Sean $m = \text{ínf}\, f[[a,b]]$, $M = \sup f[[a,b]]$, $K = \sup(|\phi|)[[m,M]]$ y $h = \phi \circ f$.

Como $[m,M]$ es compacto, y ϕ es continua en este, entonces es uniformemente continua en $[m,M]$, por lo que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta \in (0,\varepsilon)$ tal que:

$$\left(\forall s,t \,\middle|\, s,t \in [m,M] \,:\, |s-t| < \delta \Rightarrow |\phi(s) - \phi(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Debido a que $f \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$ existe P, una partición de $[a,b]$ con n elementos tal que:

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \delta^2$$

Defínanse A y B de la siguiente manera:

$$A = \left\{i \in \mathbb{J} \wedge i \leq n \,\middle|\, M_i^f - m_i^f < \delta\right\}$$
$$B = \left\{i \in \mathbb{J} \wedge i \leq n \,\middle|\, M_i^f - m_i^f \geq \delta\right\}$$

Por la continuidad uniforme de ϕ y su acotamiento, se tiene que:

$$i \in A \Rightarrow M_i^h - m_i^f < \varepsilon$$
$$i \in B \Rightarrow M_i^h - m_i^f \leq 2K$$

Con esto, se puede separar la diferencia de las sumas obteniendo lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
& \delta^2 \\
> \\
& \sum_{i=1}^{n}(M_i^f - m_i^f)\,\Delta\alpha_i \\
\geq \\
& \sum_{i\in B}(M_i^f - m_i^f)\,\Delta\alpha_i \\
\geq \\
& \delta \sum_{i\in B}\Delta\alpha_i
\end{aligned}
$$

Con lo que

$$\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i < \delta$$

Y finalmente:

$$
\begin{aligned}
& U(P,h,\alpha) - L(P,h,\alpha) \\
= \\
& \sum_{i\in A}(M_i^h - m_i^h)\,\Delta\alpha_i + \sum_{i\in B}(M_i^h - m_i^h)\,\Delta\alpha_i \\
< \\
& \varepsilon \sum_{i\in A}\Delta\alpha_i + 2K \sum_{i\in B}\Delta\alpha_i \\
< \\
& \varepsilon \sum_{i=1}^{n}\Delta\alpha_i + 2K\,\delta \\
< & \quad \langle\, \delta < \varepsilon \,\rangle \\
& \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K]
\end{aligned}
$$