(a) **Sean $f_1, f_2, f \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces**

$$
\begin{aligned}
(f_1 + f_2) &\in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]} \\
c\,f &\in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\int_a^b (f_1 + f_2)\,\mathrm{d}\alpha &= \int_a^b f_1\,\mathrm{d}\alpha + \int_a^b f_2\,\mathrm{d}\alpha \\
\int_a^b (c\,f)\,\mathrm{d}\alpha &= c\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}
$$

(b) **Sean $f_1, f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$ tales que $(\forall x \mid x \in [a,b] \;:\; f_1(x) \leq f_2(x))$. Entonces**

$$
\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\alpha \leq \int_a^b f_2\,\mathrm{d}\alpha
$$

(c) **Sean $f \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$ y $c \in (a,b)$. Entonces**

$$
\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha = \int_a^c f\,\mathrm{d}\alpha + \int_c^b f\,\mathrm{d}\alpha
$$

(d) **Sean $f \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$ y $M = \sup(|f|)[[a,b]]$. Entonces**

$$
\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha\right| \leq M\,[\alpha(b) - \alpha(a)]
$$

(e) **Sean $f \in \mathscr{R}(\alpha_1)_{[a,b]} \wedge f \in \mathscr{R}(\alpha_2)_{[a,b]}$, $g \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$ y $c > 0$. Entonces**

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}(\alpha_1+\alpha_2) = \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha_1 + \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha_2$$
$$\int_a^b g\,\mathrm{d}(c\alpha) = c\int_a^b g\,\mathrm{d}\alpha$$

Demostración:

(a) **Dado $\varepsilon > 0$, como $f_1, f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$, existen P_1, P_2, particiones de $[a,b]$ tales que:**

$$U(P_1,f_1,\alpha) - L(P_1,f_1,\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad U(P_2,f_2,\alpha) - L(P_2,f_2,\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $P = P_1 \cup P_2$. Suponiendo $|P| = n$:

$$U(P, f_1+f_2, \alpha) - L(P, f_1+f_2, \alpha)$$
$$=$$
$$\sum_{i=1}^{n}(M_i^{f_1+f_2} - m_i^{f_1+f_2})\,\Delta\alpha_i$$
$$\leq \quad \langle \ (f_1+f_2)[[a,b]] \subseteq f_1[[a,b]] \cup f_2[[a,b]] \ \rangle$$
$$\sum_{i=1}^{n}(M_i^{f_1} + M_i^{f_1} - (m_i^{f_1} + m_i^{f_2}))\,\Delta\alpha_i$$
$$=$$
$$\sum_{i=1}^{n}(M_i^{f_1} - m_i^{f_1})\,\Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}(M_i^{f_2} - m_i^{f_2})\,\Delta\alpha_i$$
$$<$$

ε

Con esto, $(f_1 + f_2) \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$. Ahora, debido a que $(f_1 + f_2)[[a, b]] \subseteq f_1[[a, b]] \cup f_2[[a, b]]$, se puede ver que, para todo $x_i \in P$:

$$M_i^{f_1+f_2} \leq M_i^{f_1} + M_i^{f_2} \quad \wedge \quad m_i^{f_1+f_2} \geq m_i^{f_1} + m_i^{f_2}$$

con lo que:

$$\begin{bmatrix} U(P, f_1 + f_2, \alpha) & \leq & U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha) & & \\ L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) & \leq & L(P, f_1 + f_2, \alpha) & & \\ L(P, f_1 + f_2, \alpha) & \leq & \int_a^b (f_1 + f_2)\, \mathrm{d}\alpha & \leq & U(P, f_1 + f_2, \alpha) \\ L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) & \leq & \int_a^b f_1\, \mathrm{d}\alpha + \int_a^b f_2\, \mathrm{d}\alpha & \leq & U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) & \leq & \int_a^b (f_1 + f_2)\, \mathrm{d}\alpha & \leq & U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha) \\ L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) & \leq & \int_a^b f_1\, \mathrm{d}\alpha + \int_a^b f_2\, \mathrm{d}\alpha & \leq & U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{gathered} \left| \int_a^b f_1\, \mathrm{d}\alpha + \int_a^b f_2\, \mathrm{d}\alpha - \int_a^b (f_1 + f_2)\, \mathrm{d}\alpha \right| \\ < \\ (U(P, f_1, \alpha) - L(P, f_1, \alpha)) + (U(P, f_2, \alpha) - L(P, f_2, \alpha)) \end{gathered}$$

$\Rightarrow$

$$\left|\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\alpha + \int_a^b f_2\,\mathrm{d} - \int_a^b (f_1+f_2)\,\mathrm{d}\alpha\right| < \varepsilon$$

Para la segunda parte del teorema, la demostración es inmediata. Dado que $f \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$, existe P una partición de $[a,b]$ con n elementos tal que

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

Por un lado, suponemos $c \geq 0$

$$\begin{aligned} & c\,U(P,f,\alpha) - c\,L(P,f,\alpha) \\ = \quad & \langle\, c \geq 0 \,\rangle \\ & U(P,c\,f,\alpha) - L(P,c\,f,\alpha) \end{aligned}$$

Por la igualdad se tiene directamente que

$$U(P,c\,f,\alpha) - L(P,c\,f,\alpha) < \varepsilon$$

Con esto, se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} c\,L(P,f,\alpha) & \leq c\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha & \leq c\,U(P,f,\alpha) \\ L(P,c\,f,\alpha) & \leq \displaystyle\int_a^b c\,f\,\mathrm{d}\alpha & \leq U(P,f,\alpha) \end{bmatrix}$$

$\equiv$

$$\left[\begin{array}{lll} L(P,c\,f,\alpha) & \leq c\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha & \leq U(P,f,\alpha) \\ L(P,c\,f,\alpha) & \leq \displaystyle\int_a^b c\,f\,\mathrm{d}\alpha & \leq U(P,f,\alpha) \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$\left|\int_a^b c\,f\,\mathrm{d}\alpha - c\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha\right| < \varepsilon$$

Por otro lado, si $c < 0$:

$$c\,M_i^f = m_i^{c\,f} \wedge c\,m_i^f = M_i^{c\,f}$$

$$\Rightarrow$$

$$c\,U(P,f,\alpha) = L(P,c\,f,\alpha) \wedge c\,L(P,f,\alpha) = L(P,c\,f,\alpha)$$

De igual forma:

$$\begin{array}{ll} & c\,U(P,f,\alpha) - c\,L(P,f,\alpha) \\ = & \langle\, c < 0 \,\rangle \\ & L(P,c\,f,\alpha) - U(P,c\,f,\alpha) \end{array}$$

De esto, se tiene también que $c\,f \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$:

$$\begin{array}{ll} & U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \dfrac{\varepsilon}{|c|} \\ \equiv & \langle\, c < 0 \,\rangle \\ & c\,U(P,f,\alpha) - c\,L(P,f,\alpha) > -\varepsilon \\ \equiv & \\ & U(P,c\,f,\alpha) - L(P,c\,f,\alpha) < \varepsilon \end{array}$$

Nuevamente se tiene un sistema similar:

$$\begin{bmatrix} L(P,c\,f,\alpha) & \leq \int_a^b c\,f\,\mathrm{d}\alpha & \leq U(P,c\,f,\alpha) \\ c\,U(P,f,\alpha) & \leq c\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha & \leq c\,L(P,f,\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\equiv$$

$$\begin{bmatrix} L(P,c\,f,\alpha) & \leq \int_a^b c\,f\,\mathrm{d}\alpha & \leq U(P,c\,f,\alpha) \\ L(P,c\,f,\alpha) & \leq c\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha & \leq U(P,c\,f,\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left|\int_a^b c\,f\,\mathrm{d}\alpha - c\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha\right| < U(P,c\,f,\alpha) - L(P,c\,f,\alpha)$$

$$\Rightarrow$$

$$\left|\int_a^b c\,f\,\mathrm{d}\alpha - c\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha\right| < \varepsilon$$

(b) Por la condición dada para f_1, f_2, se tiene lo siguiente para cualquier partición P de $[a,b]$.

$$M_i^{f_1} \leq M_i^{f_2} \wedge m_i^{f_1} \leq m_i^{f_2}$$

$$\Rightarrow$$

$$U(P,f_1,\alpha) \leq U(P,f_2,\alpha) \wedge L(P,f_1,\alpha) \leq L(P,f_2,\alpha)$$

$$\Rightarrow$$

$$\overline{\int_a^b} f_1\,\mathrm{d}\alpha \leq \overline{\int_a^b} f_2\,\mathrm{d}\alpha \wedge \underline{\int_a^b} f_1\,\mathrm{d}\alpha \leq \underline{\int_a^b} f_2\,\mathrm{d}\alpha$$

$$\equiv \quad \left\langle\ f_1, f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}\ \right\rangle$$

$$\int_a^b f_1 \, \mathrm{d}\alpha \leq \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}\alpha$$

(c) Sea $\varepsilon > 0$, existe P, una partición de $[a, b]$ con n elementos tal que $c \in P$ y

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$$

Nótese que, P se puede dividir en P_1 y P_2 de la siguiente manera:

$$P_1 = \{x \in P \,|\, x \leq c\} \quad \wedge \quad P_2 = \{x \in P \,|\, x \geq c\}$$

Claramente, dando nuevos indices en cada una de las nuevas particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente. La razón por la que no afecta que c se repita en ambas particiones, es debido a que lo que se toma en cuenta para las sumas son los intervalos de elementos consecutivos. En este caso, está el intervalo con extremo superior c y el de extremo inferior c.

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i^f - m_i^f) \, \Delta\alpha_i$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{|P_1|} (M_i^f - m_i^f) \, \Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^{|P_2|} (M_i^f - m_i^f) \, \Delta\alpha_i$$

$$=$$

$$U(P_1, f, \alpha) - L(P_1, f, \alpha) + U(P_2, f, \alpha) - L(P_2, f, \alpha)$$

Con esto se tiene la siguiente derivación:

$$\begin{bmatrix} L(P_1, f, \alpha) & \leq \int_a^c f\, \mathrm{d}\alpha & \leq U(P_1, f, \alpha) \\ L(P_2, f, \alpha) & \leq \int_c^b f\, \mathrm{d}\alpha & \leq U(P_2, f, \alpha) \\ L(P, f, \alpha) & \leq \int_a^b f\, \mathrm{d}\alpha & \leq U(P, f, \alpha) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} L(P, f, \alpha) & \leq & \int_a^c f\, \mathrm{d}\alpha + \int_c^b f\, \mathrm{d}\alpha & \leq & U(P, f, \alpha) \\ L(P, f, \alpha) & \leq & \int_a^b f\, \mathrm{d}\alpha & \leq & U(P, f, \alpha) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left| \int_a^b f\, \mathrm{d}\alpha - \left(\int_a^c f\, \mathrm{d}\alpha + \int_c^b f\, \mathrm{d}\alpha \right) \right| < U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$$

$$\Rightarrow$$

$$\left| \int_a^b f\, \mathrm{d}\alpha - \left(\int_a^c f\, \mathrm{d}\alpha + \int_c^b f\, \mathrm{d}\alpha \right) \right| < \varepsilon$$

(d) Por las hipótesis del teorema:

$$(\forall x \mid x \in [a, b] : -M \leq f(x) \leq M)$$

Para poder usar la propiedad (b), hace falta demostrar que cualquier función constante es integrable y a qué es igual su integral. Sean $\varepsilon > 0$ y P una partición de $[a, b]$ con n elementos.

$$\begin{aligned} & U(P, M, \alpha) - L(P, M, \alpha) \\ = & \sum_{i=1}^{n} (M_i^M - m_i^M)\, \Delta\alpha_i \\ = & \sum_{i=1}^{n} (M - M)\, \Delta\alpha_i \\ = & \; 0 \\ < & \; \varepsilon \end{aligned}$$

Nótese que, para cualquier partición,

$$U(P, M, \alpha) = L(P, M, \alpha) = M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

Con lo que, aplicando las propiedades (a) y (b):

$$\begin{aligned} & -\int_a^b M \,\mathrm{d}\alpha \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\,\mathrm{d}\alpha \\ \equiv & \left| \int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha \right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)] \end{aligned}$$

(e) Dado $\varepsilon > 0$, como $f \in \mathscr{R}(\alpha_1)_{[a,b]} \cap \mathscr{R}(\alpha_2)_{[a,b]}$, existen P_1, P_2, particiones de $[a, b]$ tales que:

$$U(P_1, f, \alpha_1) - L(P_1, f, \alpha_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad U(P_2, f, \alpha_2) - L(P_2, f, \alpha_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $P = P_1 \cup P_2$. Suponiendo que $|P| = n$:

$$U(P, f, \alpha_1 + \alpha_2) - L(P, f, \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i^f - m_i^f)\, \Delta(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$= \quad \langle\, \Delta(\alpha_1 + \alpha_2) = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 \,\rangle$$

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i^f - m_i^f)\, \Delta\alpha_1 + \sum_{i=1}^{n} (M_i^f - m_i^f)\, \Delta\alpha_2$$

$$=$$

$$U(P, f, \alpha_1) - L(P, f, \alpha_1) + U(P, f, \alpha_2) - L(P, f, \alpha_2)$$

$$<$$

$$\varepsilon$$

Se puede ver que $U(P, f, \alpha_1 + \alpha_2) = U(P, f, \alpha_1) + U(P, f, \alpha_2)$ y $L(P, f, \alpha_1 + \alpha_2) = L(P, f, \alpha_1) + L(P, f, \alpha_2)$ de la misma forma. Con esto, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} L(P,f,\alpha_1+\alpha_2) & \leq & \displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}(\alpha_1+\alpha_2) & \leq & U(P,f,\alpha_1+\alpha_2) \\ L(P,f,\alpha_1+\alpha_2) & \leq & \displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha_1 + \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha_2 & \leq & U(P,f,\alpha_1+\alpha_2) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}(\alpha_1+\alpha_2) - \left(\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha_1 + \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha_2\right)\right| < U(P,f,\alpha_1+\alpha_2) - L(P,f,\alpha_1+\alpha_2)$$

$\Rightarrow$

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}(\alpha_1+\alpha_2) - \left(\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha_1 + \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha_2\right)\right| < \varepsilon$$

Para la segunda parte, es necesario que $c > 0$ pues la integral está definida con respecto a funciones crecientes. Luego, como $f \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P de $[a,b]$ tal que

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \frac{\varepsilon}{c}$$

El argumento es similar al caso $c > 0$ en la propiedad (a) segunda parte, lo único que hace falta ver, es que al expandir la suma superior e inferior, el producto por c se puede reducir a esta propiedad mencionada.