Sea $\mathscr{B}$ la clausura uniforme de $\mathscr{A}$.

Para entender la demostración, lo mejor es ver la idea de la última parte. Se quiere mostrar que dada una función real continua en K, existe una función $h \in \mathscr{B}$ tal que, para todo $\varepsilon > 0, x \in K$:

$$|f(x) - h(x)| < \varepsilon$$

Dicha función h se puede encontrar por la compacidad de K, y el hecho de que $\mathscr{A}$ cumple con la hipótesis del teorema 7.31. Con esto se pueden encontrar funciones que estén a una distancia ε de f en cada punto de K en subconjuntos abiertos de este, luego se puede extraer una subcubierta finita de dichos conjuntos abiertos y de ahí definir h. Pero todo esto requiere demostrar que ciertas composiciones son elementos de $\mathscr{B}$. Para lograr la distancia menor a ε en todo K, se buscaría el mínimo entre las funciones de cada subconjunto abierto. Pero el mínimo se define en términos de valor absoluto. Una vez aclarado esto, la demostración se divide en 4:

(i) Sea $f \in \mathscr{B}$, entonces $|f| \in \mathscr{B}$. Por el teorema de Stone-Weierstrass (7.26), considerando $a = \sup\{|f(x)| \mid x \in K\}$, existe una sucesión de polinomios $\langle P_n \rangle$ en $[-a, a]$ tal que $\langle P_n \rangle \xrightarrow[{[-a,a]}]{u} |x|$ Debido a que $f[K] \subseteq [-a, a]$ Se tiene lo siguiente:

$$(\forall n \mid n \in \mathbb{J} \,:\, (P_n \circ f)[K] \subseteq P_n[\,[-a, a]\,])$$

Por lo mencionado anteriormente, dado $\eta > 0$ existe $N \in \mathbb{J}$ tal que

$$(\forall n \mid n \in \mathbb{J}_N \,:\, \|P_n - |x|\| < \eta)$$

Así, para $n \geq N$:

$$\begin{aligned} & \|(P_n \circ f) - (|x| \circ f)\| \\ \leq \\ & \|P_n - |x|\| \\ < \\ & \eta \end{aligned}$$

con lo que $\langle P_n \circ f\rangle \xrightarrow[K]{u} |f|$

Como todos los elementos de la sucesión $\langle P_n\rangle$ son polinomios, estos se pueden escribir como sumas de la forma:

$$P_n = \sum_{k=0}^{m_n} a_{n,k}\, x^k$$

con lo que la composición con f, será un elemento de $\mathscr{A}$, por el hecho de que es un álgebra. Con esto se concluye que $|f| \in \mathscr{B}$.

(ii) Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathscr{B}$, entonces, $\text{máx}\{f_1, \ldots, f_n\} \in \mathscr{B}$.

Falta aclarar que el máximo en funciones no toma una sola, sino que cambia dependiendo del punto en el que se evalúa, es decir, a lo largo de todo el dominio, tomará el máximo valor entre las funciones consideradas evaluadas en cada punto.

La función máx se define recursivamente sobre el número de elementos del conjunto que esta toma. Sea A un conjunto de funciones con n elementos.

$$\begin{aligned}
\max\{f\} &= f \\
\max\{f,g\} &= \frac{f+g+|f-g|}{2} \\
\max(\{f\}\cup A) &= \frac{f+\max A+|f-\max A|}{2}
\end{aligned}$$

Esta definición es análoga a mín, con lo que, considerando lo demostrado anteriormente, se concluye que ambas funciones aplicadas a subconjuntos finitos de $\mathscr{B}$, son elementos de $\mathscr{B}$.

(iii) Sean $f \in {}^{K}\mathbb{R}$ continua, $x \in K$, $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $g_x \in \mathscr{B}$ tal que $g_x(x) = f(x)$ y para todo $t \in K$, $g_x(t) > f(t) - \varepsilon$. Por el teorema 7.31, para todo $y \in K$ existe $h_y \in \mathscr{B}$ tal que

$$h_y(x) = f(x) \quad \wedge \quad h_y(y) = f(y)$$

Debido a que todas las h_y son continuas en K, por definición, para el ε mencionado, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left(\forall t \middle| t \in K \;:\; d_K(x,t) < \delta \Rightarrow |f(x)-f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |h_y(x)-h_y(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Así, en un conjunto abierto $E_y \subseteq K$ donde $N_\delta\,(y) \subseteq E_y$:

$$|h_y(t) - f(t)|$$

$$= \quad \langle \;\; h_y(y) = f(y) \;\; \rangle$$

$$|h_y(t) - h_y(y) + f(y) - f(t)$$

$$\leq$$

$$|h_y(t) - h_y(y)| + |f(y) - f(t)|$$

$$<$$

$$\varepsilon$$

De esta desigualdad:

$$t \in N_\delta\,(y)$$

$$\Rightarrow$$

$$|h_y(t) - f(t)| < \varepsilon$$

$$\equiv$$

$$-\varepsilon < h_y(t) - f(t) < \varepsilon$$

$$\equiv$$

$$f(t) - \varepsilon < h_y(t) < \varepsilon + f(t)$$

$$\Rightarrow$$

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon$$

Debido a que la colección $\{E_y\}_{y\in K}$ cubre K, y K es compacto, se puede extraer una subcubierta finita. Es decir, hay una colección finita de puntos $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subseteq K$ tal que:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} E_{y_i}$$

Defínase:

$$g_x = \text{máx}\,\{h_{y_i} \,|\, i \in \mathbb{J} \wedge i \leq n\}$$

Por el paso anterior, $g_x \in \mathscr{B}$, y por su definición g_x cumple las propiedades deseadas.

(iv) Para este último paso, se va a realizar algo similar al anterior. Dada $f \in {}^{K}\mathbb{R}$ continua, y $\varepsilon > 0$, existe $h \in \mathscr{B}$ tal que

$$(\forall x \,|\, x \in K \,:\, |h(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Esto demostraría el teorema, pues $\mathscr{B}$ es uniformemente cerrado.

Para cada $x \in K$, se toma $g_x \in \mathscr{B}$ similar a como se construyó en el paso anterior. Así, existe un abierto $V_x \subseteq K$ tal que

$$(\forall t \,|\, t \in V_x \,:\, g_x(t) < f(t) + \varepsilon)$$

Como K es compacto y la colección $\{V_x\}_{x\in K}$ cubre K, se puede extraer una subcubierta que también lo cubra. Es decir, hay una colección finita de puntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ tal que:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$$

Defínase ahora $h = \text{mín}\{g_{x_i} i \in \mathbb{J} \wedge i \leq m\}$. Por el paso anterior, para todo $t \in K$,

$$\begin{bmatrix} h(t) < f(t) - \varepsilon \\ h(t) > f(t) + \varepsilon \end{bmatrix} \equiv$$

$$|h(t) - f(t)| \leq \varepsilon$$

Con esto queda demostrado el teorema.