Debido a que  $\mathscr A$  separa puntos y no se anula en E, existen funciones  $g,h,k\in\mathscr A$  tales que:

$$g(x_1) \neq g(x_2) \quad \wedge \quad h(x_1) \neq 0 \quad \wedge \quad k(x_1) \neq 0$$

Se definen las funciones u, v de la siguiente manera:

$$u = g(x_1) k - g k$$

$$v = g(x_2) h - g h$$

Nótese que

$$u(x_2) \neq 0$$

$$v(x_1) \neq 0$$

$$u(x_1)=0$$

$$v(x_2) = 0$$

Por lo que, se define f como:

$$f = \frac{c_1 \, v}{v(x_1)} + \frac{c_2 \, u}{u(x_2)}$$