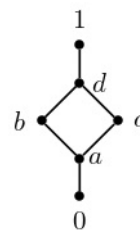


Álgebra Universal e Categorias

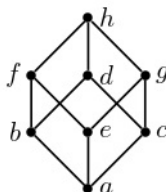
Exercícios - Folha 2

7. Seja (R, \leq) o reticulado representado ao lado.

Considere este reticulado interpretado como uma estrutura algébrica $(R; \wedge, \vee)$ e indique as tabelas das operações \wedge e \vee .



8. Considere o reticulado (R, \leq) a seguir representado.



Para cada um dos conjuntos R' a seguir indicados, diga se $(R', \leq|_{R'})$ é um subreticulado de (R, \leq) .

- (a) $R' = \{a, b, c, d\}$. (b) $R' = \{b, c, f, g\}$. (c) $R' = \{a, b, f, g, h\}$.

9. Seja $(R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Um subconjunto não vazio I de R diz-se um *ideal* de R se

1. $(\forall x, y \in R) \ x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$;
2. $(\forall x \in I)(\forall y \in R) \ y \wedge x = y \Rightarrow y \in I$.

Mostre que $\mathcal{I} = (I; \wedge_{\mathcal{I}}, \vee_{\mathcal{I}})$ é um subreticulado de R , onde I é um ideal de \mathcal{R} e $\wedge_{\mathcal{I}}$ e $\vee_{\mathcal{I}}$ são as correspondências de I^2 em I definidas por

$$x \wedge_{\mathcal{I}} y = x \wedge y, \quad x \vee_{\mathcal{I}} y = x \vee y, \quad \forall x, y \in I,$$

10. Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado, $\text{Sub}(\mathcal{R}) = \{K \subseteq R \mid K \text{ é subreticulado de } \mathcal{R}\}$, $\emptyset \neq X \subseteq R$ e

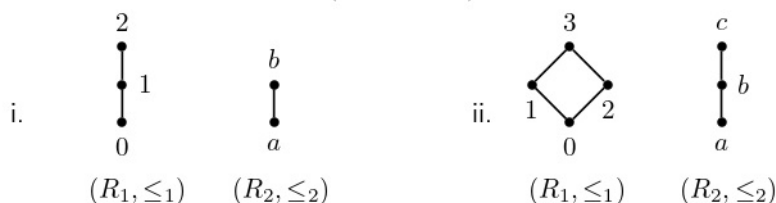
$$Sg^{\mathcal{R}}(X) = \bigcap \{K \in \text{Sub}(\mathcal{R}) \mid X \subseteq K\}.$$

Mostre que $Sg^{\mathcal{R}}(X) = (Sg^{\mathcal{R}}(X); \wedge', \vee')$, onde

$$x \wedge' y = x \wedge y, \quad x \vee' y = x \vee y, \quad \forall x, y \in Sg^{\mathcal{R}}(X),$$

é o menor subreticulado de \mathcal{R} que contém X . Ao reticulado $Sg^{\mathcal{R}}(X)$ dá-se a designação de *subreticulado de \mathcal{R} gerado por X* .

11. (a) Sejam (R_1, \leq_1) e (R_2, \leq_2) reticulados. Mostre que o par $(R_1 \times R_2, \leq)$ é um reticulado, onde \leq é a relação binária em $R_1 \times R_2$ definida por: $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ sse $a_1 \leq_1 b_1$ e $a_2 \leq_2 b_2$.
(b) Considerando que (R_1, \leq_1) e (R_2, \leq_2) representam os reticulados a seguir indicados, desenhe o diagrama de Hasse do reticulado $(R_1 \times R_2, \leq)$:



12. Considerando os reticulados $(\mathbb{N}, m.d.c., m.m.c.)$ e $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$, diga se cada uma das aplicações a seguir definidas é um homomorfismo de reticulados.

- (a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = nx$, para todo $x \in \mathbb{N}$ (com $n \in \mathbb{N}$ fixo).
- (b) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(x) = x + 2$, para todo $x \in \mathbb{N}$.
- (c) $h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $h(\emptyset) = \emptyset$ e $h(A) = \mathbb{N}$, para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$.
- (d) $k : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $k(A) = A \cap \{1, 2\}$, para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.