Defínanse M y E de la siguiente manera:

$$M = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$$

$$E = \{x \in [a,b] \mid f(x) \text{ no es continua}\}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como α es continua en E, se pueden tomar intervalos disjuntos que cubren a E de la siguiente forma:

Para cada $e_i \in E$, se toman u_i, v_i tales que $\alpha(v_i) - \alpha(u_i) < \varepsilon$.

Sea P una partición de $[a,b]$ tal que:

$$(\forall i \mid 1 \leq i \leq |E| \,:\, u_i, v_i \in P \wedge (\forall x \mid x \in (u_i, v_i) \,:\, x \notin P))$$

En $[a,b] - \bigcup_{i=1}^{|E|}(u_i, v_i)$, que es un conjunto compacto, f es continua y por ende, uniformemente continua, por lo que existe $\delta > 0$ tal que:

$$\left(\forall x, y \,\middle|\, x, y \in [a,b] - \bigcup_{i=1}^{|E|}(u_i, v_i) \,:\, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\right)$$

Sea V el conjunto de todos los v_i. Se condiciona la partición P para que también cumpla que:

$$(\forall i \mid 1 \leq i \leq n \,:\, x_i \notin V \Rightarrow \Delta x_i < \delta)$$

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)$$

$=$

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i^f - m_i^f)\,\Delta\alpha_i$$

$=$

$$\sum_{\substack{i=0\\ x_i\notin V}}^{n}(M_i^f - m_i^f)\,\Delta\alpha_i + \sum_{\substack{i\geq 1\\ x_i\in V}}(M_i^f - m_i^f)\,\Delta\alpha_i$$

$<\quad \langle\, f \leq 2M,\ f$ es uniformemente continua $\rangle$

$$[\alpha(b)-\alpha(a)]\varepsilon + 2|E|M\varepsilon$$