Ondas Mecánicas
Condiciones Iniciales y de Frontera

David Gómez

Física de Calor y Ondas

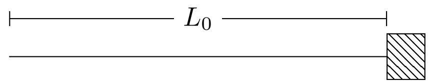
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

24 de octubre de 2023

Índice

1. Cuerda Con Extremo Fijo

Considerando ahora el caso de una cuerda, con densidad linearl de masa constante, tensión constante, y en la que uno de sus extremos es fijo, o está en una pared, como en este caso:



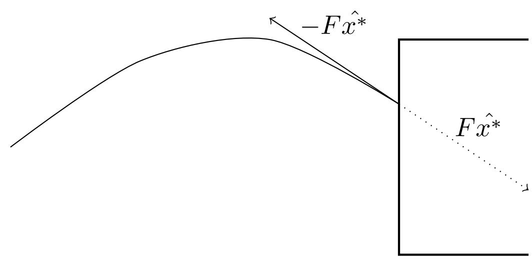
Debido a esto, hay condiciones de contorno y condiciones iniciales para la ecuación de onda, lo que resultará en otra solución específica.

$$y(0,0) = 0$$
$$y(L_0,t) = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial t}(0,0) = -A\,w$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}(L_0,0) = 0$$

Resulta que estas condiciones son válidas si la perturbación en la cuerda inicia justo en el instante $t = 0$. Además, si la perturbación llega al extremo de la pared en un tiempo $t = \dfrac{L_0}{v}$, se produce una cantidad entera de semi-longitudes de onda a lo largo de la cuerda.

1.1. Análisis de fuerzas

Por tercera ley de Newton, se tiene que, la pared, refleja la información de la perturbación que le llega del otro extremo de la cuerda. Esta reacción es, por definición, igual pero en sentido opuesto.



La onda incidente, por lo visto en la cinemática de Ondas Mecánicas, es de la forma

$$y = A\sin\left(kx - wt\right)$$

Por transformación de funciones, se puede ver que el efecto opuesto, tiene la forma

$$y = A\sin(kx + wt)$$

Esta última función tiene sentido una vez la perturbación haya vuelto al punto inicial. Esto es, cuando la perturbación haya recorrido $2L_0$. Esto, tomando en cuenta que la perturbación tiene una velocidad v, es lo mismo a que la función sea válida en $t = \dfrac{2L_0}{v}$. Si tomamos ahora un nuevo punto de referencia temporal, desde que la cuerda es afectada por la onda reflejada, $t' = \dfrac{2L_0}{v}$. Entonces, la cinemática en la cuerda estará dado por:

$$y(x,t') = A\sin(kx - wt') + A\sin(kx + wt')$$

$$\equiv$$

$$y(x,t') = 2A\sin(kx)\cos(wt')$$

De este resultado se puede observar que hay valores de t' y x para los que la función se iguala a 0 y estos no dependen del otro. Es decir, hay puntos de la cuerda que se mantendrán estáticos sin importar el valor de t', y hay momentos en los que todos los puntos de la cuerda pasan simultáneamente por $y = 0$.

Los valores de x mencionados anteriormente, son a su vez dependientes de un natural n, por lo que se llamarán x_n

$$y(x,t') = 0$$

$$\equiv$$

$$kx = n\pi \ ; \ n \in \mathbb{N}$$

$$\equiv$$

$$x_n = \frac{1}{k}n\pi \ ; \ n \in \mathbb{N}$$

$$\equiv \quad \langle \text{ Por definición de longitud de onda } \rangle$$

$$x_n = n\frac{\lambda}{2}$$

Por otra parte, una de las condiciones dadas era que, a lo largo de la cuerda, hubiera una cantidad entera de semi-longitudes de onda. Esto es, $L_0 = N\dfrac{\lambda}{2}$ para algún $N \in \mathbb{N}$. De esta igualdad, se puede expresar λ como dependiente de N:

$$\lambda_n = \frac{2L_0}{n}$$

Ahora, de la frecuencia f de esta onda, se tiene que $f\lambda = v$, por lo que la frecuencia también depende de un número natural:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n\,v}{2L_0}$$

De esto se concluye que esta cinemática solo se produce cuando con las frecuencias dadas por un natural n.

1.2. Ejemplo Numérico

Una cuerda con con un extremo fijo, de longitud $L_0 = 2\,\mathrm{m}$, peso total de $m = 0.07\,\mathrm{kg}$ y con una tensión constante $T_n = 0.5\,\mathrm{N}$. Hallar las frecuencias de resonancia como función de $\mathbb{N}$

Como la densidad de masa lineal es constante, lo es en especial para toda la longitud y la masa total: $\mu = \dfrac{m}{L_0} = 0.035\,\mathrm{kg/m}$

Así, la velocidad de propagación de la onda es: $v = \sqrt{\dfrac{T_n}{\mu}} = 3.7796\,\mathrm{m/s}$

Por último, se tiene que $f_n = \dfrac{n\,v}{2L_0}$. Reemplazando:

$$f_n = 9.4491\,n$$