Suponiendo que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemman en el punto z_0...

Se tiene que $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$. Como f se puede expresar en términos de u, v, se puede ver, que

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v$$

donde

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = u(x, y) - u(x_0, y_0)$$
$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = v(x, y) - v(x_0, y_0)$$

Por temas vistos en cálculo en varias variables, como las derivadas parciales de u y v existen en (x_0, y_0) y son continuas, se puede escribir tanto u como v en términos de su linealización de la siguiente manera:

$$u(x, y) = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + E_u + u(x_0, y_0)$$
$$v(x, y) = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + E_v + v(x_0, y_0)$$

Por lo mencionado anteriormente de las derivadas, existen $\varepsilon_{(u)1,2}, \varepsilon_{(v)1,2}$ los cuales tienden a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tienden a 0 y pueden expresar el error.

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \left\langle \varepsilon_{(u)1}, \varepsilon_{(u)2} \right\rangle \cdot \langle \Delta x, \Delta y \rangle$$
$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \left\langle \varepsilon_{(v)1}, \varepsilon_{(v)2} \right\rangle \cdot \langle \Delta x, \Delta y \rangle$$

$\equiv$ $\langle$ Tomando θ_u, θ_v los ángulos respectivos entre los vectores $\rangle$

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \left|\left\langle \varepsilon_{(u)1}, \varepsilon_{(u)2} \right\rangle\right| |\Delta z| \cos(\theta_u)$$
$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \left|\left\langle \varepsilon_{(v)1}, \varepsilon_{(v)2} \right\rangle\right| |\Delta z| \cos(\theta_v)$$

$\equiv$ $\left\langle \text{ Tomando } \varepsilon_1 = \left|\left\langle \varepsilon_{(u)1}, \varepsilon_{(u)2} \right\rangle\right| \cos(\theta_u) \text{ y } \varepsilon_2 = \left|\left\langle \varepsilon_{(v)1}, \varepsilon_{(v)2} \right\rangle\right| \cos(\theta_v) \right\rangle$

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 |\Delta z|$$
$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2 |\Delta z|$$

Nótese que, como todos los vectores de ε's tienden a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a $(0, 0)$, sus normas también tienden a 0. Luego, como

$$||\vec{a}| \cos(\alpha)| = |\vec{a}| |\cos(\alpha)| \leq |\vec{\alpha}|$$

Entonces, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Ahora, volviendo a Δf.

$\Delta u + i\Delta v$

$=$

$u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 |\Delta z| + i[v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2 |\Delta z|]$

$=$ $\langle$ Reemplazando las ecuaciones de Cauchy-Riemman $\rangle$

$u_x(x_0, y_0)\Delta x - v_x(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 |\Delta z| + i[v_x(x_0, y_0)\Delta x + u_x(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2 |\Delta z|]$

$=$

$u_x(x_0, y_0)(\Delta x + i\Delta y) + iv_x(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)|\Delta z|$

Por último,

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}$$

$$=$$

$$u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}$$

$$\to \quad \langle\ ||a|/a| = 1, \text{ haciendo } \Delta z \text{ tender a } 0\ \rangle$$

$$u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$