Tomando el siguiente sistema de ecuaciones y resolviendo para u_x, u_y:

$$\begin{bmatrix} u_r & = u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta) \\ u_\theta & = -u_x \, r \sin(\theta) + u_y \, r \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\equiv$$

$$\begin{bmatrix} u_x & = \dfrac{u_r \, r \cos(\theta) - u_\theta \sin(\theta)}{r} \\ u_y & = \dfrac{u_\theta \cos(\theta) + u_r \, r \sin(\theta)}{r} \end{bmatrix}$$

$$\equiv$$

$$\begin{bmatrix} u_x & = u_r \cos(\theta) - u_\theta \frac{\sin(\theta)}{r} \\ u_y & = u_\theta \frac{\cos(\theta)}{r} + u_r \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

De forma análoga para v:

$$v_x = v_r \cos(\theta) - v_\theta \frac{\sin(\theta)}{r}$$
$$v_y = v_\theta \frac{\cos(\theta)}{r} + v_r \sin(\theta)$$

Ahora, supóngase que se cumplen las ecuaciones

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$

$$-v_r = \frac{1}{r} u_\theta$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
u_x &= v_\theta \frac{\cos(\theta)}{r} + v_r \, \sin(\theta) = v_y \\
u_y &= -v_r \, \cos(\theta) + v_\theta \frac{\sin(\theta)}{r} = -v_x
\end{aligned}
$$

Con lo que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemman.