

Por el teorema 4.19, al ser $[a, b]$ un conjunto compacto y f continua en este, f es uniformemente continua en $[a, b]$.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que

$$\alpha(b) - \alpha(a) < \frac{\varepsilon}{\eta}$$

Para dicho η , existe $\delta > 0$ tal que

$$(\forall x, y \mid x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta)$$

Sea P una partición de $[a, b]$ con n elementos, tal que, para todo $1 \leq i \leq n$, $\Delta x_i < \delta$.

$$\begin{aligned} & U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \\ &= \\ & \sum_{i=1}^n (M_i^f - m_i^f) \Delta \alpha_i \\ &< \langle f \text{ es uniformemente continua, escogencia de } P \rangle \\ & \eta \sum_{i=0}^n \Delta \alpha_i \\ &< \\ & \varepsilon \end{aligned}$$