Para una partición P y un $\varepsilon > 0$, la hipótesis del teorema es la siguiente:

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$$

(a) Por el teorema 6.4, y la hipótesis del teorema, se tienen las siguientes desigualdades para todo refinamiento P^* de P:

$$\begin{bmatrix} U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon \\ U(P, f, \alpha) \geq U(P^*, f, \alpha) \\ L(P^*, f, \alpha) \geq L(P, f, \alpha) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon \\ U(P^*, f, \alpha) - L(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$U(P^*, f, \alpha) - L(P^*, f, \alpha) < \varepsilon$$

(b) Sean $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ en toda la partición P Se puede ver que, en todos los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$,

$$\begin{bmatrix} m_i^f \leq f(s_i) \leq M_i^f \\ m_i^f \leq f(t_i) \leq M_i^f \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$|f(s_i) - f(t_i)| \leq M_i^f - m_i^f$$

$\equiv$

$$|f(s_i) - f(t_i)| \, \Delta\alpha_i \leq (M_i^f - m_i^f) \, \Delta\alpha_i$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \, \Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i^f - m_i^f) \, \Delta\alpha_i$$

$\equiv$

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \, \Delta\alpha_i \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$$

$\Rightarrow \quad \langle$ hipótesis del teorema $\rangle$

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \, \Delta\alpha_i < \varepsilon$$

(c) Sean $f \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$ y $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ en todo P, entonces

$$\begin{bmatrix} L(P,f,\alpha) \leq \int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha \leq U(P,f,\alpha) \\ L(P,f,\alpha) \leq \sum_{i=0}^{n} f(t_i)\, \Delta\alpha_i \leq U(P,f,\alpha) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} f(t_i)\, \Delta\alpha_i - \int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha \right| \leq U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)$$

$\Rightarrow$ $\langle$ hipótesis del teorema $\rangle$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} f(t_i)\, \Delta\alpha_i - \int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha \right| < \varepsilon$$