Defínase $\mathscr{A}_R \subseteq \mathscr{A}$ de la siguiente manera:

$$\mathscr{A}_R = \{f \in \mathscr{A} \,|\, \operatorname{ran} f \subseteq \mathbb{R}\}$$

Sea $f \in \mathscr{A}$, entonces f se puede escribir como $f = u_f + i\,v_f$, donde $u_f, v_f \in {}^K\mathbb{R}$. Debido a que $\mathscr{A}$ es auto-adjunta, $\overline{f} \in \mathscr{A}$, y al ser un álgebra:

$$\begin{aligned}
&\frac{f+\overline{f}}{2} \in \mathscr{A} \\
\equiv& \\
&u_f \in \mathscr{A} \land \operatorname{ran} u \subseteq \mathbb{R} \\
\equiv& \\
&u_f \in \mathscr{A}_R
\end{aligned}$$

De igual manera para v_f:

$$\begin{aligned}
&\frac{f-u_f}{i} \in \mathscr{A} \\
\equiv& \\
&v_f \in \mathscr{A} \land \operatorname{ran} v_f \subseteq \mathbb{R} \\
\equiv& \\
&v_f \in \mathscr{A}_R
\end{aligned}$$

Por el teorema 7.31, tomado dos puntos distintos $x_1, x_2 \in K$, existe una función $h \in \mathscr{A}$ tal que $h(x_1) = 0 \land h(x_2) = 1$. Debido a que h se puede escribir como $h = u_h + i\,v_h$, se tiene que $u_h(x_1) \neq u_h(x_2)$. Junto con el argumento anterior, $\mathscr{A}_R$ separa puntos en K.

Debido a que $\mathscr{A}$ no se anula en K, dado $x \in K$, existe una $g \in \mathscr{A}$ tal que:

$$\begin{aligned} & g(x) \neq 0 \\ \Rightarrow & \\ & u_g(x) \neq 0 \vee v_g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

Con esto, se demuestra que $\mathscr{A}_R$ no se anula en K. Al cumplir con la hipótesis del teorema 7.32, toda función continua real en K, está en la clausura uniforme de $\mathscr{A}_R$. Sea $f \in {}^K\mathbb{C}$ continua, entonces $u_f \in {}^K\mathbb{R}$ y $v_f \in {}^K\mathbb{R}$ son continuas y están en la clausura uniforme de $\mathscr{A}_R$ la cual es subconjunto de la clausura uniforme de $\mathscr{A}$ por lo que, también están en esta y por ser un álgebra, f está en la clausura uniforme de $\mathscr{A}$.