Cinemática Y Energía En Las Ondas Armónicas

David Gómez

Física de Calor y Ondas

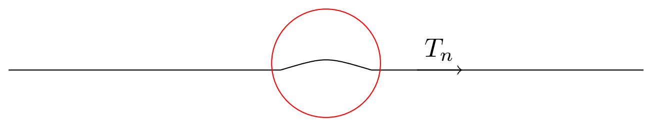
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

5 de noviembre de 2023

Índice

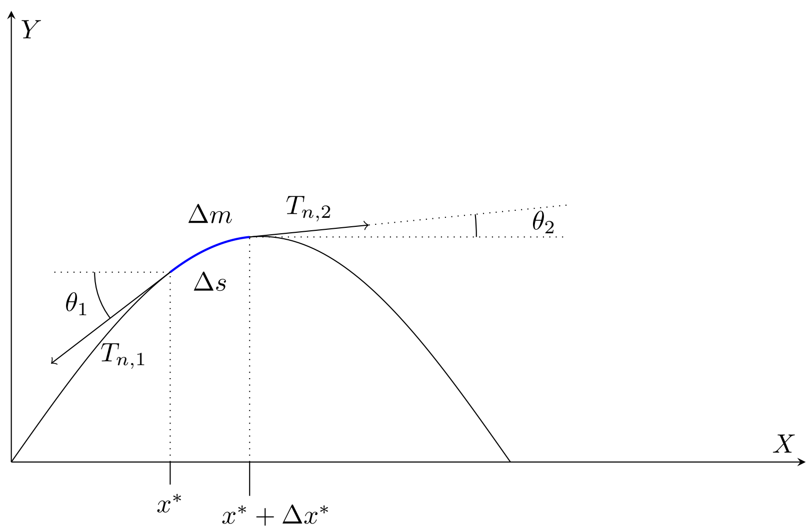
1. Una cuerda como ejemplo en una dimensión

μ : densidad lineal de masa



Considerando el pedazo de cuerda afectado por la deformación, la cual suponemos como pequeña. Consideramos como deformación pequeña aquella en la que, con el diagrama de abajo,

$\theta_{1,2} \approx 0 \wedge \sin(\theta_{1,2}) \approx \tan(\theta_{1,2})$



1.1. Análisis de fuerzas

Por segunda ley de Newton:

$$\sum T_{n,i} = \Delta m a$$

$\equiv$

$$T_{n,1} + T_{n,2} = \Delta m a$$

$\equiv$ $\langle$ Asumimos que la tensión es constante en toda la cuerda $\rangle$

$$T_n \cos(\theta_1)(-\hat{x}) + T_n \sin(\theta_1)(-\hat{y}) + T_n \cos(\theta_2)(\hat{x}) + T_n \sin(\theta_2)(\hat{y})$$

$\equiv$ $\langle$ Las partículas no tienen movimiento longitudinal $\rangle$

$$T_n \sin(\theta_1)(-\hat{y}) + T_n \sin(\theta_2)(\hat{y})$$

$\equiv$ $\langle$ Se asume que la deformación es pequeña $\rangle$

$$T_n \tan(\theta_1)(-\hat{y}) + T_n \tan(\theta_2)(\hat{y})$$

$\equiv$ $\langle$ la tangente es la pendiente de la recta tangente, $\Delta m = \mu \Delta x$ $\rangle$

$$T_n \left(\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x+\Delta x) - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)}{\Delta x} \right) = \mu a$$

$\Rightarrow$

$$T_n \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x+\Delta x) - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)}{\Delta x} \right) = \mu a$$

$\equiv$

$$T_n \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \mu a$$

$\equiv$

$$T_n \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \mu \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

$\equiv$ $\langle$ Notación $\rangle$

$$T_n \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$\equiv$

$$\frac{T_n}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\equiv$$

$$v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Primero hace falta comprobar que las unidades de la velocidad sean correctas:

$$\left[\frac{T_n}{\mu}\right]$$

$$=$$

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg/m}}$$

$$=$$

$$\frac{(\mathrm{kg})(\mathrm{m/s^2})}{\mathrm{kg/m}}$$

$$=$$

$$\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2$$

Una de las soluciones de la ecuación diferencial, es llamada "solución armónica", la cual resulta en una función que se puede expresar como función de una sola variable:

$$y(x,t) = y^*(x - vt) = A\sin(k(x - vt) + \phi)$$

La razón de esta expresión de una variable, viene del hecho de que la perturbación va a viajar a una velocidad v, y por ende, en tras un tiempo t, la función en XY se va a repetir.

1.2. Análisis de energía

Ya que la solución armónica produce comportamientos de este estilo, se hará el análisis en el intervalo para t correspondiente al periodo temporal T de la función para un x fijo. De igual forma, en el intervalo para x correspondiente al periodo espacial λ de la función para un t fijo.

Se puede ver que el comportamiento de la cuerda en un instante de tiempo es el mismo que tiene una partícula de la cuerda en un intervalo de tiempo. Sin embargo, la única relación certera que se tiene (numéricamente) entre ambas situaciones, son precisamente los intervalos mencionados anteriormente. Esto es, la energía a lo largo de un trozo de la cuerda de longitud λ es la misma que tiene una única partícula de la cuerda a lo largo de un tiempo T.

La energía mecánica a lo largo de un tramo de longitud λ es:

$$E_\lambda = E_{c,\lambda} + E_{p,\lambda}$$

La igualdad entre ambos casos, se puede ver, corresponde a:

$$E_{c,\lambda} = E_{c,T} \wedge E_{p,\lambda} = E_{p,T}$$

Ya que la energía mecánica se conserva, es fácil darse cuenta que la energía mecánica promedio es igual a la energía mecánica en cualquier tiempo:

$$\langle E_m \rangle_T = E_m(t)$$

De igual forma, la energía mecánica en un instante de tiempo, se define como la suma de la energía cinética y potencial en ese mismo instante, por lo que el promedio de la energía mecánica será la suma del promedio de la potencial y la cinética. El cálculo de todo esto resulta mucho más fácil una vez se muestra que la energía potencial promedio y la energía cinética promedio tienen el mismo valor en el periodo temporal T (Demostración). Debido a esta igualdad, se obtiene el siguiente resultado:

$$E_T = 2\left\langle E_c \right\rangle_T = 2\left\langle E_p \right\rangle_T$$

$$\Rightarrow$$

$$E_\lambda = 2\left\langle E_c \right\rangle_\lambda = 2\left\langle E_p \right\rangle_\lambda$$

De esta forma, si consideramos un tramo de longitud Δx de la cuerda, recordando que $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta x}$, se podría aproximar la energía cinética en este tramo tomando uno de los x en este:

$$\begin{aligned} & E_{c,\Delta x_k} \\ = \quad & \langle\ \gamma = \pi - kx_k^* - \phi\ \rangle \\ & \frac{1}{2}\mu\Delta x_k (Aw\cos(wt+\gamma))^2 \end{aligned}$$

Ahora, consideramos la suma de la energía de n tramos de cuerda entre $x = 0$ y $x = \lambda$:

$$\begin{aligned} & E_{c,\lambda} \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2}\mu(Aw\cos(wt+\gamma))^2\Delta x_i \\ \Rightarrow \quad & \langle \text{ al aumentar la cantidad de intervalos, disminuye } \Delta x \text{ y la suma coincide } \rangle \\ & E_{c\lambda} = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu(Aw\cos(wt+\gamma))^2 \mathrm{d}x \\ \equiv \quad & \\ & E_{c,\lambda} = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu(Aw\cos(wt+\pi-kx-\phi))^2 \mathrm{d}x \\ \equiv \quad & \langle\ \cos(\alpha+\pi-\beta) = \cos(\beta-\pi-\alpha)\ \rangle \\ & E_{c,\lambda} = \frac{\mu A^2 w^2}{2}\int_0^\lambda \cos(kx+(\phi-wt-\pi))^2 \mathrm{d}x \\ \equiv \quad & \\ & E_{c,\lambda} = \frac{\mu A^2 w^2}{4}\lambda \end{aligned}$$

Como $E_m = 2E_{c,\lambda} = 2E_{p,\lambda}$, entonces, $E_m = \dfrac{\mu A^2 w^2}{2}\lambda$

¿Por qué esta igualdad de energías?

1.3. Potencia

La potencia se define de la siguiente manera:

$$P = \frac{E_\lambda}{\Delta t}$$

donde Δt es el tiempo que tarda en llegar la energía a un punto cualquiera de la cuerda.

Como E_λ es la energía correspondiente a un tramo de cuerda, el tiempo Δt correspondiente será el tiempo que se demora esta energía en recorrer precisamente λ:

$$\begin{aligned}
& P = \frac{E_\lambda}{\Delta t} \\
\equiv \quad & \langle \text{ consideramos la velocidad de propagación: } v = \lambda/\Delta t \rangle \\
& P = \frac{\frac{\mu A^2 w^2}{2}\lambda}{\frac{\lambda}{v}} \\
\equiv \quad & \\
& P = \frac{1}{2}\mu A^2 w^2 v
\end{aligned}$$

1.4. Ejemplo Numérico

Una cuerda con densidad lineal de masa $\mu = 1\,\mathrm{g/m}$ y una tensión de magnitud $T_n = 19\,\mathrm{N}$ la cual tiene su cinemática descrita por $y(x,t) = (3\,\mathrm{cm})\sin\left(4x - 5t + \frac{\pi}{6}\right)$

Como la función en el caso general es

$$y(x,t) = A\sin(kx - kvt + \phi)$$

se pueden obtener inmediatamente algunas de las variables por simple comparación. Así,

A	$3\,\mathrm{cm}$
k	$4\,\mathrm{rad/m}$
w	$5\,\mathrm{rad/s}$
v	$5/k = 1.25\,\mathrm{m/s}$
ϕ	$\pi/6$

Para hallar la potencia, simplemente se reemplazan los datos en el resultado obtenido anteriormente:

$$P = \frac{1}{2}\mu A^2 w^2 v$$

$\equiv$ $\langle$ Para obtener Watts, primero se debe dejar todo en unidades básicas $\rangle$

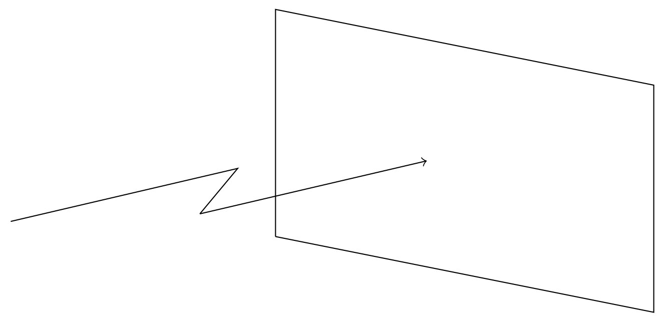
$$P = \frac{1}{2}(1\times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m})(3\times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2(5\,\mathrm{rad/s})^2(1.25\,\mathrm{m/s})$$

$\equiv$

$$P = 1.406\,25\times 10^{-5}\,\mathrm{W}$$

2. Potencia en Tres Dimensiones

Como en medios tridimensionales, no existe una dirección única, hace falta especificarla para la onda, lo cual implica también, especificar la energía que esta transporta en dicha dirección. En este caso, se habla de Intensidad, a diferencia de la Potencia. La intensidad se define como la razón entre energía y, unidad de área por unidad de tiempo.



$$I_n = \frac{P}{\text{Área}} = \frac{1}{2}\rho A^2 w^2 v$$

Donde ρ es la densidad volumétrica de masa del medio.

2.1. Emisores Isotrópicos

Un emisor isotrópico es aquel que, en cualquier dirección, emite la misma onda. Más específicamente, si se considera una esfera de radio x_0, la función de onda tiene el mismo valor en todos sus puntos

El frente de onda es la región del espacio en la que la función de onda de un emisor tiene el mismo valor. Para un emisor isotrópico, el frente de onda es esférico.

2.2. Ejemplo Numérico

Hallar la intensidad de una onda en cierta dirección, donde tiene las siguientes características: densidad $\rho = 0.9\,\mathrm{g/L}$, amplitud de $A = 10^{-3}\,\mathrm{m}$ y frecuencia $f = 2000\,\mathrm{Hz}$, viajando a través del aire.

Para resolver, simplemente se reemplazan los datos en la definición:

$$I_n = \frac{1}{2}\rho A^2 w^2 v = \frac{1}{2}(0.9 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/L})(10^{-3}\,\mathrm{m})^2(2000\,\mathrm{Hz})(340\,\mathrm{m/s}) = 3.06 \times 10^{-4}\,\mathrm{W/m^2}$$

Las magnitudes bajo estas unidades resultan ser normalmente muy bajas, por lo que se define la unidad del decibel (dB). La conversión a esta unidad requiere una intensidad de referencia, la cual se toma como el umbral inferior de sensibilidad auditiva del ser humano ($10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$), y el cálculo es

$$10 \log_{10}\left(\frac{I_n}{10^{-12}}\right)$$

En este caso, la intensidad hallada en decibeles es:

$$10 \log_{10}\left(\frac{3.06 \times 10^{-4}}{10^{-12}}\right) = 84.857\,\mathrm{dB}$$

3. Cálculos adicionales

$$\langle E_p \rangle_T = \langle E_c \rangle_T$$

$\equiv$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{k}{2}x^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{m}{2}v^2 \mathrm{d}t$$

$\equiv$

$$\frac{k}{2}\int_0^T (A\sin(wt+\phi))^2 \mathrm{d}t = \frac{m}{2}\int_0^T (Aw\cos(wt+\phi))^2 \mathrm{d}t$$

$\equiv$

$$\frac{kA^2}{2}\int_0^T \sin^2(wt+\phi)\mathrm{d}t = \frac{mA^2w^2}{2}\int_0^T \cos^2(wt+\phi)\mathrm{d}t$$

$\equiv$

$$\frac{k}{2}\int_0^T \frac{1-\cos(2(wt+\phi))}{2}\mathrm{d}t = \frac{mw^2}{2}\int_0^T \frac{1+\cos(2(wt+\phi))}{2}\mathrm{d}t$$

$\equiv$

$$\frac{k}{8w}\left[2(wt+\phi)+\sin(2(wt+\phi))\right]_{t=0}^{t=T} = \frac{mw}{8}\left[2(wt+\phi)-\sin(2(wt+\phi))\right]_{t=0}^{t=T}$$

$\equiv$ $\langle$ La integral a lo largo de T es cero para esta función sin $\rangle$

$$\frac{k}{m}\left(2(wT+\phi)-2\phi\right) = w^2(2(wT+\phi)-2\phi)$$

$\equiv$

true