Seja ***f*** uma função de domínio **X** e contradomínio **Y**, **.**

A função ***f*** diz-se **injetiva** se p/ cada elemento , existe um único tq .

Ou seja:

A função ***f*** diz-se **sobrejetiva** se p/ cada elemento , existe pelo menos um tq .

Ou seja:

A função ***f*** diz-se **bijetiva** se for injetiva e sobrejetiva.

**Nota**

p/ - para

qq - qualquer

tq - tal que

i.e. - isto é

sse - se e só se ()

então ()

Dados um subconjunto *A* de *P* e , diz-se que *m* é:

- **majorante** de *A* se, para todo **;**

- **minorante** de *A* se, para todo **;**

- **maximal** de *A* se e **;**

- **minimal** de *A* se e  **;**

- **máximo** de *A* se *m* é um majorante de *A* e **;**

- **mínimo** de *A* se *m* é um minorante de *A* e **;**

- **supremo** de *A* se *m* é um majorante de *A* e ,para qualquer majorante *m’* de *A***;**

- **ínfimo** de *A* se *m* é um minorante de *A* e ,para qualquer minorante *m’* de *A***;**

Os **Rericulados** podem ser definidos de duas formas equivalents:

**- Conjunto Parcialmente Ordenado (c.p.o)**

**- Estruturas Algébricas**

Num c.p.o. (P; ) são equivalentes as seguintes afirmações, p/ qq :

Um c.p.o. (P; ) tq P tem elemento máximo e elemento mínimo diz-se um **Conjunto Parcialmente Ordenado Limitado.**

Um Reticulado é um c.p.o. tal que para cada dois elementos ***a,b*** existe **supremo** e **ínfimo** de **{a,b}**

De maneira equivalente um Reticulado pode ser definido como uma **Estrutura Algébrica**, consistindo de um conjunto e duas operações - usaremos **(R; , )** como exemplo – se todos elementos ***a,b*** e ***c*** de **C**, se verifiquem as seguintes equações:

**Leis Comutativas (R1) >**

**Leis Associativas (R2) >**

**Leis de Idempotência (R3) >**

**Leis de Absorção (R4) >**

**Princípio da Dualidade de Reticulados:** Uma afirmação é verdadeira em qualquer Reticulado sse o mesmo acontece com a respetiva afirmação dual. Este princípio também se aplica para os c.p.o.

**Princípio da Boa Organização:** todo subconjunto não-vazio formado por (ou ) possuí um menor elemento

Seje **(R; , )** um Reticulado, e **R’** um Subconjunto não vazio de R.

Diz-se que **(R’; , )** é um **Subreticulado** de **R** se e são Operações Binárias em **R’** tais que p/ qq ,  **e**

Dados um Reticulado **(R; )** e um Subconjunto não vazio **R’** de **R**, um c.p.o **(R’; )** diz-se **Subreticulado** de **(R; )** se **,** e, p/ qq , o Supremo e Ínfimo de **{a,b}** (determinados em **(R; )**) pertencem a **R’**.

Um Reticulado diz-se **Modular** se p/ de :

(tb é o suficiente mostrar o contrário)

Sejam , Reticulados e e as operações binárias de , definidas por:

Então é um Reticulado, designado por **Reticulado Produto** de d – representado por .

Sejam e Reticulado, e as relações de ordem associadas, e seja a relação de ordem definida em por:

Então é um Reticulado.

Além disso:

Por conseguinte o Reticulado coincide com o Reticulado .

Sejam e dois c.p.o. e uma **aplicação**, que se designa:

**Aplicações**

**entre**

**c.p.o.’s**

* **Isótona**, ou preserva a ordem, se p/ qq ,
* **Antítona**, se p/ qq ,
* **Mergulho de Ordem** se p/ qq ,
* **Isomorfismo de c.p.o.’s** se é um mergulho de ordem e uma aplicação sobrejetiva

Sejam e Reticulados e uma aplicação, que se designa:

* **Homomorfismo**, se p/ qq ,

**Aplicações**

**entre**

**reticulados**

* **Isomorfismo**, se é bijetiva e um homomorfismo

(de reticulados ou também um reticulado isomorfo)

Seja (R; ) um Reticulado.

Um elemento diz-se **compacto** se sempre que existe e p/ algum , então p/ algum conjunto finito .

Um Reticulado diz-se **Compactamente Gerado** se, p/ todo , p/ algum subconjunto S de R formado por elementos compactos de D.

Um Reticulado diz-se **Reticulado Algébrico** se é um Reticulado Completo e Compactamente gerado.

Um Subreticulado (; ) de (; ) diz-se um **Subreticulado Completo** se p/ qq subconjunto S de R’, e , como definidos em (; ), pertencem a R’.

**Todos elementos de um Reticulado Finito são compactos.**

Um Reticulado diz-se **Distributivo** se satisfaz uma das seguintes condições:

* **D1 >**
* **D2 >**

**Estas afirmações são equivalentes.**

**Subuniverso:** Sejam uma *álgebra*, e B um subconjunto (), B diz-se um subuniverso de se B é fechado p/ toda a operação de F. Representa-se por **.**

**Subálgebra:** B é subálgebra de A se:

1) B é subuniverso de A

2) p/ qq , e qq :

Sejam uma *álgebra*, e um subconjunto. - **subuniverso de**  uma *álgebra* **gerado por**  -é por definição o menor subuniverso de gerado por que contém .



Uma **Congruência** numa álgebra é uma **Relação de Equivalência** que é compatível com as operações da álgebra. Sendo A um conjunto e uma relação binária em A, diz-se que é uma **Relação de Equivalência** em A se são satisfeitas as seguintes condições:

1. **Simetria:** p/ qq ou
2. **Reflexividade:** p/ todo ou
3. **Transitividade:** p/ qq ou

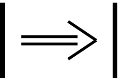
Demodemodemo, Demode de Demodemodemo de , demo dem demo demodemodem.

Dado um elemento , chama-se **Classe de Equivalência de Módulo**  ao conjunto:

O conjunto de todas as relações de equivalência definidas em A representa-se por **Eq(A)**.

Para , é uma **congruência** em se satisfaz a propriedade de substituição, i.e.:

**ou**

**ou seja**

O conjunto de todas congruências da álgebra é denotado por .

E ao reticulado dá-se a designação de **reticulado de congruências de** .

Se é um reticulado, então é uma congruência em sse:

1. cada classe de é um subreticulado
2. cada classe de é um **subconjunto convexo** de R
3. as classes de equivalência de são fechadas p ara os quadriláteros

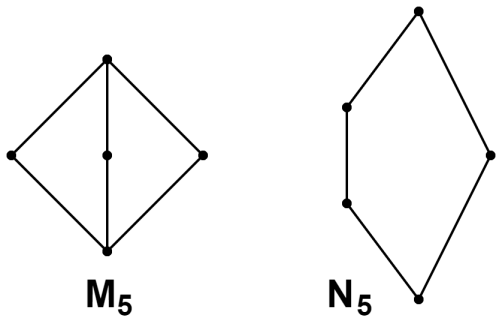


**Teoremas:**

* Se (R; , ) é um Reticulado, então a relação definida em **R** por -  **sse e**
* Se (R; ) é um c.p.o., então (R; , ) – onde e – é um Reticulado, e p/ qq :
  1. Dem d.d.d. (D; ) demod *d,d,d* d *d* demodemod de P tais que e .
     1. Se existem e , então
     2. Se existem e , então
* Sejam e Reticulados e e relações de ordem definidos em e :

Então os Reticulados e são **isomorfos** sse os c.p.o. e são isomorfos.

* Todo o Reticulado Finito é **completo**.
* Seje (R; ) um Reticulado tq exite ep/ qq subconjunto S de R. Então (R; ) é um **Reticulado Completo**.
* **: ínfimo : supremo**
* Todo o Reticulado Distributivo é um Reticulado Modular (contrário não se verifica)
* Sejam R e S reticulados, então:
  1. Se R é Distributivo (modular), então qq subreticulado de R é Distributivo (modular)
  2. Se R e S são Distributivos (modulares), então R×S é Distributivo (modular)
  3. Se R é Distributivo (modular) e S é uma imagem homomorfa de R (i.e., se ) p/ algum homomorfismo , então S é Distributivo (modular)

1. ****

* Seja (R; , ) um Reticulado. Então R é Modular sse não tem qq Subreticulado isomorfo a

1. Seja (R; , ) Reticulado. Então R é Distributivo sse não tem qq Subreticulado isomorfo a /

* Sejam uma *álgebra* e . Definem-se recursivamente,

Então .

* 1. Sejam uma *álgebra* e , então:
* Sejam uma *álgebra*, então é um reticulado, tendo-se p/ qq

e

