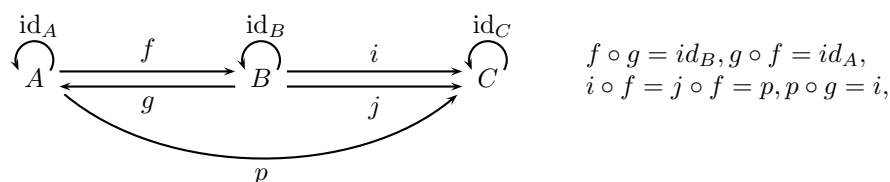


Álgebra Universal e Categorias

2º teste (30 de maio de 2018) duração: 2 horas

1. (a) Seja \mathbf{C} a categoria definida pelo diagrama seguinte



- Diga, justificando, se é verdadeira a seguinte afirmação: A categoria \mathbf{C}/\mathbf{C} tem dois objetos iniciais.
- (b) Seja \mathbf{C} a categoria definida na alínea anterior. Dê um exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de uma subcategoria \mathbf{D} de \mathbf{C} tal que \mathbf{D} seja uma subcategoria plena de \mathbf{C} , $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{D})$ e A e B não sejam isomorfos em \mathbf{D} .
- (c) Diga, justificando, se é verdadeira a seguinte afirmação: Na categoria **Set**, todo o morfismo que tem por domínio um objeto terminal é um monomorfismo.
2. Sejam \mathbf{C} uma categoria, A, B, C objetos de \mathbf{C} e $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow C$ monomorfismos de \mathbf{C} . Mostre que se $i : A \rightarrow B$ e $j : B \rightarrow A$ são morfismos de \mathbf{C} tais que $f \circ j = g$ e $g \circ i = f$, então i e j são invertíveis e $i^{-1} = j$.
3. Sejam \mathbf{C} uma categoria e A, B e C objetos de \mathbf{C} tais que, para qualquer objeto X de \mathbf{C} , $\text{hom}(B, X) \neq \emptyset$ e $i_A : A \rightarrow C$ e $i_B : B \rightarrow C$ são morfismos de \mathbf{C} . Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B , então i_A é invertível à esquerda.
4. Na categoria **Set**, considere os conjuntos $\{0\}$, \mathbb{N}_0 , \mathbb{Z} e as funções i , f e g definidas por

$$\begin{array}{lll}
 i : \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0 & f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z} & g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z} \\
 0 \mapsto 0 & x \mapsto 0 & x \mapsto 3x
 \end{array}$$

Mostre que $(\{0\}, i)$ é um igualizador de f e g .

5. Sejam \mathbf{C} uma categoria com objeto inicial I e $f_A : I \rightarrow A$ e $f_B : I \rightarrow B$ morfismos de \mathbf{C} . Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B , então $(C, (i_A : A \rightarrow C, i_B : B \rightarrow C))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B) .
6. Seja $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ o funtor que a cada conjunto A associa o produto cartesiano $A \times A$ e que a cada função $f : A \rightarrow B$ associa a função

$$\begin{array}{ll}
 F(f) : F(A) & \rightarrow F(B) \\
 (x, y) & \mapsto (f(x), f(y))
 \end{array}$$

Diga, justificando, se:

- (a) O funtor F é fiel.
- (b) O funtor F preserva e reflete monomorfismos.