

Por el teorema 4.23, al ser α continua, se puede tomar una partición P de $[a, b]$ con n elementos tal que:

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{J}$ tal que:

$$\left(\forall n \mid n \geq N : \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} < \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|} \right)$$

Sea $n \geq N$, se toma una partición P de $[a, b]$ con las características mencionadas al principio.

$$\begin{aligned} & U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \\ &= \\ & \sum_{i=1}^n (M_i^f - m_i^f) \Delta\alpha_i \\ &= \langle f \text{ es monótona} \rangle \\ & \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=0}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \langle f \text{ es monótona} \rangle \\ & \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} |f(b) - f(a)| \\ &< \\ & \varepsilon \end{aligned}$$