$f \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$

$\equiv$

$(\forall \varepsilon \mid \varepsilon > 0 \,:\, (\exists P \mid P \text{ partición de } [a,b] \,:\, U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon))$

Por el teorema 6.5, se tiene que:

$$\underline{\int} f \,\mathrm{d}\alpha \leq \overline{\int} f \,\mathrm{d}\alpha$$

Es evidente, por definición, que para cualquier par de particiones P y Q:

$$U(P,f,\alpha) \geq L(Q,f,\alpha)$$

Por definición, se tiene lo siguiente, para cualquier partición P:

$$\begin{bmatrix} \underline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha \leq \overline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha \\ \overline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha \leq U(P,f,\alpha) \\ L(P,f,\alpha) \leq \underline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha \end{bmatrix}$$

$\equiv$

$$\begin{bmatrix} \underline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha \leq \overline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha \\ \overline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha \leq U(P,f,\alpha) \\ -\underline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha \leq -L(P,f,\alpha) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \underline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha \leq \overline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha \\ \overline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha - \underline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha \leq U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \langle\ U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon\ \rangle$

$$\left| \overline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha - \underline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad \langle$ Se cumple para $\varepsilon > 0$ arbitrario $\rangle$

$$\underline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha = \overline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha$$

$\equiv$

$$f \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$$

Así, se tiene la primera implicación. Para la segunda, suponiendo que $f \in \mathscr{R}(\alpha)_{[a,b]}$:

Por definción, dado $\varepsilon > 0$, existen particiones P_1 y P_2 tales que:

$$\int f \,\mathrm{d}\alpha + \frac{\varepsilon}{2} > U(P_1, f, \alpha)$$
$$\int f \,\mathrm{d}\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2, f, \alpha)$$

Sea $P = P_1 \cup P_2$. Entonces, usando el teorema 6.4, se tienen las siguientes desigualdades:

$$U(P, f, \alpha) \leq U(P_1, f, \alpha)$$
$$U(P_1, f, \alpha) < \int f \,\mathrm{d}\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\int f \,\mathrm{d}\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2, f, \alpha) + \varepsilon$$
$$L(P_2, f, \alpha) + \varepsilon \leq L(P, f, \alpha) + \varepsilon$$

Con lo que, uniendo los extremos se obtiene la expresión deseada:

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$$