Seja ***f*** uma função de domínio **X** e contradomínio **Y**, **.**

A função ***f*** diz-se **injetiva** se p/ cada elemento , existe um único tq .

Ou seja: .

A função ***f*** diz-se **sobrejetiva** se p/ cada elemento , existe pelo menos um tq .

Ou seja: .

A função ***f*** diz-se **bijetiva** se for injetiva e sobrejetiva.

**Nota**

p/ = para

qq = qualquer

tq = tal que

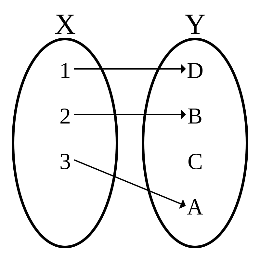
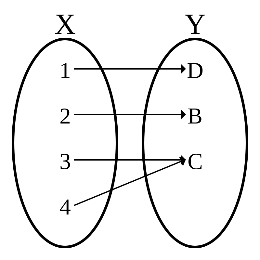
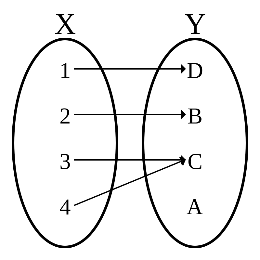
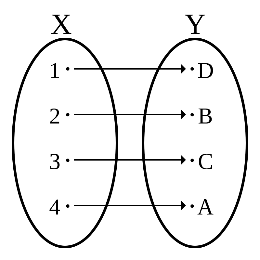
tb = também

ex. = exemplo

i.e. = isto é

sse = se e só se ()

então ()



Função injectiva e sobrejectiva.

Função não sobrejectiva e não injectiva.

Função sobrejectiva mas não injectiva.

Função injectiva mas não sobrejectiva.

Dados um subconjunto *A* de *P* e , diz-se que *m* é:

- **majorante** de *A* se, p/ todo **;**

- **minorante** de *A* se, p/ todo **;**

- **maximal** de *A* se e **;**

- **minimal** de *A* se e  **;**

- **máximo** de *A* se *m* é um majorante de *A* e **;**

- **mínimo** de *A* se *m* é um minorante de *A* e **;**

- **supremo** de *A (ou )* se *m* é um majorante de *A* e ,p/ qq majorante *m’* de *A***;**

- **ínfimo** de *A (ou )* se *m* é um minorante de *A* e ,p/ qq minorante *m’* de *A***;**

**Leis Comutativas >**

**Leis Associativas >**

**Leis de Idempotência >**

**Leis de Absorção >**

**Princípio da Boa Organização**

Todo subconjunto não-vazio formado por (ou ) possuí um menor elemento.

**Reticulados** podem ser definidos de duas formas equivalentes:

**- Conjunto Parcialmente Ordenado (c.p.o.)**

**- Estruturas Algébricas**

**Princípio da Dualidade de Reticulados**

Uma afirmação é verdadeira em qq reticulado, sse o mesmo acontece com a respectiva afirmação dual.

Num **c.p.o.** (P; ) são equivalentes as seguintes afirmações, p/ qq :

Ou seja, um Reticulado é um c.p.o. tq p/ cada dois elementos ***a,b*** existe **supremo** e **ínfimo** de **{a,b}.**

Um c.p.o. tq tem elemento máximo e elemento mínimo diz-se um **Conjunto Parcialmente Ordenado Limitado.**

Dados um Reticulado e um Subconjunto não vazio de , um c.p.o diz-se **Subreticulado** de se e o Supremo e Ínfimo de **{a,b}** (determinados em ) pertencem a **.**

Sejam e dois c.p.o. e uma **aplicação**, que se designa:

* **Isótona**, ou preserva a ordem, se p/ qq ,
* **Antítona**, se p/ qq ,
* **Mergulho de Ordem** se p/ qq ,
* **Isomorfismo de c.p.o.’s** se é um mergulho de ordem e uma aplicação sobrejetiva

Um Reticulado pode ser definido como **Estrutura Algébrica**, consistindo de um conjunto e duas operações, por ex., se se verifiquem as Leis Comutativas, Associativas, Idempotência e Absorção.

Se é um Reticulado, então a relação definida em por: se , é uma relação de ordem parcial tq p/ qq , existem e e tem-se e .

Se é um c.p.o. tq p/ qq , existem e , então onde e é um Reticulado e p/ qq , .

Sejam um Reticulado, um Subconjunto não vazio de e e operações binárias em **.**

Diz-se que é um **Subreticulado** de se , e e adicionalmente e **.**

Sejam , reticulados e e as operações binárias de , definidas por:

Assim é designado **reticulado produto** de e , representado por .

Sejam e Reticulado, e as relações de ordem associadas, e seja a relação de ordem definida em por:

Então é um Reticulado. Ademais:

Por conseguinte o Reticulado coincide com o Reticulado .

Sejam e reticulados e uma aplicação. Esta designa-se de:

- **Homomorfismo** de em se **,** e ;

- **Isomorfismo** de em se é *bijetiva* e é um *homomorfismo*.

Caso exista um isomorfismo de reticulados de em , o reticulado diz-se isomorfo ao reticulado .

Sejam e reticulados e e as relações de ordem definidas, respectivamente, em e por: sse ,  **;**  sse ,  **.**

Então os reticulados e são isomorfos sse os c.p.o.s. e são isomorfos.

Um reticulado diz-se **Completo** se p/ qq subconjunto de *R* exista e/ou .

Todo o Reticulado Finito é Completo.

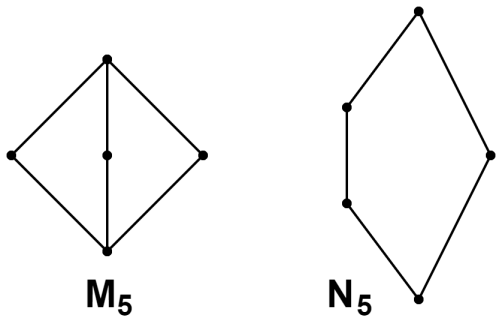
Um Subreticulado de diz-se um **Subreticulado Completo** se p/ qq subconjunto de, e , como definidos em , pertencem a.

Seja um Reticulado, um elemento diz-se **Compacto** se sempre que existe e p/ algum , então p/ algum conjunto finito .

Um Reticulado diz-se **Compactamente Gerado** se, p/ todo , p/ algum subconjunto de formado por elementos compactos de .

Um Reticulado diz-se **Reticulado Algébrico** se é um Reticulado Completo e Compactamente gerado.

**Todos elementos de um Reticulado Finito são compactos.**

****Um Reticulado diz-se **Distributivo** se satisfaz uma das seguintes condições:

Estas condições, designadas **leis distributivas**, são equivalentes.

Sendo um reticulado, satisfaz uma condição sse satisfizer a outra.

é Distributivo sse não tem qq Subreticulado isomorfo a ou a .

Um Reticulado diz-se **Modular** se p/ qq :

**OU**

A condição da definição anterior, designada **lei modular**, é equivalente a:

Todo o Reticulado Distributivo é um Reticulado Modular (contrário não se verifica).

é um Reticulado Modular sse não tem qq Subreticulado isomorfo a .

Dá-se a designação de **tipo algébrico**, a um par . Onde:  
- é um conjunto e é uma função de em ;

- cada elemento de é designado por **símbolo de operação** e diz-se a sua **aridade**;

- o conjunto de todos os símbolos de de aridade , , é representado por .

Chama-se **álgebra** a um par onde *A* é um conjunto não-vazio e *F* é uma família de operações finitárias em *A* indexada por um conjunto *O*.

Ao conjunto *A* dá-se a designação de **universo** ou **conjunto de suporte** , cada operação é designada por **operação fundamental de**  e ao conjunto *O* dá-se a designação de **conjunto de símbolos operacionais de** .

Uma álgebra diz-se uma **álgebra de tipo** se *O* é o conjunto de símbolos operacionais de e é a função de *O* em que a cada símbolo operacional associa a aridade da operação básica .

Uma álgebra diz-se **trivial** se e diz-se finita/infinita caso o seu universo seje finito/infinito.

Sejam e álgebras de tipos e , respectivamente. Diz-se que a álgebra é um **reduto** da álgebra se: e têm o mesmo universo, e, para todo , e .

Um **semigrupo** é um grupóide tq p/ qq .

Um **grupo** é uma álgebra tq p/ cada , existe que satisfaz:

Um **grupo abeliano** é um grupo tq p/ qq , .

Um **anel** é uma álgebra de (2,2,1,0) tq é um grupo abeliano, é um semigrupo e p/ qq , e .

Um **reticulado** é uma álgebra de tipo (2,2) tq p/ qq se verifiquem as Leis Comutativas, Associativas, Idempotência e Absorção.

Sejam uma álgebra. Um subconjunto de diz-se um **subuniverso** de se é fechado para toda a operação de . Representa-se por o conjunto de todos subuniversos de .

Sejam uma álgebra, e

Então é um subuniverso de e é o menor subuniverso de que contém .

Sejam uma álgebra, e um subuniverso de . Designa-se por **subuniverso de gerado por** , e representa-se por , o menor subuniverso de que contém , i.e., o conjunto:

Diz-se que é **finitamente gerado** se , para algum conjunto finito .

Sejam uma álgebra e . Para , define-se:

Então .

Sejam uma álgebra, e . Então , para algum subconjunto finito de .

Sejam uma álgebra e . Então:

Sejam uma álgebra e o conjunto de subuniversos de . O reticulado designa-se por **reticulado dos subuniveros de**  e representa-se por .

Sejam e álgebras do mesmo tipo .

Diz-se que é uma **subálgebra** de , e escreve-se , se:

1. é um subuniverso de
2. p/ todo símbolo de operação , , p/ qq .

Sejam uma álgebra e tq . Chama-se **subálgebra de gerada por**  e representa-se por a subálgebra de cujo universo é .

Sejam um conjunto e uma relação relação binária em , diz-se que é uma **Relação de Equivalência** em se são satisfeitas as seguintes condições:

1. **Simetria:** p/ qq ou
2. **Reflexividade:** p/ todo ou
3. **Transitividade:** p/ qq ou

Sejam uma álgebra de tipo e uma relação de equivalência em .

Diz-se que é uma **Congruência** em se satisfaz a **propriedade de substituição**:

e , .

Sejam álgebra, ao reticulado dá-se a designação de **reticulado das congruências de** .

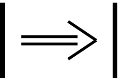
Uma **Congruência** numa álgebra é uma **Relação de Equivalência** que é compatível com as operações da álgebra.

Dado um elemento , chama-se **Classe de Equivalência de Módulo**  ao conjunto:

O conjunto de todas as relações de equivalência definidas em A representa-se por **Eq(A)**.

Para , é uma **congruência** em se satisfaz a propriedade de substituição, i.e.:

**ou**

**ou seja**

O conjunto de todas congruências da álgebra é denotado por .

E ao reticulado dá-se a designação de **reticulado de congruências de** .

Se é um reticulado, então é uma congruência em sse:

1. cada classe de é um subreticulado
2. cada classe de é um **subconjunto convexo** de R
3. as classes de equivalência de são fechadas p ara os quadriláteros

