$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\alpha \leq \overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\alpha$$

Demostración:

Sean $P_1$ y $P_2$ particiones de $[a,b]$ y $P^* = P_1 \cup P_2$. Se tienen entonces las siguientes desigualdades:

$$L(P_1, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha) \leq U(P^*, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha)$$

Tomando los dos extemos:

$$L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha)$$

$$\Rightarrow$$

$$\sup \{L(P_1, f, \alpha) \,|\, P_1 \text{ es partición}\} \leq \sup \{U(P_2, f, \alpha) \,|\, P_1 \text{ es partición}\}$$

$$\equiv$$

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\alpha \leq U(P_2, f, \alpha)$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{ínf} \left\{ \underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\alpha \,\middle|\, P_2 \text{ es partición} \right\} \leq \text{ínf} \{U(P_2, f, \alpha) \,|\, P_2 \text{ es partición}\}$$

$$\equiv$$

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\alpha \leq \overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\alpha$$