parcialmente ordenado; hom associa a cada par $(a, b) \in P \times P$, o conjunto $\{(a, b)\} \cap \leq$; id associa a cada $a \in P$ o elemento $\text{id}_a = (a, a)$; para quaisquer $(a, b), (b, c) \in \leq$, $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$.
- (c) $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \text{hom}, \text{id}, \circ)$, onde, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, $\text{hom}(m, n)$ é a coleção de todas as matrizes reais do tipo $n \times m$; para cada $n \in \mathbb{N}$, id associa a cada $n \in \mathbb{N}$ a matriz identidade I_n de ordem n ; \circ é a multiplicação usual de matrizes.

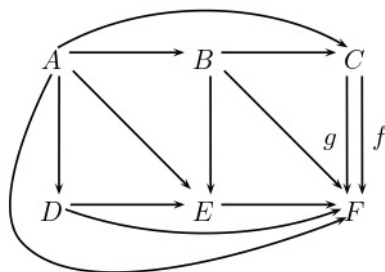
52. Seja A um objeto de uma categoria \mathbf{C} . Justifique que $(\text{hom}(A, A); \circ, \text{id}_A)$ é um monóide.

53. Considere o diagrama a seguir representado



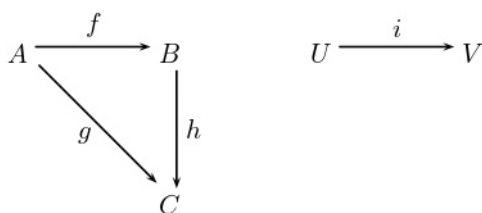
Mostre que se os quatro triângulos internos do diagrama comutam, então $h \circ g \circ f = l \circ k$.

54. Seja \mathbf{C} a categoria definida pelo diagrama



Construa:

- (a) A subcategoria plena \mathbf{C}' de \mathbf{C} tal que $\text{Obj}(\mathbf{C}') = \{A, B, C, F\}$.
 - (b) A categoria dos objetos sobre B .
 - (c) A categoria dos objetos sobre F .
55. (a) Sejam \mathbf{C} e \mathbf{D} as categorias definidas, respetivamente, pelos diagramas seguintes



Defina por meio de um diagrama a categoria produto $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

- (b) Sejam R e S monóides vistos como categorias. O que é a categoria produto $R \times S$?
56. (a) Seja P um conjunto parcialmente ordenado visto como uma categoria. O que é a categoria dual P^{op} ?
- (b) Seja R um monóide visto como uma categoria. O que é a categoria dual R^{op} ?