Boletín 3 y 4: Máquinas de Registros y Complejidad computacional

Computabilidad y Complejidad (3CO21)
Mario Campos Mocholí - `macammoc@inf.upv.es`

1 Máquinas de Registros

1.1

Desarrolle un programa para la máquina contador que realice la computación $[i] \leftarrow [j]^{[k]}$ donde los registros involucrados no son necesariamente distintos.
Definimos la macrofunción como: $exp(j,\ k,\ i)$
Lógicamente la función realiza: $[i] \leftarrow [j]^{[k]}$
Los registros auxiliares utilizados son: R_p, R_q y R_r

$$
\begin{aligned}
& cop(j,p) \\
& cop(k,q) \\
& cer(r) \\
& ig(p,r,fin,sig) \\
sig: \quad & ig(q,r,uno,while) \\
while: \quad & suc(r) \\
& mult(r,p,r) \\
& ig(n,q,fin,while) \\
uno: \quad & suc(r) \\
fin: \quad & cop(r,i)
\end{aligned}
$$

1.2

Sea la función $f : N \longrightarrow N$ definida de modo que:

- $f(n) = 1$**, si n es par**
- n^n**, si n es impar**

Desarrolle un programa para la máquina contador que realice la computación $[i] \leftarrow f([j])$ donde los registros involucrados no son necesariamente distintos.
Para realizar dicho programa, se implementa antes el programa *resto*.
Definimos la macrofunción como: $resto(p,\ q,\ r)$

Lógicamente la función realiza: $[r] \leftarrow [p] \, \% \, [q]$
Los registros auxiliares utilizados son: R_a, R_b, R_z y R_m

$$
\begin{aligned}
& cer(m) \\
& cer(z) \\
& cop(p, a) \\
& cop(q, b) \\
n\colon \quad & pre(b, error) \\
n+1\colon \quad & suc(b) \\
n+2\colon \quad & pre(b, n+6) \\
n+3\colon \quad & pre(a, n+10) \\
n+4\colon \quad & suc(z) \\
n+5\colon \quad & goto(n+2) \\
n+6\colon \quad & suc(m) \\
n+7\colon \quad & pre(z, n+2) \\
n+8\colon \quad & suc(b) \\
n+9\colon \quad & goto(n+7) \\
n+10\colon \quad & cop(b, r)
\end{aligned}
$$

Para realizar el programa solicitado se hará uso del programa *exp* implementado en el apartado anterior y la función auxiliar *resto*.
Definimos la macrofunción como: $f(j,\ i)$
Lógicamente la función realiza: $[i] \leftarrow f([j])$
Los registros auxiliares utilizados son: R_q, R_r y R_a

$$
\begin{aligned}
& cop(j, q) \\
& cer(r) \\
& igual(q, r, par, sig) \\
sig\colon \quad & asi(2, a) \\
& resto(q, a, a) \\
& igual(a, r, par, impar) \\
impar\colon \quad & exp(q, q) \\
& goto(fin) \\
par\colon \quad & asi(1, r) \\
fin\colon \quad & cop(r, i)
\end{aligned}
$$

1.3

Sea la función $f : N \times N \rightarrow N$ **definida de modo que** $f(a, b) = g(h(a, b))$**, donde** $h(a, b) = a^b$ **y** $g(n) = 2^n/n$**.**

Desarrolle un programa para la máquina contador que realice la computación $[k] \leftarrow f([i],\ [j])$ **donde los registros involucrados no son necesariamente distintos.**

Para realizar el programa solicitado se hará uso del programa *exp* implementado en el primer anterior.
Definimos la macrofunción como: $f(i,\ j,\ k)$
Lógicamente la función realiza: $[k] \leftarrow f([i],\ [j])$
Los registros auxiliares utilizados son: R_q, R_p y R_r

$$
\begin{aligned}
&exp(i, j, p)\\
&asi(2, r)\\
&exp(r, p, q)\\
&div(q, p, q)\\
&cop(q, k)
\end{aligned}
$$

2 Complejidad Computacional

2.1

Sea L el lenguaje $L = \{z/\exists x \in \{a, b\}^* : z = xx\}$. **Calcule del modo más ajustado posible:**

- **Una función f(n) de modo que** $L \in DTIME(f(n))$
- **Una función g(n) de modo que** $L \in DSPACE(g(n))$

En la realización de este ejercicio se ha definido una función f(n) igual a g(n), por tanto, se ha definido una única función para resolver ambos apartados.

Cadena de entrada **n** de longitud **x** y dos cintas auxiliares **AUX** y **CONT**.

- **Paso 1:** Se copia la cinta la cinta de entrada en **AUX**. Si la cinta de entrada solo contiene símbolos **Blanco**, la máquina para aceptando el lenguaje, pues la concatenación de la cadena vacía resulta ella misma y pertenece al lenguaje.
- **Paso 1.2:** Paralelamente al **Paso 1** la cinta **CONT** actúa como sigue:
  - Un símbolo a si el símbolo leído es *Blanco*, quedándose el cabezal en la celda.
  - Un símbolo b si el símbolo leído es a, avanzando el cabezal a la derecha tras escribir.

  Si el último símbolo escrito en esta cinta es una **a**, la máquina para rechazando el lenguaje pues la cadena de entrada es impar.

- **Paso 2:** El cabezal de la cinta **AUX** se desplaza tantas posiciones a la izquierda como símbolos no **Blanco** hayan en la cinta **CONT**. Al acabar este proceso, el cabezal de la primera cinta estará en la mitad de la cadena.
- **Paso 2.1:** Paralelamente, se desplaza el cabezal de la cinta de entrada al principio de esta.
- **Paso 3:** Se leen simultáneamente la cinta **AUX** y la cinta de entrada actuando como sigue:
  - Si en ambas se lee el mismo símbolo, ambas avanzan una posición a la derecha. Si se lee un símbolo diferente, se para rechazando el lenguaje.
  - Si la cinta **AUX** lee un símbolo **Blanco**, la máquina para aceptando el lenguaje.

Para el calculo de los costes se ha asumido que colocar el cabezal al principio o al final de una cinta si que tiene un coste temporal.

El coste temporal de esta función es: DTIME(f(n)) = (copia en AUX + CONT) + (medio-recorrido de AUX + recorrido de entrada) + medio-recorrido = x + x + x/2 = 5x / 2 => O(f(n))

El coste espacial de esta función es: DSPACE(g(n)) = AUX + CONT = x + x/2 = 3x / 2 => O(g(n))

2.2

Sea L el lenguaje $L = \{x^{|x|}/x \in \{a, b\}*\}$. Calcule del modo razonablemente más ajustado posible una función T(n) de modo que L sea reconocido por una MT no determinista con complejidad temporal O(T(n)).

Se ha comprobado que para que una cadena de entrada pertenezca al lenguaje, su longitud ha de ser igual a la longitud de **x** por si misma (x * x).

Cadena de entrada **n** de longitud **x** y una cinta auxiliar **AUX**.

- **Paso 1:** La máquina, de forma indeterminada, copia en la cinta **AUX** un número aleatorio de símbolos de la cinta de entrada desde el principio de esta.
- **Paso 2:** Se coloca el cabezal de la cinta **AUX** al principio y se recorre la cinta de entrada desde la posición del cabezal donde se ha quedado en el paso anterior, comprobando que cada símbolo leído en ambas cintas es el mismo. Cuando se llega al final de la cinta **AUX**, se vuelve a colocar al principio. Si se lee un símbolo **Blanco** en ambas, se para aceptando la cadena de entrada.
- **Paso 2.1;** Si se lee un símbolo distinto, se vuelve al **Paso 1** hasta generar todas las posibles longitudes de la cadena de entrada. Una vez generadas, se para rechazando la cadena de entrada.

Para el calculo de los costes se ha asumido que colocar el cabezal al principio o al final de una cinta si que tiene un coste temporal.

El coste temporal de esta función en el mejor de los casos, que es cuando la cadena de entrada pertenece al lenguaje y número de símbolos del **Paso 1** es el correcto:

NDTIME(T(n)) = copia de x + recorrido $|x|$ veces + volver cabezal atrás $|x|$ veces = $|x|$ + $|x|$ * $|x|$ * 2 $\approx 3n/2 \rightarrow O(T(n))$

2.3

Sea S = a,b. Sea L el lenguaje $L = \{a^n b^m a^{n+m} b^m a^n / n, m \geq 1\}$**. Calcule, del modo razonablemente más ajustado posible, una función T(n) de modo que L sea reconocido por una MT determinista con complejidad temporal O(T(n)).**

Cadena de entrada **n** de longitud **x** y dos cintas auxiliares **AUX** y **CONT**.

- **Paso 1:** Se copia la cinta de entrada en **AUX**.
- **Paso 2:** Se coloca el cabezal de la cinta de entrada al principio.
- **Paso 3:** Se recorre la cinta de entrada hacia la derecha y la cinta **AUX** hacía la izquierda.
- **Paso 3.1:** Se escriben tantos símbolos **a** en la cinta **CONT** como símbolos **a** se hayan leído hasta leer un símbolo **b**. Si en este paso, se leen en ambas cintas un símbolo distinto o el primero leido es un símbolo **b**, la máquina para rechazando el lenguaje.
- **Paso 3.2:** Se escriben tantos símbolos **b** en la cinta **CONT** como símbolos **b** se hayan leído hasta leer un símbolo **a**. Si en este paso, se leen en ambas cintas un símbolo distinto, la máquina para rechazando el lenguaje.
- **Paso 4:** Se recorre la cinta **CONT** hacía la izquierda. Se debe leer en la cinta de entrada (o en la cinta **AUX**, siguiendo las direcciones del paso 3) tantos símbolos **a** como símbolos no **Blanco** hayan en la cinta **CONT**. En el momento que la cinta **CONT** lee un blanco y la cinta de entrada un símbolo **b**, la máquina para aceptando el lenguaje. Se rechaza en cualquier otro caso.

Para el calculo de los costes se ha asumido que colocar el cabezal al principio o al final de una cinta si que tiene un coste temporal.

El coste temporal de esta función es: T(n) = copia + colocar cabezal + recorrido = x + x + x = 3x => O(T(n))